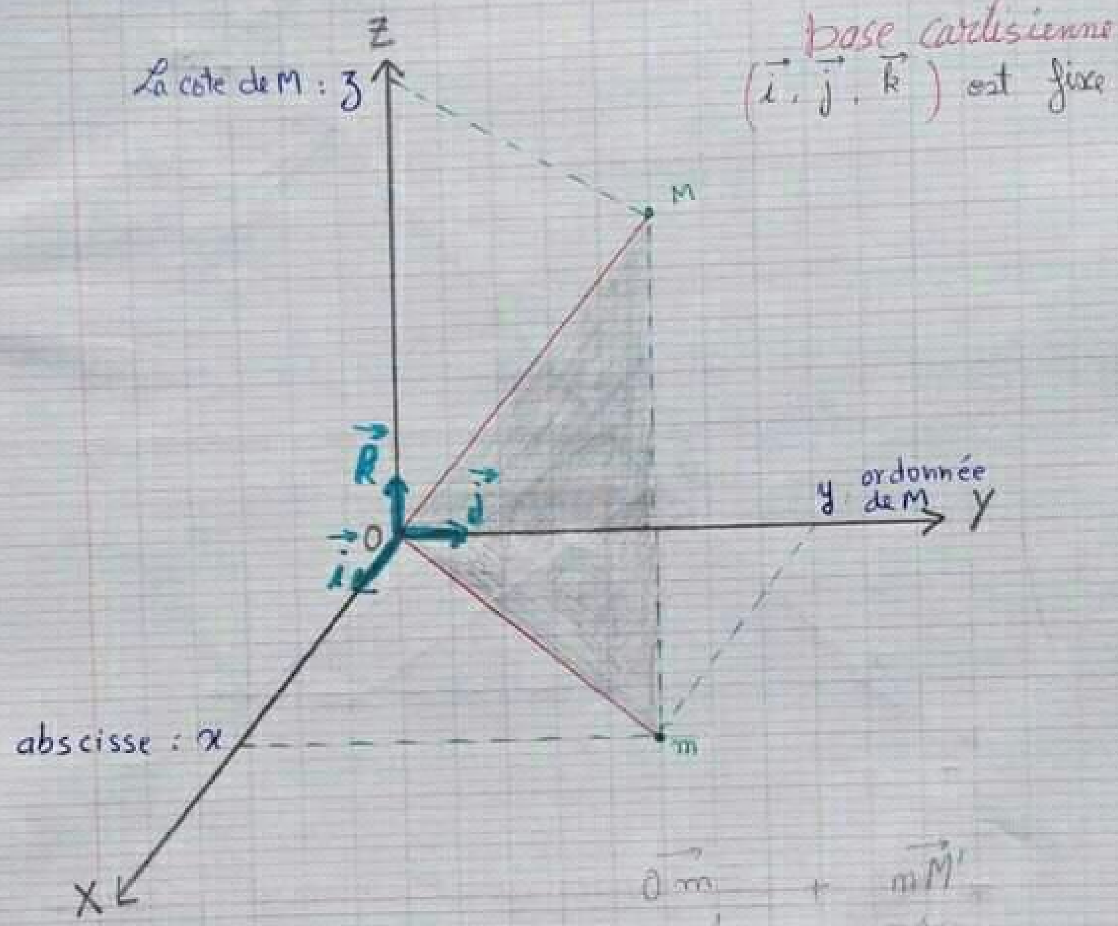
Mécanique du pts

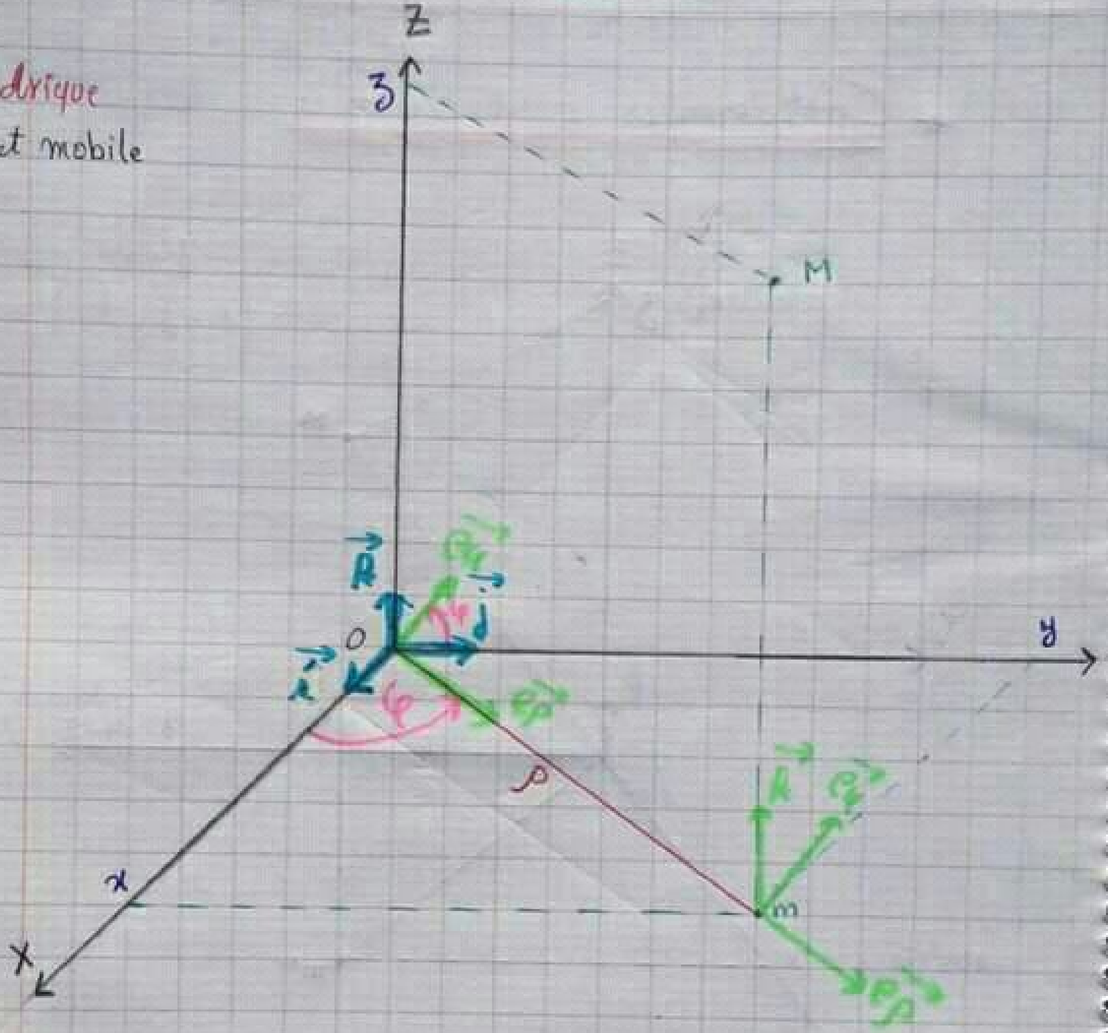
* Coordonnées cartisiennes :



- Le vecteur position : $\overrightarrow{OM} = \underbrace{x\vec{i}}_{\overrightarrow{Om}} + \underbrace{y\vec{j} + z\vec{k}}_{\overrightarrow{mM}}$
- la vitesse : $\vec{V}(M/R) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\Big|_R = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$
- L'accélération : $\vec{\gamma}(M/R) = \dfrac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\Big|_R = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$

* Coordonnées Cylindriques :

base Cylindrique
$(\vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi}, \vec{k})$ est mobile



* Relation entre coordonnées cartisiennes et cylindrique :

$\vec{e_\rho} = \cos\varphi \, \vec{i} + \sin\varphi \, \vec{j}$
$\vec{e_\varphi} = \cos\varphi \, \vec{j} - \sin\varphi \, \vec{i}$
$\vec{k} = \vec{k}$

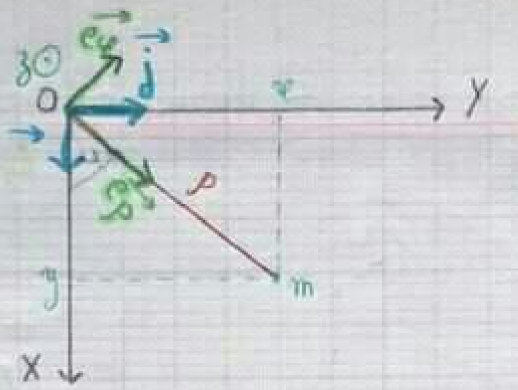
$$\frac{d\vec{e_\rho}}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi}\left(\cos\varphi \, \vec{i} + \sin\varphi \, \vec{j}\right) = -\sin\varphi \, \vec{i} + \cos\varphi \, \vec{j} = \vec{e_\varphi}$$

$$\frac{d\vec{e_\varphi}}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi}\left(\cos\varphi \, \vec{j} - \sin\varphi \, \vec{i}\right) = -\sin\varphi \, \vec{j} - \cos\varphi \, \vec{i} = -\vec{e_\rho}$$

$$\frac{d\vec{e_\rho}}{dt} = \frac{d\vec{e_\rho}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \, \vec{e_\varphi}$$

$$\frac{d\vec{e_\varphi}}{dt} = \frac{d\vec{e_\varphi}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = -\dot{\varphi} \, \vec{e_\rho}$$

$\frac{d\vec{e_\rho}}{d\varphi} = \vec{e_\varphi}$	$\frac{d\vec{e_\rho}}{dt} = \dot{\varphi} \vec{e_\varphi}$
$\frac{d\vec{e_\varphi}}{d\varphi} = -\vec{e_\rho}$	$\frac{d\vec{e_\varphi}}{dt} = -\dot{\varphi} \vec{e_\rho}$



- *Le vecteur position* : $\vec{OM} = \vec{Om} + \vec{mM}$

$$\boxed{\vec{OM} = \rho \vec{e_\rho} + z\vec{k}}$$

- *La vitesse* : $\vec{V}(M/R) = \frac{d\vec{OM}}{dt}\Big|_R = \frac{d\rho}{dt}\Big|_R \vec{e_\rho} + \rho \frac{d\vec{e_\rho}}{dt}\Big|_R + \frac{dz}{dt}\Big|_R \vec{k}$

$$\boxed{\vec{V}(M/R) = \dot\rho\, \vec{e_\rho} + \rho\dot\varphi\, \vec{e_\varphi} + \dot z\, \vec{k}}$$

- *L'accélération* : $\vec\gamma(M/R) = \frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\Big|_R$

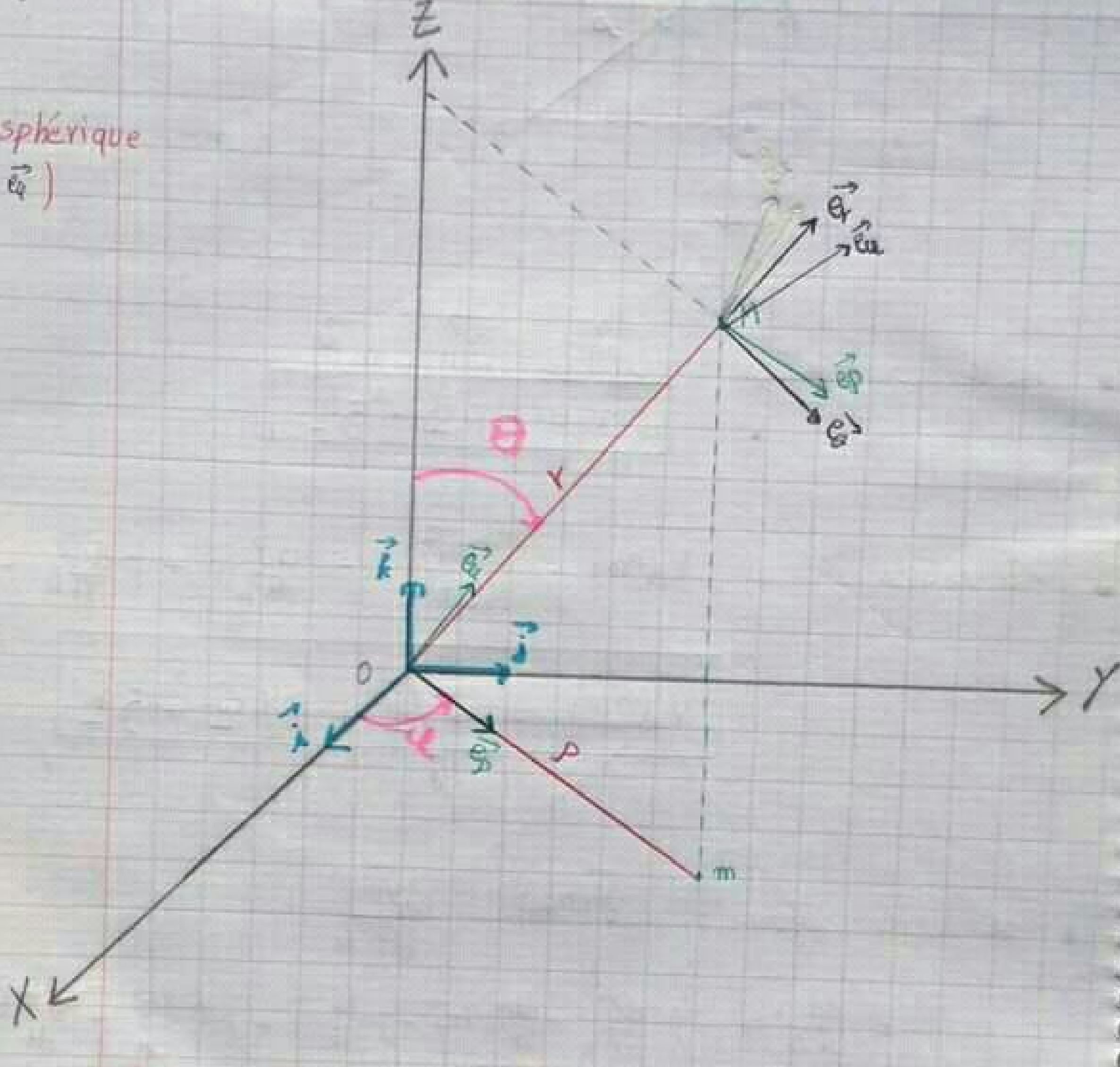
$$= \frac{d\dot\rho}{dt}\Big|_R \vec{e_\rho} + \dot\rho \frac{d\vec{e_\rho}}{dt}\Big|_R + \frac{d\rho}{dt}\dot\varphi\vec{e_\varphi} + \rho\frac{d\dot\varphi}{dt}\vec{e_\varphi} + \rho\dot\varphi\frac{d\vec{e_\varphi}}{dt} + \frac{d\dot z}{dt}\vec{k} + \cancel{\dot z\frac{d\vec{k}}{dt}}$$

$$= \ddot\rho\,\vec{e_\rho} + \dot\rho\dot\varphi\,\vec{e_\varphi} + \dot\rho\dot\varphi\,\vec{e_\varphi} + \rho\ddot\varphi\,\vec{e_\varphi} - \rho\dot\varphi^2\vec{e_\rho} + \ddot z\,\vec{k}$$

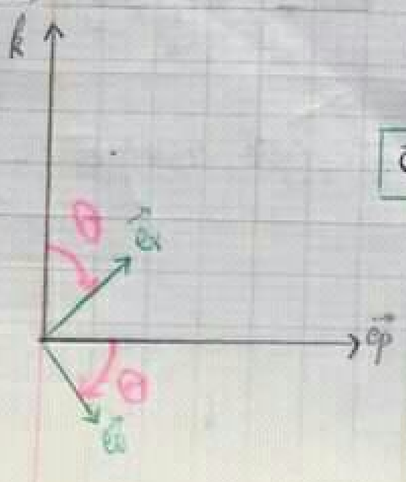
$$\boxed{\vec\gamma(M/R) = \left(\ddot\rho - \rho\dot\varphi^2\right)\vec{e_\rho} + \left(\rho\ddot\varphi + 2\dot\rho\dot\varphi\right)\vec{e_\varphi} + \ddot z\,\vec{k}}$$

* Coordonnées Sphériques :

base sphérique
$(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$



* Relation entre coordonnées sphériques et coordonnées cartésiennes :



$$\vec{e_r} = \cos\theta\,\vec{k} + \sin\theta\,\vec{e_\rho}$$
$$= \cos\theta\,\vec{k} + \sin\theta\,(\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j})$$
$$\boxed{\vec{e_r} = \cos\theta\,\vec{k} + (\sin\theta\sin\varphi)\,\vec{j} + (\sin\theta\cos\varphi)\,\vec{i}}$$

$$\vec{e_\theta} = \cos\theta\,\vec{e_\rho} - \sin\theta\,\vec{k}$$
$$= \cos\theta\,(\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}) - \sin\theta\,\vec{k}$$
$$\boxed{\vec{e_\theta} = (\cos\theta\cos\varphi)\,\vec{i} + (\cos\theta\sin\varphi)\,\vec{j} - \sin\theta\,\vec{k}}$$

$$\boxed{\vec{e_\varphi} = \cos\varphi\,\vec{j} - \sin\varphi\,\vec{i}}$$

* Remarque :

$$\frac{d\vec{e_r}}{d\theta} = \vec{e_\theta} \quad ; \quad \frac{d\vec{e_\theta}}{d\theta} = -\vec{e_r}$$

$$\frac{d\vec{e_r}}{d\varphi} = \sin\theta\,\vec{e_\varphi} \quad ; \quad \frac{d\vec{e_\theta}}{d\varphi} = \cos\theta\,\vec{e_\varphi}$$

$$\left.\frac{d\vec{e_r}}{dt}\right|_R = \frac{d\vec{e_r}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\vec{e_r}}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\boxed{\left.\frac{d\vec{e_r}}{dt}\right|_R = \dot\theta\,\vec{e_\theta} + \dot\varphi\sin\theta\,\vec{e_\varphi}}$$

$$\left.\frac{d\vec{e_\theta}}{dt}\right|_R = \frac{d\vec{e_\theta}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\vec{e_\theta}}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\boxed{\left.\frac{d\vec{e_\theta}}{dt}\right|_R = -\dot\theta\,\vec{e_r} + \dot\varphi\cos\theta\,\vec{e_\varphi}}$$

$$\left.\frac{d\vec{e_\varphi}}{dt}\right|_R = \frac{d\vec{e_\varphi}}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = -\dot\varphi\,\vec{e_\rho} = -\dot\varphi\left(\sin\theta\,\vec{e_r} + \cos\theta\,\vec{e_\theta}\right)$$

$$\boxed{\left.\frac{d\vec{e_\varphi}}{dt}\right|_R = (-\dot\varphi\sin\theta)\,\vec{e_r} - (\dot\varphi\cos\theta)\,\vec{e_\theta}}$$

Le vecteur position : $\boxed{\vec{OM} = r\,\vec{e_r}}$

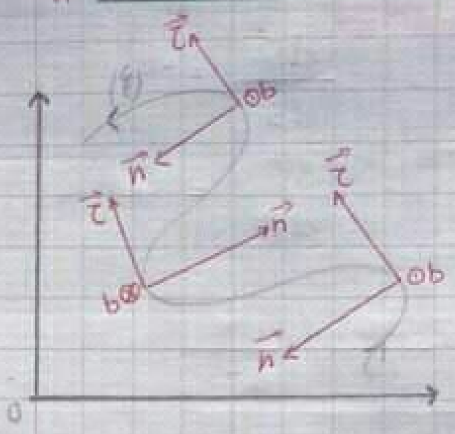
La vitesse : $\vec{V}(M/R) = \left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right|_R = \boxed{\dot r\,\vec{e_r} + r\dot\theta\,\vec{e_\theta} + r\dot\varphi\sin\theta\,\vec{e_\varphi}}$

L'accélération : $\vec{\gamma}(M/R) = \left.\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\right|_R = \left.\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}\right|_R$

$$= \ddot r\,\vec{e_r} + \dot r\dot\theta\,\vec{e_\theta} + \dot r\dot\varphi\sin\theta\,\vec{e_\varphi} + \dot r\dot\theta\,\vec{e_\theta} + r\ddot\theta\,\vec{e_\theta} - r\dot\theta^2\,\vec{e_r} + r\dot\theta\dot\varphi\cos\theta\,\vec{e_\varphi} + \dot r\dot\varphi\sin\theta\,\vec{e_\varphi}$$
$$+ r\ddot\varphi\sin\theta\,\vec{e_\varphi} + r\dot\theta\dot\varphi\cos\theta\,\vec{e_\varphi} - r\dot\varphi^2\sin^2\theta\,\vec{e_r} - r\dot\varphi^2\cos\theta\sin\theta\,\vec{e_\theta}$$

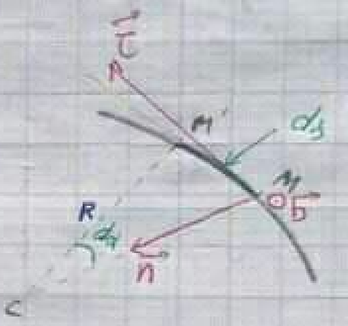
$$\boxed{\vec{\gamma}(M/R) = (\ddot r - r\dot\theta^2 - r\dot\varphi^2\sin^2\theta)\,\vec{e_r} + (2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta - r\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta)\,\vec{e_\theta} + (2\dot r\dot\varphi\sin\theta + r\ddot\varphi\sin\theta + 2r\dot\varphi\dot\theta\cos\theta)\,\vec{e_\varphi}}$$

* Coordonnées Curviligne : base de Frenet / local $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$



$$\vec{\tau} = \frac{\vec{V}(M/R)}{\|\vec{V}(M/R)\|}$$

* Notion de rayon de courbure :



$$ds = MM' \quad \text{et} \quad R = MC$$

$$ds = d\alpha . R$$

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{d\vec{\tau}}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{R}\vec{n}$$

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{s}\frac{1}{R}\vec{n}$$

* Accélération en coordonnée curviligne :

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{V}(M/R)}{\|\vec{V}(M/R)\|} \Leftrightarrow \vec{V}(M/R) = \|\vec{V}(M/R)\|\,\vec{\tau} = \dot{s}\,\vec{\tau}$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = \ddot{s}\,\vec{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{R}\vec{n}$$

$$= \frac{d\|\vec{V}(M/R)\|}{dt}\vec{\tau} + \frac{\|\vec{V}(M/R)\|^2}{R}\vec{n} = \gamma_t\vec{\tau} + \gamma_n\vec{n}$$

$$\gamma(M/R) = \gamma_t\vec{\tau} + \gamma_n\vec{n}$$

$$\gamma^2 = \gamma_t^2 + \gamma_n^2$$

$$\gamma_n^2 = \gamma^2 - \gamma_t^2$$

$$\gamma_n = \sqrt{\gamma^2 - \gamma_t^2} = \frac{\|V(M/R)\|^2}{R}$$

$$\boxed{R = \frac{\|V(M/R)\|^2}{\sqrt{\gamma^2 - \gamma_t^2}}}$$

$$\vec{\gamma}(M/R) \wedge \vec{V}(M/R)$$

$$= (\gamma_t\vec{\tau} + \gamma_n\vec{n}) \wedge \dot{s}\vec{\tau}$$

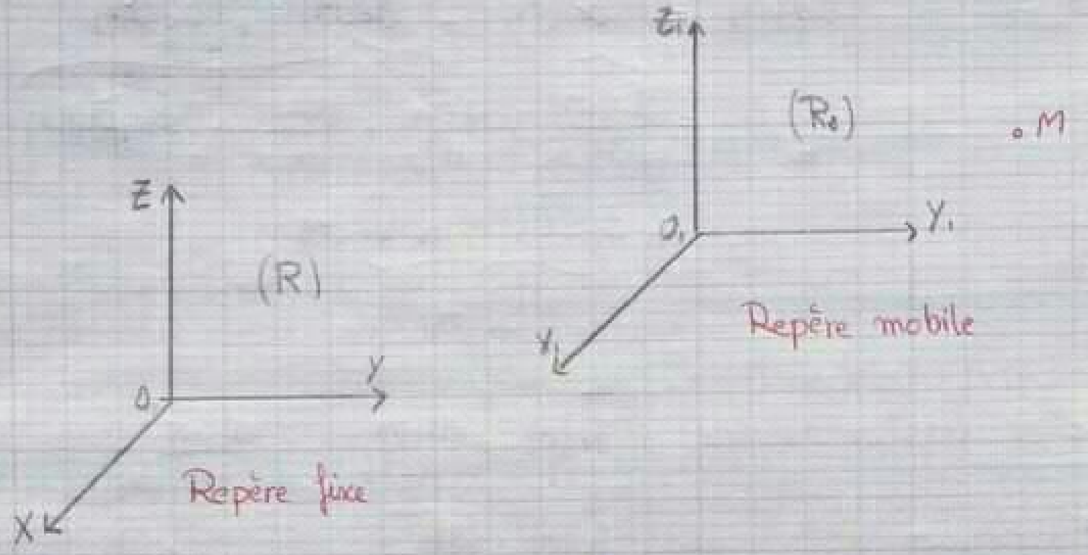
$$= -\gamma_n\|V(M/R)\|\,\vec{b}$$

$$\vec{\gamma} \wedge \vec{V} = -\frac{\|V(M/R)\|^3}{R}\vec{b}$$

$$\boxed{R = \frac{\|V(M/R)\|^3}{\vec{\gamma}(M/R) \wedge \vec{V}(M/R)}}$$

R : rayon de courbure (MC)

* Changement de référentiel



- La vitesse absolue : $\vec{V}_a(M) = \vec{V}(M/R) = \left.\dfrac{d\vec{OM}}{dt}\right|_R$
- La vitesse relative : $\vec{V}_r(M) = \vec{V}(M/R_1) = \left.\dfrac{d\vec{O_1M}}{dt}\right|_{R_1}$
- L'accélération absolue : $\vec{\gamma}_a(M) = \vec{\gamma}(M/R) = \left.\dfrac{d\vec{V}_a(M)}{dt}\right|_R = \left.\dfrac{d^2\vec{OM}}{dt^2}\right|_R$
- L'accélération relative : $\vec{\gamma}_r(M) = \vec{\gamma}(M/R_1) = \left.\dfrac{d\vec{V}_r(M)}{dt}\right|_{R_1} = \left.\dfrac{d^2\vec{O_1M}}{dt^2}\right|_{R_1}$

$$\vec{V}_a(M) = \vec{V}(M/R) = \vec{V}_r(M) + \vec{V}_e(M)$$
$$= \left.\dfrac{d\vec{O_1M}}{dt}\right|_{R_1} + \left.\dfrac{d\vec{OO_1}}{dt}\right|_R + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{O_1M}$$

- La vitesse relative : $\boxed{\vec{V}_r(M) = \left.\dfrac{d\vec{O_1M}}{dt}\right|_{R_1}}$
- La vitesse d'entraînement : $\boxed{\vec{V}_e(M) = \left.\dfrac{d\vec{OO_1}}{dt}\right|_R + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{O_1M}}$

$\Longrightarrow$ si le point M supposé fixe dans R_1 $\Rightarrow \vec{V}_r(M) = 0$ et $\vec{V}_a(M) = \vec{V}_e(M)$

$\Longrightarrow$ Si R_1 est en translation $/_R$ $\Rightarrow \vec{\Omega}(R_1/R) = 0$ et $\vec{V}_e(M) = \left.\dfrac{d\vec{OO_1}}{dt}\right|_R$

$$\vec{\gamma}_a(M) = \underbrace{\vec{\gamma}_r(M)} + \underbrace{\vec{\gamma}_e(M)} + \vec{\gamma}_c(M)$$

$$= \frac{d^2 \overrightarrow{O_1M}}{dt}\Big/_{R_1} + \frac{d^2\overrightarrow{OO_1}}{dt^2}\Big/_{R} + \frac{d\vec{\Omega}(R_1/R)}{dt}\Big/_{R} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \left(\vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \overrightarrow{O_1M}\right)$$

$$+ \underbrace{2\,\vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{V}_r(M)}_{\vec{\gamma}_c(M)}$$

- L'accélération relative : $\boxed{\vec{\gamma}_r(M) = \frac{d\vec{V}_r(M)}{dt}\Big/_{R_1} = \frac{d^2\overrightarrow{O_1M}}{dt^2}\Big/_{R_1}}$
- L'accélération d'entrainement : $\boxed{\vec{\gamma}_e(M) = \frac{d^2\overrightarrow{OO_1}}{dt^2}\Big/_{R} + \frac{d\vec{\Omega}(R_1/R)}{dt}\Big/_{R} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \left(\vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \overrightarrow{O_1M}\right)}$
- L'accélération de coriolés : $\boxed{\vec{\gamma}_c(M) = 2\,\vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{V}_r(M)}$

* "Dynamique du pt matériel :"

- **Quantité du mouvement :** $\boxed{\vec{P} = m.\vec{V}(M/R)}$

- **Référentiel galiléen :** dans lequel tout point M soit :
  - → Au repos $\vec{V}(M/R) = 0$
  - → soient aimé d'un mouvement rectiligne et uniforme $\left\{ \begin{array}{l} \vec{V}(M/R) = 0 \\ \vec{V}(M/R) = cte \end{array} \right.$

- Soit R un référentiel galiléen : alors tout $R_1 . R_2 \dots$ en :
→ translation $(\vec{\Omega}(R_1/R) = 0)$ Rectiling uniforme $(\vec{V}(O_1/R) = cte)$ par rapport à R est Galiléen

- **Remarque** - si R_1 est aussi Galiléen $\boxed{\vec{\gamma}(M/R) = \vec{\gamma}(M/R_1)}$
  - * R_1 Galiléen $\Rightarrow \gamma e = 0$
  - * R_1 non Galiléen $\gamma e = cte$

- **Principe fondamental de la dynamique :**

La 2ème loi de Newton $\left\{ \begin{array}{l} \text{Le PFD dans R (Galiléen)} : m\vec{\gamma}(M/R) = \Sigma \vec{F}_{(ext)} \\ \text{Le PFD dans } R_1 \text{ (non Galiléen)} : m\vec{\gamma}_r = \Sigma' \vec{F}_{(ext)} + \underbrace{\vec{F}_{ie}}_{-m\vec{\gamma}_e(M)} + \underbrace{\vec{F}_{ic}}_{-m\vec{\gamma}_c(M)} \end{array} \right.$

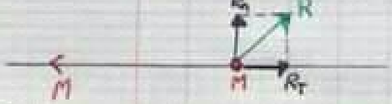
la 3ème loi de Newton $\Big\}$

M_1 et M_2 deux points en intéraction $\boxed{\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}}$

- **Exemple de forces :**

- Force gravitationnelles : $\vec{F}_{12} = m\vec{g}$
- Tension d'un ressort : $\vec{T} = -K(x_f - x_0)\vec{u}$

- Réaction et force de frottement :



- Coefficient de frottement $f = \dfrac{\|\vec{R_T}\|}{\|\vec{R_n}\|} = \tan\alpha$

$\vec{R_n}$: Réaction normale

$\vec{R_T}$: Réaction tangentielle (force de frottement)

- Si M se déplace sans frottement $\vec{R_T} = 0$
Alors $\vec{R_n} = R$ ($R \perp$ à la trajectoire)

Théorèmes généraux de la dynamique du pt matériel

- Théorème de la quantité du mouvement : $\boxed{\left.\dfrac{d\vec{P}(M/R)}{dt}\right|_R = \sum \vec{F}_{(réelles)} = m\,\vec{\gamma}(M/R)}$

- Moment d'une force $\vec{F}$ par rapport à un point : $\boxed{\mathcal{M}_o(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F}}$

- Moment cinétique par rapport à un point : $\boxed{\vec{\sigma}_o(M/R) = \vec{OM} \wedge m\vec{V}(M/R)}$

- Théorème du moment cinétique :

Si R Galiléen $\Rightarrow$ Si O fixe dans R

$$\boxed{\begin{aligned}\left.\frac{d\sigma_o(M/R)}{dt}\right|_R &= \vec{OM} \wedge m\,\vec{\gamma}(M/R)\\ &= OM \wedge \sum \vec{F}_{(réelles)} = \mathcal{M}_o(\vec{F}_{réelles})\end{aligned}}$$

Si R_1 non Galiléen $\Rightarrow$ Si O_1 fixe dans R_1

$$\left.\frac{d\sigma_{O_1}(M/R_1)}{dt}\right|_{R_1} = \vec{O_1M} \wedge m\,\vec{\gamma}_r(M)$$

$$= \vec{O_1M} \wedge \left(\sum \vec{F}_{réelles} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}\right)$$

$$\boxed{\left.\frac{d\sigma_{O_1}(M/R_1)}{dt}\right|_{R_1} = \mathcal{M}_{O_1}\left(\sum \vec{F}_{réelles} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}\right)}$$

Si R Galiléen : (A mobile)

$$\boxed{\left.\frac{d\vec{\sigma}_A(M/R)}{dt}\right|_R = \mathcal{M}_o\left(\sum \vec{F}_{réelles}\right) + m\vec{V}(M/R) \wedge \vec{V}(A/R)}$$

Si R_1 non Galiléen : (A mobile)

$$\boxed{\left.\frac{d\vec{\sigma}_A(M/R_1)}{dt}\right|_{R_1} = \mathcal{M}_o\left(\sum \vec{F} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}\right) + m\vec{V}(M/R_1) \wedge \vec{V}(A/R_1)}$$

- **Le travaille d'une force dans R :** $dw(\vec{F}/R) = \vec{F}.d\vec{OM} = \vec{F}.\vec{V}.dt$

$$\boxed{W_{\vec{F}} = \int dw(\vec{F}/R) = \int \vec{F}.\vec{V}(M/R).dt}$$

Si $W_{\vec{F}} \neq 0$	Si $W_{\vec{F}} = 0$
→ La force est travail	→ La force ne travail pas
→ La force est Conservative ($\vec{F_c}$)	→ La force non conservative ($\vec{F}_{nc}$)

- **Puissance de la force dans R** $\quad \boxed{P(\vec{F}/R) = \frac{dw(\vec{F}/R)}{dt} = \vec{F}.\vec{V}(M/R)}$

- **Théorème de l'énergie cinétique :**

Cas d'un referentiel Galiléen R

$$\vec{P}(\Sigma\vec{F}/R) = \frac{dE_c(M/R)}{dt}$$

$$\boxed{dw(\Sigma\vec{F}/R) = dE_c(M/R)}$$

$$W_{M_1M_2}(\Sigma\vec{F}/R) = \int_{M_1}^{M_2} dE_c(M/R) = E_c(M_2) - E_c(M_1)$$

Cas d'un referentiel non Galiléen R_1

$$P(\Sigma\vec{F}+\vec{F}_{ie}+\vec{F}_{ic}/R_1) = \frac{dE_c(M/R_1)}{dt}$$

$$\boxed{dw(\Sigma\vec{F}+\vec{F}_{ie}/R_1) = dE_c(M/R_1)}$$

$$W_{M_1M_2}(\Sigma\vec{F}+\vec{F}_{ie}/R) = E_c(M_2/R_1) - E_c(M_1/R_1)$$

Remarque :

$$\begin{aligned} dw(\vec{F}_{ic}(M)) &= \vec{F}_{ic}(M).\vec{V}(M/R_1).dt \\ &= \vec{F}_{ic}(M).d\vec{O_1M} \\ &= -m(2\vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{V}_r(M)).d\vec{O_1M} \end{aligned}$$

$$\boxed{dw(\vec{F}_{ic}(M)) = 0}$$

- **Energie Cinétique :**

$$\boxed{E_c(M/R) = \frac{1}{2}m\vec{V}^2(M/R)}$$

- Energie potentielle :

$$\boxed{\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, E_P}$$

→ Si $\vec{F}$ dérive E_P ($\vec{F}$ est Conservative)

→ Si $\vec{F}$ ne dérive pas E_P ($\vec{F}$ est non conservative)

- Travail d'une force conservative :

$$dW(\vec{F_{co}}/R) = \vec{F_{co}} \cdot d\overrightarrow{OM}$$

$$dW(\vec{F_{co}}/R) = -\overrightarrow{grad}\, E_P \cdot d\overrightarrow{OM} = -dE_P$$

$$dW(\Sigma\vec{F_{co}}/R) = \sum(-dE_P)$$

$$W_{M_1M_2}(\vec{F_{co}}/R) = -(E_P(M_2) - E_P(M_1))$$

$$-\frac{dE_P}{dt} = \frac{dW(\vec{F_{co}}/R)}{dt} = \vec{P}(\vec{F_{co}}/R) = \vec{F_{co}}.\vec{V}$$

- Energie mécanique :

$$\boxed{E_m(M/R) = E_c(M/R) + E_p(M/R)}$$

$E_c(M/R) = \frac{1}{2} m \vec{V}^2(M/R)$, $E_p(M/R) = E_{p_1}(\vec{F_{co1}}) + E_{p_2}(\vec{F_{co2}})$

- Conservation de l'énergie mécanique

$dW(\vec{f_{co}}/R) = -dE_p(M/R)$; $dW(\vec{f_{co}}/R) = dE_c(M/R)$

$dE_c(M/R) = -dE_p(M/R) \iff dE_c(M/R) + dE_p(M/R) = 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} dE_m(M/R) = 0 \\ E_m(M/R) = cte \end{array}}$$

⇒ c'est la conservation de l'E_m

- Théorème de l'$E_m(M/R)$

$$\boxed{dE_m(M/R) = dW(\vec{f}_{nco}/R)}$$

$$\frac{dE_m(M/R)}{dt} = \frac{dW(\vec{f}_{nco}/R)}{dt} = \vec{P}(f_{nco}/R) = \vec{f}_{nco} \cdot \vec{V}(M/R)$$

- Condition d'équilibre :

. Dans R un pt M est dit en équilibre si $\Sigma\vec{F}$ app sur M nulle. $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$

$\Rightarrow$ si $\Sigma\vec{F}$ est conservative $\quad \Sigma\vec{F} = -\vec{grad}\, E_p = 0$

la condition d'équilibre $\vec{grad}\, E_p = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k} = 0$

Si E_p dépend x	Si E_p dépend y	Si E_p dépend z
$\frac{\partial E_p}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial E_p}{\partial y} = 0$	$\frac{\partial E_p}{\partial z} = 0$

EXEMPLE $E_p = \cos\varphi$ on a $\frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = -\sin\varphi = 0$ condition d'équilibre est $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$

- Stabilité d'un point d'équilibre :

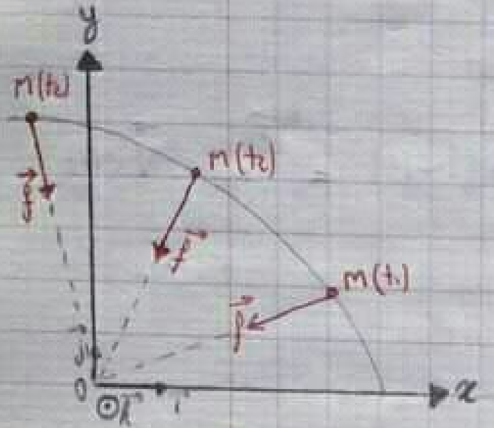
x_0 est une solution de $\frac{\partial E_p}{\partial x} = 0$; x_0 est une position d'équilibre

$\left.\frac{\partial^2 E_p(M/R)}{\partial x^2}\right|_{x=x_0} > 0$ x_0 est une position d'équilibre stable

$\left.\frac{\partial^2 E_p(M/R)}{\partial x^2}\right|_{x=x_0} < 0$ " " " " instable

$\left.\frac{\partial^2 E_p(M/R)}{\partial x^2}\right|_{x=x_0} = 0$ " " " " indifférents

Mouvement à force centrale



* Conservation du moment cinétique et loi des aires

$$\vec{M}_0(\vec{f}/R) = \vec{OM} \wedge \vec{f} = 0 \quad (\vec{OM} \text{ et } \vec{f} \text{ sont colinéaire})$$

THR du Moment cinétique en O dans R

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_0(M/R)}{dt}\right|_R = \vec{M}_0(\vec{f}/R) = \vec{0}$$

Constant du Mvt $\boxed{\vec{\sigma}_0(M/R) = \vec{OM} \wedge m\vec{V}(M/R) = \vec{cte}}$

* Mouvement à force central est plan :

on a $\vec{\sigma}_0(M/R) = \vec{OM} \wedge m\vec{V}(M/R) = \vec{cte}$

$\vec{OM}$ et $\vec{V}$ sont constamment $\perp$ au vecteur constant $\vec{\sigma}_0(M/R)$

$\Rightarrow$ Donc le point M décrit un Mvt plan.

* lois des aires

on pose $\vec{\sigma}_0(M/R) = \sigma_0 \vec{k}$

$\vec{OM} = \rho \vec{e_\rho}$ $\qquad \vec{V}(M/R) = \dot{\rho}\vec{e_\rho} + \rho\dot{\varphi}\vec{e_\varphi}$

$\vec{\sigma}_0(M/R) = \vec{OM} \wedge m\vec{V} = m\rho^2\dot{\varphi}\vec{k}$

Alors $\sigma_0 = m\rho^2\dot{\varphi} = \vec{cte} \Rightarrow \frac{\sigma_0}{m} = \rho^2\dot{\varphi} = C$ } Constant de la loi des aires

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\sigma_0}{2m} = \frac{\rho^2\dot{\varphi}}{2} = cte$$ } vitesse aréolaire du Mvt c'est la loi des aires

* Premier formule de Binet :

$\vec{V}(M/R) = \dot{\rho}\vec{e_\rho} + \rho\dot{\varphi}\vec{e_\varphi} \quad \rightarrow \quad \vec{V}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2$

on a $\dot{\rho} = \frac{d\rho}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}\frac{d\rho}{d\varphi}$ $\quad (C = \rho^2\dot{\varphi}) \quad \dot{\rho} = \frac{C}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\varphi} = C\frac{d}{d\varphi}\left(-\frac{1}{\rho}\right)$

et $\dot{\varphi}^2 = \frac{C^2}{\rho^4}$ $\qquad \vec{V}^2 = C^2\left[\frac{d}{d\varphi}\left(-\frac{1}{\rho}\right)\right]^2 + C^2\left(\frac{1}{\rho}\right)^2$

on Pose $U = \frac{1}{\rho}$

$$\Rightarrow \vec{V}^2 = C^2\left(U^2 + \left(\frac{dU}{d\varphi}\right)^2\right)$$

* Deuxième formule de Binet :

$$\vec{\gamma}(M/R) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\,\vec{e_\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\,\vec{e_\varphi}$$
$$= \gamma_\rho\,\vec{e_\rho} + \gamma_\varphi\,\vec{e_\varphi}$$

$\Rightarrow$ on $C = \rho^2\dot{\varphi} = cte \Rightarrow \frac{dC}{dt} = 2\rho\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho^2\ddot{\varphi} = 0$

$2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi} = 0 \Rightarrow \boxed{\gamma_\varphi = 0}$

$$\vec{\gamma}(M/R) = \gamma_\rho\,\vec{e_\rho} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\,\vec{e_\rho}$$

$$\ddot{\rho} = \frac{d\dot{\rho}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}\frac{d\dot{\rho}}{d\varphi} = \frac{C}{\rho^2}\frac{d}{d\varphi}\left[C\frac{d}{d\varphi}\left(-\frac{1}{\rho}\right)\right] = \frac{C^2}{\rho^2}\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(-\frac{1}{\rho}\right)$$

$$\rho\dot{\varphi}^2 = \rho\frac{C^2}{\rho^4} = \frac{C^2}{\rho^3}$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{C^2}{\rho^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(-\frac{1}{\rho}\right) - \frac{C^2}{\rho^3}\right]\vec{e_\rho} = -\frac{C^2}{\rho^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\right]\vec{e_\rho}$$

on pose $U = 1/\rho \Rightarrow \boxed{\vec{\gamma}(M/R) = -\frac{C^2}{\rho^2}\left[\frac{d^2U}{d\varphi^2} + U\right]\vec{e_\rho}}$

* Équation du Mvt :

- Équation de la trajectoire de M :

$$\rho = \frac{P}{1 + e\cos\varphi}$$

$P = \frac{\vec{\sigma_0}^2}{Km}$ (P) : paramètre de la conique

$e = A.P = A.\frac{\vec{\sigma_0}^2}{Km}$ (e) : l'excentricité

* c'est l'équation d'un conique dont le foyer conside avec l'origine O

* La nature de la trajectoire depend de l'excentricité e

* Si $e = 0$ La trajectoire est Circulaire
* Si $0 < e < 1$ La trajectoire est Elliptique
* Si $e = 1$ La trajectoire est parabolique
* Si $e > 1$ La trajectoire est hyperbolique