Mécanique du Point Matériel

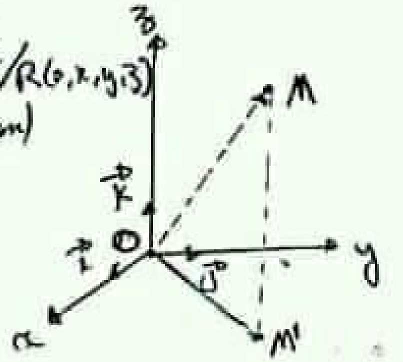
AARIF Yasmine

chap 1 : La Cinématique du Pt matériel :

→ la cinématique du Pt matériel, c'est l'étude du MVT indépendant des causes $\begin{cases}\text{forces}\\ \text{énergie}\end{cases}$ qui les produisent.

1°/ Systèmes de coordonnées :

a°/ coord Cartésiennes : soit M en MVT / $R(O,x,y,z)$

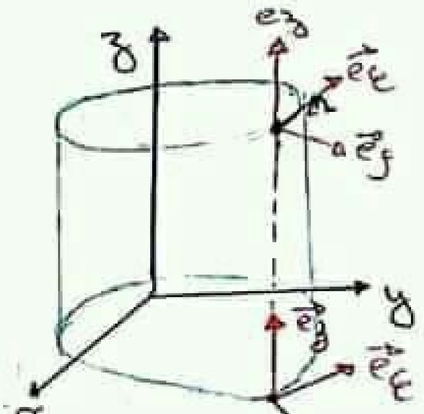


$\vec{OM} = \vec{OM'} + \vec{M'M}$ (vecteur de Position)

$= x_M \vec{i} + y_M \vec{j} + z_M \vec{k}$

b°/ Coord Cylindriques :

soit M en MVT / $R(O,x,y,z)$



$\begin{cases} \rho = |\vec{OM'}| \;;\; 0 \leq \rho \leq +\infty \\ \varphi = (\vec{Ox}, \vec{OM'}) \;;\; 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ z = \overline{M'M} \;;\; -\infty \leq z \leq +\infty \end{cases}$

$\underbrace{R_c(O,\rho,\varphi,z)}_{\text{Repère cylindrique}} \equiv \underbrace{(O, \vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi}, \vec{e_z})}_{\text{base cylindrique}}$

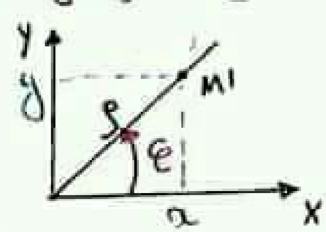
$\vec{OM} = \vec{OM'} + \vec{M'M}$

$= \rho \vec{e_\rho} + z \vec{e_z}$

$\begin{cases} \vec{e_\rho} \wedge \vec{e_\varphi} = \vec{e_z} \\ \vec{e_\varphi} \wedge \vec{e_z} = \vec{e_\rho} \\ \vec{e_z} \wedge \vec{e_\rho} = \vec{e_\varphi} \end{cases}$

* Relation entre (x,y,z) et (ρ,φ,z) :

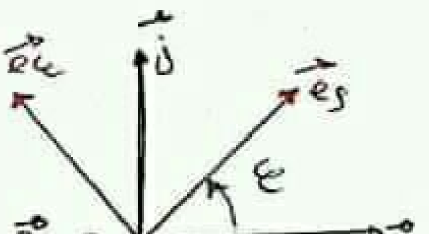
Dans le plan (O,x,y) :



$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{\rho} \to x = \rho\cos\varphi \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\rho} \to y = \rho\sin\varphi \end{cases}$

$\hookrightarrow x^2 + y^2 = \rho^2 \;;\; \dfrac{y}{x} = \mathrm{tg}\,\varphi$

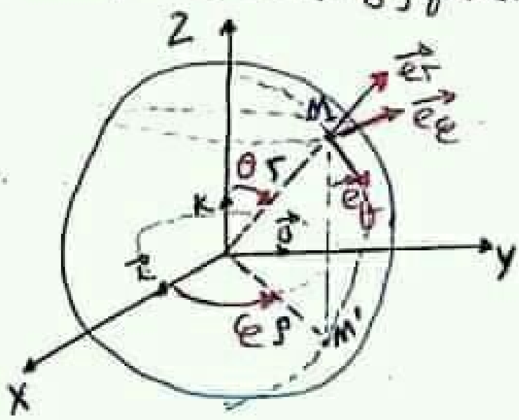
$\begin{cases} \vec{e_\rho} = \cos\varphi\, \vec{i} + \sin\varphi\, \vec{j} \\ \vec{e_\varphi} = -\sin\varphi\, \vec{i} + \cos\varphi\, \vec{j} \\ \vec{e_z} = \vec{K} \end{cases}$



5°/ coord sphérique : soit M en Mvt / $R(O,X,Y,Z)$ fixe :

$$\begin{cases} r(t) = |\overrightarrow{OM}| \ ; & 0 \leqslant r \leqslant +\infty \\ \theta(t) = (\overrightarrow{OK}, \widehat{\ \ } \overrightarrow{OM}) \ ; & 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \\ \varphi(t) = (\overrightarrow{Oi}, \overrightarrow{OM'}) \ ; & 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \end{cases}$$

$\rho = |\overrightarrow{OM'}|$; $0 \leqslant \rho \leqslant +\infty$

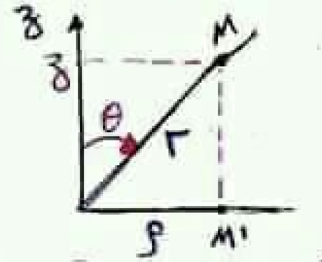


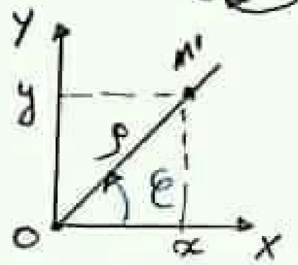
* La base sphérique :

$R_s(O, r, \theta, \varphi) \equiv (O; \vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$

* Relation entre (x,y,z) et (r,θ,φ) :

$$\begin{cases} \vec{e_r} \wedge \vec{e_\theta} = \vec{e_\varphi} \\ \vec{e_\theta} \wedge \vec{e_\varphi} = \vec{e_r} \\ \vec{e_\varphi} \wedge \vec{e_r} = \vec{e_\theta} \end{cases}$$





. $\cos(\theta) = \frac{z}{r} \rightarrow z = r\cos(\theta)$

. $\sin(\theta) = \rho / r \rightarrow \rho = r\sin(\theta)$

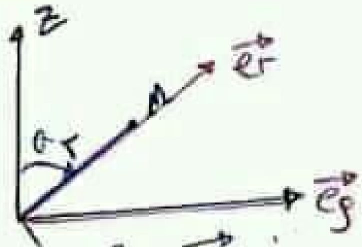
. $\cos(\varphi) = \frac{x}{\rho} \rightarrow x = \rho\cos(\varphi)$

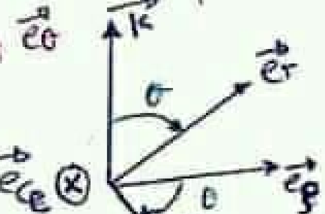
. $\sin(\varphi) = \frac{y}{\rho} \rightarrow y = \rho\sin(\varphi)$

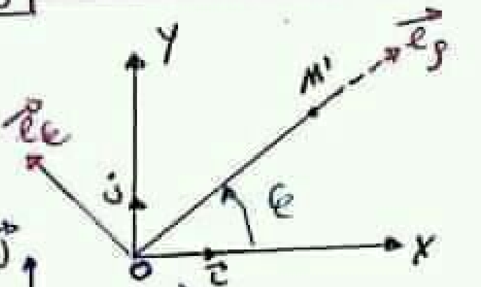
$tg(\theta) = \rho / z$

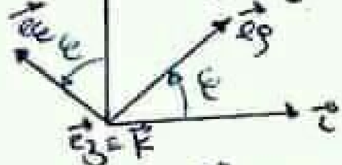
$$\boxed{\begin{cases} x = r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\theta)\sin(\varphi) \end{cases}}$$

* Relation entre $(\vec{i},\vec{j},\vec{K})$ et $(\vec{e_r},\vec{e_\theta},\vec{e_\varphi})$:









$\vec{e_\rho} = \cos(\varphi)\vec{i} + \sin(\varphi)\vec{J}$

$\vec{e_r} = \cos\theta\ \vec{K} + \sin\theta\ \vec{e_\rho}$

$$\vec{e_r} = \sin\theta\left[\cos(\varphi)\vec{i} + \sin(\varphi)\vec{J}\right] + \cos(\theta)\vec{K}$$

$\vec{e}_\theta = \cos\theta\, \vec{e}_\rho + \sin\theta\, \vec{k}$

$\hookrightarrow \boxed{\vec{e}_\theta = \cos(\theta)\left[\cos(\varphi)\vec{i} + \sin(\varphi)\vec{j}\right] - \sin(\theta)\vec{k}}$

$\boxed{\vec{e}_\varphi = \cos(\varphi)\vec{j} - \sin(\varphi)\vec{i}}$

Vecteur de Position :

$\vec{OM} = |\vec{OM}|\, \vec{e}_r \longrightarrow \boxed{\vec{OM} = r\, \vec{e}_r}$

2/ Vitesse et l'accelerations

vitesse : $\vec{V}(M/R) = \dfrac{d\vec{OM}}{dt}\Big/_R$

Acceleration : $\vec{\gamma}(M/R) = \dfrac{d\vec{V}}{dt}\Big/_R = \dfrac{d^2\vec{OM}}{dt^2}\Big/_R$

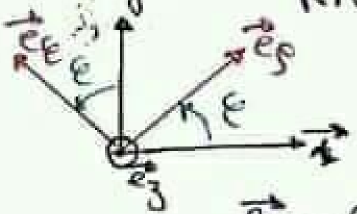
a/ coord cartésiennes :

$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \longrightarrow \vec{V} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} = \left|\begin{array}{l}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{array}\right._R$

$\longrightarrow \vec{\gamma} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} = \left|\begin{array}{l}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{array}\right._R$

b/ coord cylindrique :

$\left\{\begin{array}{l}\vec{e}_\rho \text{ et } \vec{e}_\varphi \text{ dépendent du temps}\\ \vec{e}_z \text{ fixe}\end{array}\right.$



$\vec{OM} = \rho\, \vec{e}_\rho + z\, \vec{e}_z$

$\vec{e}_\rho = \cos\varphi\, \vec{i} + \sin\varphi\, \vec{j}$

$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\, \vec{i} + \cos\varphi\, \vec{j}$

$\vec{V}(M/R) = \dot{\rho}\, \vec{e}_\rho + \rho \dfrac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \dot{z}\, \vec{e}_z$ or : $\dfrac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \dot{\varphi}\left[-\sin\varphi\, \vec{i} + \cos\varphi\, \vec{j}\right] = \dot{\varphi}\, \vec{e}_\varphi$

$\hookrightarrow \boxed{\vec{V}(M/R) = \dot{\rho}\, \vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\, \vec{e}_\varphi + \dot{z}\, \vec{e}_z}$

$\vec{V}(M/R) = \left|\begin{array}{l}\dot{\rho}\\ \rho\dot{\varphi}\\ \dot{z}\end{array}\right._{(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)}$

$\vec{\gamma}(M/R) = \ddot{\rho}\, \vec{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\varphi}\, \vec{e}_\varphi + \dot{\rho}\dot{\varphi}\, \vec{e}_\varphi + \rho\ddot{\varphi}\, \vec{e}_\varphi - \rho\dot{\varphi}^2\, \vec{e}_\rho + \ddot{z}\, \vec{e}_z$

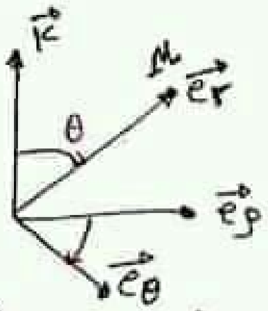
$\longrightarrow \vec{\gamma}(M/R) = \left|\begin{array}{l}(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\\ (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\\ \ddot{z}\end{array}\right._{(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)}$

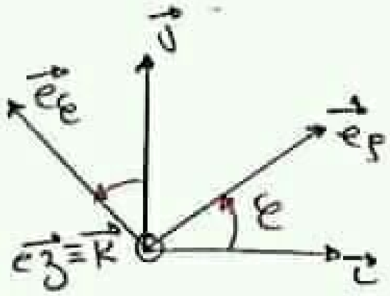
$\boxed{\vec{\gamma}(M/R) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\, \vec{e}_z}$

c/ coord sphériques:

$(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$ base mobile

$\vec{OM} = r\,\vec{e_r}$





$\frac{d\vec{e_r}}{dt}$?

$$\begin{cases} \vec{e_r} = \cos\theta\,\vec{k} + \sin\theta\,\vec{e_\rho} \\ \vec{e_\theta} = \cos\theta\,\vec{e_\rho} + \sin\theta\,\vec{k} \\ \vec{e_\varphi} = \cos(\varphi)\,\vec{j} - \sin(\varphi)\,\vec{i} \\ \vec{e_\rho} = \cos(\varphi)\,\vec{i} + \sin(\varphi)\,\vec{j} = \cos\theta\,\vec{e_\theta} + \sin\theta\,\vec{e_r} \end{cases}$$

$$\frac{d\vec{e_r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\cos\theta\,\vec{k} + \sin\theta\,\vec{e_\rho}\right] = -\dot\theta\sin\theta\,\vec{k} + \dot\theta\cos\theta\,\vec{e_\rho} - (\sin(\theta))\dot\varphi\,\vec{e_\varphi}$$

$$= \dot\theta\Big[\underbrace{\cos(\theta)\vec{e_\rho} - \sin(\theta)\vec{k}}_{\vec{e_\theta}}\Big] + \dot\varphi\sin(\theta)\vec{e_\varphi}$$

$$\rightarrow \frac{d\vec{e_r}}{dt} = \dot\theta\,\vec{e_\theta} + \dot\varphi\sin\theta\,\vec{e_\varphi}$$

$$\frac{d\vec{e_\theta}}{dt} = -\dot\theta\sin\theta\,\vec{e_\rho} + \dot\varphi\cos\theta\,\vec{e_\varphi} - \dot\theta\cos\theta\,\vec{k}$$

$$\rightarrow \frac{d\vec{e_\theta}}{dt} = -\dot\theta\,\vec{e_r} + \dot\varphi\cos\theta\,\vec{e_\varphi}$$

$$\vec{OM} = r(t)\vec{e_r} \longrightarrow \vec{V}(M/R) = \dot r\,\vec{e_r} + r\frac{d\vec{e_r}}{dt}$$

$$\rightarrow \vec{V}(M/R) = \dot r\,\vec{e_r} + r\left[\dot\theta\,\vec{e_\theta} + \dot\varphi\sin\theta\,\vec{e_\varphi}\right] = \left|\begin{array}{l} \dot r \\ r\dot\theta \\ r\dot\varphi\sin\theta \end{array}\right.$$
$(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$

$$\vec{\gamma}(M/R) = \ddot r\,\vec{e_r} + \dot r\left[\dot\theta\,\vec{e_\theta} + \dot\varphi\sin\theta\,\vec{e_\varphi}\right]$$
$$+ \dot r\left[\dot\theta\,\vec{e_\theta} + \dot\varphi\sin\theta\,\vec{e_\varphi}\right]$$
$$+ r\Big[\ddot\theta\,\vec{e_\theta} + \dot\theta\left[-\dot\theta\,\vec{e_r} + \dot\varphi\cos\theta\,\vec{e_\varphi}\right] + \ddot\varphi\sin\theta\,\vec{e_\varphi}$$
$$+ \dot\varphi\dot\theta\cos\theta\,\vec{e_\varphi} - \dot\varphi^2\sin\theta\,\vec{e_\rho}\Big]$$

$$\longrightarrow \vec{\gamma}(M/R) = \left|\begin{array}{l} \ddot r - r\dot\theta^2 - r\dot\varphi^2\sin^2\theta \\ 2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta - r\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta \\ 2r\dot\theta\dot\varphi\cos\theta + r\ddot\varphi\sin\theta + 2\dot r\dot\varphi\sin\theta \end{array}\right.$$
$(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$

d/ Coordonnées de Serret-Frenet (s curviligne)

$$\overrightarrow{MM'} = d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}$$

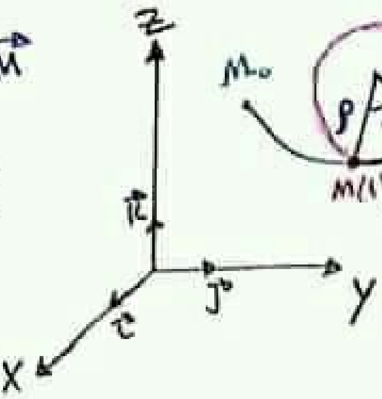
$$\overrightarrow{MM'} = \widehat{MM'} \cdot \vec{\tau}$$

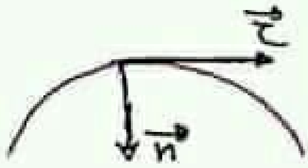
$$\rightarrow d\overrightarrow{OM} = dS \cdot \vec{\tau}$$

$S = R \cdot \theta$

avec : $dS = \rho \, d\theta$

$(\sin\theta \simeq \theta)$





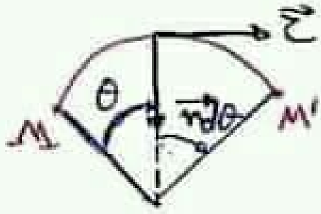
$$\begin{cases} \vec{V}(M/R) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dfrac{dS}{dt}\vec{\tau} \\ |\vec{V}| = \dfrac{dS}{dt} = V = \dot{S} \end{cases}$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\Big/_R = \frac{d}{dt}\left(\frac{dS}{dt}\vec{\tau}\right) = \frac{d^2S}{dt^2}\vec{\tau} + \frac{dS}{dt}\frac{d\vec{\tau}}{dt}\Big/_R$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} + \frac{dS}{dt}\frac{d\vec{\tau}}{dt}\Big/_R = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} + V\frac{d\vec{\tau}}{dt}\Big/_R$$

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

or : $\dfrac{d\vec{\tau}}{d\theta} = \vec{n}$



$$\rightarrow \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \dot{\theta}\,\vec{n}$$

or : $dS = \rho \, d\theta$

$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dS} \cdot \frac{dS}{dt} = \frac{1}{\rho}V$$

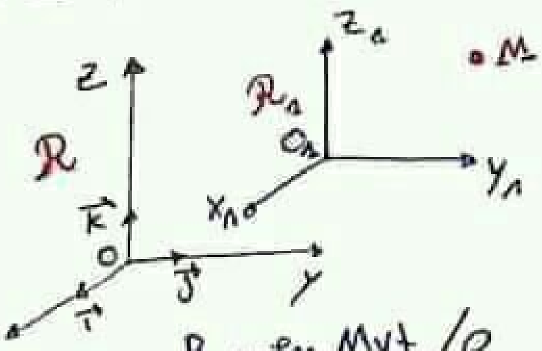
Alors :
$$\vec{\gamma}(M/R) = \underbrace{\frac{dV}{dt}}_{\gamma_t}\vec{\tau} + \underbrace{\frac{V^2}{\rho}}_{\gamma_n}\vec{n}$$

$$\begin{cases} \gamma_t = \dfrac{dV}{dt} \\ \gamma_n = \dfrac{V^2}{\rho} \end{cases}$$

Chap I : Changement de Référentiels :

$$\frac{d\vec V_1}{dt}\Big/_R = \frac{d\vec V_1}{dt}\Big/_{R_1} + \vec\Omega(R_1/R)\wedge \vec V_1$$

↳ Formulation de dérivation vectorielle.



R_1 en Mvt $/R$

*) La composition des vitesses :

$$\vec V(M/R) = \frac{d\vec{OM}}{dt}\Big/_R = \vec V_a(M)$$

$$V(M/R_1) = \frac{d\vec{O_1M}}{dt}\Big/_{R_1} = \vec V_r(M)$$

$$\vec{OM} = \vec{OO_1} + \vec{O_1M}$$

$$\vec V(M/R) = \frac{d\vec{OM}}{dt}\Big/_R = \frac{d}{dt}\left[\vec{OO_1} + \vec{O_1M}\right] = \frac{d\vec{OO_1}}{dt}\Big/_R + \frac{d\vec{O_1M}}{dt}\Big/_R$$

↳ $\vec V(M/R) = \vec V(O_1/R) + \vec\Omega(R_1/R)\wedge\vec{O_1M} + \frac{d\vec{O_1M}}{dt}\Big/_{R_1}$

$$\vec V(M/R) = \vec V(O_1/R) + \vec V(M/R_1) + \vec\Omega(R_1/R)\wedge\vec{O_1M}$$

$\longrightarrow$ $\vec V = \vec V_r + \vec V_e$

or : $\vec V_a = \vec V(M/R)$

$\vec V_r = \vec V(M/R_1)$

$\vec V_e = \vec V(O_1/R) + \vec\Omega(R_1/R)\wedge\vec{O_1M}$

*) La composition des accélérations :

$$\vec V_a(M) = \vec V_r(M) + \vec V_e(M)$$

$$\frac{dV_a(M)}{dt}\Big/_R = \frac{d}{dt}\vec V_r(M)\Big/_R + \frac{dV_e(M)}{dt}\Big/_R$$

$$= \frac{dV_r(M)}{dt}\Big/_R + \frac{d}{dt}\left[\vec V_a(O_1) + \vec\Omega(R_1/R)\wedge\vec{O_1M}\right]$$

$\rightsquigarrow$ $\vec\gamma_a(M) = \frac{dV_r(M)}{dt}\Big/_R + \frac{dV_a(O_1)}{dt}\Big/_R + \frac{d\vec\Omega(R_1/R)}{dt}\Big/_R\wedge\vec{O_1M} + \vec\Omega(R_1/R)\wedge\frac{d\vec{O_1M}}{dt}\Big/_R$

$$\gamma_a = \gamma_a(O_1) + \frac{dV_r(M)}{dt}\Big/_{R_1} + \vec\Omega(R_1/R)\wedge\vec V_r(M) + \frac{d\Omega(R_1/R)}{dt}\wedge\vec{O_1M}$$
$$+ \vec\Omega(R_1/R)\wedge\left[\frac{d\vec{O_1M}}{dt}\Big/_{R_1} + \vec\Omega(R_1/R)\wedge\vec{O_1M}\right]$$

$$\gamma_a = \gamma_r(M) + \gamma_a(O_1) + \vec\Omega(R_1/R)\wedge\vec V_r(M) + \frac{d\vec\Omega(R_1/R)}{dt}\Big/_R\wedge\vec{O_1M}$$
$$+ \vec\Omega\wedge\vec V_r(M) + \vec\Omega\wedge(\vec\Omega\wedge\vec{O_1M})$$
$$= \gamma_r(M) + \gamma(O_1) + 2\vec\Omega(R_1/R)\wedge\vec V_r(M) + \frac{d\vec\Omega(R_1/R)}{dt}\Big/_R\wedge\vec{O_1M} + \vec\Omega\wedge(\vec\Omega\wedge\vec{O_1M})$$

$$\vec\gamma_a(M) = \vec\gamma_r(M) + \vec\gamma_c(M) + \vec\gamma_e(M)$$

$\gamma_r = \frac{dV_r(M)}{dt}\Big/_{R_1}$ $\quad$ $\gamma_c = 2\vec\Omega(R_1/R)\wedge\vec V_r(M)$

$\gamma_e(M) = \gamma_a(O_1) + \frac{d\vec\Omega(R_1/R)}{dt}\Big/_R\wedge\vec{O_1M} + \vec\Omega\wedge(\vec\Omega\wedge\vec{O_1M})$

Chap3: (Dynamique du point Materiels)

I/ P.F.D:

1/ le principe d'enertie (1ère loi de Newton):

* M est isolé : n'est soumis à aucune force (libre)
* M est Pseudo-isolé : la résultante des forces appliquée sur M est nulle → $\sum \vec{F} = \vec{0}$

1ère loi de Newton :

Dans un référentiel galileen, si M est isolé ou Pseudo-isolé → $\vec{V}(M) = \vec{cte}$

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \leftrightarrow \vec{V}(M) = \vec{cte}$$

→ Remarque : $\vec{V}(M) = \vec{0}$ → M au repos.

*Referentiel galileen :

C'est un referentiel dans lequel la 1ère loi de Newton est verifiée (valable)

$$\begin{cases} \vec{V}(M/R) = \vec{cte} \\ \sum \vec{F} = \vec{0} \end{cases} \rightarrow R \text{ est galileen}$$

→ tout R en mvt de translation rectiligne uniforme par rapport à un referentiel galileen est un R.G.

R est galileen :

$$\vec{V}_a(M) = \vec{V}_r(M) + \vec{V}_e(M)$$
$$= \vec{V}(M/R_1) + \vec{V}_e(M)$$

• si R_1 est en mvt de translation rectiligne uniforme /R :

$$\vec{V}_e(M) = \vec{V}_a(O_1) + \cancel{\vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{O_1M}}$$
$$\vec{V}_e(M) = \vec{V}_a(O_1)$$

uniforme → $\vec{V}(O_1/R) = \vec{cte} = \vec{V}_e(M)$

• si M en Mvt de translation /R : $\vec{V}(M/R) = \vec{cte}$

$$\vec{V}(M/R_1) = \vec{V}(M/R) - \vec{V}_e(M)$$
$$= \vec{cte} - \vec{cte} = \vec{cte} \rightarrow \vec{V}(M/R_1) = \vec{cte}$$

→ R_1 est galileen.

2°/ le Principe fondamentale de la dynamique (P.F.D) :

Quantité du Mvt : $\vec{P}(M/R) = m\vec{V}(M/R)$

dans un référentiel galiléen :

$$\frac{d\vec{P}}{dt}(M/R) = \sum \vec{F}_{ext/M}$$

C'est une équation differentiel

Cinématique + Dynamique (Ep. Ec, Forces)

2ème loi de Newton :

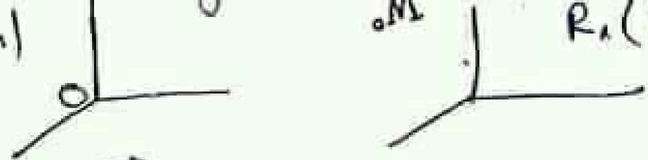
Dans un référentiel galiléen :

Si m = cte :
$$\frac{d[m\vec{V}(M/R)]}{dt} = \sum \vec{F}_{ext \to M}$$

$$\to \quad m\,\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt} = \sum \vec{F}_{ext \to M} \;\to\; m\vec{\gamma}(M/R) = \sum \vec{F}_{ext/M}$$

3°/ La 2ème loi de Newton dans un Référentiel non galiléen :

R(galiléen)



R_1 (non galiléen)

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma}(M/R) \quad \underline{or} : \vec{\gamma}(M/R) = \vec{\gamma}_r(M) + \vec{\gamma}_e(M) + \vec{\gamma}_c(M)$$

$$\hookrightarrow \sum \vec{F} = m\left[\vec{\gamma}_1(M/R_1) + \vec{\gamma}_e(M) + \vec{\gamma}_c(M)\right]$$

$$\sum \vec{F} - m\vec{\gamma}_e(M) - m\vec{\gamma}_c(M) = m\vec{\gamma}(M/R_1)$$

$$m\vec{\gamma}(M/R_1) = \sum \vec{F} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$$

<u>avec</u> : $\left| \begin{array}{l} F_{ie} = -m\vec{\gamma}_e(M) \\ F_{ic} = -m\vec{\gamma}_c(M) \end{array} \right.$

II/ Theoreme du moment cinétique :

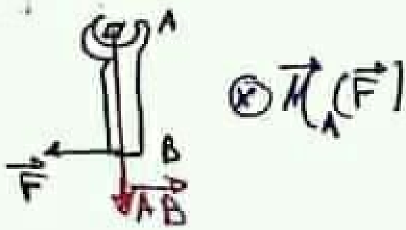
1/ Le moment d'une force :

le moment d'une force $\vec{F}$ par rapport à un pt O, qui s'applique en un pt M est le vecteur : $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F}$

M le pt d'application de $\vec{F}$

la norme : $|\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})| = |\vec{F}|\,|\vec{OM}|\,\sin(\vec{F},\vec{OM})$

<u>Exemple</u> $\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}) = \vec{AB} \wedge \vec{F}$



* Le moment par rapport à un axe (Δ) :

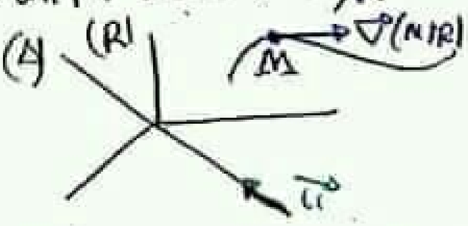
$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) \cdot \vec{u}$$

scalaire

Projection de $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$ sur (Δ)

2/ Le moment cinétique :

Le moment cinétique au Pt O, d'un Pt M en mvt /R :



$$\begin{cases} \vec{\sigma}_O(M/R) = \vec{OM} \wedge \vec{P}(M/R) \\ \vec{\sigma}_O(M/R) = \vec{OM} \wedge m\vec{V}(M/R) \end{cases}$$

$\sigma_\Delta(M/R) = \vec{\sigma}_O(M/R) \cdot \vec{u}$ le moment par rapport à (Δ)

3/ le theoreme du moment cinétique :

R est galiléen

$$\vec{\sigma}_O(M/R) = \vec{OM} \wedge m\vec{V}(M/R)$$

$$\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt}(M/R) = \left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right/_R \wedge m\vec{V}(M/R) + \vec{OM} \wedge m\frac{d\vec{V}}{dt}(M/R)$$

$$= \underbrace{m\vec{V}(M/R) \wedge \vec{V}(M/R)}_{=0} + \vec{OM} \wedge m\vec{\gamma}(M/R)$$

$$= \vec{OM} \wedge \Sigma \vec{F}_{ext}$$

$$\rightarrow \quad \left.\frac{d\vec{\sigma}_O(M/R)}{dt}\right/_R = \vec{\mathcal{M}}_O(\Sigma \vec{F}_{ext})$$

Dans un R.G

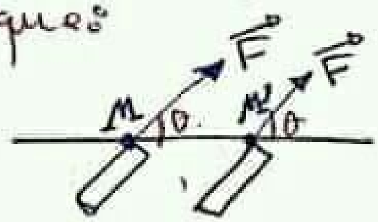
* Dans un Referentiel non galiliéen

$$\frac{d\vec{\sigma}_o(M/R_a)}{dt}\Big/_{R_a} = \vec{\mathcal{M}}_o\left(\Sigma\vec{F}_{ext} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}\right)$$

R_a non galiliéen

III/ Theoreme de l'energie cinétique:

1°/ travail d'une force:



$$\begin{cases} W_{M\to M'}(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\overrightarrow{MM'} \\ W_{M\to M'}(\vec{F}) = |\vec{F}|\,|\overrightarrow{MM'}|\cos\theta \end{cases}$$

2°/ Travail élementaire:

* La trajectoire est curviligne
* $\vec{F} \neq c^{te}$

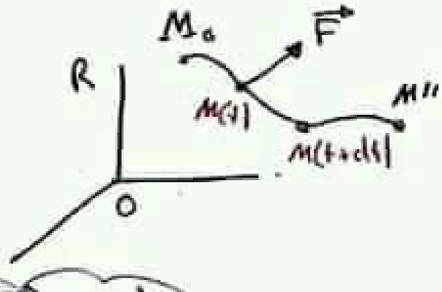
$$dW(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\overrightarrow{MM'}$$

$$dW(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\vec{dl}$$

dl = deplacement élementaire

$$W_{M_o\to M''}(\vec{F}) = \int_{M_o}^{M''}\vec{F}\cdot\vec{dl}$$

Soit M en mvt $/R$:



$$dW(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\vec{dl} = \vec{F}\cdot\overrightarrow{MM'}$$

or: $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}$
$= d\overrightarrow{OM}$

$$\longrightarrow \quad dW(\vec{F}) = \vec{F}\cdot d\overrightarrow{OM}$$

$$W_{M_o\to M''}(\vec{F}) = \int_{M_o}^{M''}\vec{F}\,d\overrightarrow{OM}$$

Travail total

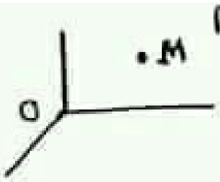
3°/ Puissance d'une force:

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = \frac{dW(\vec{F})}{dt}$$

$$\longrightarrow \mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\Big/_R$$

$$\longrightarrow \mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\vec{V}$$

Energie cinétique :



R est galiléen

$$E_c = \frac{1}{2} m \vec{V}^2(M/R)$$

$$\left.\frac{dE_c(M/R)}{dt}\right/_R = m\,\vec{V}(M/R)\cdot\left.\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\right/_R$$

$$= m\,\vec{V}(M/R)\cdot\vec{\gamma}(M/R)$$

$$= \sum \vec{F}_{ext}\cdot\vec{V}(M/R)$$

$$\longrightarrow \boxed{\left.\frac{dE_c(M/R)}{dt}\right/_R = \mathcal{P}\left(\sum \vec{F}_{ext}\right)}$$

Theoreme de l'energie cinétique

Dans un R_1 non galiléen :

$$\left.\frac{dE_c(M/R)}{dt}\right/_R = \mathcal{P}\left(\sum \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{ie} + \cancel{\vec{F}_{ic}}\right)$$

$$⚠ \boxed{\mathcal{P}(\vec{F}_{ic}) = 0}$$

$$\mathcal{P}(\vec{F}_{ic}) = \vec{F}_c \cdot \vec{V}(M/R_1)$$

$$= -m\,\vec{\gamma}_c(M)\wedge\vec{V}(M/R_1) = -m\left(2\vec{\Omega}(R_1/R)\wedge\vec{V}(M/R_1)\right)\cdot\vec{V}(M/R_1)$$

$$= 0$$

1°/ Le gradient : $\vec{\nabla}$ (nabla) →

* en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} = \left|\begin{matrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{matrix}\right._{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}$$

$f(x,y,z)$: fct scalaire continue et derivable.

$$\overrightarrow{grad}\,f = \vec{\nabla} f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

Soit M en mvt$/R$:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \longrightarrow d\overrightarrow{OM} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{grad}\,f\,d\overrightarrow{OM} = \left|\begin{matrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial f}{\partial z}\end{matrix}\right. \cdot \left|\begin{matrix}dx\\ dy\\ dz\end{matrix}\right. = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

$$\longrightarrow \boxed{\overrightarrow{grad}\,f\cdot d\overrightarrow{OM} = df}$$

* en coord cylindrique:

$$\vec{OM} = \rho\,\vec{e_\rho} + z\vec{K} \rightarrow d\vec{OM} = d\rho\,\vec{e_\rho} + \rho\, d\theta\,\vec{e_\theta} + dz\,\vec{K}$$

$f(\rho,\theta,z)$: $\underline{df} = \frac{\partial f}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial z} dz$

$$\begin{vmatrix} A \\ B \\ C \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d\rho \\ \rho\, d\theta \\ dz \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial \rho} d\theta \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta \\ \frac{\partial f}{\partial z} dz \end{vmatrix} \longrightarrow A = \frac{\partial f}{\partial \rho} \;; B = \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta} \;; C = \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\longrightarrow \boxed{\vec{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{e_\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e_z}}$$

2/ Le rotationnel:

$\forall\ \vec{V} \in E$:

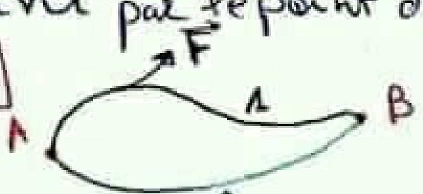
• en coord cartésiennes:

$$\vec{rot}\,\vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\vec{rot}\,\vec{V} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial V_z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial}{\partial x}V_z - \frac{\partial}{\partial z}V_x\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}V_y - \frac{\partial}{\partial y}V_x\right)\vec{K}}$$

3/ Les forces conservatives:

$\vec{F}$ est conservative si le travail produit par cette $\vec{F}$ ne depend pas du chemin suiver par le point d'application de cette $\vec{F}$: $\boxed{W^1_{A\to B}(\vec{F}) = W^2_{A\to B}(\vec{F})}$



$$\rightarrow \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{l} = 0$$

D'aprés de Th de Kelvin-stokes:

$$\vec{rot}\,\vec{F} = \vec{0} \longrightarrow \vec{F} = -\vec{grad}\, f$$

$$\longrightarrow \vec{F} = -\vec{grad}\, E_p$$

E_p → Energie potentiel

$$\overrightarrow{grad}\, E_p \cdot \overrightarrow{dOM} = dE_p$$

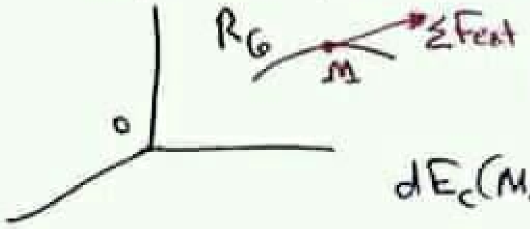
$$\vec{F} \cdot \overrightarrow{dOM} = -dE_p \longrightarrow$$

$$W_{A \to B}(F) = E_{p_A} - E_{p_B}$$

$$dW(\vec{F}) = -dE_p$$

$$E_p = \int -dW(\vec{F})$$

IV - Théorème de l'énergie Mécanique :



$$\Sigma \overrightarrow{F_{ext}} = \Sigma \overrightarrow{F_c} + \Sigma \overrightarrow{F_{NC}}$$

$$dE_c(M/R) = dW(\Sigma \overrightarrow{F_{ext}})$$

$$= dW(\overrightarrow{F_c}) + dW(\overrightarrow{F_{nc}})$$

$$\longrightarrow dE_c = -dE_p(M/R) + dW(\Sigma \overrightarrow{F_{nc}})$$

$$d[E_c(M/R) + E_p(M/R)] = dW(\Sigma \overrightarrow{F_{nc}})$$

$$dE_m(M/R) = dW(\Sigma \overrightarrow{F_{nc}})$$

$$dE_m(M/R) = dW(\Sigma \overrightarrow{F_{nc}}) \qquad \frac{dE_m(M/R)}{dt} = P(\Sigma \overrightarrow{F_{nc}})$$

si M est soumis juste à des forces conservatives :

$$dW(\Sigma \overrightarrow{F_{nc}}) = 0 \longrightarrow P(\Sigma \overrightarrow{F_{nc}}) = 0$$

$$\longrightarrow dE_m(M/R) = 0 \longrightarrow E_m(M/R) = cte$$

↳ L'énergie mécanique se conserve