

CHAPITRE I

LE COURANT ELECTRIQUE : LOI D'OHM

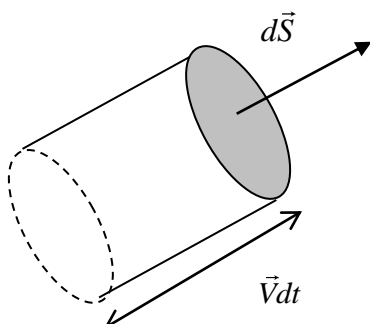
1-1 LE COURANT ELECTRIQUE

1-1-1) Vecteur densité de courant

Lorsqu'on établit une différence de potentiel entre deux points d'un conducteur, celui-ci n'est plus en équilibre électrostatique. Sous l'action du champ électrique créé par la d.d.p., il y a un déplacement de porteur de charges dans une direction privilégiée : dans le sens du champ électrique pour les porteurs de charges positives et dans le sens inverse pour les porteurs de charges négatives. Ce mouvement ordonné est appelé courant électrique.

Considérons un point P du conducteur. Soient ρ la densité volumique des porteurs de charges mobiles au voisinage de P et \vec{V} la vitesse moyenne de ces porteurs de charges. La quantité d'électricité qui traverse l'élément de vecteur surface $d\vec{S}$ centré en P entre les instants t et $t+dt$ est la charge contenue à l'instant t dans un cylindre oblique de génératrice $\vec{V}dt$ et de section $d\vec{S}$. On a $d^2q = \rho \vec{V}dt d\vec{S}$. $\frac{dq}{dt} = \rho \vec{V}d\vec{S}$ est donc le flux du vecteur

$$\vec{J} = \rho \cdot \vec{V} \quad (\text{A/m}^2)$$



appelé vecteur densité de courant. Si n est la concentration des porteurs de charges mobiles, ce vecteur devient $\vec{J} = nq\vec{V}$. L'intensité du courant traversant une surface S donnée, fermée ou non, est donc

$$I = \frac{dq}{dt} = \iint_S \vec{J} d\vec{S}$$

1-1-2 Différentes distributions de courant

- Densité volumique de courant

La densité de courant qui vient d'être introduite est une densité volumique de courant au même titre qu'a été introduite en électrostatique une densité volumique de charges. On rappelle que la densité volumique de courant s'écrit :

$$\vec{j} = \rho \vec{v}$$

où ρ est la densité volumique de charges mobiles et \vec{v} la vitesse moyenne de ces charges mobiles.

- *Densité surfacique de courant*

Dans certains cas, les courants sont confinés au voisinage d'une surface S d'épaisseur e faible devant les autres dimensions du problème. Il est alors souvent souhaitable de considérer une densité surfacique de courant telle que :

$$\vec{j}_s = \lim_{e \rightarrow 0} (\vec{j} \cdot e)$$

ou encore $\vec{j}_s = \int_0^e \vec{j} dl = \vec{j} \cdot e$ en intégrant sur l'épaisseur si on peut supposer que la densité de courant est constante sur l'épaisseur.

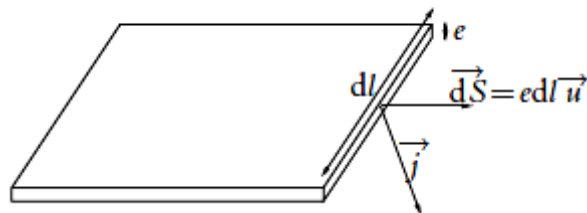
En effet, l'intensité du courant à travers la surface dS est :

$$dI = \vec{j} \cdot d\vec{S} = \vec{j} \cdot e dl \vec{u} = \vec{j}_s \cdot dl \vec{u}$$

On en déduit l'expression pour e faible

$$\vec{j}_s = \vec{j} \cdot e$$

qui est l'expression au premier ordre de la densité surfacique de courant définie plus haut par une limite quand e tend vers 0. On note que le vecteur unitaire \vec{u} est lié à la surface orientée et qu'il est donc perpendiculaire à dl . La densité surfacique de courant j_s s'exprime en $A \cdot m^{-1}$. Cette modélisation introduit des discontinuités qui peuvent être « résolues » en réintroduisant l'épaisseur de la surface comme cela a été vu en électrostatique à propos de la densité surfacique de charges.

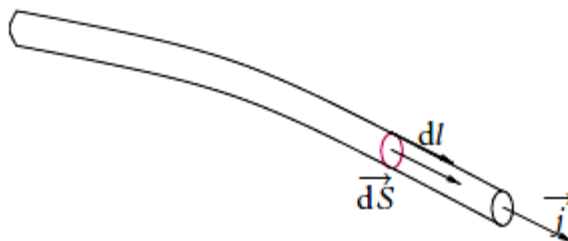


Densité surfacique de courant

- *Densité linéique de courant*

Il existe également des cas où les courants sont localisés le long d'un fil qui est alors un tube de courant de faible section. Le volume élémentaire peut s'exprimer par :

$$d\mathcal{V} = dl \cdot S$$



Densité linéique de courant

On en déduit l'expression du courant élémentaire :

$$\vec{j}d\mathcal{G} = \vec{j} \cdot (\vec{dl}d\vec{S})$$

Dans le cas d'un tube de courant, ces vecteurs \vec{j} , \vec{dl} et \vec{S} sont colinéaires donc on peut intervertir leurs positions relatives dans l'expression précédente :

$$\vec{j}d\mathcal{G} = (\vec{j} \cdot \vec{S}) \cdot \vec{dl} = I \vec{dl}$$

Soit

$$I = \vec{j} \cdot \vec{S}$$

Ceci correspond à une modélisation linéique qui sera très souvent utilisée. Ce sera la seule modélisation considérée dans la suite du cours de première année.

- *Cas d'une charge en mouvement*

Pour une particule de charge q en mouvement à la vitesse \vec{v} , la densité de courant s'obtient directement à partir de la recherche de la quantité de charges qui traversent la surface dS entre les instants t et $t + dt$.

La quantité $q\vec{v}$ remplace ici $I\vec{dl}$.

On utilisera notamment ce résultat pour exprimer le courant lié au mouvement d'un électron autour du noyau décrit dans le cadre d'un modèle classique (l'électron décrit une orbite circulaire).

Remarque : Dans les conducteurs métalliques $\rho < 0$. Le courant sera orienté dans le sens opposé au déplacement des électrons. Le sens du courant est donné par le vecteur \vec{J} orienté dans le sens des potentiels décroissants.

1-1-3) Cas du courant continu

En régime dit stationnaire (mais non statique), \vec{J} est défini en chaque point du conducteur et est indépendant du temps, le courant est dit continu. \vec{J} définit un champ de vecteurs auquel on associe des lignes et tubes de courant. Les lignes de courant sont les trajectoires des porteurs de charges et le tube de courant est formé par l'ensemble des lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé.

Soient \mathcal{G} le volume d'un conducteur limité par la surface fermée S , ρ la densité volumique des porteurs de charges mobiles de vitesse moyenne \vec{V} . La charge totale Q dans le volume s'écrit : $Q = \iiint_{(\mathcal{V})} \rho d\mathcal{V}$.

En raison du principe de conservation de charges on écrit que le taux de variation de charges dans \mathcal{G} , soit $\frac{dQ}{dt} = -\iiint_{(\mathcal{V})} \frac{d\rho}{dt} d\mathcal{V}$ (la charge contenue dans $d\mathcal{V}$ diminue), est égale au taux de variation des charges lié au phénomène de transport de charges par le courant d'intensité I , (il

s'agit de la charge qui sort de la surface S du conducteur) soit $\frac{dQ'}{dt} = I = \iint_S \vec{J} d\vec{S} = \iiint_{(V)} \text{div} \vec{J} dV$.

On en déduit que $\iiint_{(V)} \frac{d\rho}{dt} dV + \iiint_{(V)} \text{div} \vec{J} dV = \iiint_{(V)} (\text{div} \vec{J} + \frac{d\rho}{dt}) dV = 0$ soit :

$$\boxed{\text{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

Cette relation est la forme locale du principe de conservation des charges où ρ désigne la densité locale des charges mobiles. On utilise la dérivée de ρ car a priori ρ dépend du temps et des coordonnées du point considéré.

En régime permanent, \vec{J} , I et ρ sont indépendants du temps, l'équation de conservation de charges devient :

$$\boxed{\text{div} \vec{J} = 0}$$

ce qui veut dire que le flux du vecteur densité de courant est conservatif et donc il est le même à travers toutes sections d'un tube de courant.

1-2 LOI D'OHM EN REGIME PERMANENT

1-2-1) Loi d'Ohm locale

Dans un conducteur passif où circule un courant électrique (\vec{J} , I) chaque porteur de charge q est soumis à une force électrostatique $\vec{f}_s = q\vec{E}$ et une force \vec{f}_j qui ralentit le porteur. \vec{f}_j est due aux collisions du porteur avec les constituants du réseau cristallin. C'est une force analogue à une force de frottement fluide qui est exprimée par $\vec{f}_j = -k\vec{V}$ où \vec{V} est la vitesse du porteur et k le coefficient de frottement. Comme dans tous les phénomènes de frottement, le travail des forces \vec{f}_j se transforme en chaleur.

Pour un porteur, la relation fondamentale de la dynamique s'écrit: $\vec{f}_j + \vec{f}_s = m\vec{a}$ soit $q\vec{E} - k\vec{V} = m\frac{d\vec{V}}{dt}$. En régime stationnaire $\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{0}$. Le porteur atteint la vitesse limite

$\vec{V} = \frac{q}{k}\vec{E}$, que l'on peut mettre sous la forme $\vec{V} = \mu\vec{E}$, où $\mu = \frac{q}{k}$ (m^2/Vs) est appelée mobilité

du porteur. La vitesse limite est atteinte au bout d'un temps $\tau = m/k$, appelé temps de relaxation et elle est de l'ordre de quelques centièmes à quelques dixièmes de mm/s .

Considérons en régime permanent un paquet de porteurs de charges. La densité de courant $\vec{J} = \rho\vec{V} = nq\mu\vec{E} = \frac{nq^2}{k}\vec{E}$. On pose $\sigma = \frac{nq^2}{k}$ (S/m). σ est appelé conductivité du milieu. On définit également $\gamma = \frac{1}{\sigma}(\Omega m)$, la résistivité du milieu. Pour des températures pas trop élevées $\gamma = \gamma_0(1 + \alpha\theta)$ où θ est la température en degré Celsius. La conductivité est une grandeur locale positive. σ et μ sont caractéristiques du matériau conducteur et dépendent de la température. En résumé, lorsqu'un courant électrique est dû au déplacement de m espèces de porteurs de charges, la densité de courant s'écrit :

$$\vec{J} = \sum_{i=1}^n n_i q_i \vec{V}_i$$

où n_i , q_i et \vec{V}_i sont respectivement les concentration, la charge et la vitesse de l'espèce i de porteurs. Si μ_i désigne la mobilité du i -ième porteur, on a :

$$\vec{J} = \left(\sum_{i=1}^n n_i q_i \mu_i \right) \vec{E}$$

Qui peut se mettre sous la forme

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

En un point du conducteur on a cette relation exprime la loi d'Ohm locale ou loi d'Ohm microscopique. Dans un milieu homogène et pour des valeurs pas trop élevées du champ \vec{E} , σ (ou ρ) est constant : le conducteur est ohmique ou linéaire.

1-2-2) Résistance d'un conducteur

Soit un conducteur ohmique aux bornes duquel on applique une d.d.p. $V_1 - V_2$ donc un champ électrique et une densité de courant $\vec{J} = \sigma\vec{E}$. Pour un régime permanent donné le courant qui traverse le conducteur est donné, quelle que soit sa section (S) choisie, par :

$$I = \iint_S \vec{J} d\vec{S} = \iint_S \sigma \vec{E} d\vec{S}$$

Par ailleurs $V_1 - V_2 = \int_{A_2}^{A_1} \vec{E} d\vec{l}$. Si l'on multiplie \vec{E} par un scalaire λ quelconque la d.d.p.

$V_1 - V_2$ est multipliée par λ . Il en est de même du courant I . Donc la d.d.p. et le courant sont proportionnels. Il existe donc un scalaire R caractéristique du conducteur, tel que

$$V_1 - V_2 = RI$$

Cette relation exprime la loi d'Ohm macroscopique pour un conducteur passif et elle définit la résistance, notée R , de ce conducteur. R est fonction de la γ , de la température et de la forme

du conducteur ; elle s'exprime en Ohm (Ω). On peut également écrire que $R = \frac{\int_{A_2}^{A_1} \vec{E} d\vec{l}}{\iint_S \vec{j} d\vec{S}}$

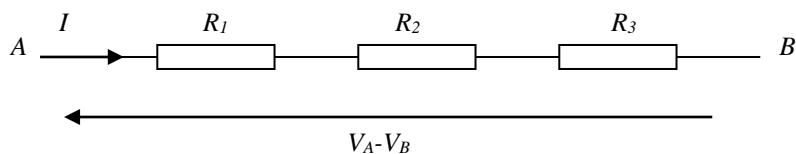
On définit également la conductance du conducteur par $G = \frac{I}{R}$ (S) qui s'exprime en siemens.

1-2-3) Etude d'une portion de circuit comprenant plusieurs conducteurs résistifs : résistance équivalente.

Pour appliquer la loi d'Ohm à une portion de circuit comprenant plusieurs conducteurs il faut pouvoir remplacer l'ensemble de ces conducteurs par la résistance qui leur est équivalente, c'est-à-dire la résistance qui, parcourue par le même courant que l'ensemble, produit la même d.d.p.

1-2-3-1) Montage série ; Pont Diviseur de Tension (PDT)

Soient trois résistances R_1 , R_2 et R_3 montées bout à bout dans un circuit sous une tension $V_A - V_B$ et parcourues par un courant I .



La tension aux bornes de l'ensemble est donnée par :

$$V_A - V_B = R_1 I + R_2 I + R_3 I = (R_1 + R_2 + R_3) I \text{ que l'on peut mettre sous la forme}$$

$$V_A - V_B = R_{\acute{e}q} I \text{ avec } R_{\acute{e}q} = R_1 + R_2 + R_3. \text{ De fa\c{c}on g\acute{e}n\acute{e}rale lorsque } n \text{ r\acute{e}sistances sont mont\acute{e}es}$$

en s\acute{e}rie, la r\acute{e}sistance \acute{e}quivalente :

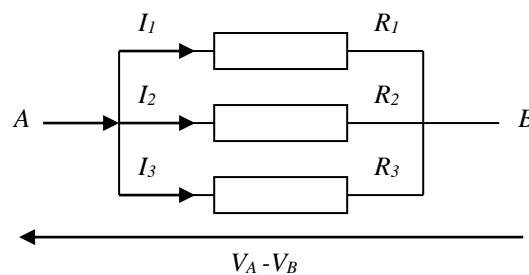
$$R_{\acute{e}q} = \sum_{i=1}^n R_i$$

La tension aux bornes de la i -ième résistance s'écrit $V_i = R_i I$. En exprimant le courant à partir de la tension aux bornes de l'ensemble, on obtient la relation, appelée formule du Pont Diviseur de Tension :

$$V_i = (V_A - V_B) \frac{R_i}{\sum_i^n R_i}$$

1-2-3-2) Montage parallèle : Pont Diviseur de Courant (PDC)

Soit trois conducteurs de résistances R_1 , R_2 et R_3 , montés en parallèle.



Il découle du caractère conservatif du courant que le courant principal I entrant au point A est égal à la somme des courants dérivés sortant du point A : $I = I_1 + I_2 + I_3$. La tension aux bornes de ensemble s'écrit $V_A - V_B = R_1 I_1 = R_2 I_2 = R_3 I_3 \Rightarrow I = (V_A - V_B) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = \frac{V_A - V_B}{R_{\text{éq}}}$ avec

$$\frac{I}{R_{\text{éq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \text{ ou } G_{\text{éq}} = \sum_{i=1}^3 G_i.$$

De façon générale lorsque n résistances sont montées en parallèle, la résistance équivalente $R_{\text{éq}}$ est telle que

$$\frac{I}{R_{\text{éq}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \text{ ou } G_{\text{éq}} = \sum_{i=1}^n G_i$$

Le courant qui circule dans la i -ième résistance est donné par la relation appelée formule du Pont Diviseur de Courant. :

$$I_i = \frac{R_{\text{éq}}}{R_i} I$$

ou

$$I_i = \frac{G_i}{G_{\text{éq}}} I$$

Remarques :

- **Notion de « masse »**

La « masse » dans un montage, est la borne dont le potentiel est pris comme potentiel de référence. Dès lors, le potentiel de chacune des autres bornes est un potentiel relatif qui exprime la d.d.p. entre la borne considérée et la borne de référence.

- **Notion de court-circuit (cc) et de circuit ouvert (co)**

- Un cc est réalisé entre deux bornes M et N d'un montage lorsque ces bornes sont reliées par un fil conducteur de résistance nulle ($R_{MN} = 0$) $\Rightarrow V_M - V_N = 0$.
- Un circuit ouvert est réalisé entre deux bornes M et N d'un montage lorsqu'il n'y a aucune liaison directe entre ces bornes, ce qui entraîne l'annulation du courant entre ces bornes $I_{MN} = 0$ ($R_{MN} = \infty$).

1-2-3-3) Relation entre capacité et résistance

Soit un condensateur de capacité C dont l'espace inter-armature est rempli d'un diélectrique de permittivité absolue ε et de conductivité σ . Soient Q la charge du condensateur, $V_1 - V_2$ la différence de potentiel entre ses armatures. D'après le théorème de Gauss si S est la surface fermée entourant l'armature interne on a :

$$\oiint_{(S)} \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} C (V_1 - V_2).$$

L'intensité du courant qui traverse S : $I = \oiint_{(S)} \vec{J} d\vec{S} = \oiint_{(S)} \sigma \vec{E} d\vec{S} = \frac{\sigma}{\varepsilon} C (V_1 - V_2)$. On en déduit

$$\frac{V_1 - V_2}{I} = R = \frac{\varepsilon}{\sigma C}. \text{ On a donc :}$$

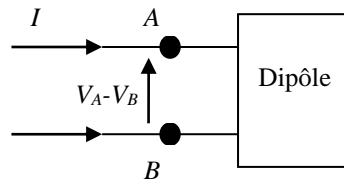
$$R = \frac{\varepsilon}{\sigma C} \Rightarrow RC = \frac{\varepsilon}{\sigma}$$

CHAPITRE II

ENERGIE ELECTROKINETIQUE : LOI D'OHM GENERALISEE

2-1 DEFINITIONS

Un dipôle électrocinétique est un ensemble de conducteurs ayant deux bornes A et B . Il peut être constitué d'un élément simple, par exemple une résistance, une bobine, un condensateur, ou d'un ensemble d'éléments simples ou encore de systèmes plus complexes tels que les moteur, dynamo, galvanomètre, haut-parleur.



C'est uniquement par ses bornes que se fait le couplage électrique. En fonctionnement le dipôle est caractérisé par deux grandeurs :

- L'intensité I du courant qui le traverse et qui, en régime permanent est le même à l'entrée A et à la sortie B .
- La tension $V_A - V_B$ entre ses bornes.

Le dipôle peut être passif ou actif.

2-1-2) Dipôles passifs

Les dipôles passifs transforment l'énergie électrique en énergie calorifique (les résistances mortes) ou l'emmagasinent, soit sous forme électromagnétique (les bobines), soit sous forme électrostatique (les condensateurs). Dans les cas du condensateur et de la bobine, l'énergie est emmagasinée avec des pertes sous forme de chaleur. Là également ces pertes sont modélisées par une résistance de perte. Dans le dipôle passif la seule énergie qui apparaît est de type calorifique. Dans tout ce qui suit les dipôles passifs auxquels nous nous intéresserons seront purement résistifs.

2-1-1) Dipôles actifs

Un dipôle actif peut en principe :

- transformer une énergie quelconque (chimique, mécanique, solaire, nucléaire,...) en énergie électrique susceptible d'être transmise aux circuits extérieurs d'utilisation. Cette transformation est accompagnée toujours de pertes d'énergie sous forme de chaleur à l'intérieur du dipôle.

- transformer l'énergie électrique en une autre énergie utilisable (chimique, mécanique, radiative,...). Là encore la transformation est accompagnée de pertes d'énergie sous forme de chaleur à l'intérieur du dipôle.

Dans les deux cas (dipôles actifs et dipôles passifs) les pertes d'énergie sont modélisées par une résistance de perte.

Dans le dipôle actif, l'énergie est transformée en deux autres énergies :

- une énergie calorifique W_F par effet joule.
- une énergie W' non calorifique.

L'énergie totale transformée s'écrit : $W_T = W_F + W'$

Cette relation montre que contrairement au dipôle passif, dans un dipôle actif il existe nécessairement une force \vec{F}_m opposée à \vec{F}_S et dont le travail est égal W' . Dans un tel dipôle on a en régime permanent : $\vec{F}_S + \vec{F}_m + \vec{F}_J = \vec{O}$

L'existence du champ de force \vec{F}_m dans un dipôle actif conduit à définir dans un tel élément, un nouveau champ électrique par la relation $\vec{F}_m = q\vec{E}_m$. \vec{E}_m est appelé **champ électromoteur**. Le champ électromoteur est une propriété caractéristique du dipôle actif. Il n'a pas une origine électrostatique et ne dérive pas d'un potentiel. Le champ électrique dans un conducteur actif s'écrit :

$$\vec{E} = \vec{E}_S + \vec{E}_m$$

c'est-à-dire la somme d'un champ électrostatique dû à des charges fixes et d'un champ électromoteur dû à des phénomènes propres au dipôle actif.

2-2 LOI DE JOULE

Au chapitre précédent on a montré que lorsqu'un conducteur est parcouru par un courant, chaque porteur de charge mobile est soumis à une force de frottement \vec{F}_J . Le passage du courant dans le conducteur est donc accompagné d'un dégagement de chaleur : c'est l'effet Joule et \vec{F}_J est appelée force de Joule. Soit dW_F l'énergie calorifique **produite** par le porteur dans son déplacement : $dW_F = -dW_J$. Si n désigne la densité des porteurs de charge, l'énergie produite par effet joule et par unité de volume $d\omega_F = nkV^2 dt$.

La puissance volumique dissipée $P = \frac{d\omega_F}{dt} = nkV^2$ or en régime permanent $\vec{V} = \frac{q}{k}\vec{E}$ et

$\sigma = \frac{nq^2}{k}$ donc $P = \frac{nq^2}{k}E^2 = \sigma E^2$ soit :

$$P = \sigma E^2 = \frac{J^2}{\sigma} = \gamma J^2 \text{ (W/m}^3 \text{)}$$

Ces relations expriment la forme locale de la loi de Joule. Dans le cas d'un conducteur passif en régime permanent $\vec{F}_S + \vec{F}_J = \vec{O}$. On a $dW_S + dW_F = 0$ d'où $dW_S = -dW_J = dW_F$. Donc l'énergie électrique reçue par le porteur de charge (dW_S) est intégralement perdue sous forme de chaleur (dW_F). Si R désigne la résistance du conducteur, I le courant qui le traverse et V la tension entre ses bornes, on a $V = RI$. Si t est la durée de passage du courant dans le conducteur, la quantité d'électricité qui subit la chute de tension V est $Q = It$. L'énergie dissipée correspondante $W_F = VQ$ soit donc :

$$W_F = RI^2t \text{ (J)}$$

Cette relation exprime la loi de Joule macroscopique. La puissance dissipée

$$P = RI^2 \text{ (W)}$$

2-3 ENERGIE ET PUISSANCE MISES EN JEU DANS UN ELEMENT DE CIRCUIT

Un circuit électrique est constitué d'un ensemble de dipôles formant un parcours fermé. Au passage du courant dans un dipôle de la borne A vers B (pris comme sens conventionnel du courant), l'énergie échangée par le dipôle pendant un temps dt avec les éléments extérieurs s'écrit :

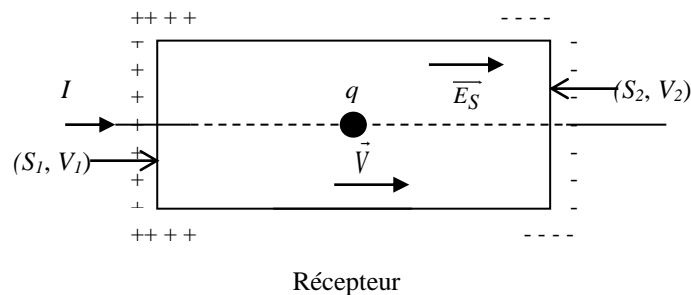
$$dW = (V_A - V_B) dQ$$

En régime permanent, l'intensité du courant I étant la même à l'entrée A et à la sortie B , le dipôle reçoit en A une charge dQ égale à celle qu'il perd en B : $dQ = Idt$. L'énergie échangée par le dipôle devient $dW = (V_A - V_B) I dt$ et la puissance correspondante $P = (V_A - V_B) I$ est appelée puissance électrocinétique. Cette puissance n'est que l'un des termes du bilan énergétique du dipôle. En régime permanent le dipôle ne peut pas accumuler d'énergie. Le bilan énergétique total doit être nul. Donc si $P > 0$ cette énergie doit se trouver sous d'autres formes. On dit que le dipôle est un récepteur. Le courant circule alors dans le sens des potentiels décroissant.

Inversement si $P < 0$ les porteurs de charges qui traversent le dipôle gagnent de l'énergie : le dipôle est dit générateur. Le courant circule alors dans le sens des potentiels croissant.

2-3-1) Energie reçu par dipôle "récepteur"

Soit un élément de circuit compris entre deux surfaces équipotentielles S_1 et S_2 , de potentiels respectifs V_1 et V_2 , parcouru par un courant I allant de S_1 vers S_2 dû à des porteurs de charge $q > 0$.



Dans ce conducteur règne un champ électrostatique \vec{E}_S dû aux charges fixes réparties sur les surfaces du conducteur. Sous l'action du champ de force électrostatique \vec{F}_S , les porteurs se déplacent dans le conducteur. Lorsqu'un porteur passe de S_1 à S_2 le travail de la force \vec{F}_S $w = q (V_1 - V_2)$ qui est transféré au conducteur. Au bout d'un temps t le conducteur est traversé par une quantité d'électricité $Q = It$. Il reçoit une énergie totale $W_T = Q (q (V_1 - V_2))$ égale à la somme des travaux des forces électrostatiques appliquées à tous les porteurs de charges qui l'ont traversé. W_T est l'énergie électrostatique perdue par les porteurs de charges mobiles en allant de S_1 à S_2 . Le conducteur étant un récepteur il reçoit par définition une énergie positive $W_T > 0 \Rightarrow V_1 > V_2$. Le champ électrostatique \vec{E}_S et donc la force \vec{F}_S sont dirigés de S_1 vers S_2 . En posant $V = V_1 - V_2$, l'énergie reçue s'écrit $W_T = VI t$. Dans le cas du récepteur actif cette énergie se transforme :

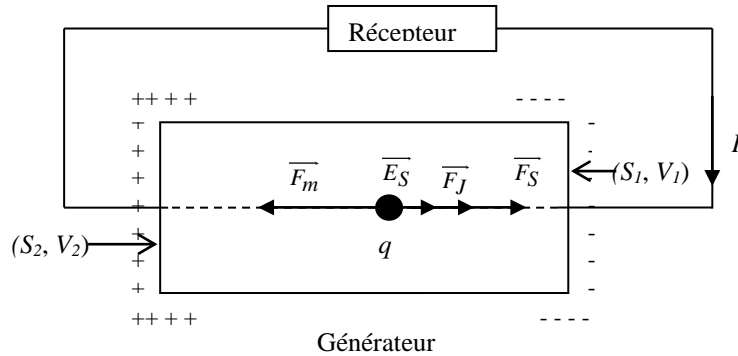
- en chaleur par effet Joule $W_F = RI^2 t$ (J) R étant la résistance du conducteur.
- en une autre forme d'énergie W' non calorifique. On a alors $W_T = W_F + W'$.

En régime stationnaire la puissance $P = \frac{W_T}{t} = VI$. Dans le récepteur actif :

- les forces \vec{F}_m et \vec{F}_J sont opposées au déplacement des porteurs de charge mobiles.
- c'est la force \vec{F}_S qui assure le déplacement des porteurs de charge mobiles de S_1 vers S_2 .

2-3-2) Energie fournie par un dipôle "générateur"

Considérons un élément de circuit compris entre deux surfaces équipotentielles S_1 et S_2 , portées respectivement au potentiels respectifs V_1 et V_2 , parcouru par un courant I allant de S_1 vers S_2 dû à des porteurs de charge $q > 0$ et fermons le circuit avec un récepteur.



Dans le récepteur le courant circule dans le sens des potentiels décroissant, donc $V_2 > V_1$ et donc à l'intérieur du générateur le courant circule dans le sens des potentiels croissant.

On déduit de ce qui précède :

- que les forces \vec{F}_S et \vec{F}_J sont opposées au déplacement des porteurs de charge mobiles.
- que c'est la force \vec{F}_m qui assure le déplacement des porteurs de charge mobiles de S_1 vers S_2 .

Par ailleurs l'énergie reçue par le récepteur $W_T = Q(V_2 - V_1)$ où Q est la quantité d'électricité qui l'a traversé au bout d'un temps t . W_T est l'opposée du travail des forces \vec{F}_S appliquées aux porteurs de charge qui ont traversé le générateur ; c'est l'énergie électrostatique reçue par ces porteurs dans le générateur, c'est-à-dire l'énergie qu'il a fallu dépenser pour les faire passer du potentiel V_1 de S_1 au potentiel V_2 de S_2 . Le générateur est donc un élévateur de potentiel, c'est une source d'énergie appelée **générateur de tension**.

Par définition W_T est l'énergie fournie par le générateur. Si on pose $V = V_2 - V_1$, on obtient :

$$W_T = Vit \text{ et } P = VI$$

2-4 CHAMP ELECTROMOTEUR ET F.E.M D'UN ELEMENT DE CIRCUIT ACTIF

Considérons un conducteur actif limité par deux surfaces équipotentielles S_1 et S_2 de potentiels respectifs V_1 et V_2 , de résistance R et parcouru par un courant I allant de S_1 vers S_2 dû à des porteurs mobiles de charge $q > 0$. Sous l'action des forces \vec{F}_S , \vec{F}_J et \vec{F}_m , ces porteurs se déplacent en régime permanent avec une vitesse \vec{V} telle que $\vec{F}_S + \vec{F}_m = -\vec{F}_J$.

Pour un porteur allant de S_1 à S_2 on a :

$$\int_{S_1}^{S_2} \vec{F}_S(M) d\vec{M} + \int_{S_1}^{S_2} \vec{F}_m(M) d\vec{M} + \int_{S_1}^{S_2} \vec{F}_J(M) d\vec{M} = 0$$

$$q \int_{S_1}^{S_2} \vec{E}_S(M) d\vec{M} + q \int_{S_1}^{S_2} \vec{E}_m(M) d\vec{M} + \int_{S_1}^{S_2} \vec{F}_J(M) d\vec{M} = 0$$

$$\int_{S_1}^{S_2} \vec{F}_J(M) d\vec{M} = \frac{W_J}{Q} \text{ où } W_J \text{ est la somme des travaux des forces de Joule}$$

pendant un temps t tel que $Q = It$. La circulation du champ électrostatique \vec{E}_S de S_1 à S_2

donne $V_1 - V_2 = \int_{S_1}^{S_2} \vec{E}_S(M) d\vec{M}$ et la somme des travaux des forces \vec{F}_S , \vec{F}_m et \vec{F}_J devient

: $q(V_1 - V_2) + q \int_{S_1}^{S_2} \vec{E}_S(M) d\vec{M} + \frac{qW_J}{Q} = 0$. Or $W_J = -RI^2t = -RIQ$. On obtient finalement :

$$V_1 - V_2 + \int_{S_1}^{S_2} \vec{E}_S(M) d\vec{M} - RI = 0.$$

On pose $E = \left| \int_{S_1}^{S_2} \vec{E}_m(M) d\vec{M} \right|$. E est une grandeur caractéristique du conducteur actif appelée

force électromotrice (f.é.m.). Elle s'exprime en volts. La définition de E permet d'écrire :

$$V_1 - V_2 + \varepsilon E - RI = 0.$$

où ε rend compte du signe de l'intégrale du champ électromoteur \vec{E}_m et donc de l'orientation de ce champ :

- $\varepsilon = +1$ si \vec{E}_m est dans le sens du courant.
- $\varepsilon = -1$ si \vec{E}_m est dans le sens contraire.

Après un temps t de circulation du courant, le bilan énergétique s'écrit :

$$(V_1 - V_2)It + \varepsilon EIt - RI^2t = 0$$

où :

- $(V_1 - V_2)It$ est la somme des travaux des forces \vec{F}_S . C'est l'énergie échangée entre l'élément de circuit et l'extérieur : si $V_1 > V_2$ l'élément de circuit entre S_1 et S_2 reçoit

de l'énergie et se comporte comme un récepteur ; si $V_1 < V_2$ l'élément fournit de l'énergie à l'extérieur et donc se comporte comme un générateur.

- εEIt est la somme des travaux des forces $\overrightarrow{F_m}$. C'est l'énergie des porteurs de charges. Cette énergie est produite ou consommée par l'élément de circuit.
- $-RI^2t$ est la somme des travaux des forces $\overrightarrow{F_J}$. C'est l'énergie perdue par les porteurs par effet joule dans l'élément de circuit.

2-5 GENERATEURS ET RECEPTEURS

2-5-1) Les générateurs : bilan énergétique et loi d'Ohm

Dans un élément dit générateur c'est la force $\overrightarrow{F_m} = -\overrightarrow{F_S} - \overrightarrow{F_J}$ qui est motrice. Le champ électromoteur dans ce cas est orienté dans le sens du courant ($\varepsilon = +I$).

Posons $V = V_2 - V_1$; le bilan énergétique devient : $-VIt + EIt - RI^2t = 0$ on en déduit :

$$V = E - RI$$

Cette relation exprime la loi d'Ohm relative à un générateur de tension.

Dans l'équation bilan énergétique VIt est l'énergie fournie par le générateur à l'élément récepteur monté entre ses bornes. EIt est l'énergie reçue par les porteurs de charges à la traversée du générateur. $EIt = VIt + RI^2t$, ce qui veut dire que l'énergie reçue par les porteurs mobiles qui traversent le générateur est égale à la somme de l'énergie fournie au récepteur par le générateur et de l'énergie perdue par effet joule par ces porteurs à l'intérieur du générateur. La puissance transformée par le générateur en puissance électrique $P = EI$.

Le bilan énergétique permet de définir le rendement électrique du générateur :

$$\eta = \frac{\text{énergie fournie par le générateur au circuit extérieur}}{\text{énergie fournie aux porteurs de charge mobiles}} = \frac{VIt}{EIt} \text{ soit donc :}$$

$$\eta = 1 - \frac{RI}{E}$$

2-5-2) Les récepteurs : bilan énergétique et loi d'Ohm

Dans les éléments dits récepteurs c'est la force $\overrightarrow{F_S} = -\overrightarrow{F_m} - \overrightarrow{F_J}$ qui est motrice. Le champ électromoteur $\overrightarrow{E_m}$ dans ce cas est orienté dans le sens contraire du courant ($\varepsilon = -I$).

Posons $V = V_1 - V_2$; le bilan énergétique devient : $VIt - EIt - RI^2t = 0$. On en déduit

$$V = E + RI$$

Cette relation exprime la loi d'Ohm relative à un récepteur. E est souvent appelé *force contre électromotrice (f.c.é.m.)*.

Dans l'équation bilan énergétique VIt est l'énergie électrique reçue par le récepteur.

$VIt = EIt + RI^2t$ ce qui veut dire que l'énergie reçue par le récepteur est égale à la somme de l'énergie (EIt) perdue dans le récepteur par les porteurs mobiles sous l'action des forces \vec{F}_m et de l'énergie (RI^2t) perdue par les porteurs par effet joule à l'intérieur du récepteur.

C'est l'énergie EIt qui est transformée en une énergie non calorifique. La puissance électrique transformée en une puissance autre que calorifique $P = EI$.

Là également le bilan énergétique permet de définir le rendement électrique du récepteur :

$$\eta = \frac{\text{énergie fournie aux porteurs de charges mobiles}}{\text{énergie fournie au récepteur}} = \frac{EIt}{VIt} \text{ soit donc}$$

$$\eta = 1 - \frac{RI}{V}$$

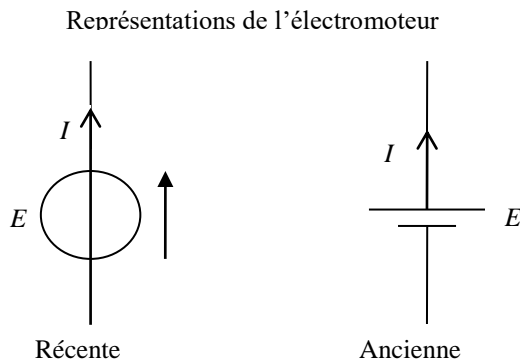
Remarque :

- i) Un appareil polarisé possède par construction des bornes fixes : par convention le potentiel le plus élevé est noté (+) et le potentiel le plus bas est noté (-). Il peut fonctionner :
 - en générateur si le courant le traverse dans le sens des potentiels croissant et dans ce cas il fournit de l'énergie au circuit extérieur.
 - en récepteur si le courant le traverse dans le sens des potentiels décroissant et dans ce cas il absorbe de l'énergie (batterie en charge).
- ii) Un appareil non polarisé ne possède pas de bornes fixes. Il fonctionne en récepteur quel que soit le sens du courant qui le traverse. Le récepteur, polarisé ou non, absorbe de l'énergie car sa f.c.é.m. s'oppose au passage du courant qui se fait toujours dans le sens des potentiels décroissant.

2-5-3) *Electromoteur*

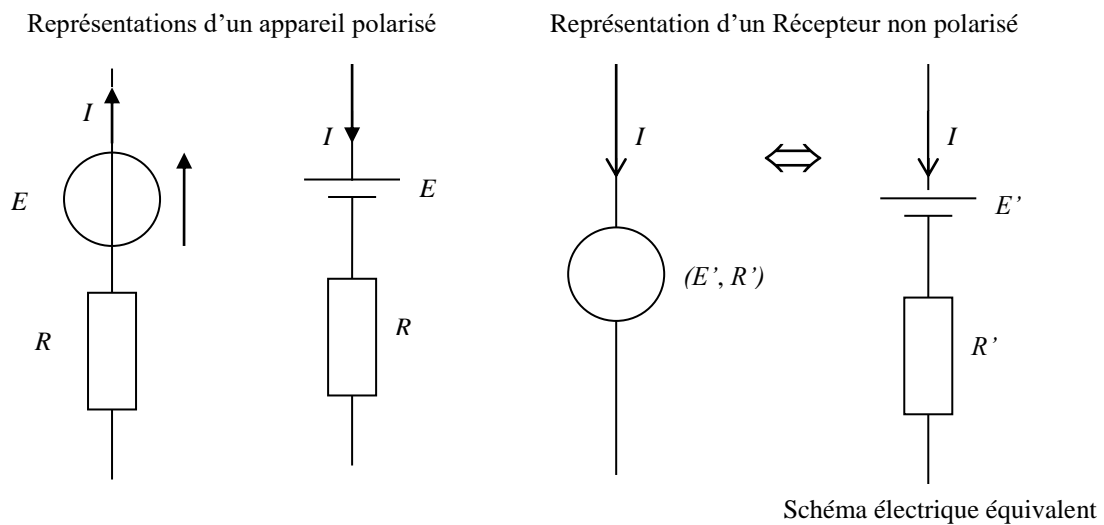
On appelle électromoteur un élément de circuit parfait. Il possède une f.é.m. E et une résistance interne nulle. La d.d.p. entre ses bornes vaut $\pm E$. On le représente par un cercle traversé suivant son diamètre par un segment de droite dont les extrémités sont ses bornes.

Une flèche, dessinée parallèlement au segment de droite au voisinage du cercle, indique le potentiel le plus élevé et donc l'ordre des bornes pour obtenir une d.d.p. positive (+ E). La lettre E au voisinage du cercle indique la f.é.m.



La d.d.p. aux bornes d'un électromoteur est indépendante du courant qui le traverse.

Un élément de circuit actif réel, générateur ou récepteur, est caractérisé par sa f. é.m. E (ou f.c. é.m.) et sa résistance interne R . La loi d'Ohm relative à cet élément a montré qu'il est équivalent à l'ensemble d'un électromoteur E en série avec une résistance R . On a donc les représentations suivantes :



Un récepteur non polarisé se comporte donc comme un générateur « fictif » opposé au courant qui le traverse.

Il existe des sources d'énergie électrique qui débitent dans le circuit extérieur un courant constant de court-circuit I_N . On les appelle **générateurs de courant**. I_N est également appelé **courant électromoteur (c.é.m.)**. Le courant débité par un générateur de courant parfait est indépendant de la tension entre ses bornes, ce qui n'est pas le cas du générateur de courant réel où il apparaît des pertes par effet joule qui sont modélisées par une conductance interne G_N . Ces générateurs sont schématiquement représentés par :

Schéma d'un générateur de courant idéal

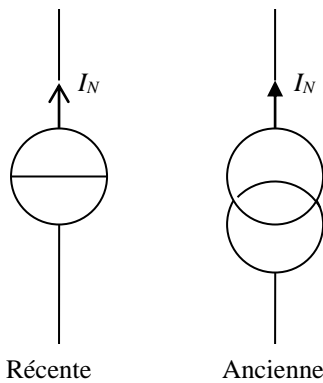
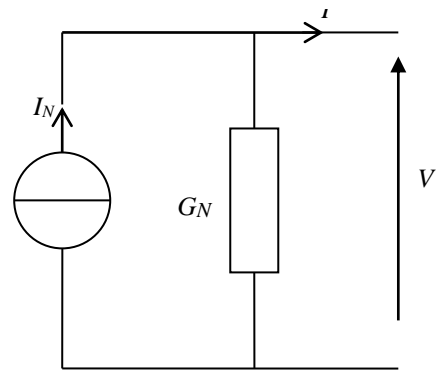


Schéma d'un générateur de courant réel



Une source réelle d'énergie peut donc être représentée de deux façons différentes. Suivant la façon dont il fournit l'énergie au circuit extérieur elle sera représentée :

- soit sous la forme d'un générateur de tension (représentation de Thévenin).
- soit sous la forme d'un générateur de courant (représentation de Norton).

Les deux représentations étant équivalentes pour une même source d'énergie, on établit des relations de passage d'une représentation à l'autre : on écrit que le courant et la tension dans une même charge d'utilisation doivent être les mêmes dans les deux représentations :

- pour le générateur de tension on a : $V = E_{TH} - R_{TH}I \Rightarrow I = \frac{E_{TH}}{R_{TH}} - \frac{I}{R_{TH}}V$
- pour le générateur de courant on a : $I = I_N - G_N V$

Le courant qui traverse la charge étant le même on obtient par identification les relations de passage :

$$I_N = \frac{E_{TH}}{R_{TH}} \text{ et } G_N = \frac{1}{R_{TH}}$$

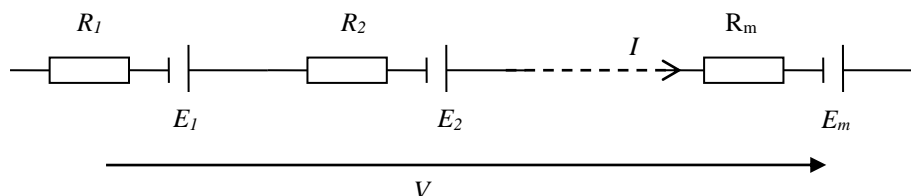
2-6 LOI D'OHM GENERALISEE

2-6-1) Associations des générateurs

2-6-1-1) Association en série

Soient m générateurs connectés en série, dans le même sens, et ayant respectivement pour

- f. é.m. $E_1, E_2, E_3, \dots, E_i, \dots, E_m$
- résistances $R_1, R_2, R_3, \dots, R_i, \dots, R_m$.



Si I est le courant débité, la tension aux bornes de l'ensemble s'écrit :

$V = (E_1 - R_1 I) + (E_2 - R_2 I) + (E_3 - R_3 I) + \dots + (E_i - R_i I) + \dots + (E_m - R_m I)$ que l'on peut mettre sous la forme $V = (E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_i + \dots + E_m) - (R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_i + \dots + R_m) I$.

Cette expression montre que l'ensemble se comporte comme un seul générateur, appelé **générateur équivalent** :

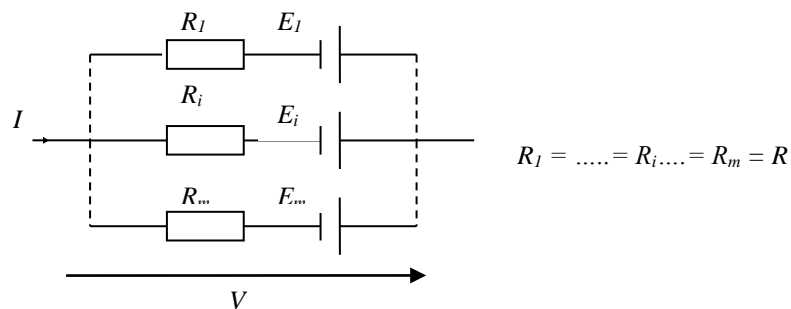
- de f.é.m. $E = \sum_{i=1}^m E_i$
- résistance interne $R = \sum_{i=1}^m R_i$

Lorsqu'on monte en série des générateurs différents, c'est le moins performant qui impose le courant de l'ensemble. Dans la pratique on ne monte en série que des générateurs identiques. Si E est leur f.é.m. et R leur résistance, le générateur équivalent a pour

- f.é.m. $E_T = mE$
- résistance interne $R_T = mR$

2-6-1-2) Association en parallèle

Soient m générateurs identiques de f.é.m. E et de résistance R montés parallèle, c'est-à-dire que leurs bornes de même signe sont reliées entre elles.



Le courant principal I se partage en m courants dérivés de même intensité $I' = \frac{I}{m}$. La d.d.p.

aux bornes de l'ensemble $V = E - RI' = E - R \frac{I}{m}$ qui peut se mettre sous la forme $V = E - \frac{R}{m} I$.

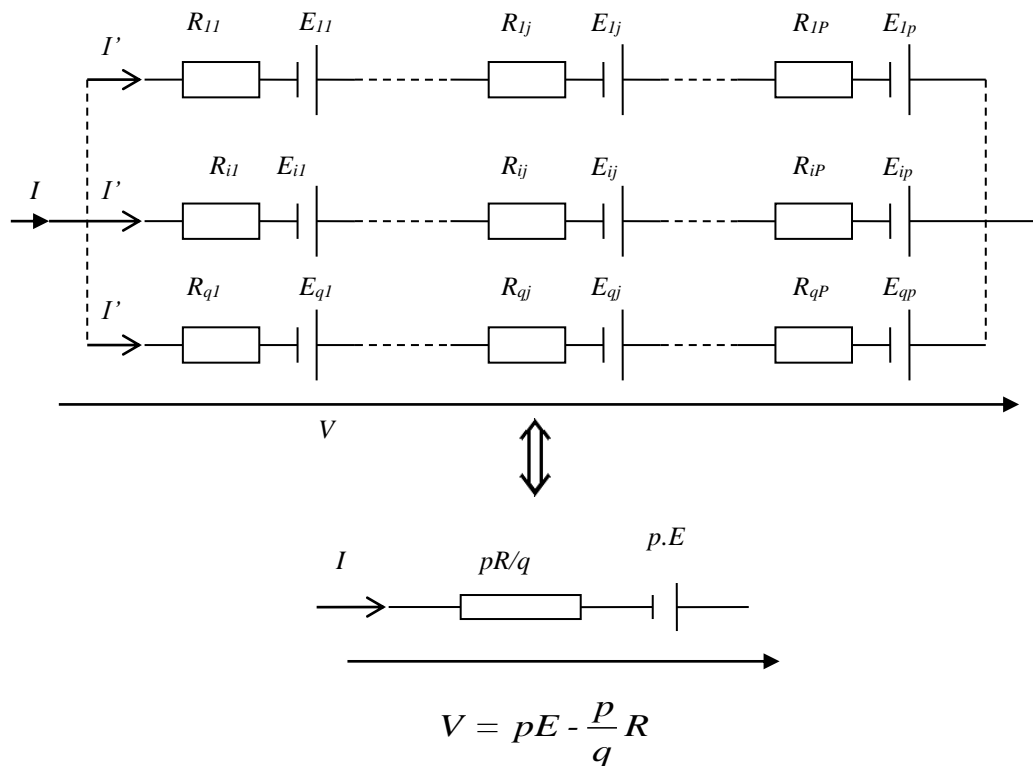
Cette dernière relation montre que le générateur équivalent à pour

- f. é.m. $E_T = E$
- résistance interne $R_T = \frac{R}{m}$

Les deux modes d'association ont des propriétés différentes :

- le montage en série donne un générateur équivalent de f.é.m. m fois plus grande que celle de chaque générateur pris isolément. Il permet donc d'obtenir une d.d.p. supérieur à celle produit par un seul générateur, par contre il ne modifie pas la limite maximale du courant I débité, puisque ce courant traverse chacun des générateurs.
- Le montage parallèle conduit à un générateur équivalent ayant la même f.é.m. et la même d.d.p. entre ses bornes que celles mesurées aux bornes de chaque générateur. Par contre il multiplie par m la limite maximale I' du courant débité par chaque générateur. Ce montage ne modifie donc pas la tension, mais il permet d'obtenir un courant plus intense que celui débité par un seul générateur.

Pour profiter des avantages des deux modes d'association, on adopte parfois une association mixte, c'est-à-dire la mise en parallèle de q groupements de p générateurs identiques montés en série.



2-6-2) Généralisation

2-6-2-1) Conventions de signe

Le but des conventions est de donner un caractère algébrique au courant et à la tension. Considérons un dipôle AB quelconque soumis à une tension V et parcouru par un courant I pour lequel on a choisi un sens positif de circulation indiqué par une flèche entre les bornes A et B . Comme initialement on ignore le sens réel du courant ainsi que le fonctionnement du dipôle, on peut orienter la tension de deux façons différentes ; ce qui veut dire que la tension

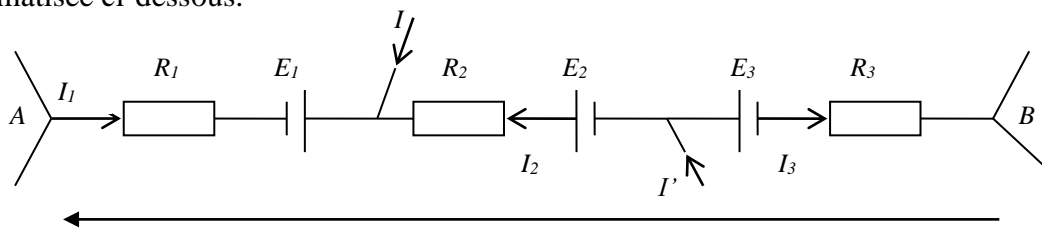
peut être positive ou négative. Le calcul de la tension va donc se faire suivant le sens choisi et indiqué par une flèche entre les bornes A et B du dipôle :

- si on choisit $V = V_A - V_B$, la flèche est orientée de B vers A . L'orientation du courant et celle de la tension correspondent à la **convention récepteur**. Le courant et la tension ont même signe si le dipôle est effectivement un récepteur ($I > 0$ pour $V > 0$ et $I < 0$ pour $V < 0$).
- si on choisit $V = V_B - V_A$, la flèche est orientée de A vers B . L'orientation du courant et celle de la tension correspondent à la **convention générateur**. Le courant et la tension ont même signe si le dipôle est effectivement un générateur ($I > 0$ pour $V > 0$ et $I < 0$ pour $V < 0$).

Mais on peut appliquer chaque type de convention à un récepteur ou à un générateur.

2-6-2-2) Loi d'Ohm généralisée

Nous avons établi la loi d'Ohm macroscopique pour des dipôles (résistance, récepteur, générateur de tension ou de courant) pris isolément. Ici on se propose d'établir la loi d'Ohm dans le cas d'une portion de circuit constituée d'une combinaison de ces dipôles reliés les uns aux autres entre les bornes A et B du circuit. Soit donc une portion de circuit AB , par exemple celle schématisée ci-dessous.



Pour exprimer la d.d.p.

V

- on choisit un sens positif pour les courants qui traversent les différents dipôles.
- On parcourt la portion de circuit dans le sens des potentiels décroissant (de A vers B) défini par une flèche indiquant le sens positif arbitraire de la tension.

Dans ces conditions la convention appliquée à chaque dipôle apparaît automatiquement.

C'est ainsi que la tension aux bornes de la portion de circuit ci-dessous s'écrit :

$V_A - V_B = R_1 I_1 - E_1 - R_2 I_2 + E_2 + E_3 + R_3 I_3$ que l'on peut mettre sous la forme

$$V_A - V_B = (R_1 I_1 - R_2 I_2 + R_3 I_3) - (E_1 - E_2 - E_3).$$

On en déduit la loi d'Ohm généralisée : La d.d.p. $V_A - V_B$ entre les bornes A et B d'une portion de circuit est égale à la somme algébrique des d.d.p. aux bornes des résistances diminuées de la somme algébrique des f.é.m et f.c.é.m.

$$V_A - V_B = \left(\sum_k \varepsilon_k R_k I_k \right) - \left(\sum_i \varepsilon_i E_i \right)$$

Pour exprimer la tension $V_A - V_B$, tous les appareils polarisés ou non étant remplacés par leurs schémas équivalents, on procède simplement de la façon suivante :

- Les produits $R_k I_k$ ont le signe du courant : $\mathcal{E}_k = + I$ si le courant de la résistance circule dans le sens de parcourt de la portion de circuit et $\mathcal{E}_k = - I$ dans le cas contraire.
- Les f.é.m. et f.c.é.m. ont le signe de la borne par laquelle on sort quand on parcourt la portion de circuit dans le sens choisi : $\mathcal{E}_k = + I$ quand on sort par la borne positive et $\mathcal{E}_k = - I$ quand on sort par la borne négative.

CHAPITRE III

METHODES GENERALES D'ANALYSE DES RESEAUX ELECTRIQUES LINEAIRES

III-I DEFINITIONS

- **Réseau électrique**

C'est un système de dipôles reliés les uns aux autres par des fils de connexion e résistances négligeables et dans lesquels circule un courant électrique. On y trouve d'autres éléments appelés quadripôles.

- **Conditions de linéarités**

En régime continu un réseau est dit linéaire lorsque les relations entre courants et tensions dans ses dipôles obéissent à la loi d'Ohm. Autrement dit leurs caractéristiques sont des droites.

- **Un nœud**

Un nœud du réseau (ou sommet) est un point de jonction d'au moins trois conducteurs.

- **Une branche**

Une branche d'un réseau est une portion de circuit comprise entre deux nœuds consécutifs. Elle comprend un ou plusieurs dipôles montés en série par des fils de connexion, donc équivalents à un seul élément.

- **Un lien (ou maillon)**

Un lien est une branche qui n'appartient qu'à une seule maille. Dans un réseau à N nœuds et B branches, il y a $B - (N - 1)$ liens.

- **Un arbre**

Un arbre d'un réseau est une figure comprenant tous les nœuds du réseau et formée par des branches reliées entre elles sans former de boucle. Dans un réseau à N nœuds chaque arbre possède $(N - 1)$ branches.

- **Une maille (ou boucle)**

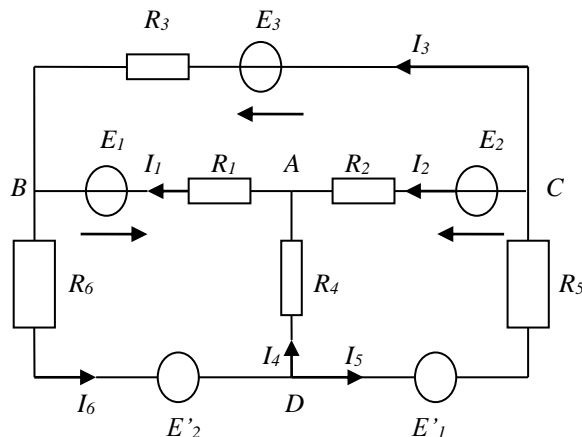
C'est un ensemble de branches adjacentes formant un parcours fermé et qui ne passe qu'une fois au plus par un nœud donné.

On dit qu'un réseau est maillé lorsque les conducteurs qui le constituent sont associés de manière à former un certain nombre de boucles fermées.

III-2 LES LOIS DE KIRCHHOFF

Les calculs des réseaux électriques consistent à déterminer les courants dans les différentes branches du réseau et les tensions à leurs bornes connaissant les éléments actifs et passifs. Ces grandeurs électriques définissent complètement le comportement du réseau. Les calculs des réseaux sont des applications des lois de Kirchhoff. Ils peuvent être simplifiés en appliquant quelques théorèmes généraux (chapitre VIII).

Soit le réseau maillé d'étude ci-dessous



Avant les calculs on ne connaît pas à priori le sens réel des courants dans les branches. Aussi pour appliquer les lois de Kirchhoff on procède de la façon suivante :

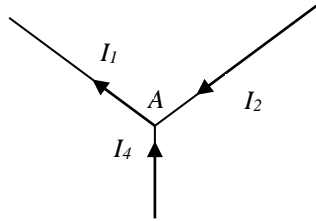
- on choisit un sens arbitraire positif pour le courant dans chaque branche.
- ensuite chaque récepteur, polarisé ou non, sera remplacé par son schéma électrique équivalent opposé au sens arbitraire du courant de la branche qui le contient.

Le courant dans une branche a une valeur algébrique. Si cette valeur est positive c'est que le sens réel du courant coïncide avec le sens arbitraire choisi. Si cette valeur est négative c'est que le sens réel du courant est opposé au sens arbitraire choisi et dans ce cas on distingue deux situations :

- si la branche ne contient que des résistances et des générateurs, c'est qu'effectivement le sens réel du courant est opposé au sens arbitrairement choisi.
- si la branche contient un récepteur non polarisé, le courant ne peut être que positif. La valeur négative trouvée pour le courant signifie que le récepteur fonctionne en générateur (le courant le traverse dans le sens des potentiels croissant), ce qui est impossible. Il faut donc reprendre toutes les équations de nœud et de maille du réseau après avoir inversé la f.c.é.m et le sens arbitraire choisi pour du courant dans la branche. Si on trouve de nouveau une intensité négative, cela signifie qu'en réalité aucun courant ne circule dans la branche. Dans ces conditions il faut refaire le schéma du réseau, en supprimant la branche et calculer les courants dans les autres branches.

III-2-1) Première loi de Kirchhoff : loi des nœuds.

Considérons le nœud A du réseau d'étude.



Le principe de conservation de la charge électrique en un point du circuit se traduit par la conservation du courant : il ne peut y avoir d'accumulation (ou de perte) de charges. Ce qui veut dire que la somme des charges entrant est égale à la somme des charges sortant. Autrement dit, la somme des courants entrants compense exactement la somme des courants sortants. La loi des nœuds peut être formulée de la façon suivante :

Enoncé :

La somme algébrique des courants à un nœud est nulle.

Par convention on comptera positivement les courants qui entrent dans un nœud et négativement les courants qui en sortent. L'équation d'un nœud s'écrit :

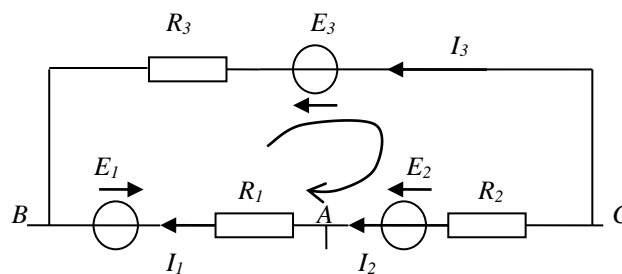
$$\sum_{k=1}^B \varepsilon_k I_k = 0$$

où $\varepsilon_k = + I$ pour le courant I_k entrant et $\varepsilon_k = - I$ pour le courant I_k sortant, B étant le nombre de branches reliées au nœud. Par exemple au nœud A on a :

$$-I_1 + I_2 + I_4 = 0$$

III-2-2) Deuxième loi de Kirchhoff : loi des mailles.

Cette loi est l'expression de la loi d'Ohm généralisée. Soit la maille ABCA du réseau d'étude.



Pour écrire l'équation de la maille, on choisi d'abord un sens positif de parcours de la maille qui sera indiqué par une flèche incurvée. La maille étant fermée, la somme des chutes de tension aux bornes des branches de la maille est nulle.

$$\sum_{k=1}^B V_k = 0$$

où B est le nombre de branches formant la maille.

Dans le cas de la maille ABCA on a :

$$V_A - V_B = R_1 I_1 + E_1$$

$$V_B - V_C = -R_3 I_3 + E_3$$

$$V_C - V_A = -E_2 + R_2 I_2$$

$$0 = R_1 I_1 + E_1 - R_3 I_3 + E_3 - E_2 + R_2 I_2$$

Cette équation peut se mettre sous la forme $R_1 I_1 + R_2 I_2 - R_3 I_3 = -E_1 + E_2 - E_3$ qui est l'équation, de la maille ABCA.

De façon générale l'équation d'une maille à B branches (appelée souvent loi de Pouillet) s'écrit :

$$\sum_{k=1}^B \varepsilon_k R_k I_k = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i E_{i k}$$

où :

- pour la k -ième branche contenant n f.é.m. (ou f.c.é.m.), R_k , I_k et E_{ik} sont respectivement la résistance totale, le courant et la i -ième f.é.m. (ou f.c.é.m.).
- ε_k est le signe du courant : $\varepsilon_k = + I$ si le courant rencontré a le même sens que le sens de parcours de la maille et $\varepsilon_k = - I$ dans le cas contraire.
- ε_i est le signe de la borne par laquelle on sort de la f.é.m. (ou f.c.é.m.) quand on parcourt la maille dans le sens arbitraire choisi : $\varepsilon_i = + I$ si on sort par la borne positive et $\varepsilon_i = - I$ si on sort par la borne négative.

III-3 RESOLUTION PRATIQUE DES EQUATIONS DU RESEAU

On suppose que le réseau est plan, c'est-à-dire que l'on peut le dessiner sur un plan sans enchevêtrement des branches, qu'il à B branches et N nœuds.

III-3-1) Méthode directe.

Dans le principe, le problème consiste à résoudre un système de B équations à B inconnues. Mais le nombre d'équations obtenues à partir des lois de Kirchhoff (loi des nœuds et celle des mailles) est toujours supérieur au nombre d'inconnues que sont les courants ou les tensions dans les branches. Il faut donc déterminer au préalable le nombre d'équations indépendantes.

III-3-1-1) Nombre de nœuds indépendants

Dans le réseau d'étude on a 4 nœuds. Les équations de ces nœuds s'écrivent :

- En A $-I_1 + I_2 + I_4 = 0$
- En B $I_1 + I_3 - I_6 = 0$
- En C $I_5 - I_3 - I_2 = 0$
- En D $I_4 + I_5 - I_6 = 0$

On constate que l'équation du nœud D se déduit des équations des nœuds A , B et C en faisant la somme, à un signe près, de ces trois équations de nœud. L'équation se rapportant au nœud D est donc redondante. Pour 4 nœuds du réseau on a donc 3 équations indépendantes. De façon générale, dans un réseau à N nœuds, il y a $(N - 1)$ équations de nœud indépendantes. Le nœud redondant est appelé **nœud de référence**. Habituellement on prend comme nœud de référence le nœud commun au plus grand nombre de courants de branche.

III-3-1-2) Nombre de mailles indépendantes

Dans le réseau précédent on a 6 branches et donc 6 inconnues à déterminer. Pour ce faire 6 équations indépendantes sont nécessaires. Il faut donc ajouter aux 3 équations indépendantes de nœuds 3 équations indépendantes de mailles. De façon générale dans un réseau à B branches et N nœuds, le nombre de mailles indépendantes $M = B - (N - 1)$. Mais le choix des mailles indépendantes n'est pas unique. Les mailles indépendantes sont définies de la façon suivante :

- Toutes les branches du réseau devront apparaître au moins une fois dans l'ensemble des M mailles choisies. Ce qui veut dire qu'on peut reconstituer le réseau avec l'ensemble des branches des M mailles indépendantes choisies.

- Chaque maille doit avoir au moins une branche, appelée lien ou maillon, qui n'appartient à aucune autre maille.

En appliquant la loi des mailles aux mailles indépendantes ABCA, ABDA et ACDA on

obtient :

$$\begin{cases} -R_6 I_6 - R_1 I_1 - R_4 I_4 = E_1 + E_2' \\ R_1 I_1 - R_3 I_3 + R_2 I_2 = -E_1 + E_2 - E_3 \\ R_4 I_4 - R_2 I_2 - R_5 I_5 = -E_2 + E_1' \end{cases}$$

Ain si on dispose d'un système de B (ici $B = 6$) équations indépendantes dont la résolution fournit directement toutes les intensités des courants des branches.

III-3-2) Méthode des courants indépendants.

Elle réduit la dimension du système d'équation à résoudre. L'identification des courants indépendants repose sur la loi des nœuds. Dans un nœud ou passe n courants, l'intensité d'un courant quelconque est imposée dès lors qu'on connaît les intensités des $(n-1)$ autres courants. Ainsi à un nœud on a un courant dépendant. De ce fait, dans un réseau à $(n-1)$ nœuds indépendant on a $M = B - (n-1)$ courants indépendants. Le choix des M courants indépendants est arbitraire. Mais ce choix est tel que parmi les courants choisis aucun ne se déduit des autres. On pourra choisir, par exemple, les courants des M liens.

III-3-3) Méthode des mailles adjacentes.

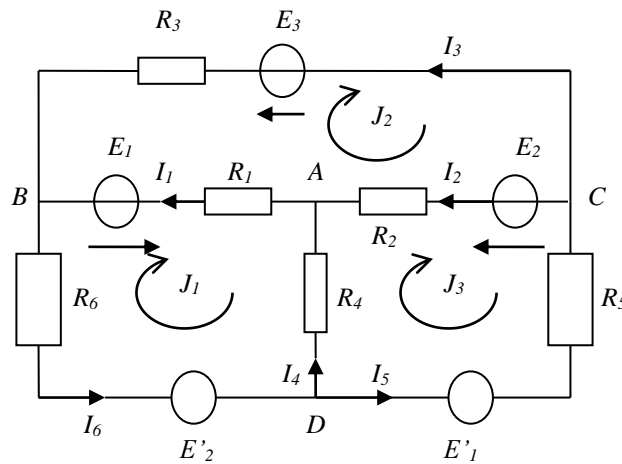
On dit que deux mailles sont adjacentes si elles sont extérieures l'une à l'autre et si elles n'ont qu'une branche en commun.

La méthode des mailles adjacentes (ou méthode des courants fictifs ou courants de Maxwell) permet de simplifier le problème en le ramenant à la résolution d'un système de M équations à M inconnues ($M < B$). On procède de la façon suivante :

- 1 - On choisi les M mailles indépendantes que l'on numérote $1, 2, 3, \dots, i, \dots, M$.
- 2 - le sens arbitraire donné à ce courant impose le sens de parcourt de la maille et on imagine que chaque maille est parcourue par un courant. Ces courants fictifs de maille seront notés et numérotés $J_1, J_2, J_3, \dots, J_i, \dots, J_M$. Ces courants fictifs sont des inconnues intermédiaires.
- 3 - On écrit le système de M équations de mailles à M inconnues que sont les courants de mailles. On constate immédiatement que le courant I_k , circulant réellement dans la branche k , est la somme algébrique des courants de mailles adjacentes à cette branche :

$$I_k = \sum_{i=1} \varepsilon_i J_i$$

- $\varepsilon_i = +1$ si le courant J_i de la maille i circule dans le même sens que le courant I_k , et $\varepsilon_i = -1$ dans le cas contraire.



III-3-3-1) Réseau ne contenant pas de générateurs de courant

C'est le cas du réseau d'étude où on a $B = 6$ et $N = 4$ donc $M = 3$. Les courants réels dans les branches en fonction des courants fictifs s'écrivent :

$$I_1 = -J_1 + J_2; I_2 = J_2 - J_3; I_3 = -J_2; I_4 = J_3 - J_1; I_5 = -J_3; I_6 = -J_1.$$

En exprimant les courants dans le système d'équations de mailles indépendantes on obtient un système d'équations qui peut se mettre sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_4 + R_6 & -R_1 & -R_4 \\ -R_1 & R_1 + R_2 + R_3 & -R_2 \\ -R_4 & -R_2 & R_2 + R_4 + R_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 + E_2' \\ -E_1 + E_2 - E_3 \\ -E_2 + E_1' \end{pmatrix}$$

soit $[R_{ij}].[J_i] = [E_i]$ où $[R_{ij}]$ est une matrice carrée appelée matrice des résistances de maille. C'est une matrice symétrique où seuls les éléments de la diagonale principale sont positifs. L'intérêt de la méthode des mailles adjacentes est que la matrice $[R_{ij}]$ peut s'écrire directement de la façon suivante :

- le terme R_{ii} ($i = j$) de la diagonale principale est égal à la résistance de la maille i , la somme des résistances des branches qui forme cette maille.
- le terme R_{ij} ($i \neq j$) est égal à la résistance totale de la branche appartenant aux mailles adjacentes i et j . Cette résistance est affectée d'un signe (-). Si les mailles i et j ne sont pas adjacentes (elles n'ont pas de branche en commun), l'élément $R_{ij} = 0$.

La matrice unicolonne $[E_i]$ est appelée matrice des sources. Le terme E_i est la somme algébrique des f.é.m. et f.é.c.m. situées dans la maille i . Ces f.é.m. et f.c.é.m. sont affectées du signe de borne par laquelle on sort quand on parcourt la maille dans le sens de son courant fictif.

Remarque :

Si les mailles sont orientées indifféremment, l'élément R_{ij} ($i \neq j$) de la matrice $[R_{ij}]$ est affecté

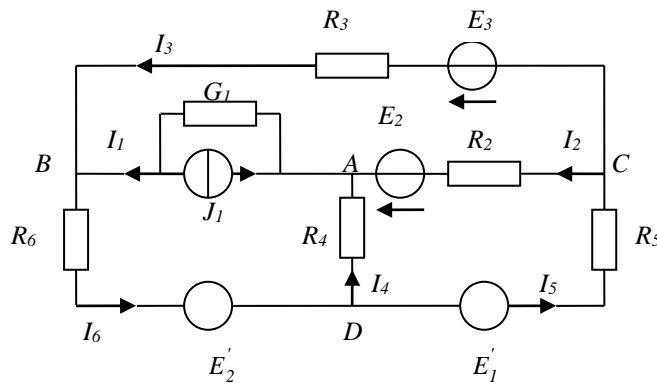
- d'un signe (-) si les mailles adjacentes i et j sont orientées dans le même sens.
- d'un signe (+) si mailles adjacentes i et j sont orientées en sens opposés.

III-3-3-2) Réseau contenant des générateurs de courant réels

➤ Cas d'un générateur de courant réel

Si une branche du réseau contient une source de courant réelle, il est toujours possible de remplacer cette source de courant par son schéma équivalent de Thévenin de même polarité et de ramener le problème à celui d'un réseau ne contenant pas de sources de courant.

Exemple : On considère que la branche AB contient un générateur de courant réel (J_1, G_1).

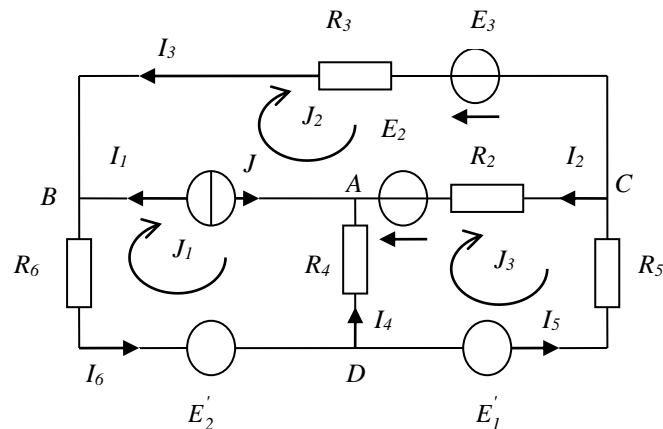


On remplace le générateur de courant (J_1, G_1) par un générateur de tension réel (E_1, R_1) de même polarité avec $E_1 = J_1 R_1$ et $R_1 = 1/G_1$.

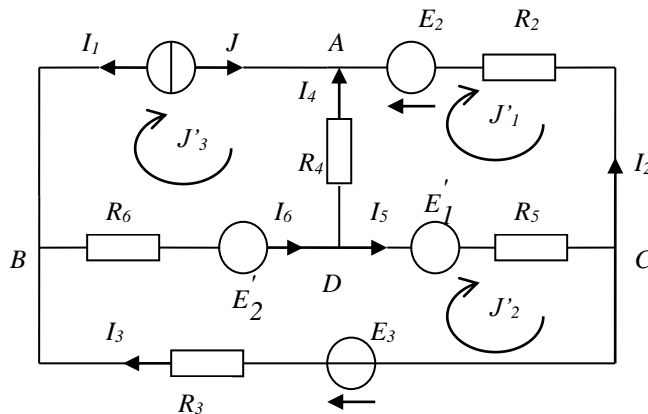
➤ Cas d'un générateur de courant idéal.

Si une branche du réseau contient une source de courant idéale, on ne peut pas écrire la loi de Kirchhoff pour la maille contenant cette branche car la tension aux bornes de la source idéale est indéterminée. Par contre le c.é.m. J de la source est une variable indépendante du réseau. Le courant circulant dans la branche contenant la source idéale n'est plus une inconnue. Donc le fait de placer une source idéale de courant dans une branche supprime une inconnue, et abaisse d'une unité le nombre d'équations de mailles indépendantes. Pour écrire ces équations il faut modifier le réseau pour placer la source idéale à la périphérie (sur un lien). On n'écrit la loi de Kirchhoff que pour les mailles indépendantes ne contenant pas de sources idéales de courant.

Exemple : On considère que la branche BC contient un générateur de courant idéal (J) donc de conductance interne nulle ($G = 0$).



Le réseau modifié devient



$J'_3 = J$. Les courants fictifs J'_1, J'_2 et J'_3 sont tels que la loi des mailles donne :

$$\begin{pmatrix} R_2 + R_4 + R_5 & -R_5 \\ -R_5 & R_3 + R_5 + R_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J'_1 \\ J'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} JR_4 - E_2 + E'_1 \\ JR_6 - E'_1 + E_3 - E'_2 \end{pmatrix}$$

De façon générale si un réseau comprend M mailles indépendantes et P branches contenant une source idéale, on aura $(M - P)$ courants de mailles inconnus. Les P courants imposés par les sources idéales ne sont pas considérés comme des inconnus. On écrira un système de $(M - P)$ équations en modifiant le réseau si nécessaire.

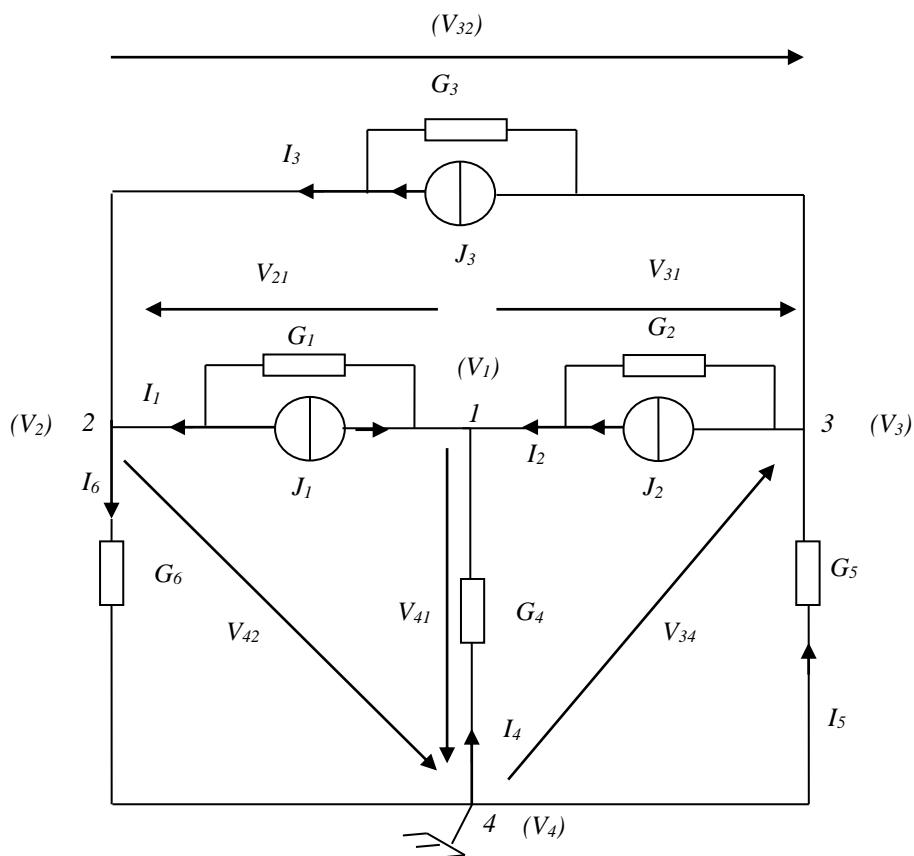
III-3-4) Méthode des tensions de nœuds

Cette méthode est utilisée lorsqu'on recherche les d.d.p. aux bornes des branches. Les inconnues, au nombre de B , sont ces d.d.p. entre les divers nœuds et l'un de ceux-ci est pris comme potentiel de référence zéro. Dans cette méthode les éléments passifs du réseau sont supposés connus par leurs conductances G_1, G_2, G_3, \dots . Pour effectuer les calculs on procède de la façon suivante :

- on numérote les nœuds : 1, 2, 3, ..., N .
- les tensions à calculer entre les nœuds i et j sont notées V_{ij} : V_{12} , V_{13} , V_{23} , Des flèches représentées près des branches indiquent le sens positif choisi pour ces tensions.
- On introduit des tensions auxiliaires, $V_1, V_2, V_3, \dots, V_i, \dots, V_{N-1}$, entre le nœud de référence et les autres nœuds. Ces tensions représentent également les potentiels des nœuds. Elles peuvent être schématisées par des flèches en pointillées et arbitrairement positives dans le sens allant du nœud de référence vers les autres nœuds.
- On écrit enfin le système de $(N - 1)$ équations de nœud indépendant. Dans ces équations on remplace les tensions aux bornes des branches par leurs expressions obtenues avec les tensions auxiliaires ou tensions de nœuds. La résolution du système d'équations conduit aux tensions de nœud qui ne sont que des inconnues intermédiaires. Les d.d.p. recherchées s'obtiennent immédiatement. Dans cette méthode le nombre d'inconnues passe de B à $(N - 1) < B$.

III-3-4-1) Réseau ne contenant pas de sources de tension

Soit le réseau d'étude ci-dessous.



On a $N = 4$ nœuds que nous numérotons 1, 2, 3 et 4. Choisissons, par exemple, le nœud N°4 comme nœud de référence : $V_4 = 0$. Les tensions que nous cherchons aux bornes des branches s'expriment en fonction des trois tensions de nœud : $V_{ij} = V_i - V_j$ soient $V_{21} = V_2 - V_1$; $V_{31} = V_3 - V_1$; $V_{41} = -V_1$; $V_{32} = V_3 - V_2$; $V_{34} = V_3$; $V_{42} = -V_2$. Les courants circulants dans les branches s'écrivent :

$$I_1 = (-J_1 - G_1 V_{21}); I_2 = (J_2 + G_2 V_{31}); I_3 = (J_3 + G_3 V_{32}); I_4 = G_4 V_{41}; I_5 = -G_5 V_{34}; I_6 = -G_6 V_{42}.$$

En exprimant les tensions V_{ij} , en fonction des tensions de nœuds, dans le système d'équations indépendantes de nœuds, on obtient un système d'équations qui peut se mettre sous forme

$$\text{matricielle : } \begin{pmatrix} G_1 + G_2 + G_4 & -G_1 & -G_2 \\ -G_1 & G_1 + G_3 + G_6 & -G_3 \\ -G_2 & -G_3 & G_2 + G_3 + G_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 + J_2 \\ -J_1 + J_3 \\ -J_2 - J_3 \end{pmatrix}$$

soit $[G_{ij}].[V_i] = [J_i]$ où la matrice carrée $[G_{ij}]$ est la matrice des conductances de nœud. L'intérêt de la méthode est que la matrice $[G_{ij}]$ peut s'écrire directement de la manière suivante :

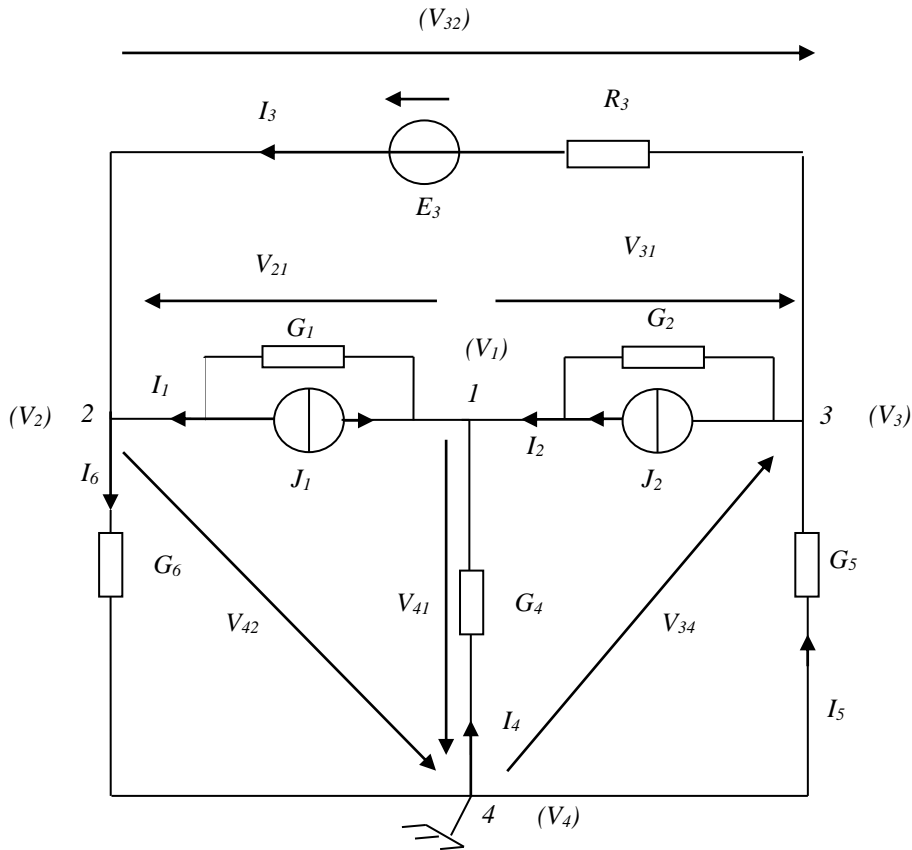
- le terme G_{ii} ($i = j$), de la diagonale principale, est égal à la conductance du nœud i , c'est-à-dire la somme des conductances des branches reliées à ce nœud.
- le terme G_{ij} ($i \neq j$) est égal à la conductance de la branche reliant les nœuds i et j . Ce terme est affecté d'un signe (-).
- la matrice unicolonne $[J_i]$ est la matrice des sources. Le terme J_i est la somme algébrique des c.é.m. des sources reliées au nœud i . Les c.é.m entrant dans le nœud sont comptés positivement et les c.é.m. sortant du nœud sont comptés négativement. On calcul les tensions de nœud V_i à partir du système d'équations et on en déduit les d.d.p. V_{ij} entre les nœuds i et j , c'est-à-dire aux bornes des branches.

III-3-4-2) Réseau contenant des sources de tension.

➤ Cas d'un générateur de tension réel.

Si une branche du réseau contient une source de tension réelle, il est toujours possible de remplacer cette source par son schéma équivalent de Norton de même polarité et de ramener le problème à celui d'un réseau ne contenant pas de source de tension.

Exemple : On considère que la branche 1-2 contient un générateur de tension réel (E_3, R_3).

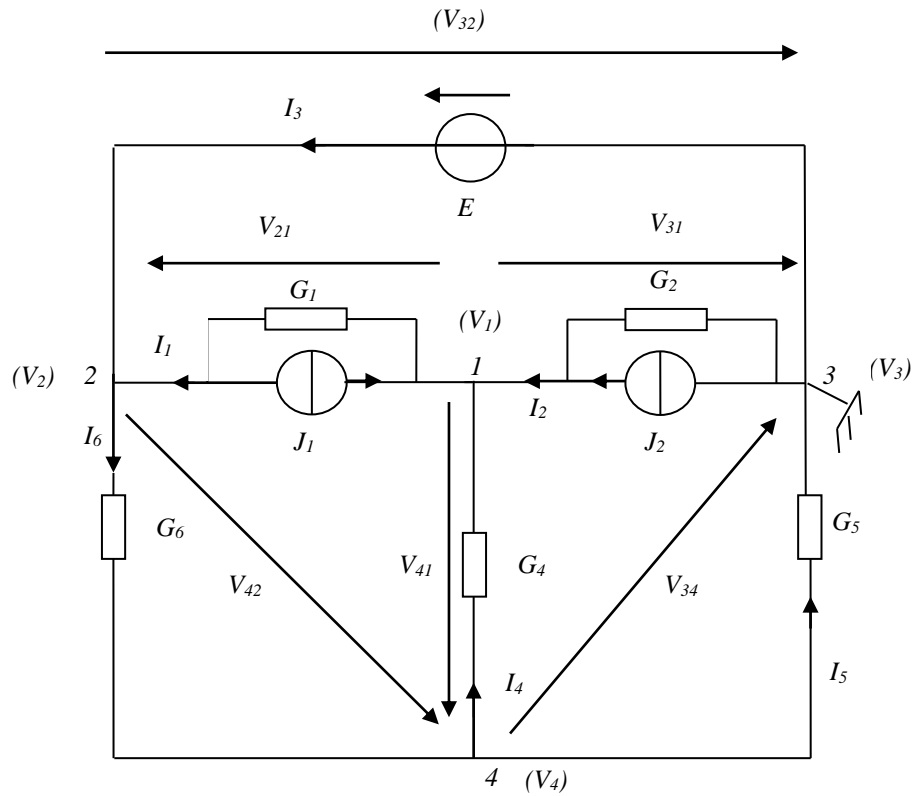


Ici on remplace le générateur de tension (E_3, R_3) par un générateur de courant réel (J_3, G_3) de même polarité avec $J_3 = E_3/R_3$ et $G_3 = 1/R_3$

➤ **Cas d'un générateur de tension idéal.**

Si une branche du réseau contient une source de tension idéale, on ne peut pas écrire la loi de Kirchhoff aux nœuds de cette branche car le courant débité par la source idéale est indéterminé. Il est cependant intéressant de remarquer qu'on peut résoudre le problème facilement en choisissant convenablement le nœud de référence.

Exemple : On considère que la branche 2-3 contient un générateur de tension idéal (E) donc de résistance interne nulle ($R = 0$). On choisit le nœud N°3 comme nœud de référence. Dans ces conditions $V_3 = 0$ et on a trois tensions de nœud V_1, V_2 et V_4 à déterminer. Or $V_3 - V_2 = -V_2 = -E$ d'où $V_2 = E$. V_2 étant connue, le rang du système est abaissé d'une unité.



On écrit les équations de Kirchhoff relative aux nœuds N°1 et N°4 avec :

$$I_1 = (-J_1 - G_1 V_{21}); I_2 = (J_2 + G_2 V_{31}); I_4 = G_4 V_{41}; I_5 = -G_5 V_{34}; I_6 = -G_6 V_{42}.$$

On obtient le système d'équation suivant :

$$\begin{pmatrix} G_1 + G_2 + G_4 & -G_4 \\ -G_4 & G_4 + G_5 + G_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 + J_2 + G_1 E \\ G_6 E \end{pmatrix}$$

La matrice des sources comporte les termes $G_1 E$ et $G_6 E$ matérialisant les courants injectés par la source de tension E aux nœuds N°1 et N°4 respectivement.

CHAPITRE IV

PRINCIPES ET THEOREMES GENERAUX

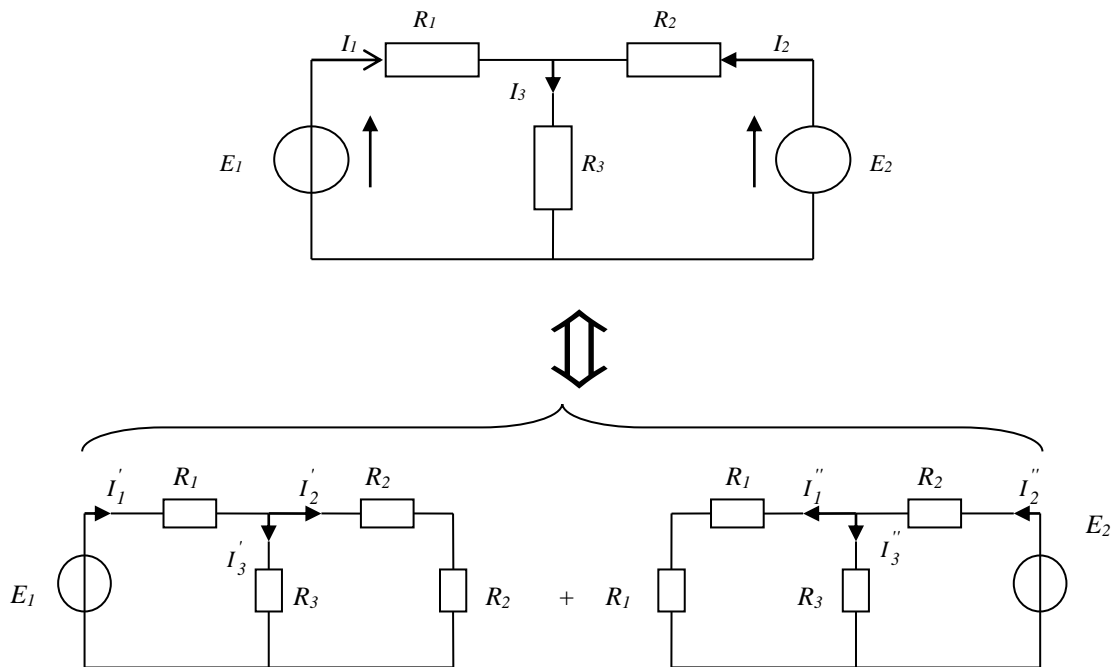
8-1 PRINCIPE DE SUPERPOSITION D'HELMHOLTZ

Ce principe découle de ce que les relations entre courant et tension sont linéaires dans un réseau linéaire.

Énoncé :

Dans un réseau comprenant plusieurs générateurs autonomes, le courant créé dans un élément quelconque est égal à la somme algébrique des courants produits dans ce élément par chacun des générateurs pris isolément, les autres générateurs étant éteints et remplacés par leurs résistances ou conductances internes respectifs.

Exemple :



Dans les réseaux à un générateur, les courants dans les différentes branches sont :

$$I'_1 = \frac{E_1(R_2 + R_4 + R_5)}{(R_2 + R_4)(R_1 + R_3 + R_5) + R_5(R_1 + R_3)} ; \quad I'_2 = \frac{E_1 R_5}{(R_2 + R_4)(R_1 + R_3 + R_5) + R_5(R_1 + R_3)}$$

$$I''_2 = \frac{E_2(R_1 + R_3 + R_5)}{(R_1 + R_3)(R_1 + R_3 + R_5) + R_5(R_2 + R_4)} ; \quad I''_1 = \frac{E_2 R_5}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_3 + R_5) + R_5(R_2 + R_4)}$$

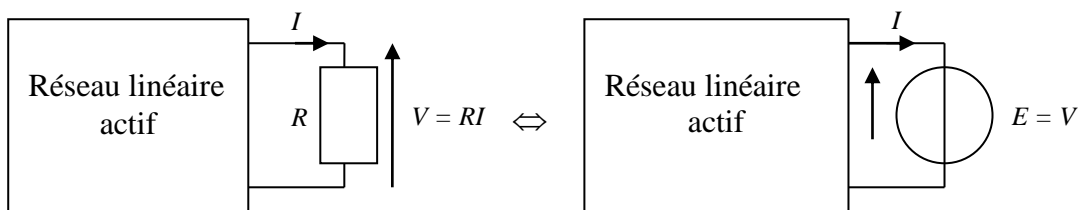
Le courant dans une branche du réseau initial est égal à la somme des courants qui apparaissent dans cette branche dans les réseaux à une source. Ces courants seront affectés d'un signe (+) s'ils circulent dans le même sens que le courant de la branche dans le réseau initial et d'un signe (-) dans le cas contraire. Ainsi on a

$$I_3 = I_3' + I_3'' = \frac{E_1(R_2 + R_4) + E_2(R_1 + R_3)}{(R_2 + R_4)(R_1 + R_3 + R_5) + R_5(R_1 + R_3)}$$

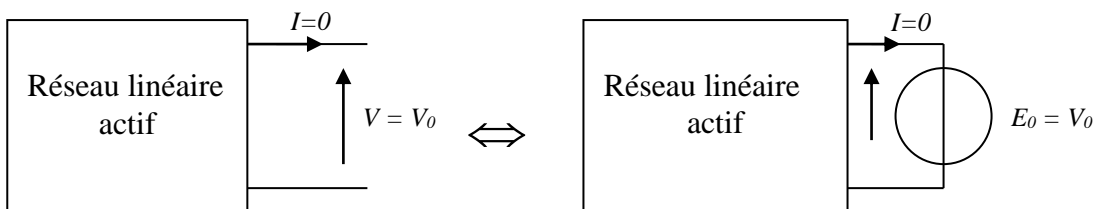
8-2 THEOREME DE SUBSTITUTION

Enoncé :

Etant donné un réseau linéaire actif et l'un quelconque de ses éléments, siège d'une chute de tension V , on peut remplacer cet élément par une combinaison d'éléments (générateurs de tension, générateurs de courant, résistances,...) telle que l'on mesure entre ses bornes la même tension V qu'aux bornes de l'élément et qu'elle est parcourue par le même courant I .



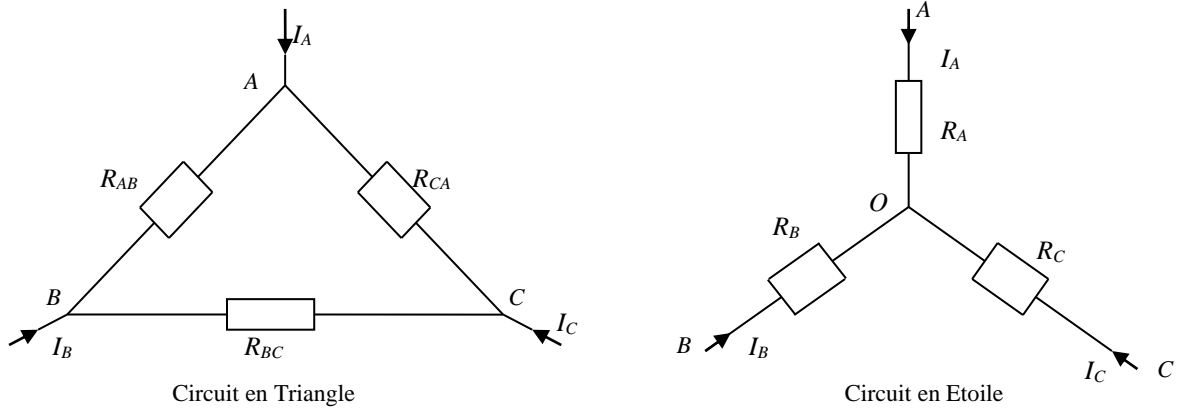
En particulier si les bornes du réseau sont ouvertes ($R = \infty$), il existe une d.d.p. V_0 entre ses bornes. On ne modifie rien à l'état électrique du réseau en simulant la tension V_0 par une f.é.m. de même polarité $E_0 = V_0$.



On dit que le réseau ne « voit » pas la substitution.

8-4 THEOREME DE KENNELY

Considérons un circuit de résistances à trois nœuds A , B et C , appartenant à un réseau électrique et ayant une forme en triangle ou en étoile.



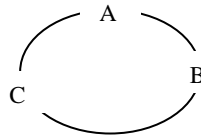
D'après le théorème de Kennely, la représentation du circuit en triangle peut être remplacée par la représentation du circuit en étoile et vice versa si les relations suivantes sont vérifiées :

$$R_A R_{BC} = R_B R_{AC} = R_C R_{AB} = R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C = \frac{R_{AB} R_{AC} R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}$$

Pour obtenir ces relations il faut établir les conditions d'équivalence des deux représentations. Pour ce faire, nous allons écrire l'ensemble de relations qui lient les tensions V_{AB} , V_{BC} et V_{CA} entre les nœuds aux courants I_A , I_B et I_C arrivant aux nœuds :

<i>Circuit triangle</i>	<i>Circuit étoile</i>
$I_A + I_B + I_C = 0$	$V_{AB} + V_{BC} + V_{CA} = 0$
$V_{AB} = R_A I_A - R_B I_B$	$I_A = \frac{I}{R_{AB}} V_{AB} - \frac{I}{R_{CA}} V_{CA}$
$V_{BC} = R_B I_B - R_C I_C$	$I_B = \frac{I}{R_{BC}} V_{BC} - \frac{I}{R_{AB}} V_{AB}$
$V_{CA} = R_C I_C - R_A I_A$	$I_C = \frac{I}{R_{CA}} V_{CA} - \frac{I}{R_{BC}} V_{BC}$

Pour que les deux circuits soient équivalents il faut que l'ensemble des valeurs I_A, I_B et I_C tirées du circuit en étoile vérifie les équations du circuit en triangle (transformation étoile→triangle). Les nœuds A, B et C n'étant pas différenciés, il suffit d'établir la condition d'équivalence sur une des grandeurs (I_A, I_B ou I_C) puis de généraliser en effectuant une permutation circulaire.



Calculons par exemple le courant I_A donné par les équations du circuit en étoile. On a :

$$\begin{cases} I_A + I_B + I_C = 0 \quad (1) \\ R_A I_A - R_B I_B = V_{AB} \Rightarrow I_B = \frac{R_A I_A - V_{AB}}{R_B} \quad (2) \\ R_C I_C - R_A I_A = V_{CA} \Rightarrow I_C = \frac{R_A I_A + V_{CA}}{R_C} \quad (3) \end{cases}$$

On a donc, en exprimant les courants I_A et I_C dans l'équation (1):

$$I_A = \frac{R_C}{R_A R_B + R_B R_C + R_C R_A} V_{AB} - \frac{R_B}{R_A R_B + R_B R_C + R_C R_A} V_{CA} = \frac{I}{R_{AB}} V_{AB} - \frac{I}{R_{CA}} V_{CA}$$

Par identification, les conditions d'équivalence des deux représentations s'écrivent alors :

$$R_{AB} = \frac{R_A R_B + R_B R_C + R_C R_A}{R_C} ; \quad R_{CA} = \frac{R_A R_B + R_B R_C + R_C R_A}{R_B} \quad \text{on obtient } R_{BC} \text{ par}$$

$$\text{permutation circulaire : } R_{BC} = \frac{R_A R_B + R_B R_C + R_C R_A}{R_A}$$

Il faut remarquer que les systèmes d'équations de l'étoile et du triangle sont réciproques. Aussi on peut écrire les conditions d'équivalence portant sur les résistances de l'étoile (transformation triangle →étoile) :

$$R_A = \frac{R_{AB} R_{CA}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}} ; R_B = \frac{R_{AB} R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}} ; R_C = \frac{R_{BC} R_{CA}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$$

La méthode pratique pour passer d'une représentation à l'autre est la suivante :

Transformation triangle → étoile :

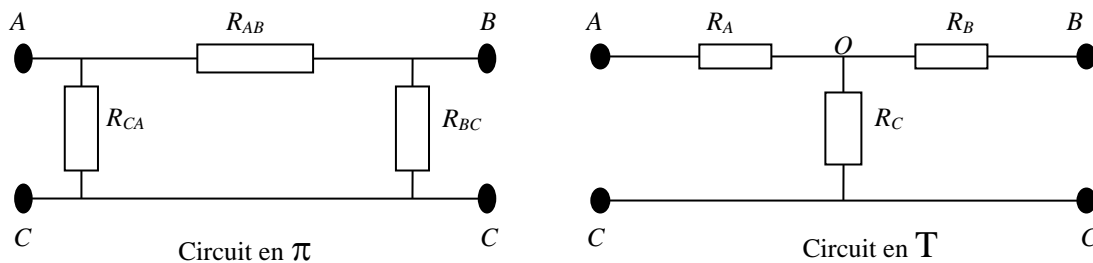
$$\boxed{\text{La résistance arrivant à Une borne de l'étoile.}} = \frac{\boxed{\text{Produit des résistances de deux branches du triangle reliées à la même.}}}{\boxed{\text{Somme des résistances des trois branches du triangle}}}$$

Transformation étoile → triangle :

$$\boxed{\text{La résistance entre deux bornes du triangle}} = \frac{\boxed{\text{Somme des produits des résistances de chaque paire de branches de l'étoile}}}{\boxed{\text{La résistance de la branche reliée à la troisième borne de l'étoile}}}$$

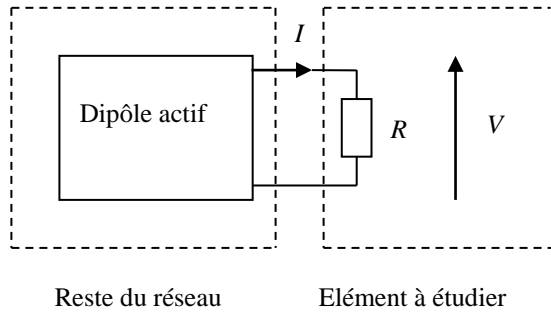
Remarques :

Les circuits en étoile et en triangle sont également appelés circuits en π et en T respectivement, ce qui correspond simplement une autre façon de dessiner les réseaux :

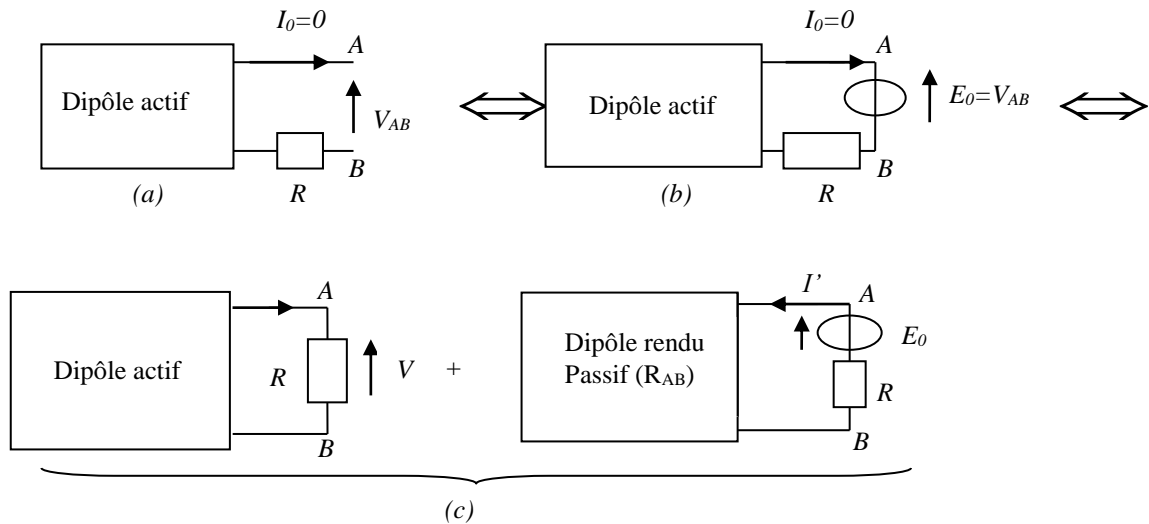


8-5 THEOREME DE THEVENIN

Il permet de simplifier considérablement un réseau dans lequel on s'intéresse au courant qui passe dans un élément. Considérons, dans un réseau linéaire actif, un élément représenté par une charge R entre les bornes A et B. Pour étudier cet élément le théorème de Thévenin Léon Charles permet de réduire le réseau à deux parties : une partie constituée par l'élément à étudier et une autre partie représentée par un dipôle actif contenant tous les autres éléments du réseau.



En circuit ouvert il existe entre A et B une d.d.p. $V_A - V_B = V_{AB}$ indépendant de R . En circuit fermé un courant I traverse la charge R . On se propose de calculer ce courant. D'après les théorèmes de substitution et de superposition on peut faire les équivalences suivantes :



Le théorème de substitution permet de passer de (a) à (b) et d'écrire que $E_0 = V_{AB}$. Le principe de superposition permet de passer de (b) à (c) et d'écrire $I_0 = I - I' = 0$. Or

$$I' = \frac{E_0}{R + R_{AB}} = \frac{V_{AB}}{R + R_{AB}} \text{ où } R_{AB} \text{ est la résistance équivalente du dipôle rendu passif vu des bornes } A \text{ et } B.$$

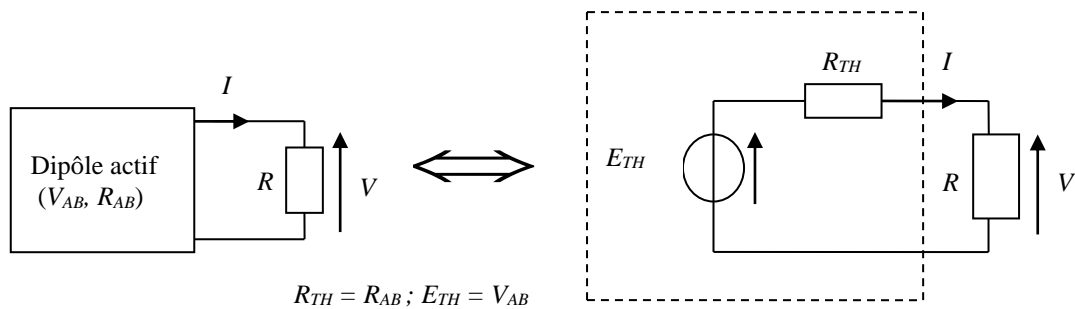
Finalement on a $I = I'$ soit

$$I = \frac{V_{AB}}{R + R_{AB}}$$

Énoncé 1 : (première formulation du théorème de Thévenin).

Le courant dans un élément branché entre les bornes A et B d'un réseau dipolaire actif est égal au quotient de la tension mesurée V_{AB} entre les bornes A et B, avant l'introduction de l'élément, par la somme de la résistance R de l'élément et de la résistance R_{AB} du dipôle rendu passif vu des bornes A et B avant l'introduction de l'élément.

L'expression du courant montre que le courant I dans la charge R est le même que si l'on alimentait cette charge par un générateur équivalent de f.é.m. V_{AB} et de résistance interne R_{AB} . Cet aspect du théorème de Thévenin est schématisé de la façon suivante



d'où la seconde formulation du théorème de Thévenin :

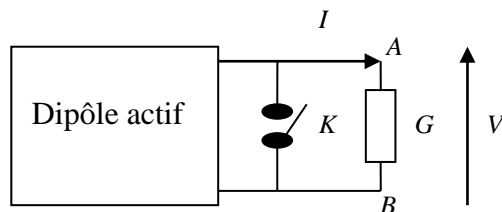
Énoncé 2 : (deuxième formulation du théorème de Thévenin).

Tout réseau dipolaire actif peut être remplacé, au point de vue de ses effets extérieurs, par un générateur de tension équivalent de f.é.m. E_{TH} déterminée par la tension à vide du dipôle et de résistance interne R_{TH} égale à la résistance du dipôle rendu passif.

8-6 THEOREME DE NORTON

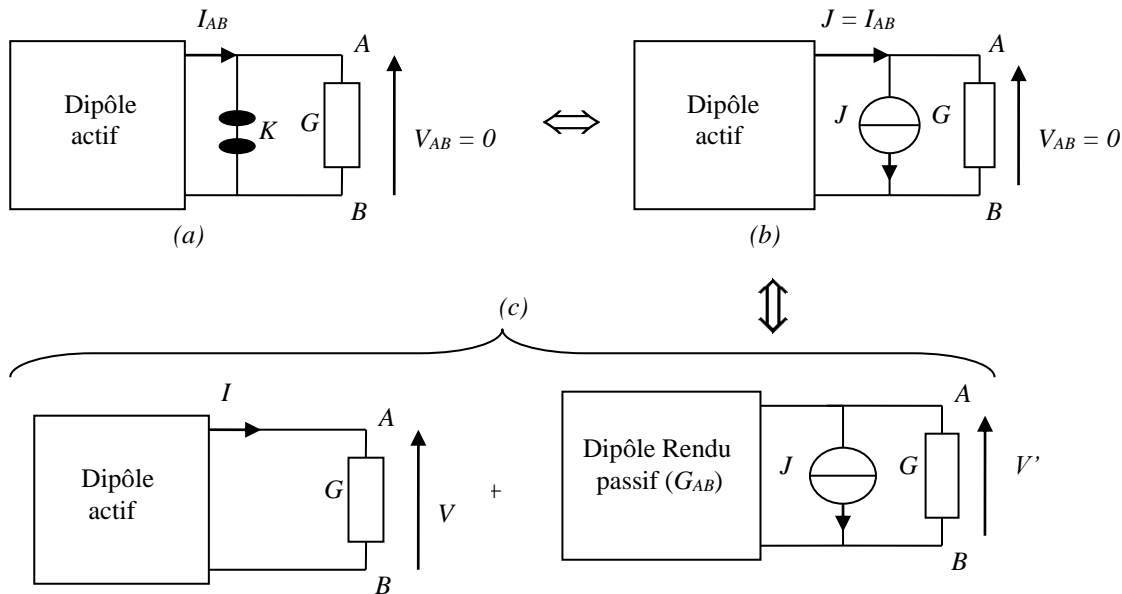
Ce théorème permet de calculer la tension aux bornes d'un élément d'un réseau actif. De façon analogue au théorème de Thévenin, le théorème de Norton établit une équivalence entre un réseau dipolaire actif et un générateur de courant fictif de courant.

Considérons un réseau actif dont un élément, représenté par sa conductance G , est branché entre les points A et B.



Si on ferme l'interrupteur k , le dipôle actif contenant tous les autres éléments du réseau débite un courant de court-circuit I_{AB} supposé connu et la tension $V_{AB} = 0$. Si l'interrupteur k est ouvert, il existe une tension V à déterminer aux bornes de l'élément G .

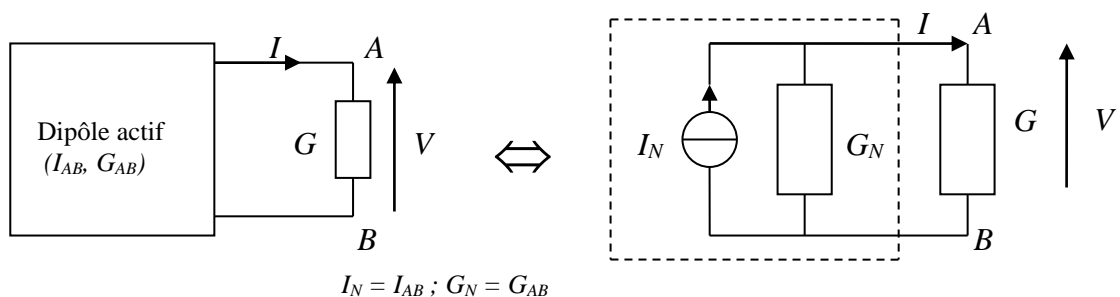
D'après les théorèmes de substitution et superposition, on peut faire les équivalences suivantes :



Comme précédemment on en déduit $I_{AB} = J$ (théorème de substitution), $V_{AB} = V + V' = 0$ (principe de superposition) et $J = -(G + G_{AB}) V'$ où G_{AB} est la conductance équivalente du dipôle rendu passif vu des bornes A et B . Comme $V = -V'$ on a finalement

$$V = \frac{I_{AB}}{G + G_{AB}}$$

L'expression de la tension montre que la tension V aux bornes de la charge G est la même que si l'on alimentait cette charge par un générateur équivalent de c.é.m. I_{AB} et de conductance interne G_{AB} .

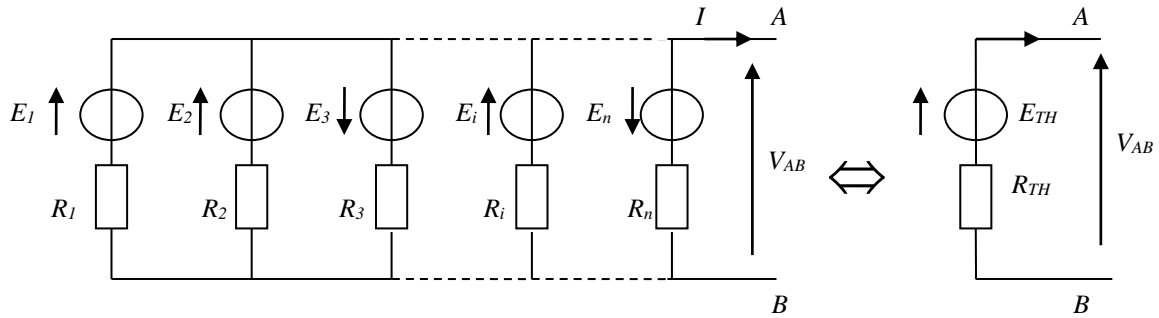


Enoncé :

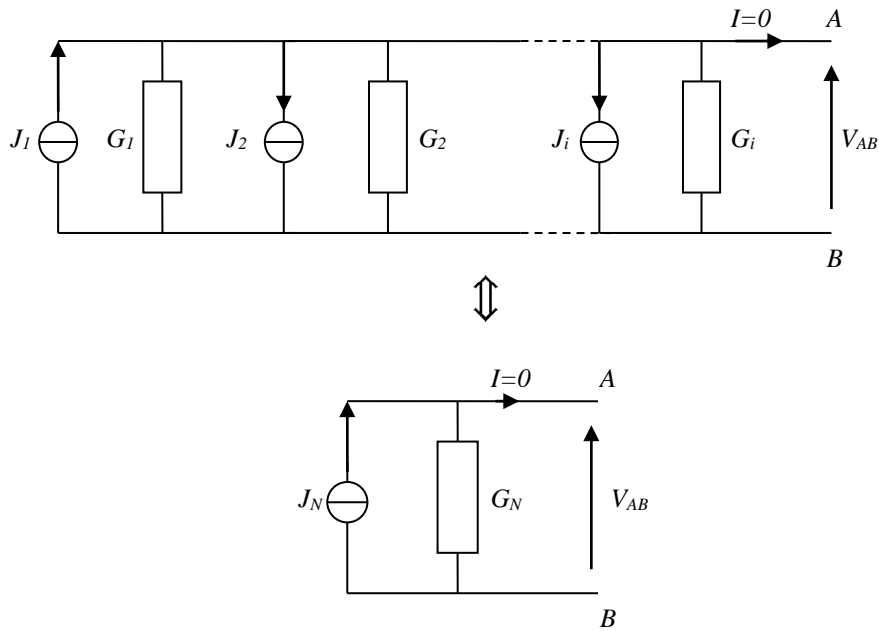
Au point de vu de ses effets extérieurs, tout réseau dipolaire actif peut être remplacé par un générateur de courant équivalent de c.é.m. I_N déterminé par le courant de court circuit du dipôle et de conductance interne G_N égale à la conductance du dipôle rendu passif.

8-7 THEOREME DE MILLMAN

La combinaison de n générateurs réels de tension, montés en parallèle, est équivalente à un seul générateur de tension de f.é.m. E_{TH} et de résistance interne R_{TH} .



Lorsque n générateurs réels de tension sont montés en parallèle, on ne peut pas calculer ($n \geq 3$) la tension équivalente E_{TH} de Thévenin. Il faut recourir à un système d'équations en remplaçant les générateurs de tension du réseau initial par leurs schémas équivalents de Norton de même polarité. Cet ensemble peut être remplacé par un générateur de courant équivalent. On obtient le schéma suivant :



$$\text{avec } J_1 = G_1 E_1; \quad J_2 = G_2 E_2; \quad \dots; \quad J_i = G_i E_i; \quad \dots; \quad J_n = G_n E_n;$$

$$G_1 = \frac{1}{R_1}; \quad G_2 = \frac{1}{R_2}; \quad \dots; \quad G_i = \frac{1}{R_i}; \quad \dots; \quad G_n = \frac{1}{R_n};$$

$$J_N = \sum_{i=1}^n \epsilon_i J_i = \sum_{i=1}^n \epsilon_i (E_i G_i) \quad \text{et} \quad G_N = \sum_{i=1}^n G_i$$

Et on en déduit l'équation
$$I = \left(\sum_{i=1}^n \epsilon_i E_i G_i \right) + \left(\sum_{i=1}^n G_i \right) V_{AB} = 0$$

d'où la tension à vide de l'ensemble des générateurs montés en parallèle :

$$V_{AB} = \frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i E_i G_i}{\sum_{i=1}^n G_i}$$

Cette relation exprime la formule de Millman. Le générateur de courant unique est équivalent à un seul générateur de tension

- de f.é.m. $E_{TH} = V_{AB} = \frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i E_i G_i}{\sum_{i=1}^n G_i}$
- de résistance $R_{TH} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n G_i}$

Pour calculer la tension V_{AB} on comptera positivement ($\varepsilon_i = +1$) la f. é.m. E_i si elle a la même polarité que V_{AB} et négativement ($\varepsilon_i = -1$) dans le cas contraire. La tension V_{AB} est positive si le sens choisi et indiqué par la flèche est le sens réel et V_{AB} négative dans le cas contraire.

