

Résumé de Cours – EM1 - Electrostatique – 1/2

Distribution de Charges :

Densité volumique / surfacique de charges : $\rho = \frac{dq}{d\tau}$ en C.m⁻³ et $\sigma = \frac{dq}{dS}$ en C.m⁻²

Mise en évidence du Champ Electrique :

Définition : Une distribution de charges produit une modification des propriétés de l'espace que l'on appelle champ électrique $\vec{E}$. On ne peut le caractériser que par son action.

Action sur une particule chargée : Force de Lorentz $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$

Loi de Coulomb entre charges : Loi de Coulomb $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$

Expressions du champ électrostatique :

Expression : $\vec{dE}_{(M)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \cdot \vec{u} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho d\tau}{r^2} \cdot \vec{u} \rightarrow \text{à intégrer...}$

Avec $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ u}_{SI}$ la permittivité du vide

Remarque : $\vec{E}$ (comme $\vec{B}$) n'est pas défini en un point d'une distribution linéique.

Expressions du POTENTIEL électrostatique :

Expression : $dV_{(M)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\rho d\tau}{r} \rightarrow \text{à intégrer...}$

Symétries du champ magnétique :

Le champ $\vec{E}$ possède les mêmes symétries que les charges qui lui donnent naissance

Plan de Symétrie : $\begin{cases} P' = \text{sym}_{\pi}(P) \Leftrightarrow \rho' = \rho \Leftrightarrow \vec{dE} = \text{sym}_{\pi}(\vec{dE}) \\ \vec{E} \in \pi_{\text{sym}} \quad (\text{contenu dans les plans de symétrie, l'inverse de } \vec{B}) \end{cases}$

Plan d'Antisymétrie : $\begin{cases} P' = \text{sym}_{\pi^*}(P) \Leftrightarrow \rho' = -\rho \Leftrightarrow \vec{dE}' = -\text{sym}_{\pi^*}(\vec{dE}) \\ \vec{E} \perp \pi_{\text{antisym}} \quad (\text{orthogonal au plan d'antisymétrie, l'inverse de } \vec{B}) \end{cases}$

Axe de Symétrie de Révolution : $\begin{cases} \text{Le champ ne dépend pas de } \theta : E(r, z) \\ \text{En un point de l'axe, alors : } \vec{E} = E_z(z) \cdot \vec{u}_z \end{cases}$

Symétrie cylindrique infinie : $\begin{cases} \text{Distribution invariante par translation selon Oz et rotation autour de Oz} \\ \text{Le champ sera radial : } \vec{E} = E_r(r) \cdot \vec{u}_r \end{cases}$

Circulation du champ électrique : $C = \oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{l}$

Relation : $\begin{cases} C = \oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\Delta V \\ \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) \end{cases} \rightarrow \text{Circulation NON conservative / INDEPENDANT du chemin}$
Déf du gradient : Fct tq $dV = \overrightarrow{\text{grad}}(V) \cdot d\vec{l}$

Travail et Energie Potentielle : $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{l} = q\vec{E} \cdot d\vec{l} = -q \cdot dV \Rightarrow W_A^B = q(V_A - V_B)$

On peut définir une énergie potentielle : $\begin{cases} E_p = qV \Rightarrow W_A^B = -\Delta E_p \\ \vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p) \end{cases}$

Résumé de Cours – EM1 - Electrostatique – 2/2

Flux du Champ magnétique :

Théorème de Gauss :

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

NON conservation du flux

Conséquences :

- Flux CONSERVATIF dans une région vide de charges
- Un extremum de potentiel en un point suppose une charge en ce point
- Discontinuité du Champ électrique à la traversée d'une surface :

$$\Delta \vec{E}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

Application du Théorème de Gauss :

Comme le théorème de Gauss :

- Analyse des invariances et des symétries
- Choix du contour fermé de Gauss
- Application du Théorème

Capacité :

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$$

Exemples usuels :

$$\begin{aligned} \text{- Plan Infini : } \vec{E}(z) &= \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \vec{u}_z \\ \text{- Sphère (ext) : } \vec{E}(r) &= \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \cdot \vec{u}_r \end{aligned}$$

- Fil Infini :

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} \cdot \vec{u}_r$$

- Sphère (int) :

$$\vec{E}(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \cdot \vec{u}_r$$

Extension aux cas variable : Equations de Maxwell

Liées au Champ $\vec{B}$:

$$\begin{cases} \text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} & \Rightarrow \Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} & \text{Maxwell Gauss} \\ \text{rot}(\vec{E}) = \vec{0} & \Rightarrow C = \oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 & \text{Maxwell Faraday} \end{cases}$$

Potentiel scalaire :

$$\vec{E} = -\text{grad}(V) \quad (\text{en V}) \quad \Rightarrow \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\Delta V$$

Equation de Poisson :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

Densité volumique d'énergie électrique :

$$u_e(M) = \frac{\epsilon_0}{2} E^2(M) \quad \text{en J.m}^{-3}$$

Dipôle électrique :

Définition :

$$\vec{p} = q \cdot \vec{AB}$$

Potentiel en $1/r^2$:

$$V_{(r,\theta)} = \frac{q \cdot l \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

Champ crée en $1/r^3$:

$$\vec{E}_{(M)} = \frac{p}{4\pi \epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \cdot \vec{u}_r + \sin \theta \cdot \vec{u}_\theta)$$

Actions subies :

Dans un champ $\vec{E}$

- Couple : $\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{B}$ (aligne avec le champ)
- Force : $F_x \approx \vec{p} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial x}$ (idem en y et z)

Si le champ extérieur $\vec{E}$ est uniforme, alors pas de force subie, il ne fait que s'aligner

Energie potentielle :

$$E_p \approx -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

Analogie Electrostatique / Gravitation :

Analogie : $q \Leftrightarrow m$

$$\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \Leftrightarrow -G \quad \vec{E} \Leftrightarrow \vec{G}$$

Théorème de Gauss pour la Gravitation :

$$\oiint \vec{G} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{int}$$