Resume du cours de la Mécanique

Groupe : SMP. SMC // $S_1 - S_3$

Page : www.fb.com/SMP.S3

Hicham Rmouki

Partie 1

1 - Systémes usuls de coordonnées :

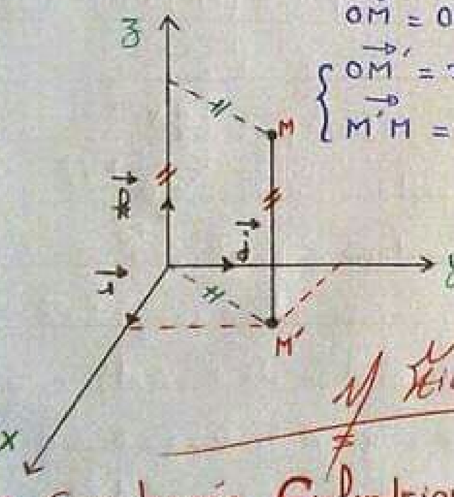
soit une point matériel quelconque dans l'espace et soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base associe au repére $R(o, x, y, z)$

le point M est reperé dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par le vecteur position :

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{OM} = \vec{OM'} + \vec{M'M}$$

$$\begin{cases} \vec{OM'} = x\vec{i} + y\vec{j} \\ \vec{M'M} = z\vec{k} \end{cases}$$

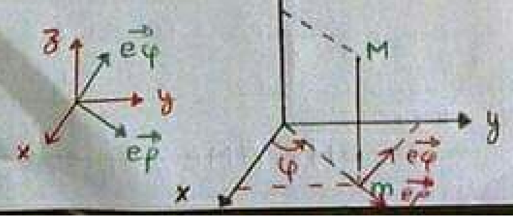


Hicham

2 - Coordonnée Cylindrique (ρ, φ, z)

soit M un point quelconque de l'espace on Appel plan polaire le plan perpenduclare en O a l'axe Oz : (Oxy)

m : la projection orthogonal de M sur le plan polaire



les coordonnée Cylondrique (ρ, φ, z) sont definies par :

ρ : distance de m a l'axe Oz

φ : l'angle polaire entre $(\vec{ox}, \vec{om})$

z : la côte Oz

Avec $\rho \in [0, +\infty[$

$\varphi \in [0, 2\pi[$

$z \in]-\infty, +\infty[$

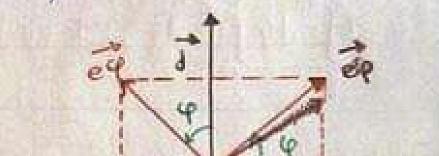
(ρ, φ) coordonnées polaires

Les vecteur unitaire $\vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi}, \vec{e_z}$

$\vec{e_\rho}$: vecteur unitaire de l'axe $\vec{Om}$; $\vec{Om} = \rho\vec{e_\rho}$

$\vec{e_\varphi}$: vecteur unitaire $\perp$ $\vec{e_\rho}$ plan polaire

$\vec{e_z}$: $\vec{k}$



$$\vec{e_\rho} = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}$$

$$\vec{e_\varphi} = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}$$

$$\vec{e_z} = \vec{k}$$

Relation entre coordonnées Cylondrique et cartésiennes

* $x = \rho\cos\varphi$
* $y = \rho\sin\varphi$
* $z = z$

Dans la base $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi}, \vec{e_z})$ le vecteur position $\vec{OM}$ et donnée par :

$$\vec{OM} = \vec{Om} + \vec{mM} = \rho\vec{e_\rho} + z\vec{e_z}$$

Calcul $d\vec{OM}$

$$d\vec{OM} = \frac{\partial\vec{OM}}{\partial\rho}d\rho + \frac{\partial\vec{OM}}{\partial\varphi}d\varphi + \frac{\partial\vec{OM}}{\partial z}dz$$

$$\frac{d\vec{OM}}{d\rho} = \frac{\partial(\rho\vec{e_\rho} + z\vec{e_z})}{d\rho} = \frac{\partial\rho\vec{e_\rho}}{\partial\rho} + \frac{\partial z}{\partial\rho}\vec{e_z} = \vec{e_\rho}$$

$$\frac{d\vec{OM}}{d\varphi} = \frac{\partial(\rho\vec{e_\rho})}{\partial\varphi} + \frac{\partial(z\vec{e_z})}{\partial\varphi} = \rho\frac{d\vec{e_\varphi}}{\partial\varphi}$$

$$= \rho\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}\right]$$

$$= \rho\Big[\underbrace{-\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}}_{\vec{e_\varphi}}\Big] = \rho\,\vec{e_\varphi}\Big]$$

déjà fais

✓ $$\frac{\partial\vec{OM}}{\partial z} = \frac{\partial(\rho\vec{e_\rho})}{\partial z} + \frac{\partial z}{\partial z}\vec{e_z} = \vec{e_z}$$

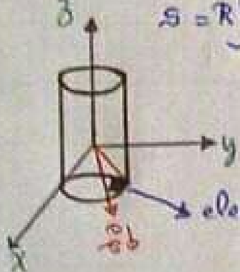
Donc $\vec{dOM} = d\rho\,\vec{e_\rho} + \rho\,d\varphi\,\vec{e_\varphi} + dz\,\vec{e_z}$

Calcul la surface de cylindre d'axe (Oz) de rayon R et de hauteur h

$ds = \rho\,d\varphi\,dz$

$$S = \iint \rho\,d\varphi\,dz \quad \begin{cases} \text{on a } \varphi \in [0, 2\pi] \\ z \in [0, h];\ \rho = R \end{cases}$$

$$S = R\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{h} dz = R\,2\pi\,h$$



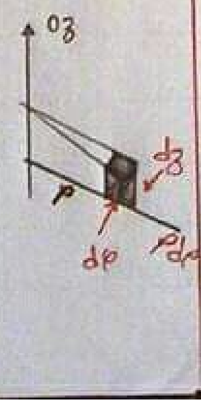
element de la surface

$$\boxed{S = 2\pi R h}$$ surface d'une cylindre

Calcule du volume d'un cylindre d'axe (Oz), de rayon R et d'hauteur h

$dv = d\rho\,\rho\,d\varphi\,dz$

$$v = \iiint d\rho\,\rho\,d\varphi\,dz = \int_0^R \rho\,d\rho\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^h dz = \frac{1}{2}R^2 \cdot 2\pi \cdot h$$



$$\boxed{v = \pi R^2 h}$$

volume d'un cylindre

III Coordonnées spherique

Soit un point M materiel reperes dans l'espace par les cordonnée spherique (r, θ, φ)

✓ r : distance entre O et M $r = \|\vec{OM}\|$

✓ θ : l'angle entre $(\vec{Oz}, \vec{OM})$

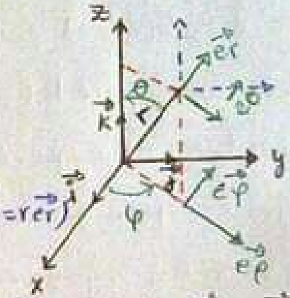
✓ φ : azimute ou longitude : l'angle $(\vec{Ox}, \vec{e_\rho})$

$r \in [0, +\infty[$

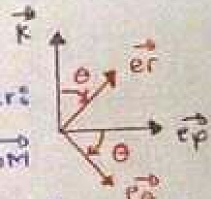
$\theta \in [0, \pi]$

$\varphi \in [0, 2\pi]$

$\vec{e_r} = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|} = (\vec{OM} = r\vec{e_r})$



Projection sur le plane $(\vec{e_r}, \vec{e_\varphi}, \vec{e_\theta})$



$\vec{e_r}, \vec{e_\varphi}, \vec{e_\theta}$ definie par :

- $\vec{e_r}$ vecteur unitaire de $\vec{OM}$
- $\vec{e_\theta}$ vecteur unitaire $\in$ au plane $\perp \vec{e_r}$
- $\vec{e_\varphi}$ " $\in$ au plane (Oxy) $\perp \vec{e_\rho}$

x, y, z en fonction de r, θ et φ

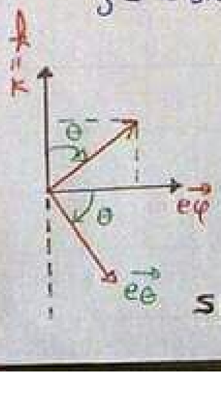
$x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = r\sin\theta$

avec $\rho = r\cos\theta$ $\quad z = \rho\,tg\theta$

alors $x = r\sin\theta\cos\varphi$

$y = \cancel{r\sin\theta\sin\varphi} = r\cos\theta\sin\varphi$

$z = r\sin\theta$



$$\begin{cases} \vec{e_r} = \sin\theta\,\vec{e_\rho} + \cos\theta\,\vec{k} \\ \vec{e_\theta} = \cos\theta\,\vec{e_\rho} - \sin\theta\,\vec{k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{e_\rho} = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j} \\ \vec{e_\varphi} = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j} \end{cases}$$

SMP. SMC // $S_1 - S_3$ Hicham Rmouhi

Partie 2

Résume de cours Mécanique

Groupe : SMP. SMC // S_1 - S_3

Page : W³. fb.com / SMP. S_3

Hicham آلبرت إينشتاين Rmoula

ona $\vec{OM} = r\vec{e_r}$

$$\frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{\partial r}{\partial t}\vec{e_r} + r\frac{\partial \vec{e_r}}{\partial t} = \dot r\,\vec{e_r} + r\frac{d\vec{e_r}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{e_r}}{dt} = \frac{d\vec{e_r}}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\vec{e_r}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

$$= \dot\varphi\,\frac{d\vec{e_r}}{d\varphi} + \dot\theta\,\frac{d\vec{e_r}}{d\theta} = \dot\varphi\sin\varphi\,\vec{e_\varphi} + \dot\theta\,\underbrace{(\sin\theta\,\vec{e_\varphi} - \sin\theta\,\vec{k})}_{\vec{e_\theta}}$$

$$\frac{d\vec{e_r}}{dt} = \dot\varphi\sin\theta\,\vec{e_\varphi} + \dot\theta\,\vec{e_\theta}$$

⇒ Il facilement de calculer le deplacement elementaire $\vec{dl} = d\vec{OM}$

$$\vec{dl} = dr\,\vec{e_r} + r\,d\theta\,\vec{e_\theta} + r\sin\theta\,d\varphi\,\vec{e_\varphi}$$

$$(\vec{dl})^2 = dl^2 = dr^2 + (r\,d\theta)^2 + (r\sin\theta\,d\varphi)^2$$

l'element de volume est donc

$$dv = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

L'element de la surface

$$ds = r^2\,d\varphi\,d\theta\,\sin\theta$$

Calcul de la surface d'une sphères

$$ds = R^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

$$S = \iint R^2\,\theta\,d\theta\,d\varphi = R^2\int_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

$$S = 4\pi R^2$$

Calcul de volume d'un sphère

$$dv = R^2\sin\theta\,d\theta\,dr\,d\varphi$$

$$V = \int_0^R r^2\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta$$

$$V = \frac{1}{3}R^3\,2\pi\cdot 2 = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$ volume d'une sphere de rayon R

IV Calcule des vitesse et l'acceleration

سرعة تسارع

* En coordonnée cylindrique

ona $\vec{OM} = \rho\vec{e_\rho} + z\vec{k}$

* vitesse $\vec{V}(M/R) = \frac{d\vec{OM}}{dt}\Big|_R$

$$= \frac{d}{dt}(\rho\vec{e_\rho} + z\vec{k})\Big/_R$$

$$= \frac{d\rho}{dt}\Big|_R\vec{e_\rho} + \rho\frac{d\vec{e_\rho}}{dt}\Big|_R + \frac{dz}{dt}\Big|_R\vec{k}$$

et $z\frac{d\vec{k}}{dt} = 0$ ⚠

$$\vec{V}(M/R) = \dot\rho\,\vec{e_\rho} + \rho\dot\varphi\,\vec{e_\varphi} + \dot z\,\vec{k}$$

* l'accéleration $\vec{\gamma}(M/R)$

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d^2\vec{OM}}{dt}\Big|_R = \frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\Big/_R$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = \ddot\rho\,\vec{e_\rho} + \dot\rho\dot\varphi\,\vec{e_\varphi} + \dot\varphi\dot\rho\,\vec{e_\varphi} + \rho\ddot\varphi\,\vec{e_\varphi} - \dot\varphi\rho\dot\varphi\,\vec{e_\rho} + \ddot z\,\vec{k}$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = (-\dot\varphi^2\rho + \ddot\rho)\vec{e_\rho} + (2\dot\rho\dot\varphi + \rho\ddot\varphi)\vec{e_\varphi} + \ddot z\,\vec{k}$$

* En coordonnée sphérique

$\vec{OM} = r\vec{e_r}$

$$\vec{V}(M/R) = \frac{d\vec{OM}}{dt}\Big|_R = \frac{d}{dt}(r\vec{e_r})\Big/_R = \frac{dr}{dt}\Big|_R\vec{e_r} + r\frac{d\vec{e_r}}{dt}\Big/_R$$

$$= \dot r\,\vec{e_r} + r(\dot\varphi\sin\theta\,\vec{e_\varphi} + \dot\theta\,\vec{e_\theta})$$

* l'accélération $\vec{\gamma}(M/R)$

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d\vec{V}}{dt}(M/R)\Big/_R$$

$$= \ddot r\,\vec{e_r} + \dot r(\dot\varphi\sin\theta\,\vec{e_\varphi} + \dot\theta\,\vec{e_\theta}) + r(\dot\varphi\sin\theta\,\vec{e_\varphi} + \dot\theta\cos\theta\,\dot{\vec{e_\theta}})$$

$$+ r\ddot\varphi\sin\theta\,\vec{e_\varphi} + r\dot\varphi\cos\theta\,\vec{e_\varphi} + r\dot\varphi\sin\theta\,\dot{\vec{e_\varphi}} + r\ddot\theta\,\vec{e_\theta} - r\dot\theta^2\,\vec{e_r}$$

Triedre de Frenet $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$

/ module de la vitesse $\frac{ds}{dt} = \|\vec{V}\|$

✓ $\vec{V} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau} = \|\vec{V}\|\vec{\tau} \Rightarrow \vec{\tau} = \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|}$; $\|\vec{\tau}\| = 1$

✓ $\vec{\tau} = \frac{d\vec{OM}}{ds}$

✓ $\vec{b} = \vec{\tau} \wedge \vec{n}$

Le rayon de courbure

$\frac{1}{R}$: la courbure

$\vec{\gamma}(M/R) = \vec{\gamma}_t + \vec{\gamma}_n = \frac{d\|\vec{V}\|}{dt}\vec{\tau} + \frac{\|V\|^2}{R_c}\vec{n}$

$\vec{\gamma}_t = \left(\frac{d\|\vec{V}\|}{dt}\right)\vec{\tau}$, $\vec{\gamma}_n = \frac{\|\vec{V}\|^2}{R_c}\vec{n}$

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|} \quad \text{et} \quad \vec{n} = \frac{\frac{d\vec{\tau}}{dt}}{\left\|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right\|}$$

Calcul de vitesse et d'acceleration/ Avec changement de repére

$R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ repére absolue

$R_1(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ repere relative

$\vec{V_a} = \frac{d\vec{OM}}{dt}\Big|_R = \vec{V_e} + \vec{V_r}$

AveC

$\vec{V_e}$ ⇒ vitesse d'entraiment

$\vec{V_r}$ ⇒ vitesse relatif

$\vec{V_a}$ ⇒ vitesse absolue

$\vec{V_r} = \frac{d\vec{O_1M}}{dt}\Big|_{R_1}$ (R_1 repére relatif)

$\vec{V_e} = \frac{d\vec{OO_1}}{dt}\Big|_R + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{O_1M}$

Transformation d'accélération

Partie trés important ⇒

$\vec{\gamma_a}$: accélération absolue.

$\vec{\gamma_r}$: " " relatif.

$\vec{\gamma_e}$: " " d'entrainement.

$\vec{\gamma_c}$: " " de coriolis.

$\vec{\gamma_r} = \frac{d^2\vec{O_1M}}{dt}\Big|_{R_1}$

$\vec{\gamma_e} = \frac{d^2\vec{OO_1}}{dt}\Big|_R + \frac{d\vec{\Omega}(R/R_1)}{dt}\Big|_R \wedge \vec{O_1M} + \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \frac{d\vec{O_1M}}{dt}\right)$

$\vec{\gamma_c} = 2\vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{V_r}$

formule pratique de $\vec{\gamma_c} = \frac{d\vec{V_e}}{dt}\Big|_{R_c} - \frac{1}{2}\vec{\gamma_c}$

V Principe de La dynamique de point matréel

* Quantite de mouvement

Soit point matriel M de messe est en mouvement de vitesse $\vec{V}(M/R)$ dans un reférentel $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

La quantite de mouvement du point materil M. note $\vec{P}$ ⇝ $\vec{P} = m\vec{V}(M/R)$

* mouvment cinétique : $\vec{\sigma}$

$\vec{\sigma}_A$ moument cinétique en point A du Point matériel M dans son par rapport à R

$\vec{\sigma}_A(M/R) = \vec{AM} \wedge m\vec{V}(M/R)$

Relation fondamental de la dynamique du point M dans son mouvement par rapport à R

P.F.D $\quad \Sigma\vec{F_{ex}} = \frac{d\vec{P}(M/R)}{dt}\Big|_R = m\vec{\gamma}$

$\Sigma\vec{F_{ex}}$ Les forces exterier on forces réel applique au point matériel M.

Partie 3

Résume du cous de la Mécanique

Groupes : SMP. SMC // $S_1 - S_3$

Page : SMP. S_3

Hicham البيت إينشابة Rmou

* $\vec{\sigma_0}(M/R)$ Moment Cinétique

$$\vec{\sigma_0}(M/R) = \vec{OM} \wedge m\vec{V}(M/R)$$

moument Cinétique en point O du point M dont son mouvement parrapport au repére R et $\vec{V}(M/R)$

* Théoreme de moument cinétique

Le mooment dynamique des force exteurires appliqué au point M égal la derivé par rapport au temp. du son mouvement cinétique

$$\frac{d\vec{\sigma_A}}{dt}\Big|_R = m\left[\vec{V}(M/R) - \vec{V}(A/R) \wedge \vec{V}(M/R)\right] + \vec{AM} \wedge m\vec{\gamma}$$

$$= \mathcal{M}_A(\Sigma \vec{Fex}) - m\vec{V}(A/R) \wedge \vec{V}(M/R))$$

Si A fixe dans R. On a :

$$\mathcal{M}_A(\Sigma \vec{Fex}) = \frac{d\vec{\sigma_A}(M/R)}{dt}\Big|_R$$

Principe fondamentale de dynamique dans sur repére galileén deuxiem principe

قال رسول الله صلى الله عليه وآله :

الدال على الخير كفاعله

P.D.F : el changement de repére

$$m\vec{\gamma}(M/R) = \Sigma \vec{Fext}$$

On a $\vec{\gamma}(M/R) = \vec{\gamma_r} + \vec{\gamma_e} + \vec{\gamma_c}$

Donc $m\vec{\gamma}(M/R_1) = \Sigma \vec{Fex} - m\vec{\gamma_e} - m\vec{\gamma_c}$

$$= \Sigma \vec{Fext} + \vec{fie} + \vec{fic}$$

والله ولي التوفيق.

هشام

HICHAM

R

Mérci