CHAPITRE I

CHAMP ET POTENTIEL ELECTROSTATIQUE

1-1 RAPPELS

1-1-1) Electrisation

Il existe deux types d'électricités : l'électricité positive et l'électricité négative qui existent sous forme granulaire. L'électron appartient au type négatif et le proton au type positif.

La charge d'un corps est la mesure de la quantité d'électricité qu'il porte. C'est une grandeur caractéristique au même titre que la masse qui exprime la quantité de matière. C'est un multiple d'une charge élémentaire indivisible $e = 1{,}6\ 10^{-19}$ C.

1-1-2) Principe de conservation de l'électricité

La charge algébrique d'un système isolé reste constante quel que soit le phénomène qui s'y produit, ce qui veut dire que l'apparition d'une charge positive $+\,Q$ entraîne celle d'une charge négative $-\,Q$.

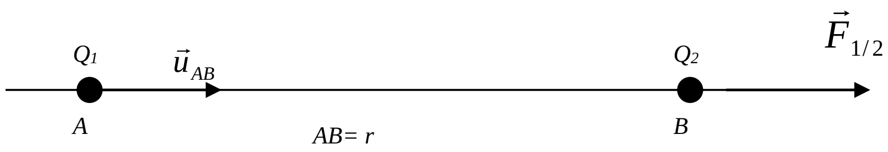
1-1-3) Loi de Coulomb

La loi de Coulomb décrit l'interaction entre deux charges ponctuelles immobiles.

<u>Enoncé</u> : Soient deux charges ponctuelles Q_1 et Q_2 immobiles distantes de r l'une de l'autre. La charge Q_1 exerce sur la charge Q_2 une force $\vec{F}_{1/2}$ directement proportionnelle au produit Q_1Q_2 des charges, inversement proportionnelle au carré de la distance r qui les sépare. Cette force est radiale, c'est-à-dire portée par la droite qui joint les deux charges, répulsive si $Q_1Q_2 > 0$ et attractive si $Q_1Q_2 < 0$:

$$\boxed{\vec{F}_{1/2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{r^2}\vec{u}_{AB} \quad (N)} \quad ; \quad \frac{1}{4\pi\pi_0} = 9\,10^{9}\ (N\ m^2C^{-2})$$

Cette expression n'est valable que pour des charges immobiles placées dans le vide. La constante $\varepsilon_0 = 8{,}85\ 10^{-12}\ F/m$ est appelée permittivité du vide.

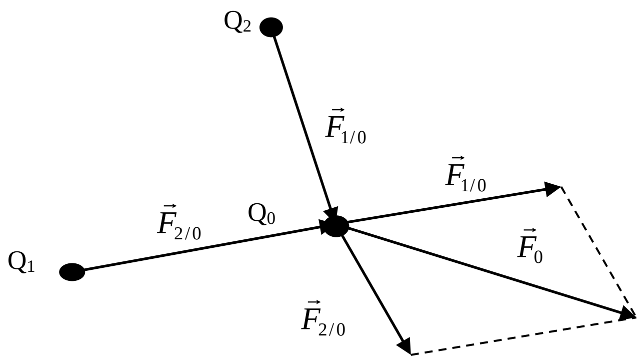


Remarques.

- Cette force obéit au principe de l'action et de la réaction de la mécanique classique : la charge Q_2 exerce sur la charge Q_1 une force $\vec{F}_{2/1} = -\vec{F}_{1/2}$.
- La force électrostatique a les mêmes propriétés vectorielles que la force de gravitation de Newton (loi en $1/r^2$).

1-1-4) Principe de superposition.

Il est relatif à l'action d'un ensemble discret de N charges Q_i, dites charges actives, sur une charge d'épreuve Q_0 (ou charge passive). L'expérience montre que la force exercée sur la charge Q_0 par ce système de plusieurs charges est la somme vectorielle des forces exercées sur Q_0 par chacune des charges prise isolément. Ce qui veut dire que la loi de Coulomb s'applique à chaque couple de charges (Q_i, Q_0).



$$\vec{F}_0 = \vec{F}_{1/0} + \vec{F}_{2/0}$$

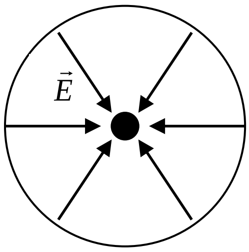
1-2 VECTEUR CHAMP ELECTROSTATIQUE

1-2-1) Champ produit par une ou plusieurs charges ponctuelles Q_i.

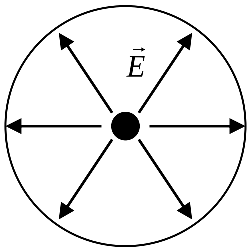
On introduit la notion de champ électrostatique pour apprécier la modification des caractéristiques physiques de l'espace environnant une charge Q. Cette modification se manifeste par le fait qu'une charge d'épreuve Q_0 placée dans l'environnement de la charge Q subit une force $\vec{F}_0$. Le champ électrostatique se défini et s'exprime par la force qu'exerce la charge active Q sur la charge d'épreuve Q_0: $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}_0}{Q_0}$ soit $\vec{F}_0 = Q_0\vec{E}$. D'après la loi de Coulomb, $\vec{F}_0 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q_0 Q}{r^2}\vec{u}_{AB}$ (N) on en déduit

$$\boxed{\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\vec{u}_{AB} \;\; (V/m)}$$

D'après la loi de Coulomb, on peut dire que le champ produit en un point B quelconque de l'espace par une charge ponctuelle placée en un point A est radial, porté par une droite *(AB)*, divergent (même sens que $\vec{U}_{AB}$) si $Q > 0$ et convergent (sens contraire de $\vec{U}_{AB}$) si $Q < 0$.



Champ convergent

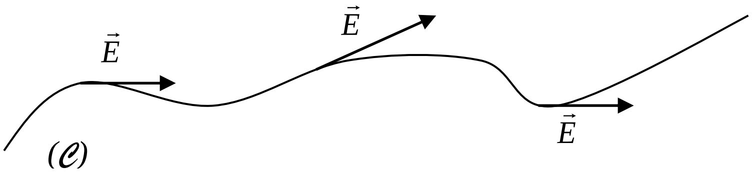


Champ divergent

$Q < 0$ $Q > 0$

$\vec{E}$ est défini en tout point $r \neq 0$, c'est un champ de vecteur.

Au champ de vecteur $\vec{E}$ correspond une famille de courbes appelées lignes de champ ou lignes de force. Une ligne de champ d'un champ de vecteur quelconque est une courbe $(\mathscr{C})$ définie dans l'espace telle que le vecteur $\vec{E}$ soit tangent en chacun de ses points.



Soit un déplacement élémentaire $\vec{dl}$ le long d'une ligne de champ électrostatique. Le champ $\vec{E}$ est tangent à la ligne de champ, donc parallèle à $\vec{dl}$, ce qui se traduit par l'équation vectorielle :

$$\boxed{\vec{E} \wedge \vec{dl} = \vec{O}}$$

Dans un système de coordonnées donné, la résolution de cette équation permet de déterminer l'équation des lignes de champ.

En coordonnées cartésiennes : $\vec{dl} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$. Les lignes de champ sont calculées en résolvant

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$$

En coordonnées cylindriques : $d\vec{l} = d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z$. L'équation des lignes de champ devient $$\frac{d\rho}{E_\rho} = \frac{\rho d\theta}{E_\theta} = \frac{dz}{E_z}$$

En coordonnées sphériques : $d\vec{l} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + rsin\theta d\phi\,\vec{e}_\phi$. L'équation des lignes de champ devient et $$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta} = \frac{rsin\theta d\phi}{E_\phi}$$

La connaissance du champ électrostatique $\vec{E}$ dans une région de l'espace permet donc de calculer la force agissant sur une charge quelconque placée dans cette région sans avoir besoin de connaître les positions exactes des charges actives qui exercent cette force.

La force électrostatique et donc le champ électrostatique obéit au principe de superposition. Le champ produit en un point *M* par un système de *N* charges ponctuelles fixes Q_i, situées à des points P_i, est égal à la somme vectorielle des champs produits par chacune des charges du système :

$$\boxed{\vec{E} = \sum_{i=1}^{N}\vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\pi_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{Q_i}{r_i^2}\vec{u}_{P_iM}}$$

Où $r_i = P_i M$ et $\vec{U}_{P_iM}$ est le vecteur unitaire directeur de la droite *(P_i, M)*.

1-2-2) Champ produit par une distribution continue de charges

Jusqu'ici on a considéré que les charges sont ponctuelles, fixe et réparties de façon discrète. Dans la pratique on considère des matériaux comprenant un nombre énorme de particules chargées quasi-ponctuelles. On ne peut plus distinguer une particule de l'autre à cause de ce que l'on ne travail qu'à des échelles spatiales très grandes devant les distances entre particules. On est donc amené à considérer que ces charges sont réparties de façon continue. On distingue :

- Une répartition linéaire caractérisée par une densité linéique de charges :

$$\lambda = \frac{dQ}{dl} \quad (C/m) .$$

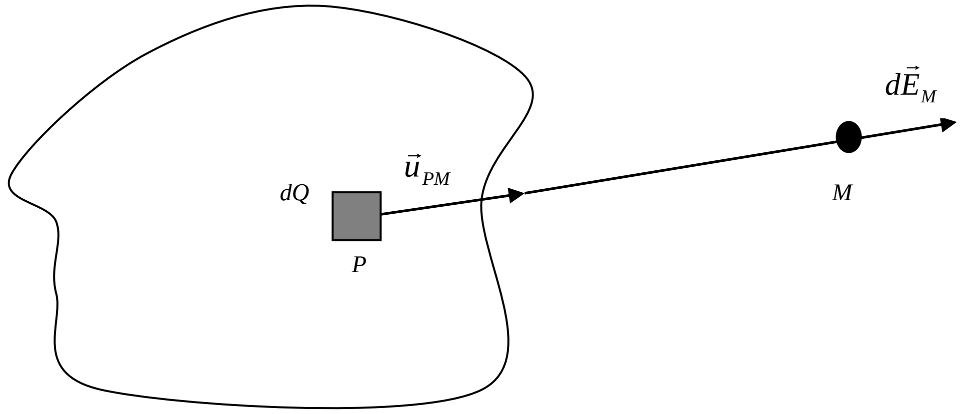
- Une répartition en surface caractérisée par une densité surfacique de charges :

$$\sigma = \frac{dQ}{dS} \quad (C/m^2) .$$

- Une répartition en volume caractérisée par une densité volumique de charges :

$$\rho = \frac{dQ}{d\vartheta} \quad (C/m^3) .$$

Le champ produit par une distribution continue de charges s'obtient en s'inspirant du principe de superposition : On exprime le champ élémentaire $d\vec{E}_M$ produit en un point *M* par une charge infiniment petite *dQ* située autour d'un point *P* de la distribution. On assimile *dQ* à une charge ponctuelle, d'où $d\vec{E}_M = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{r^2}\vec{u}_{PM}$.



Le champ produit en *M* par toute la distribution s'obtient en faisant la somme vectorielle des petits champs $d\vec{E}_M$ produits par l'infinité de charges *dQ* qui forment la distribution. Cette somme revient à faire une intégrale simple, double ou triple si la distribution est respectivement linéique, surfacique ou volumique :

$$\boxed{\vec{E}_M = \int d\vec{E}_M = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{r^2}\vec{u}_{PM}}$$

dQ est en général fonction des coordonnées du point *P*.

Les vecteurs $d\vec{E}_M$ produits par ces charges *dQ* ne sont pas forcements parallèles entre eux. On ne peut donc pas faire la somme des modules. $E_M = \int dE_M$.

Par contre on peut faire la sommation des composantes entre elles. Ainsi en coordonnées cartésiennes on aura :

$d\vec{E}_M = dE_x\vec{i} + dE_y\vec{j} + dE_z\vec{k}$ où $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont les vecteurs unitaires suivant les axes *x, y* et *z*.

En sommant, on aura : $\vec{E}_M = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k} = \int (dE_x\vec{i} + dE_y\vec{j} + dE_z\vec{k})$. Par identification, on aura :

$$E_x = \int dE_x$$

$$E_y = \int dE_y$$

$$E_z = \int dE_z$$

Il s'agit ici de l'application d'un principe bien connu : ***les composantes d'une somme vectorielle sont égales aux sommes des composantes des termes de la somme.***

1-2-3) Propriétés de symétrie du Champ électrostatique : Principe de Curie.

<u>Enoncé</u> : ***Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits***.

Le champ électrostatique est un effet créé par une distribution de charges. Aussi, si l'on connaît les propriétés de symétrie d'une distribution de charges, on pourra connaître celles du champ électrostatique associé. Ces propriétés permettent de simplifier le calcul du champ électrostatique.

Règles de symétrie :

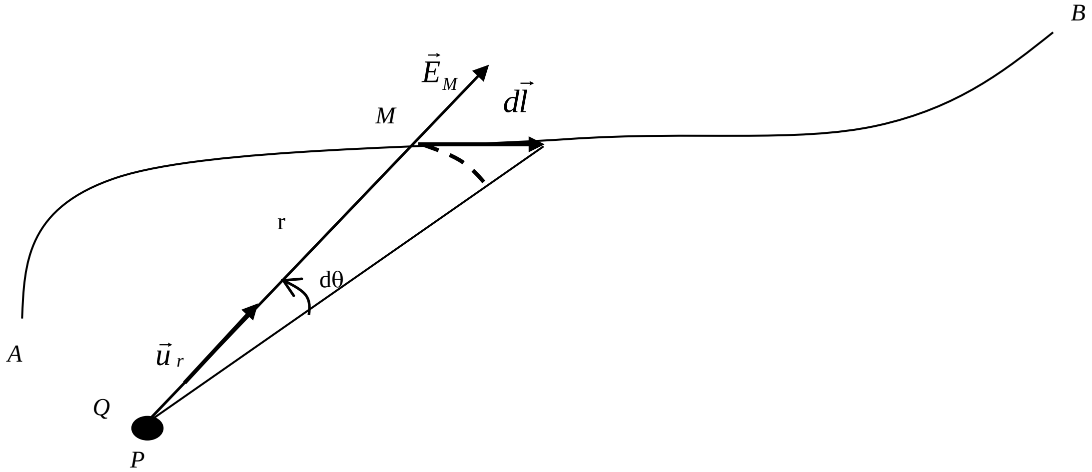
Considérons un système physique *S*.

- <u>Invariance par translation</u> : si *S* est invariant dans toute translation parallèle à un axe *Oz*, les effets ne dépendent pas de *z*.
- <u>Symétrie axiale</u> : si *S* est invariant dans toute rotation ***O*** autour d'un axe *Oz*, alors ses effets exprimés en coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) ne dépendent pas de θ.
- <u>Symétrie cylindrique</u> : si *S* est invariant par translation le long de l'axe *Oz* et par rotation autour de ce même axe, alors ses effets exprimés en coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) ne dépendent que de la distance ρ.
- <u>Symétrie sphérique</u> : si *S* est invariant dans toute rotation autour d'un point *O*, alors ses effets exprimés en coordonnées sphériques (r, θ, φ) ne dépendent que de la distance au centre *r*.
- <u>Plan de symétrie Π</u>: si *S* admet un plan de symétrie *P*, alors en tout point de ce plan, le champ électrostatique est contenu dans ce plan.
- <u>Plan antisymétrique Π'</u> : si, par symétrie par rapport à un plan *P'*, *S* est transformé en - *S*, alors en tout point de ce plan, le champ électrostatique lui est perpendiculaire.

1-3 POTENTIEL ELECTROSTATIQUE

1-3-1) Cas d'une ou de plusieurs charges ponctuelles

Soit une charge active *Q* placée en un point *P*. Cette charge crée un champ électrostatique dans l'espace environnant. Calculons le travail de la force électrique appliquée à une charge d'épreuve Q_0 qui se déplace le long d'un trajet *AB* défini dans cet espace.



En un point M du contour $\vec{F_0} = Q_0\vec{E}_M$ avec $\vec{E}_M = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}\vec{u}_r$. Au bout d'un déplacement élémentaire $d\vec{l}$ le travail $dW = \overrightarrow{F_0}d\vec{l}$. En exprimant la force on trouve $dW = Q_0\overrightarrow{E_M}d\vec{l}$. Pour une charge d'épreuve unité la quantité $dW = \overrightarrow{E_M}d\vec{l}$ est appelée circulation du champ électrostatique le long de $d\vec{l}$. En exprimant $\vec{E}_M$, on trouve :

$$dW = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{PM^2}\overrightarrow{u_r}d\vec{l} \text{ avec } \overrightarrow{PM} = r\vec{u}_r \; .$$

$$d\vec{l} = d\overrightarrow{PM} = rd\vec{u}_r + \vec{u}_\theta dr$$

$$dW = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\overrightarrow{u_r}\left(rd\theta\overrightarrow{u_\theta} + \overrightarrow{u_r}dr\right) \text{ or } \vec{u}_r \perp \vec{u}_\theta \quad \text{d'où}$$

$$dW = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}dr = -d\left(\frac{Q}{4\pi\pi_0}\frac{1}{r}\right) \; .$$

La circulation du champ entre les points A et B a pour expression :

$$W_A^B = \int_{r_A}^{r_B} -d\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right]$$

La circulation du champ électrostatique le long du trajet AB est donnée par la différence des valeurs que prend une fonction scalaire de position $V\ (r)$ au point de départ A et au point d'arrivée B :

$$\boxed{V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} + cte}$$

Elle est donc indépendante du trajet emprunté. On dit que la ***circulation du champ est conservative***. Ceci exige mathématiquement que $dV = d(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}) = -\vec{E}_M d\vec{l}$ soit une différentielle totale.

La Fonction *V(r)* est appelée potentiel électrique produit par la charge *Q* en un point *M* situé à une distance de *r* de *Q*. *V (r)* est défini en tout point de l'espace $r \neq 0$. C'est un champ de scalaires. Si le parcours est un contour fermé, la circulation du champ est nulle :

$$W_A^B = \int_A^B \overrightarrow{E_M}\, d\vec{l} = \int_A^B -dV = V_A - V_A = 0$$

La circulation du champ électrostatique le long de tout contour fermé est nulle :

$$\boxed{\oint_C \vec{E}d\vec{l} = 0}$$

Dans le cas où le potentiel en *M* est produit par un ensemble de *N* charges ponctuelles Q_i, fixe, il découle du principe de superposition que ce potentiel est la somme algébrique des potentiels crées par chacune des charges prise isolément :

$$\boxed{V = \sum_{i=1}^{N} V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{Q_i}{r_i} + cte}$$

r_i est la distance entre la charge Q_i et le point *M*.

1-3-2) Cas distribution continue de charges.

Dans le cas où le potentiel en *M* est créé par une distribution continue de charges, on s'inspire toujours du principe de superposition pour calculer ce potentiel : on exprime le potentiel élémentaire dV_M crée en *M* par un élément de charge *dQ* pris autour d un point *P* de la distribution. On assimile *dQ* à une charge ponctuelle d'où :

$$dV_M = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

Le potentiel V_M s'obtient en effectuant une intégration sur toute la distribution. Ainsi pour les distributions linéique, surfacique et volumique on obtient respectivement :

$$V_M = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{(L)}\frac{\lambda\, dl}{r} + cste$$

$$V_M = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{(S)}\frac{\sigma\, dS}{r} + cste$$

$$V_M = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{(\vartheta)}\frac{\rho\, d\vartheta}{r} + cste$$

Dans tous les cas (charges ponctuelles ou distribution continue de charges) le potentiel est défini à une constante additive près. Par convention quand il n'y a aucune charge source à l'infini, on choisit $V(\infty) = 0$ ce qui entraîne que la constante est nulle.

1-4 RELATION ENTRE CHAMP ET POTENTIEL

La relation de départ est $dV = -\vec{E}\,\vec{dl}$ où dV est une différentielle totale. Dans le système de coordonnées cartésiennes cela s'exprime par l'équation :

$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$ que l'on peut mettre sous la forme

$dV = (\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k})(dx\vec{i} + dy\vec{j} + d\vec{k})$ où $dx\vec{i} + dy\vec{j} + d\vec{k} = d\vec{l}$ est le déplacement élémentaire. On a donc $dV = \overrightarrow{grad}\,V\vec{dl} = -\vec{E}\vec{dl}$. Par identification on en déduit l'expression du champ électrostatique :

$$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V}$$

Cette relation exprime que le champ dérive d'un potentiel V et que les lignes de champ vont dans le sens des potentiels décroissant (dV est le plus grand possible si le déplacement $\vec{dl}$ se fait dans le sens de $\overrightarrow{grad}\ V$). Cette relation est équivalente aux trois équations scalaires :

$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}\,;\, E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}\,;\, E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$ dans le système de coordonnées cartésiennes,

$E_\rho = -\frac{\partial V}{\partial \rho}\,;\, E_\theta = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \theta}\,;\, E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$ dans le système de coordonnées cylindriques,

$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}\,;\, E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\,;\, E_\phi = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}$ dans le système de coordonnées sphériques.

1-5 DIPOLE ELECTROSTATIQUE

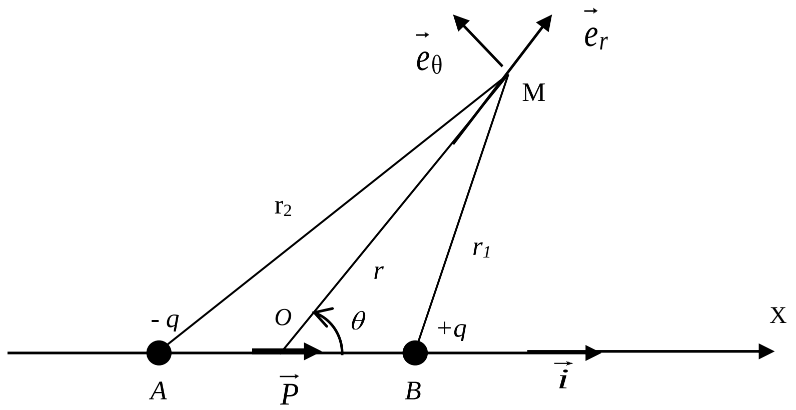
1-5-1) Définitions

Il existe dans la nature des systèmes électriquement neutres mais dont le centre de gravité des charges positives n'est pas confondu avec celui des charges négatives. Un tel système peut être décrit (modélisé) par deux charges ponctuelles $+q$ et $-q$ situées à une distance $AB = a$ l'une de l'autre. Lorsque la distance AB est très faible devant toutes les autres dimensions qui apparaissent dans le calcul des effets électrostatiques (champ et potentiel), un tel système de charges ponctuelles est appelé ***dipôle électrostatique***. Un dipôle est caractérisé par son moment dipolaire défini par le vecteur :

$$\boxed{\vec{P} = q\overrightarrow{AB} \ (C/m)}$$

Les molécules telles que HCL, CO, H_2O constituent des exemples de dipôles électrostatiques :

1-5-2) Potentiel électrostatique crée par un dipôle



La détermination de la force qu'exercent ces deux charges sur une charge quelconque placée en un point *M* nécessite le calcul du champ électrostatique en ce point. La méthode la moins fastidieuse qui permet d'obtenir le champ est de calculer le potentiel *V(r)*. D'après le principe de superposition, le potentiel crée en un point *M* est :

$$V(M) = V_1(M) - V_2(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Lorsque le point *M* est suffisamment éloigné du dipôle, c'est-à-dire que $a = AB$ est très faible devant *r*, on peut faire un développement limité de *V (M)* en exprimant la position de *M* en coordonnées polaires coordonnées (r, θ). En se limitant aux termes du premier ordre en $\frac{a}{r}$ on obtient :

$$\frac{1}{r_1} \approx \frac{1}{r}\left(1 + \frac{a\cos\theta}{2r}\right) \text{et } \frac{1}{r_2} \approx \frac{1}{r}\left(1 - \frac{a\cos\theta}{2r}\right)$$

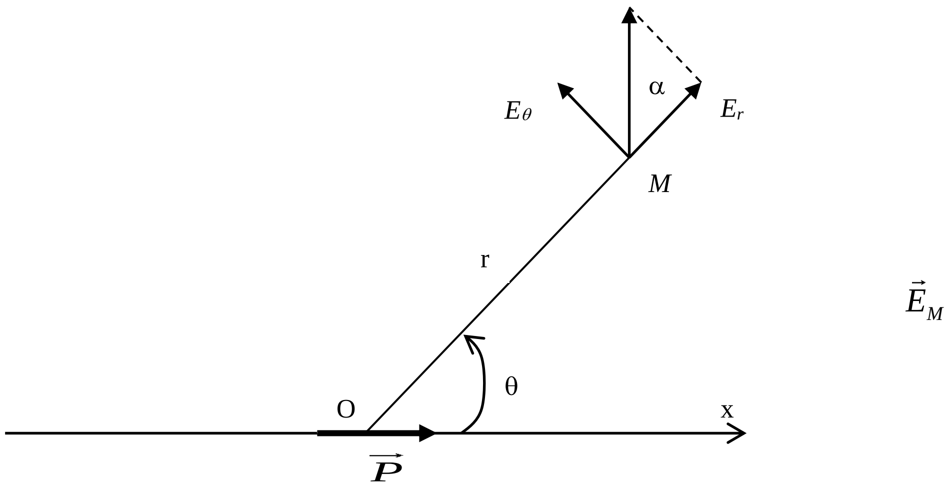
d'où $V(M) = \frac{qa\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ qui peut se mettre sous la forme $\boxed{V(M) = \frac{\vec{p}.\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$

1-5-3) *Champ électrostatique crée à grande distance par un dipôle.*

Par construction, le dipôle possède une symétrie de révolution autour de la direction du vecteur $\vec{P}$, c'est-à-dire autour de la droite *(AB)* appelée axe polaire. Le champ électrostatique possède donc cette symétrie (principe de Curie). Ainsi, en tout point *M* les vecteurs $\vec{E}_M$ et $\vec{P}$ sont situés dans le même plan. Cela permet de tracer les lignes de champ et les équipotentielles.

Le champ électrostatique se déduit de $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$. En coordonnées cylindriques on obtient :

$$\vec{E}_M = \begin{pmatrix} E_r = -\dfrac{\partial V}{\partial r} = \dfrac{2P\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \\ E_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} = \dfrac{P\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \\ E_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z} = 0 \end{pmatrix}$$



Les équipotentielles sont des surfaces (dans l'espace ; dans le plan ce sont des courbes) définies par $V = V_0 = cste$, c'est-à-dire

$$\boxed{r = \left(\frac{P}{4\pi\varepsilon_0 V_0}\cos\theta\right)^{1/2}}$$

L'équation des lignes de champ s'obtient en résolvant $\dfrac{dr}{E_r} = \dfrac{rd\theta}{E_\theta} \Rightarrow \dfrac{dr}{r} = \dfrac{2\cos\theta d\theta}{\sin\theta}$. On obtient :

$$\boxed{r = K\sin^2\theta}$$

Au point *M* le vecteur $\vec{E}_M$:

- a pour module $E_M = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2 + E_z^2} = \frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{1+3cos^2\theta}$
- fait un angle α avec la droite *(OM)* tel que $tg\alpha = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{1}{2}tg\theta$. α est indépendant de *r*. On en déduit que la direction de $\vec{E}_M$ est la même en tout point de la droite *(OM).*

1-6 TRAVAIL D'UNE FORCE ELECTROSTATIQUE : ENERGIE POTENTIELLE

1-6-1) Cas d'une charge ponctuelle

Considérons une région de l'espace où règne un champ électrostatique. Une particule de charge *q* placée dans cette région est soumise à une force $\vec{F}=q\,\vec{E}$. Si elle est libre, la particule se déplace dans le sens de la force. On se propose de déplacer la particule d'un point M_∞ à un point *M* suivant un certain trajet $(M_\infty,, M)$ avec une vitesse de déplacement infiniment faible (énergie cinétique quasi-nulle). Ceci n'est possible que si, à tout point du trajet, la force extérieure que l'on applique est opposée à la force électrostatique : $\vec{F}_{ext} = -q\,\vec{E}$. Le travail fourni, pour un point M_∞ situé à l'infini, sera donc : $W(M)= \int_{M_\infty}^{M} dW = \int_{M_\infty}^{M} \vec{F}_{ext}d\vec{l} = -\int_{M_\infty}^{M} q\vec{E}dl = q(V_M - V_{M_\infty})$. Puisqu'on peut toujours définir le potentiel nul à l'infini, on obtient l'expression $W(M) = qV_M$. En vertu du principe de conservation de l'énergie, l'énergie cinétique étant nulle, l'énergie dépensée *W(M)* se retrouve sous une autre forme appelée ***énergie potentielle électrostatique*** :

$$\boxed{E_P = qV_M}$$

Définition : L'énergie potentiel électrostatique d'une particule de charge q placée en un point M où règne un potentiel V_M, est égale au travail qu'il faut fournir pour amener, de façon quasi-statique, cette particule de l'infini au point M.

1-6-2) Cas d'un système de charges ponctuelles

L'énergie potentielle électrostatique d'un système de charges ponctuelles est l'énergie nécessaire pour assembler ces charges en les amenant de l'infini à un point du système. Considérons d'abord le cas de trois charges ponctuels q_1, q_2 et q_3. On amène d'abord la charge q_1 de l'infini à la position r_1. Aucun travail n'est fourni $W_1 = 0$. q_1 crée en tout point *r* un potentiel $V_1(r) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}$. Pour amener q_2 de l'infini à la position r_2, il faut fournir un travail $W_2 = q_2 V_1(r_2)$. q_1 et q_2 créent en tout point un potentiel $V_{12}(r) = V_1(r) + V_2(r)$. Pour amener donc amener q_3 de l'infini à la position r_3, il faut fournir une énergie $W_3 = q_3 V_1(r_3) + q_3 V_2(r_3)$. Le travail total fournie pour assembler les trois charges est :

$$\mathrm{E}_P = W_1 + W_2 + W_3$$

$$E_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_1}{r_{21}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{q_3 q_1}{r_{31}} + \frac{q_3 q_2}{r_{32}}\right]\right)$$

où $r_{12} = r_{21}$, $r_{13} = r_{31}$ et $r_{23} = r_{32}$.

On en déduit que :

$$E_P = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i \neq j}^{3} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i \neq j}^{3} q_i V_j$$

($r_{ij} = r_i - r_j$ est la distance entre les charges q_i et q_j, V_j est le potentiel auquel est soumise la charge q_i de la part des autres charges q_j). De façon générale, l'énergie potentielle d'un système N charge ponctuelle Q_i s'écrire :

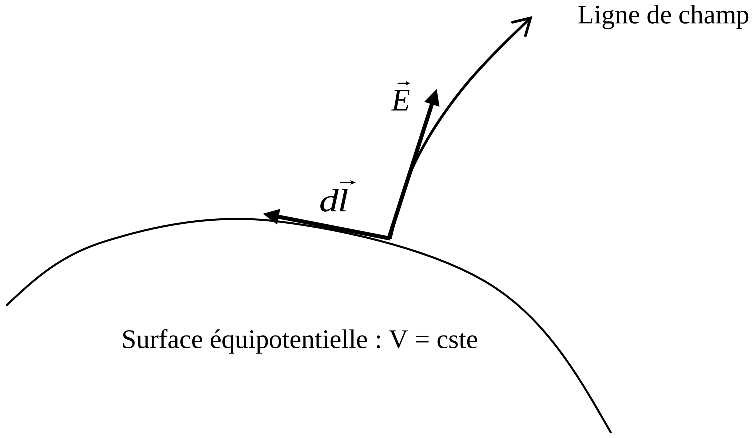
$$\boxed{E_P = \frac{1}{2}\sum_{i \neq j}^{N} Q_i V_j}$$

1-7 SURFACE EQUIPOTENTIELLE ET DIAGRAMME ELECTRIQUE

Soit une région de l'espace où règne un champ électrostatique $\vec{E}$ ainsi que le potentiel V qui lui est associée.

On dit qu'une surface (physique ou géométriquement définie) est une surface équipotentielle si le potentiel est le même en tout point de la surface. Sur une telle surface, le potentiel obéit à l'équation : $V(x, y, z) = cste$ en coordonnées cartésiennes. On peut noter deux propriétés intéressantes des surfaces équipotentielles :

- $dV = -\vec{E}d\vec{l} = 0$ pour tout trajet situé sur une surface équipotentielle. Comme $d\vec{l}$ est tangent à la surface équipotentielle, $\vec{E}$ lui est perpendiculaire en tout point. Il en est de même pour les lignes de champ car $\vec{E}$ est tangent aux lignes de champ.



- Le travail nécessaire pour déplacer une particule chargée d'un point à un autre d'une même surface équipotentielle est nul. En effet le travail requis pour déplacer une particule de charge q_0 de A à B s'exprime par :

$$W_{AB} = q_0(V_A - V_B)$$

$$W_{AB} = 0 \text{ car } V_A = V_B$$

Le diagramme électrique est la représentation des équipotentielles et des lignes de champ sur une même figure.

CHAPITRE II

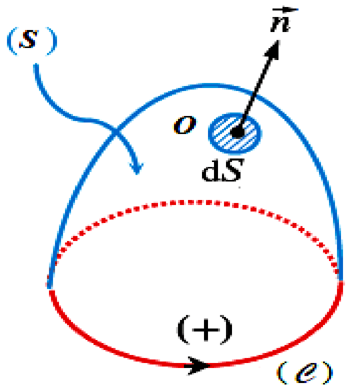
RELATIONS FONDAMENTALES DE L'ELECTROSTATIQUE

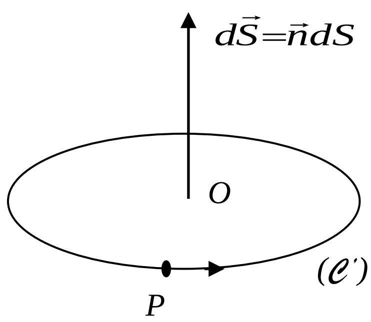
2-1 DEFINITIONS

2-1-1) Flux d'un champ de vecteur à travers une surface

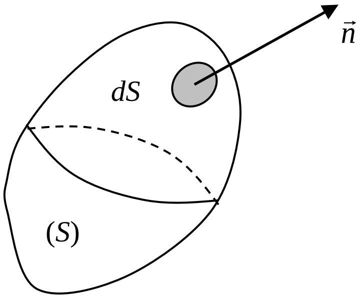
2-1-1-1) Orientation d'une surface

On considère un contour fermé et orienté $\mathscr{C}$. Une surface (S) quelconque qui s'appuie sur un contour fermé est dite ouverte. L'orientation d'une telle surface consiste à distinguer par convention ses faces en choisissant un sens positif de passage quand on la traverse. Pour ce faire, on convient d'orienter tout élément de surface dS centré en un point O de (S) par un vecteur $\vec{n}$ porté par la normale à dS et dont le sens est donné par la règle des trois doigts de la main droite (ou la règle du tire-bouchon de Maxwell), le contour $\mathscr{C}'$ qui délimite dS étant orienté dans le même que $\mathscr{C}$: si P désigne un point du contour qui délimite dS, on a le pouce en P le long de $\mathscr{C}'$ dans le sens d'orientation, l'index = $\overrightarrow{PO}$ vise le centre O et le majeur = $\vec{n}$. La face négative est alors celle qu'on rencontre en premier quand on traverse la surface dans le sens positif (sens du vecteur $\vec{n}$), l'autre étant la face positive. On s'aperçoit que l'orientation d'une surface ouverte est arbitraire. Le sens conventionnel positif d'un contour fermé est le sens antihoraire (sens trigonométrique).





Une surface ouverte s'appuie toujours sur un contour fermé, alors qu'une surface fermée délimite un volume et ne peut donc s'appuyer sur un contour fermé. Dans le cas d'une surface fermée la normale positive est orientée de l'intérieur vers l'extérieur.

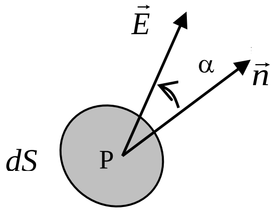


Un élément de surface aura donc une direction et un sens qui seront indiqués par le vecteur unitaire $\vec{n}$ normal à la surface *(S)*. On appellera ***vecteur élément de surface*** le vecteur $d\vec{S}=\vec{n}dS$.

2-1-1-2) Flux d'un champ de vecteur $\vec{E}$ à travers une surface fermée: Théorème de Green.

2-1-1-2-1) Définition du flux

Considérons un vecteur élément de surface $d\vec{S}=\vec{n}dS$ centré en un point *P* d'une région de l'espace où règne un champ de vecteur $\vec{E}$. On appelle flux élémentaire du vecteur $\vec{E}$ à travers $d\vec{S}$ le produit scalaire $d\phi = \vec{E}d\vec{S} = EdS\cos\alpha$. Le flux total s'obtient par intégration sur toute la surface : $\phi = \iint \vec{E}d\vec{S}$ .Suivant la valeur de l'angle α, $d\phi$ peut être positif ou négatif. Dans le premier cas le flux est dit sortant, et dans le second cas le flux est dit entrant.



2-1-1-2-2) Théorème de Green.

Le but du théorème de Green est de transformer l'expression du flux à travers une surface fermée quelconque (*S*) qui délimite un volume (ϑ).

<u>*Enoncé*</u> : ***Le flux d'un champ de vecteur $\vec{E}$ sortant d'une surface fermée S qui délimite un volume ϑ est égal à l'intégral triple de la divergence du vecteur $\vec{E}$ étendu à tout le volume*** :

$$\boxed{\varphi = \oiint_{(S)} \vec{E}d\vec{S} = \iiint_{(\mathcal{V})} \mathrm{div}\vec{E}\,d\mathcal{V}}$$

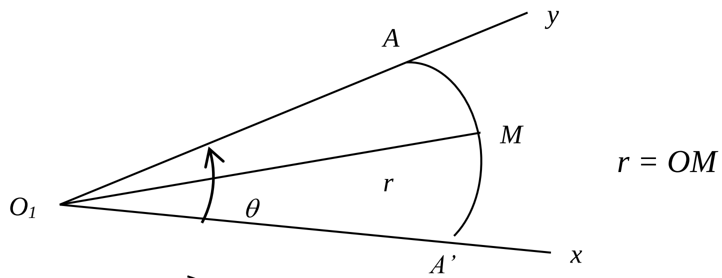
2-1-2) *Angle solide*

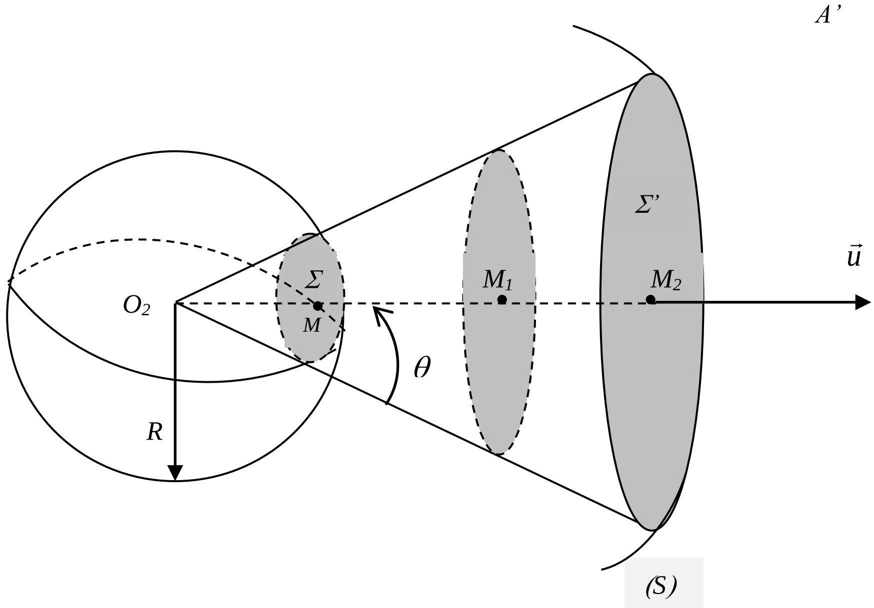
2-1-2-1) Définition

La notion d'angle solide généralise celle de l'angle de la géométrie plane. Alors que l'angle caractérise la portion de plan comprise entre deux demi-droites de même origine O_1, l'angle solide caractérise l'espace délimité par un cône de sommet O_2 et de demi-angle d'ouverture θ.

De même que l'angle est mesuré par le rapport entre l'arc de cercle *AA'* coupé par les deux demi-droites sur le cercle de centre O_1 et son rayon *r*, on mesure l'angle solide par le rapport entre la surface Σ découpée par un cône sur une sphère de centre O_2 et le carré de son rayon $R = O_2M$: $\Omega = \frac{\Sigma}{R^2}$. Ω est l'angle solide sous lequel du point O_2 on voit la surface *(S)*.

Ω ne change pas si $R = 1$. Egalement si on choisi une autre sphère de rayon $R' = O_2M_2$ on a : $\Omega' = \frac{\Sigma'}{R'^2}$. Par homothétie on a : $\frac{\Sigma'}{R'^2} = \frac{\Sigma}{R^2}$ soit $\Omega' = \Omega$. L'angle solide Ω est sans dimension et il s'exprime en Stéradian *(Sr)*.



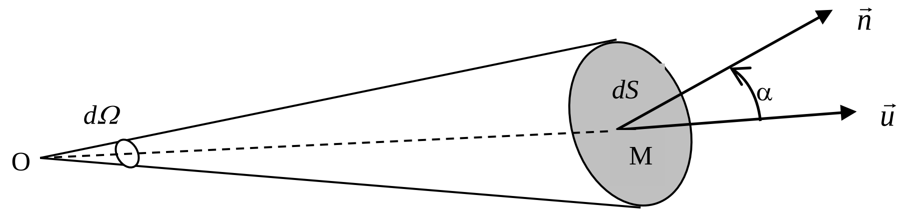


O_2M_2 est appelé génératrice du cône.

2-1-2-2) Angle solide élémentaire

Le plus souvent la surface qui définit l'angle solide n'est pas sphérique. Il faut donc exprimer l'angle solide élémentaire $d\Omega$ en fonction de la surface élémentaire interceptée dS. Soit un cône élémentaire de sommet O s'appuyant sur l'élément de surface dS centré sur le point M avec $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r\vec{u}$. Par définition l'angle solide élémentaire sous lequel on voit, du point O, l'élément de surface dS par sa face négative, est :

$$\boxed{d\Omega = \frac{\vec{u}\,d\vec{S}}{r^2} = \frac{\vec{u}\,\vec{n}\,dS}{r^2} = \frac{dS\cos\alpha}{r^2}}$$



2-2 THEOREME DE GAUSS

2-2-1) Enoncé.

Le flux du champ électrostatique $\vec{E}$ sortant d'une surface fermée (S) est égal au quotient par ε_0 de la somme algébrique de toutes les charges électriques situées à l'intérieur de la surface (S) appelée surface de Gauss.

$$\boxed{\phi = \oiint_{(S)} \vec{E}d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}}$$

S'il s'agit d'une distribution discrète de charges $Q = \sum_{i=1}^{N} Q_i$. S'il s'agit d'une distribution continue de charges $Q = \int_{(D)} dq$.

Remarque :

Pour calculer le flux du vecteur champ électrostatique on s'appuie sur les éléments de symétrie de la distribution pour choisir la surface de Gauss pour laquelle l'intégration donnant le flux total est facile. Cette surface est géométriquement définie mais généralement fictive. Elle est telle qu'en tous ses points le champ est constant en intensité et colinéaire à la normale positive : $\phi = \oiint_{(S)} \vec{E}d\vec{S} = \oiint_{(S)} EdS = ES = \frac{Q}{S}$.

2-3 CONSEQUENCES DU THEOREME DE GAUSS

2-3-1) Equation de Poisson

Considérons une distribution volumique de charges de densité ρ. D'après le théorème de Green et de Gauss on a :

$\phi = \oiint_{(S)} \vec{E}d\vec{S} = \iiint_{(\mathcal{V})} div\vec{E}d\mathcal{V} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \iiint_{(\mathcal{V})} \frac{\rho d\mathcal{V}}{\varepsilon_0}$. On en déduit que $\boxed{div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$

Cette relation exprime la forme locale du théorème de Gauss. Or $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\ V$ d'où

$div(-\overrightarrow{grad}V) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ soit : $\boxed{\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$. Cette relation exprime l'équation de Poisson

2-3-2) Equation de Laplace

Il découle du théorème de Gauss que dans toute région de l'espace dépourvue de charges électriques, le flux du vecteur champ électrostatique à travers toute surface fermée est nul. $\phi = \oiint_{(S)} \vec{E}d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = 0$. On dit que le flux est conservatif. Un tel flux est le même à travers toutes les sections d'un tube de champ. On a $\varphi = \oiint_{(S)} \vec{E}d\vec{S} = \iiint_{(\mathcal{V})} div\vec{E}d\mathcal{V} = 0$ soit donc $div\vec{E} = 0$. En exprimant $\vec{E}$ comme précédemment on obtient pour une telle région :

$$\boxed{\Delta V = 0}$$

Cette relation exprime l'équation de Laplace.

2-4 VECTEUR DEPLACEMENT OU INDUCTION ELECTRIQUE $\vec{D}$

On définit le vecteur induction électrique par $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$, dans le vide, et par $\vec{D} = \varepsilon\ \vec{E}$ dans un milieu diélectrique avec ε appelé permittivité absolue du milieu. On utilise ce vecteur surtout pour l'étude du champ électrique dans un milieu diélectrique à cause de ses effets sur les constituants du milieu. La relation entre $\vec{D}$ et $\vec{E}$ peut y être très complexe. Mais dans le cas des diélectriques linéaires (diélectriques parfaits) $\vec{D}$ et $\vec{E}$ sont proportionnels. Le théorème de Gauss se traduit par la relation : $\phi = \oiint_{(S)} \vec{D}d\vec{S} = Q$

CHAPITRE III

LES CONDUCTEURS

3-1 CONDUCTEUR EN EQUILIBRE

On étudie ici les charges non plus placées dans le vide mais à l'intérieur de systèmes matériels. On étudiera les corps conducteurs solides.

3-1-1) Définition

Par définition un conducteur est un corps dans lequel se trouve un grand nombre de porteurs de charge libres, c'est-à-dire capable de se déplacer sous l'action d'une force extérieure appliquée. Par exemple les métaux, les alliages. Dans un solide les porteurs de charge libres de se déplacer sont les électrons (plus les trous dans les semi-conducteurs). Dans les solutions ces porteurs de charge sont des ions.

A l'inverse, les corps appelés isolants comme le mica, le souffre, la paraffine, le verre, la résine synthétique ne possèdent pas de porteurs de charge libres. Pour ces corps l'électrisation par frottement donne des charges qui restent localisées dans la région où elles ont été produites.

3-1-2) Equilibre électrostatique

On supposera que le conducteur est homogène et que sa température est uniforme et constante. Dans ces conditions un conducteur sera en équilibre si aucune force extérieure n'agit sur ses porteurs de charge libres, c'est-à-dire que pour ces porteurs il n'y a pas de mouvement ordonné, un tel mouvement ne pouvant être engendré que par une force extérieure due à un champ électrique.

3-2 PROPRIETES ELECTRIQUES D'UN CONDUCTEUR EN EQUILIBRE

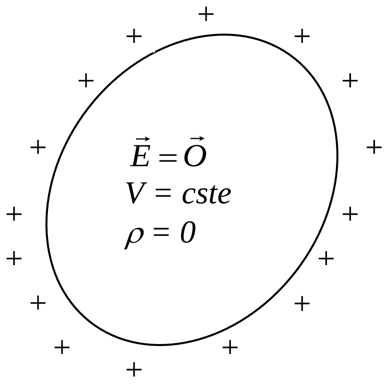
3-2-1) Cas d'un conducteur plein

Si le conducteur est en équilibre :

- le champ électrique à l'intérieur du conducteur est nul : $\vec{E} = \vec{O}$.
- de l'équation $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$, il découle que le potentiel électrostatique à une valeur constante à l'intérieur du conducteur. Le volume occupé par toute la masse du conducteur est un volume équipotentiel, en particulier la surface qui délimite ce volume est une surface équipotentielle.

- de la loi locale de Gauss $div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, il découle que la densité volumique de charge à l'intérieur d'un conducteur en équilibre est nulle : $\rho = 0$ (il y a autant de charge positive que de charge négative).
- si on apporte, par un procédé quelconque d'électrisation, une charge Q sur un conducteur en équilibre cette charge se répartit entièrement sur la surface du conducteur avec une densité σ.

Pour $Q > 0$



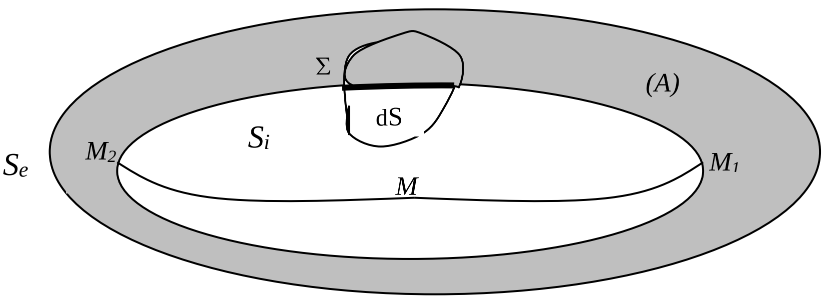
3-2-2) Cas d'un conducteur creux : Théorème des extrema de potentiel

C'est une conséquence du théorème de Gauss. ***Considérons une région de l'espace dépourvue de charge électrique. Dans une telle région le potentiel ne peut passer ni par un maximum ni par un minimum.***

Considérons un conducteur A qui possède une cavité ne renfermant aucune charge. La matière conductrice est comprise entre les surfaces externe S_e et interne S_i. Si V_0 est le potentiel constant du conducteur, d'après le théorème de l'extremum de potentiel :

- La paroi S_i de la cavité est une surface équipotentielle $V(M_1) = V(M_2) = V_0$.
- En tout point M de la cavité le potentiel est $V(M_1) = V(M_2) = V(M) = V_0$. $\vec{E} = -\vec{grad}V = \vec{O}$: le champ est nul. Donc tout le volume limité par la surface S_e est un volume équipotentiel.
- La paroi S_i de la cavité n'est pas électrisée : d'après le théorème de Gauss: $\oiint_{\Sigma} \vec{E}d\vec{S} = 0 = \frac{dq}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma dS}{\varepsilon_0}$ d'où $\sigma = 0$

Si l'on apporte une charge Q sur la face S_i, cette charge passe immédiatement sur la surface externe S_e.

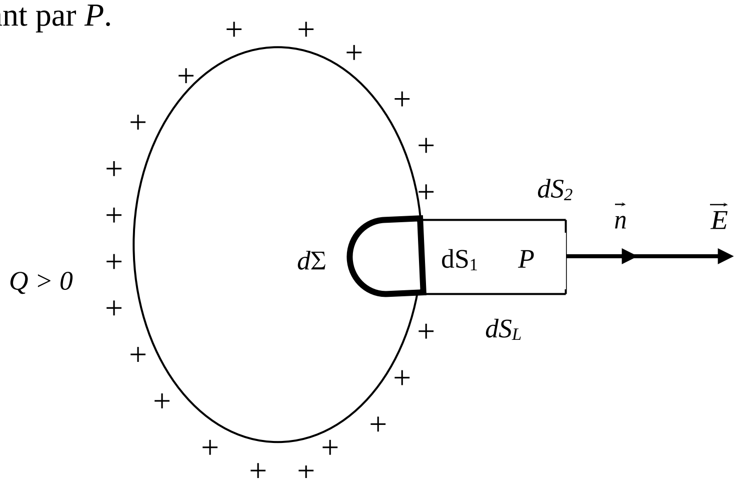


3-3 CHAMP AU VOISINAGE D'UN CONDUCTEUR EN EQUILIBRE : THEOREME DE COULOMB.

Considérons un conducteur chargé en équilibre électrostatique. Soit σ sa densité surfacique de charge. Calculons le champ en un point P infiniment proche de la surface du conducteur. Cette surface étant une équipotentielle les lignes de champ lui sont normales. Soit dS_1 l'élément de surface pris sur le conducteur au voisinage de P et portant la charge $dQ = \sigma dS_1$ et soit dS_2 un élément de surface parallèle à dS_1 passant par P. Pour déterminer le champ en P appliquons le théorème de Gauss à la surface fermée constituée par les surfaces de base dS_2 et latérale dS_L d'un tube de champ et la surface $d\Sigma$ prise à l'intérieur du conducteur. On a : $d\varphi = \vec{E}d\vec{S} = \vec{E}d\vec{S}_L + \vec{E}d\vec{\Sigma} + \vec{E}d\vec{S}_2 = EdS_2 = \dfrac{\sigma ds_1}{\varepsilon_0}$ Comme $dS_1 = dS_2$ on déduit du flux que $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$. Vectoriellement le champ au voisinage d'un conducteur en équilibre s'écrit :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}}$$

où $\vec{n}$ est la normale positive passant par P.



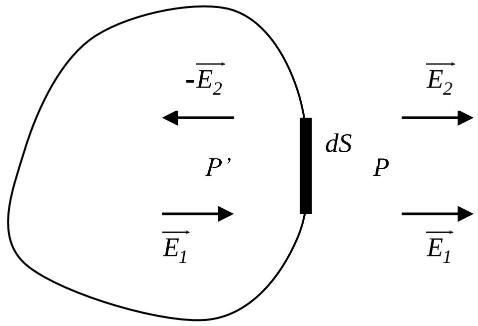
Enoncé : *La discontinuité du champ électrostatique à la traversée de la surface équipotentielle d'un conducteur en équilibre électrostatique se traduit par :*

- $\vec{E} = \vec{O}$ *à l'intérieur du conducteur.*
- $\vec{E} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$ *en tout point extérieur infiniment proche de la surface du conducteur.*

Il s'agit ici de la discontinuité de la composante normale du champ. La composante tangentielle est continue.

3-4 CHAMP SUR LA SURFACE D'UN CONDUCTEUR EN EQULIBRE : PRESSION ELECTROSTATIQUE

Soit un conducteur chargé avec une densité surfacique $\sigma > 0$ par exemple. On se propose de déterminer le champ $\vec{E}_1$ auquel est soumis un élément de charge $dq = \sigma dS$ portée par une surface élémentaire dS prise sur le conducteur. $\vec{E}_1$ est le champ en un point P infiniment proche de la surface du conducteur. Ce champ $\vec{E}_1$ est produit par les autres charges à l'exclusion des charges portées par dS. Soit $\vec{E}_2$ le champ produit au point P par la charge dq portée par dS.



Au point P le champ est donné par le théorème de Coulomb : $\vec{E}_P = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$

Soit un point P' situé à l'intérieur du conducteur et infiniment proche de dS. Le champ au point P' est nul. Ce champ est la somme vectorielle des champs produits en P' par dq et par les autres charges. Le champ produit en P' par dq est opposé à celui qu'il crée en P (P et P' sont symétriques par rapport à dS) et le champ produit par les autres charges en ce point est le même qu'elles créent en P car P et P' sont infiniment proches. A l'intérieur du conducteur on a donc $\vec{E}_{P'} = \vec{E}_1 + (-\vec{E}_2) = 0$ d'où $\vec{E}_2 = \vec{E}_1$. On en déduit que $\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 2\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$ et

$$\boxed{\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n}}$$

La force exercée sur l'élément de charge dq par les autres charges est $d\vec{F} = \vec{E}_1 dq = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n}dq = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n}\sigma dS = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}dS\vec{n}$. Cette force est orientée vers l'extérieur du conducteur quelque soit le signe des charges. En générale elle est trop faible pour arracher la charge dq de la surface du conducteur. Initialement appliquée à la charge $dq = \sigma dS$, cette force est transmise au conducteur et peut déformer ou déplacer celui-ci. Si $\vec{P}$ désigne la pression électrostatique à laquelle est soumis chaque point de la surface du conducteur on a : $\vec{P} = \dfrac{d\vec{F}}{dS}$

soit

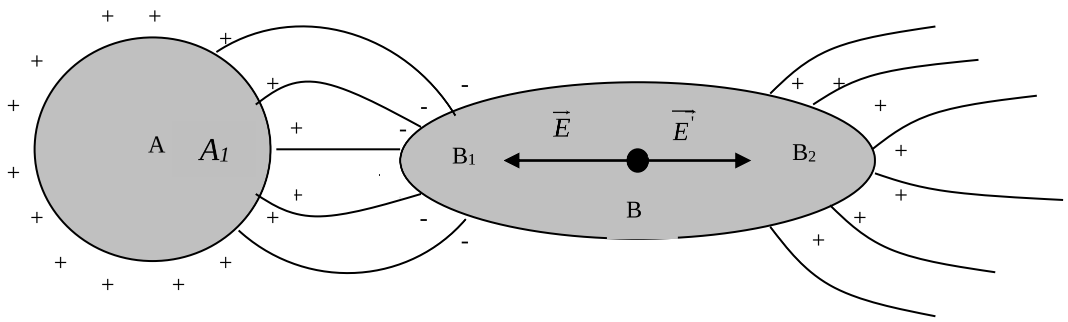
$$\boxed{\vec{P} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\vec{n}}$$

3-5 PHENOMENE D'INFLUENCE

L'équilibre d'un conducteur dépend en général de toutes les charges qui l'entourent. Les modifications que le conducteur subi quand ces charges varient sont appelées ***phénomènes d'influence.***

3-5-1) Expérience fondamentale.

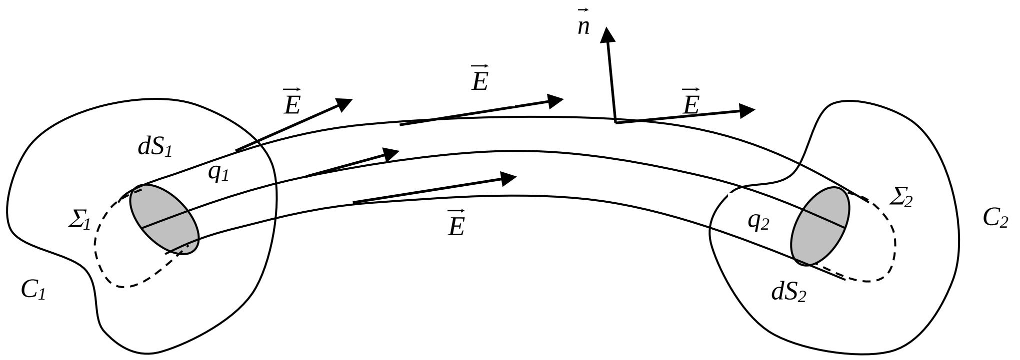
Soit un conducteur *A* sphérique chargé positivement par exemple. Plaçons dans le champ $\vec{E}$ produit par *A* un conducteur *B* isolé, initialement neutre, de forme cylindrique et ayant des extrémités arrondies où il porte des petits pendules. On constate que les pendules décollent de *B*. Donc le conducteur *A* fait apparaître des charges sur le conducteur *B*. On dit que *B* a été électrisé par influence. En réalité ces charges n'ont pas été créées mais leur répartition a été modifiée. Soient Q_A est la charge de la région de A_1 faisant face à la région B_1 de *B*, Q_{B_1} et Q_{B_2} celles des régions B_1 et B_2 du conducteur *B*. *B* étant isolé et initialement neutre, le principe de conservation de l'électricité implique que $Q_{B_1} = -Q_{B_2}$. Donc $Q_{B_1} < 0$ et $Q_{B_2} > 0$. Les charges Q_{B_1} et Q_{B_2} créent à l'intérieur de *B* un champ $\vec{E}'$ tel qu'en tout point *M* de *B* : $\vec{E} + \vec{E}' = \vec{O}$. Les charges de *B* sont appelées ***charges induites***. Comme toutes les lignes de champ issues de *A* n'aboutissent pas à *B*, on dit que l'influence est partielle.



3-5-2) Théorème des éléments correspondants

Soient deux conducteurs C_1 et C_2 en présence et en équilibre. Les lignes de champ partent perpendiculairement de la surface de l'un des conducteurs pour aboutir perpendiculairement sur la surface de l'autre ou vont à l'infini (ou viennent de l'infini).

Considérons un tube de champ allant de C_1 à C_2. Il découpe les éléments de surface dS_1 et dS_2 respectivement sur les conducteurs C_1 et C_2. On appelle éléments correspondants les surfaces dS_1 et dS_2 découpées par un même tube de champ sur deux conducteurs.



Considérons la surface fermée constituée par la paroi latérale du tube de champ et les surfaces Σ_1 et Σ_2 situées respectivement à l'intérieur des conducteurs C_1 et C_2 et s'appuyant également par les contours Γ_1 et Γ_2 des surfaces dS_1 et dS_2 respectivement. Le flux sortant de cette surface est : $\phi = \phi_{Tube} + \phi_{\Sigma_1} + \phi_{\Sigma_2} = \frac{\Sigma Q}{\varepsilon_0}$ avec:

- $\Sigma Q = q_1 + q_2$.
- $\phi_{Tube} = 0$ car le champ est tangent à la paroi latérale du tube de champ.
- $\phi_{\Sigma_1} = \phi_{\Sigma_2} = 0$ car à l'intérieur d'un conducteur en équilibre le champ est nul.

On a donc $\phi = \frac{\Sigma Q}{\varepsilon_0} = \frac{q_1+q_2}{\varepsilon_0} = 0$. On en déduit que :

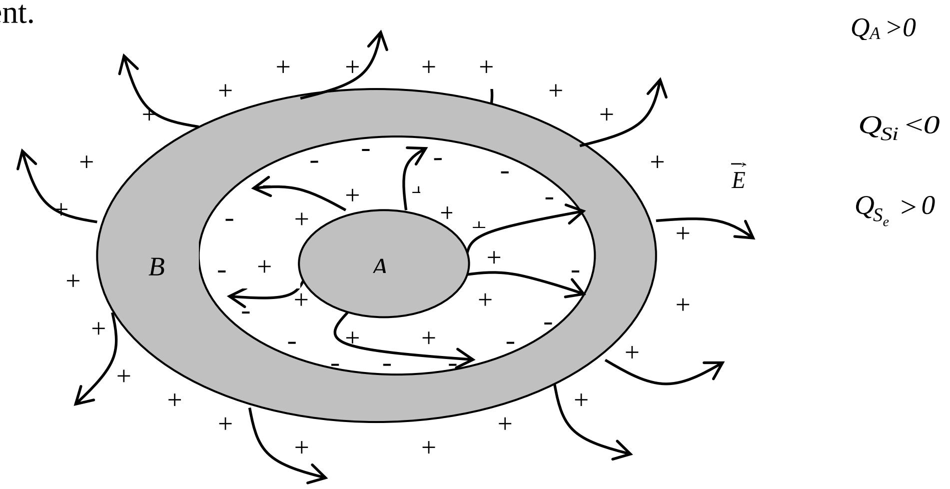
$$\boxed{q_1 = -q_2}$$

Deux éléments correspondants portent des charges égales et opposées.

3-6 THEOREME DES ECRANS

3-6-1) Influence totale.

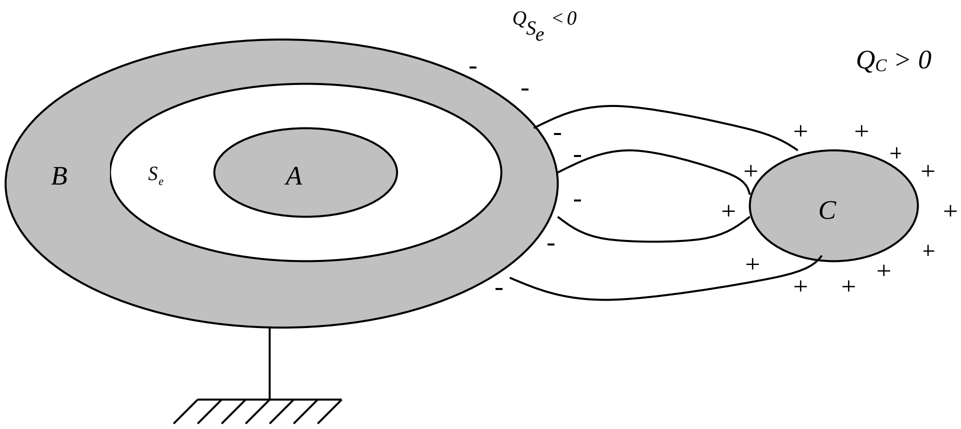
Deux conducteurs A et B sont en influence totale lorsque l'un des conducteurs entour l'autre. Toutes les lignes de champ issues du conducteur influençant A rencontrent le conducteur influencé B. Le conducteur influençant A se trouve dans la cavité du conducteur influencé B. Soient Q_A, Q_{S_i} et Q_{S_e} les charges respectivement du conducteur A et sur les faces interne S_i et externe S_e du conducteur B. D'après le théorème des éléments correspondant $Q_{S_i} = -Q_A$. Le conducteur B étant initialement neutre et isolé, le principe de conservation des charges implique que sa charge $Q_B = Q_{S_i} + Q_{S_e} = 0$ d'où $Q_{S_e} = -Q_{S_i}$ et $V_B \neq V_A$. Si le conducteur B est relié au sol, la charge Q_{S_e} s'écoule dans le sol et les lignes de champ à l'extérieur de B disparaissent.



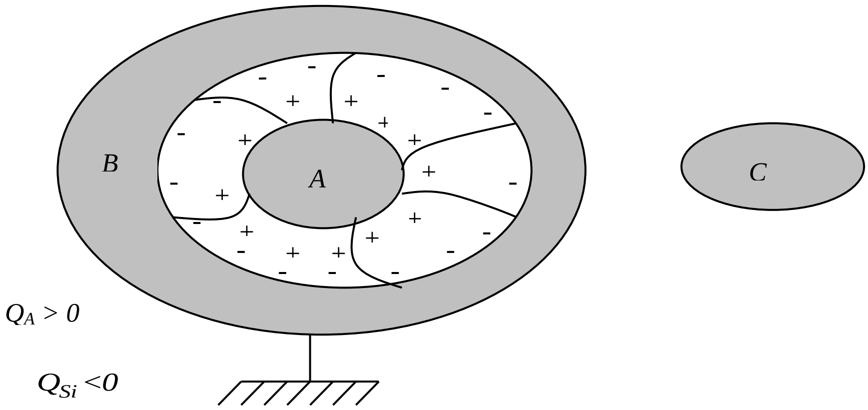
3-6-2) Les écrans électrostatiques.

Considérons un système de trois conducteurs *A*, *B* et *C*. *B* étant un conducteur creux relié au sol et entourant le conducteur *A*. *A* et *C* sont neutres et isolés.

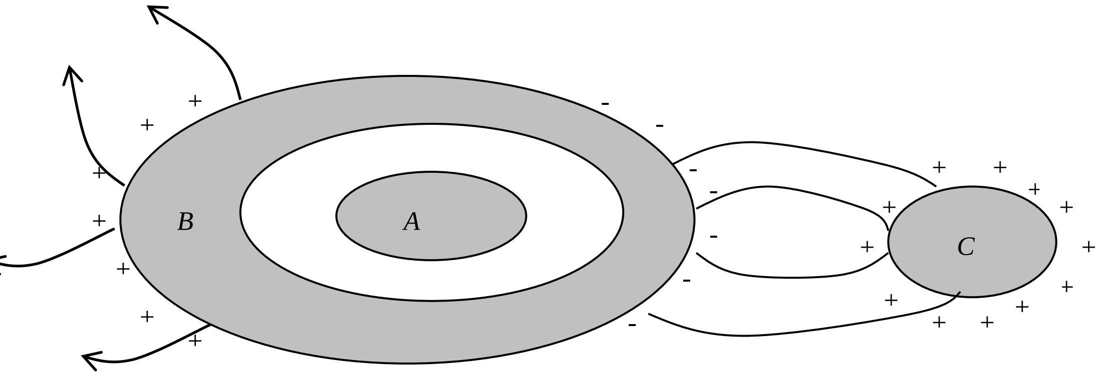
- Si on apporte une charge Q_C sur le conducteur *C* il apparaît une charge Q_{S_e} sur la surface externe de *B* telle que le champ est nul à l'intérieur de toute la surface fermée S_e. Le conducteur *A* ne subi pas l'influence de *C*. On dit que le conducteur *B* relié au sol constitue un écran électrostatique. Si B était relié à une source qui le maintient à un potentiel constant V_0 non nul, il constituerait encore un écran : on définit par écran électrostatique parfait tout conducteur creux maintenu à un potentiel constant.

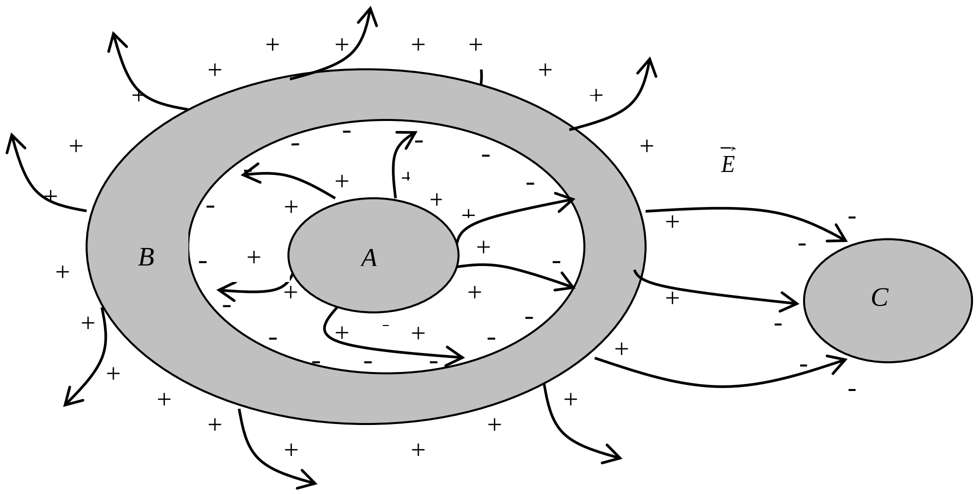


- Si on apporte une charge Q_A sur le conducteur *A*, *B* et *C* étant initialement neutres, il apparaît une charge Q_{S_i} uniquement sur la surface interne de *B* : $Q_B = Q_{S_i}$, $Q_{S_e} = 0$ et $Q_C = 0$. Le conducteur *B* constitue un écran électrostatique.



* Si le conducteur *B* est libre et neutre il ne fonctionne plus comme un écran entre les conducteurs *A* et *C*. Il protège un conducteur interne *A* de l'influence d'un conducteur *C* mais ne protège pas un conducteur externe *C* de l'influence d'un conducteur interne *A*.





3-7 EQUILIBRE D'UN SYSTEME DE CONDUCTEURS

3-7-1) Position du problème.

On considère un ensemble de *N* conducteurs en immobiles, chargés, en influence les uns sur les autres dans le vide. Le problème sous sa forme générale consiste à déterminer les distributions électriques pour lesquelles les conducteurs en présence sont en équilibre et de calculer les valeurs correspondantes du champ en tout point de l'espace entourant ces conducteurs.

L'on peut aussi considérer le cas où certains conducteurs A_i sont reliés à une source et leurs potentiels sont connus et d'autres conducteurs A_j sont isolés et leurs charges sont connues. On obtient ainsi un état d'équilibre particulier dont la solution est l'une des solutions du problème général. On démontre que cette solution est unique.

Le problème sous sa forme générale et sous sa forme particulière est résolu lorsqu'on sait déterminer la fonction potentiel *V (M)* en tout point de l'espace entourant les conducteurs et dépourvu de charge. En effet lorsqu'on connaît la fonction potentiel *V (M),* on en déduit le champ en tout point de l'espace par le relation $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$ et la densité surfacique de charge en un point d'un conducteur par le théorème de Coulomb : $\sigma = \varepsilon_0 E = -\varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n}$. La fonction *V(M)* doit satisfaire :

- L'équation de Laplace $\Delta V = 0$ soit $\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 V}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 V}{\partial^2 z} = 0$
- $V_\infty = 0$ Quant on s'éloigne indéfiniment des conducteurs.
- $V = cste$ à la surface de chaque conducteur.

3-7-2) Théorème de l'unicité de l'état d'équilibre électrostatique.

Soit un système de conducteurs ayant chacun soit un potentiel donné, soit une charge Q donné. Pour un tel système il n'existe qu'un seul état d'équilibre possible. La densité surfacique de charge en tout point de la surface d'un conducteur et le champ en tout point de l'espace sont déterminés.

3-7-3) Théorème superposition des états d'équilibre électrostatique.

Soient deux états d'équilibre caractérisés par les fonctions potentiels V' et V'' solutions du problème général. La fonction potentiel $V = V' + V''$ est également solution et donc définit un état d'équilibre qui est la superposition des deux états d'équilibre. De façon générale toute combinaison linéaire des deux états d'équilibre V' et V'' est aussi un état d'équilibre défini par (où λ, μ sont des scalaires) :

- $V = \lambda V' + \mu V''$
- $\vec{E} = \lambda \overrightarrow{E'} + \mu \overrightarrow{E''}$
- $Q = \lambda Q' + \mu Q''$
- $\sigma = \lambda \sigma' + \mu \sigma''$

CHAPITRE IV

LES CONDENSATEURS

4-1 CAPACITES ET COEFFICIENTS D'INFLUENCE

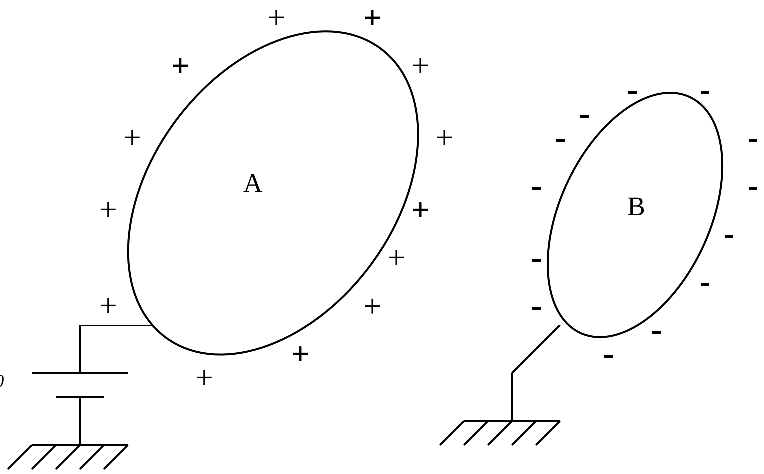
4-1-1) Capacité propre d'un conducteur isolé en équilibre.

Considérons un conducteur à l'équilibre électrostatique, isolé et porté à un potentiel V_0. La surface du conducteur se couvre de charge avec une densité $\sigma_0(M)$. Sa charge surfacique $Q_0 = \oiint_{(S)} \sigma_0(M)dS$. Le potentiel en un point quelconque du conducteur s'écrit : $V_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oiint_{(S)} \frac{\sigma_0(M)dS}{r}$ où M est un point qui décrit toute la surface. Considérons un second état d'équilibre du conducteur défini par $\sigma = \lambda\sigma_0$, λ étant une constante quelconque. Pour ce nouvel état d'équilibre on obtient une nouvelle charge totale $Q = \lambda Q_0$ et un nouveau potentiel $V = \lambda V_0$. On constate donc que tout état d'équilibre d'un conducteur caractérisé par Q et V est tel que le rapport $\frac{Q}{V}$ reste constant. Ce rapport $\frac{Q}{V} = \frac{Q_0}{V_0} = C_0$, indépendant de l'état d'équilibre considéré est appelé capacité du conducteur. Il s'exprime en Farad (F) : $1F = 10^6 \mu F = 10^9$ nF $= 10^{12}$ pF. La capacité propre d'un conducteur ne dépend que des caractéristiques géométriques et du matériau dont est fait le conducteur.

4-1-2) Système de conducteurs en influence.

4-1-2-1) Phénomène de condensation de l'électricité

Soit un conducteur A de capacité C_0, porté à un potentiel constant V_0, positif par exemple. Sa charge $Q_0 = C_0V_0$. Plaçons un autre conducteur B, relié au sol, sous l'influence de A. Il apparaît sur le conducteur B une charge négative qui à son tour influence le conducteur A. Elle exerce sur la charge de A une attraction dont l'effet est d'augmenter la charge totale de A. Elle crée à l'intérieur de A un potentiel négatif. Le potentiel du conducteur A étant constant, sa surface se couvre nécessairement d'une charge supplémentaire positive qui annule le potentiel négatif crée par le charge du conducteur B. On dit qu'il y a condensation de l'électricité. Pour le conducteur A on a $Q_0 = C_0V_0$. Q_0 augmente alors que V_0 est constant. On en déduit que la capacité du conducteur A augmente en présence d'un conducteur B relié au sol. Donc la capacité d'un conducteur n'est pas la même lorsqu'il est seul isolé dans l'espace et lorsqu'il est en présence d'autres conducteurs.



4-1-2-2) Relation entre charges et potentiels d'un système de conducteurs en équilibre : Matrice capacité.

Considérons un ensemble de n conducteurs (A_i) fixes dans un état d'équilibre électrostatique défini par σ et où chaque conducteur est caractérisé par sa charge totale Q_i et son potentiel V_i. On peut imaginer, en appliquant le principe de superposition, que cet état d'équilibre final est la somme de n états d'équilibre intermédiaires : dans chacun de ces états d'équilibre, σ_{ij} désigne la densité surfacique de charges apparaissant sur le conducteur A_i lorsque tous les autres conducteurs sont portés au potentiel nul sauf le conducteur A_j. Lorsque $i=j$, σ_{ii} désignera donc la densité surfacique de charges apparaissant sur le conducteur A_i si tous autres sont au potentiel nul sauf le conducteur A_i lui-même. La charge que porte le conducteur A_i dans un état d'équilibre intermédiaire s'écrie $q_{ij} = \iint_{S_i} \sigma_{ij} dS$. Cette charge étant proportionnelles au potentiel non nul V_j du conducteur A_j, on a $q_{ij} = C_{ij}V_j$. Dans l'état d'équilibre final la densité surfacique de charges d'un conducteur A_i s'écrira $\sigma_i = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}$ et sa charge $Q_i = \iint_{S_i} \sigma_i \, dS = \sum_{j=1}^{n} q_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \iint_{S_i} \sigma_{ij} dS = \sum_{j=1}^{n} C_{ij} V_j$. En exprimant les charges portées par l'ensemble des n conducteurs on obtient à une relation matricielle qui caractérise l'état d'équilibre final : $[Q] = [C][V]$ soit

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ . \\ . \\ . \\ Q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & \cdots & C_{2n} \\ . & & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ . \\ . \\ . \\ V_n \end{pmatrix}$$

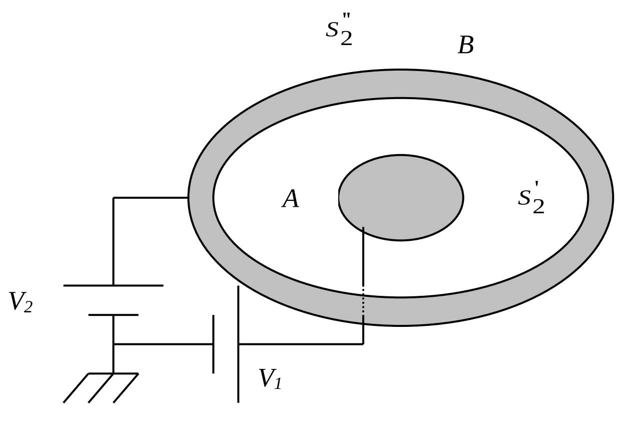
Les éléments de la matrice sont les coefficients de proportionnalités C_{ij}. La matrice $\left[C\right]$ est appelée matrice capacité. Ses éléments C_{ij} avec $i \neq j$ sont les coefficients d'influence du conducteur j sur le conducteur i et ses coefficients C_{ii} avec $i = j$ sont les coefficients de capacité qu'il ne faut pas confondre avec la capacité propre C_i du conducteur A_i. C_i caractérise les propriétés de A_i pris seul dans l'espace alors que C_{ii} caractérise les propriétés de A_i en présence de tous les autres conducteurs. D'après le théorème de Coulomb les coefficients C_{ij} ont les propriétés suivantes :

- Les C_{ii} sont toujours positifs.
- Les C_{ij} sont toujours négatifs et $C_{ij} = C_{ji}$ (la matrice $\left[C\right]$ est symétrique).
- $C_{ii} \geq -\sum_{j=i} C_{ij}$, l'égalité n'étant possible que dans le cas d'une influence totale (conséquence du théorème des éléments correspondants).

4-2 LES CONDENSATEURS

4-2-1) Définition.

Le condensateur est un ensemble de deux conducteurs A et B, appelés armatures du condensateur, qui sont en influence totale. A est l'armature interne, soit Q_1 sa charge et V_1 son potentiel. Le conducteur B est l'armature externe, soit Q_2 sa charge et V_2 son potentiel avec $V_1 > V_2$. La charge Q_2 est la somme de la charge $Q_2^{'}$ sur la surface interne $S_2^{'}$ du conducteur B et de la charge $Q_2^{''}$ sur sa surface externe $S_2^{''}$. Les surfaces S_1 et $S_2^{'}$ étant en influence totale on a : $Q_1^{'} = -Q_1$. Le conducteur B porté au potentiel V_2 est un écran électrostatique. Sa charge $Q_2^{''}$ ne dépend que de son potentiel, de sa surface $S_2^{''}$ et de la permittivité relative du milieu qui l'entour.



D'après le principe de superposition, l'état d'équilibre caractérisé par Q_1, Q_2, V_1 et V_2 peut être traduit par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} Q_1 = C_{11} V_1 + C_{12} V_2 \\ Q_2 = C_{21} V_1 + C_{22} V_2 \end{cases}$$

Les coefficients C_{ij} étant indépendant de Q_1, Q_2, V_1 et V_2 on peut les trouver. Pour cela il suffit de considérer des cas particuliers :

- V_1 étant non nul, relions le conducteur B au sol. On a alors :

  $Q_2^{'} = -Q_1$ et $C_{21}V_1 = -C_{11}V_1$, d'où $C_{21} = - C_{11}$.

- Si nous relions les deux conducteurs A et B, l'ensemble étant porté au même potentiel $V_1 = V_2$. Le système constituera un seul conducteur ayant une cavité. Cette cavité ne pouvant porter de charge on a :

$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_1 = (C_{11} + C_{12})V_2 = 0$ d'où $C_{12} = - C_{11}$. On en déduit que $C_{12} = C_{21}$

Les deux cas particuliers permettent de mettre le système d'équations de l'équilibre sous la forme :

$$\begin{cases} Q_1 = C_{11} (V_1 - V_2) \\ Q_2 = -C_{11} (V_1 - V_2) + (C_{22} - C_{11})V_2 \end{cases}$$

Cette forme permet d'identifier les charges $Q_2^{'}$ et $Q_2^{''}$; on a :

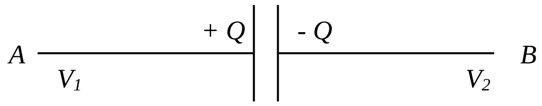
$$Q_2^{'} = -Q_1 = -C_{11} (V_1 - V_2)$$

$$Q_2^{''} = (C_{22} - C_{11})V_2$$

Ceci montre bien que la charge $Q_2^{''}$ ne dépend pas du conducteur A. $C_0 = C_{22} - C_{11}$ est la capacité propre du conducteur B. Posons $Q_1 = -Q_2^{'} = Q$ on peut écrire que

$$\boxed{Q = C (V_1 - V_2)}$$

Par définition Q est la charge du condensateur et sa capacité C est la capacité de l'armature interne A en présence de l'armature B reliée au sol. Elle dépend des surfaces S_1 et $S_2^{'}$ en influence totale, proportionnelle à la permittivité du milieu inter-armature, supérieure à la capacité propre de l'armature interne et s'exprime en Farad. Finalement la charge $Q_2^{''}$ ne fait pas partie de la charge du condensateur. Elle est très faible devant Q et n'intervient pas lors de la décharge du condensateur. Symboliquement le condensateur est représenté par deux segments de droite parallèles :



4-2-2) Méthode de calcul de capacité.

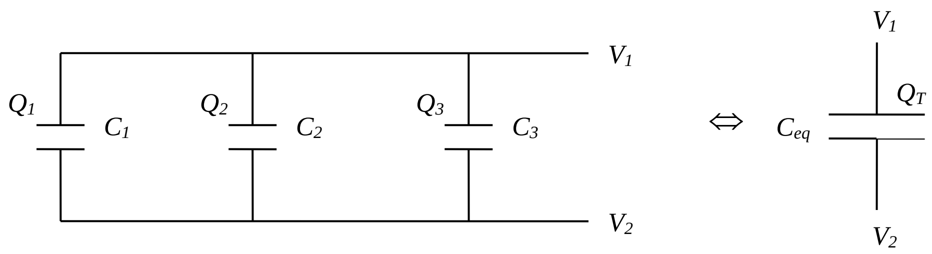
Le calcul direct de la capacité d'un condensateur se fait de la façon suivante, en supposant que le condensateur porte une charge Q :

- On calcule le champ $\vec{E}$ en un point quelconque de l'espace entre armatures en utilisant par exemple le théorème de Gauss.
- On calcule la différence de potentiel par intégration du champ entre les armatures.
- Enfin on détermine $C = \dfrac{Q}{V_1 - V_2}$.

4-3 ASSOSSIATIONS DES CONDENSATEURS

4-3-1) Association des condensateurs en parallèle.

Soient trois condensateurs de capacités C_1, C_2 et C_3 montés en parallèle. La tension est la même aux bornes des trois condensateurs.



Le conducteur unique, constitué par l'ensemble des trois armatures connectées entre elles et portées au potentiel V_1, a une charge totale $Q_T = Q_1 + Q_2 + Q_3$. De même le conducteur unique constitué par l'ensemble des trois armatures portées au potentiel V_2 a une charge totale $-Q_T$. Il en résulte que le condensateur équivalent a une capacité

$$C_{eq} = \frac{Q_T}{V_1 - V_2} = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} + \frac{Q_2}{V_1 - V_2} + \frac{Q_3}{V_1 - V_2} \text{ soit } C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3.$$

De façon générale lorsque n condensateurs de capacités C_i sont montés en parallèle, la capacité $C_{éq}$ du condensateur équivalent est telle que:

$$\boxed{C_{eq} = \sum_{i=1}^{n} C_i}$$

L'avantage du montage en parallèle est d'obtenir une capacité plus grande que celle des condensateurs utilisés isolément sous une même différence de potentiel.

4-3-2) Association des condensateurs en série.

Soient trois condensateurs de capacités C_1, C_2 et C_3 montés en série. L'armature interne d'un condensateur est reliée à l'armature externe du condensateur suivant et ainsi de suit. Les armatures situées aux extrémités de la chaîne forment les armatures d'un condensateur équivalent de capacité *Ceq*. Chaque couple d'armature interne-externe forme un conducteur unique auquel on peut appliquer le principe de conservation de charge (système isolé neutre). On porte aux potentiels V_1 et V_2 les deux armatures externes de la chaîne. Si les condensateurs sont initialement neutres, il apparaît la charge ± *Q* par influence sur les armatures des condensateurs adjacents. La tension aux bornes de l'ensemble s'écrit : $V_1 - V_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} = Q(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}) = \frac{Q}{C_{éq}}$ on en déduit $\frac{1}{C_{éq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$.

De façon générale lorsque *n* condensateurs de capacités C_i sont montés en série, la capacité $C_{éq}$ du condensateur équivalent est telle que :

$$\boxed{\frac{1}{C_{éq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}}$$

4-4 CONDENSATEURS A DIELECTRIQUES

4-4-1) Matériaux Diélectriques.

4-4-1-1) Notion de Bases sur les diélectriques

Un diélectrique est un matériau isolant. Il ne possède donc pas d'électron capable de se mouvoir librement. Dans un diélectrique les électrons sont fermement liés aux atomes.

En l'absence d'un champ électrique extérieur, les électrons gravitent autour du noyau de telle sorte que l'atome reste électriquement neutre. Dans cette condition le nuage électronique est symétrique autour du noyau et le barycentre du nuage électronique coïncide avec celui du noyau.

En présence d'un champ électrique extérieur, le nuage électronique se déforme et le barycentre de la charge négative ne coïncide plus avec celui du noyau. Il y a ainsi formation d'un dipôle électrique qui va s'orienter sous l'effet du champ électrique. Cette orientation, se fait parallèlement au champ et est désignée sous le nom de ***polarisation des diélectriques***.

4-4-1-2) Constante diélectrique

Les propriétés d'un diélectrique sont caractérisées, au niveau macroscopique, par une constante appelée ***constante diélectrique***. Cette caractéristique est mise en évidente de la façon suivante :

- soit un condensateur plan, par exemple, dont les armatures baignent dans le vide. Ce condensateur chargé sous une différence de potentiel U_0 a une capacité $C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$ où S est la surface des armatures et e la distance inter-armature. Isolons électriquement le condensateur de telle sorte que sa charge reste constante. Si dans ces conditions on introduit une plaque de diélectrique d'épaisseur h et de section S, on constate que la mesure de la différence de potentiel donne une valeur U inférieure à U_0 : $\frac{U}{U_0} < 1$.

  Comme $Q = C_0U_0 = cste$ on en déduit que $\frac{U}{U_0} = \frac{C_0}{C} < 1$. La capacité a donc augmenté.

- on reprend l'opération précédente, mais cette fois-ci au lieu d'isoler le condensateur on le maintient à une tension constante U_0 par un générateur de tension. Soit Q_0 la charge du condensateur avant l'introduction du diélectrique. Après introduction du diélectrique, on constate que la charge du condensateur a augmenté. Sa nouvelle valeur Q est telle que $\frac{Q}{Q_0} > 1$. Comme $Q_0 = C_0U_0$ avec $U_0 = cste$, on a $Q = CU_0$. On en déduit $\frac{Q}{Q_0} = \frac{C}{C_0} > 1$. Là encore la capacité a augmenté.

Le facteur d'augmentation de la capacité obtenu dans les deux expériences précédentes est les mêmes à condition que le diélectrique utilisé soit le même dans les deux cas. Ce résultat est le même pour un condensateur de forme différente : pour le même diélectrique on trouve le même facteur d'augmentation. Ce facteur peut être considéré comme une constante caractéristique du diélectrique : c'est la ***constante diélectrique.***

L'introduction du diélectrique conduit a une multiplication de la capacité par une constante supérieure à l'unité. Or la capacité initiale $C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$ où e et S sont des constantes. Tout se passe donc comme si ε_0 était multipliée par cette constante diélectrique. De ce fait la constante diélectrique est aussi appelée permittivité relative du diélectrique et notée ε_r. La permittivité absolue $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ *(F/m).*

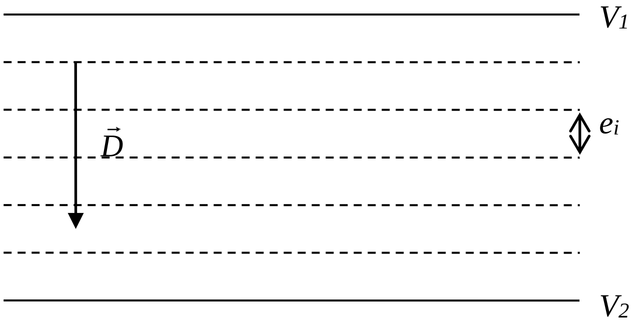
4-4-2) Capacité d'un condensateur avec diélectrique.

4-4-2-1) Cas d'un seul diélectrique.

L'expérience montre que les forces qui s'exercent entre les armatures sont divisées par ε_r. Si C_0 est la capacité du condensateur dans le vide, sa capacité avec un diélectrique $C = \varepsilon_r C_0$.

4-4-2-2) Cas de plusieurs diélectriques

Dans le cas où on a N couches diélectriques, on calcul l'induction électrique $\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = \sigma\vec{n}$. Ensuite on calcule le champ électrique dans chaque couche diélectrique et on écrit que la différence de potentiel entre armatures est la somme des différences aux bornes de chacune des couches diélectriques. Enfin on obtient $C = \dfrac{Q}{V_1 - V_2}$. Par exemple dans le cas d'un condensateur plan on a :



$V_1 - V_2 = \sum_{i=1}^{N} E_i\, e_i$ avec $E_i = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_i}$ où ε_i est la permittivité absolue du diélectrique et σ = Q/S. La capacité de l'ensemble $C = \dfrac{Q}{V_1 - V_2} = \dfrac{Q}{\sum_{i=1}^{N} \dfrac{\sigma}{\varepsilon_i} e_i} = \dfrac{S}{\sum_{i=1}^{N} \dfrac{e_i}{\varepsilon_i}} \Rightarrow \dfrac{1}{C} = \sum_{i=1}^{N} \dfrac{1}{C_i} = \sum_{i=1}^{N} \dfrac{e_i}{\varepsilon_i S}$. Chaque couche se comporte comme un condensateur plan de capacité $C_i = \dfrac{\varepsilon_i S}{e_i}$ et la capacité de l'ensemble correspond à d'un montage des C_i en série.

4-4-2-3) Rigidité diélectrique.

Elle caractérise l'aptitude du diélectrique à supporter des champs électriques élevés. La rigidité diélectrique est le champ de claquage qui est le champ au delà duquel il y a rupture de la cohésion diélectrique de l'isolant. Elle est exprimée généralement en *kV/cm*. Le champ de rupture permet de déterminer la tension maximale applicable aux bornes du condensateur. En effet soit E_0 le champ de rupture. Dans le cas d'un condensateur cylindrique, par exemple, on a : $E = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon r} = \dfrac{CV}{2\pi\varepsilon r}$. Le champ maximum se produit donc sur l'armature interne soit $E_{max} = \dfrac{CV}{2\pi h\varepsilon R_1}$ où R_1 est le rayon de l'armature interne. Il faut donc $E_{\max} < E_0$ soit

$\frac{CV}{2\pi h\varepsilon R_1} < E_0$ d'où $V < \frac{2\pi h\varepsilon R_1 E_0}{C}$. On en déduit $V_{max} = \frac{2\pi h\varepsilon R_1 E_0}{C}$ or $C = \frac{2\pi h\varepsilon}{ln\frac{R_2}{R_1}}$ soit

donc $V_{max} = E_0 R_1 ln\frac{R_2}{R_1}$.

4-5 ENERGIE ELECTRIQUE EMMAGASINEE DANS UN CONDENSATEUR ET FORCE D'ATTRACTION ENTRE ARMATURES

4-5-1) Energie électrique.

L'énergie emmagasinée correspond à l'énergie nécessaire pour charger le condensateur, c'est-à-dire faire passer sa charge de zéro (état initial) à la valeur Q (état final). C'est également l'énergie que le condensateur libère en se déchargeant de Q à zéro.

Considérons un état intermédiaire du condensateur en charge où sa charge et son potentiel valent respectivement q et $v = \frac{q}{C}$. Lorsqu'on apporte une charge dq l'énergie à fournir $dw = vdq$. Ainsi l'énergie totale fournie pour charger le condensateur

$W = \int_0^Q vdq = \int_0^Q \frac{q}{C}dq = \frac{Q^2}{2C}$. On a donc $\boxed{W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2}$

4-5-2) Force d'attraction entre armatures.

Elle est due aux charges opposées portées par les armatures. On l'exprime :

- à partir de la densité surfacique de charge. Lorsque les forces élémentaires sont parallèles (cas du condensateur plan) on a $P = \frac{dF}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$. On en déduit la force

$$\boxed{F = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0}}$$

- à partir de l'énergie emmagasinée W. On considère un déplacement élémentaire dx d'une armature et on écrit le bilan énergétique de cette opération. Le déplacement élémentaire peut se faire soit à charge Q constante, soit à différence de potentiel V constante.

Dans le premier cas le système est supposé isoler. On applique le principe de conservation de l'énergie : $dW + dT = 0$ où $dT = Fdx$. On a donc $dW = - dT = - Fdx$. On a donc

$F = -\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_Q$ et avec $W = \frac{Q^2}{2C}$ on obtient $\boxed{F = \frac{Q^2}{2C^2}\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_Q}$

Dans le second cas pour maintenir la tension constante on relie le condensateur à une source d'énergie, un générateur par exemple. Si dans ces conditions on déplace une armature de *dx*, les capacités et coefficients d'influences varient si bien que le générateur communique au condensateur une charge *dq*. Si $dW_0 = VdQ$ est l'énergie fournie par le générateur pendant l'opération, on a :

$dW + dT = dW_0$, $dT = Fdx$. Or $W = \frac{1}{2}QV$ d'où $dW = \frac{1}{2}VdQ$. On en déduit que

$dW_0 - dW = VdQ - \frac{1}{2}VdQ = \frac{1}{2}VdQ = dW$ d'où $dW_0 - dW = dT = Fdx$. Là encore on a

$F = \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_V$ et avec $W = \frac{1}{2}CV^2$ on obtient :

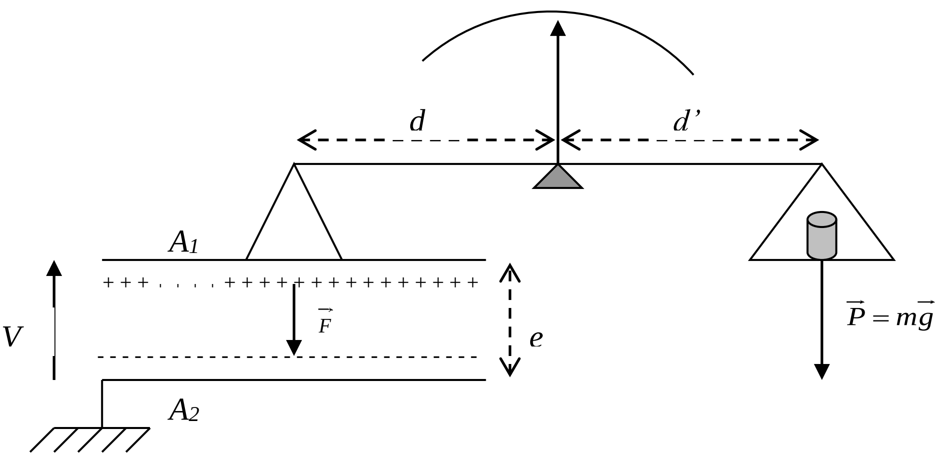
$$\boxed{F = \frac{1}{2}V^2\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_V}$$

4-5-3) Application : Les électromètres

Ce sont des appareils qui permettent de mesurer des tensions constantes. Leur principe repose sur l'attraction qui s'exerce entre deux conducteurs portant des charges de signes opposées. Un électromètre comporte toujours un conducteur mobile dont on mesure le déplacement dû à une force. Ce conducteur forme l'une des armatures d'un condensateur qui est chargé par la tension à mesurer. Ce sont donc des instruments absolus qui relient directement des grandeurs électriques et des grandeurs mécaniques.

Exemple de l'électromètre à plateaux :

Il se compose d'un condensateur plan horizontal à lame d'air, d'épaisseur *e* et de surface *S*. Son armature supérieure est mobile et solidaire d'une balance.



Lorsqu'on applique une tension V entre les bornes du condensateur, l'armature supérieure est soumise, de la part de l'armature inférieure, à une force verticale dirigée notre cas vers le bas. On dépose alors une masse m sur le plateau P de la balance de façon à ramener l'armature mobile à sa position initiale. La force $F = \left(\frac{\partial W}{\partial e}\right)_V$ avec $W = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{e^2}V^2$ d'où $F = -\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{e^2}V^2$. A l'équilibre les moments des forces sont égaux soit donc $|F|d = mgd'$.

En exprimant F on obtient :

$$\boxed{V = \left(\frac{2e^2 gd'}{\varepsilon_0 Sd}m\right)^{1/2}}$$

que l'on peut mettre sous la forme $V = K\sqrt{m}$ avec $K = \sqrt{\frac{2e^2 gd'}{\varepsilon_0 Sd}}$. Le coefficient K est calculable et la masse m est déterminée expérimentalement.