

Cinématique du point matériel

1- Les coordonnées et vitesses et l'accélération cartésiennes

Dans R la position de la particule M est donnée par ses trois coordonnées cartésiennes (x, y, z) telles que

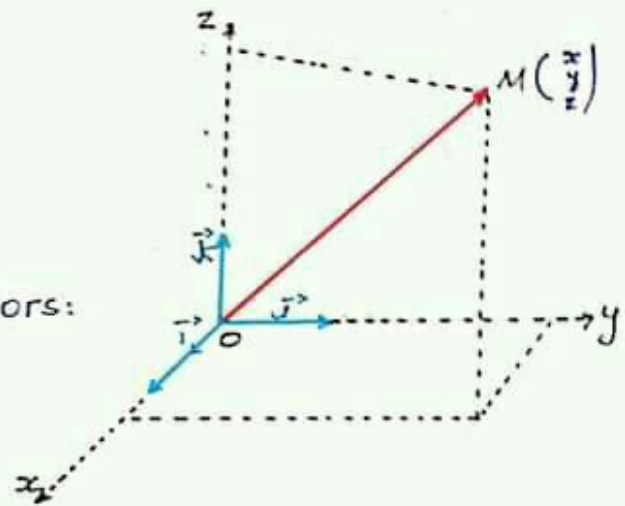
x : abscisse de M ; y : ordonnée de M ; z : cote de M

Dans R le vecteur position s'écrit

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

le vecteur vitesse s'écrit alors:

$$\vec{V}(M/R) = \dot{x}\vec{i} + x\frac{d\vec{i}}{dt/R} + \dot{y}\vec{j} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt/R} + \dot{z}\vec{k}$$



les vecteurs unitaire $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont fixes dans le repère R ,
donc $\frac{d\vec{i}}{dt/R} = \frac{d\vec{j}}{dt/R} = \frac{d\vec{k}}{dt/R} = \vec{0}$

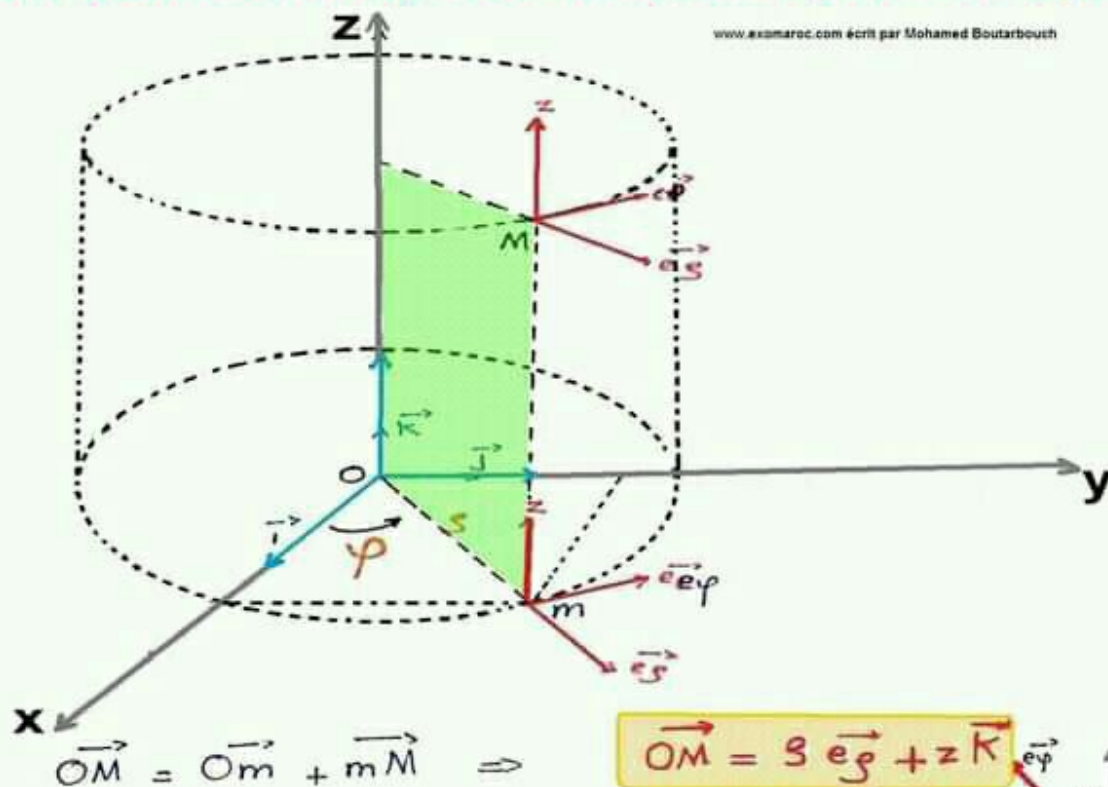
$$\text{donc } \vec{V}(M/R) = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

coordonnées et vitesses et accélérations de cylindrique

www.exomarc.com écrit par Mohamed Boutarbout



on a: $\vec{V}(M/R) = \dot{s} \vec{e}_s + s \frac{d\vec{e}_s}{dt}\bigg|_R + \dot{z} \vec{k}$

$$\frac{d\vec{e}_s}{dt} = \frac{d\vec{e}_s}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt} (x\vec{i} + y\vec{j}) \frac{d\varphi}{dt}\bigg|_R$$

$$\frac{d\vec{e}_s}{dt} = \frac{d}{dt} (\cos\varphi \vec{i} + \sin\varphi \vec{j}) \dot{\varphi} = \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt} (-\sin\varphi \vec{i} + \cos\varphi \vec{j}) \dot{\varphi} = \frac{d}{dt} (-\sin\varphi \vec{i} + \cos\varphi \vec{j}) \dot{\varphi}$$

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi} \vec{e}_s \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{e}_s}{dt} = \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

alors

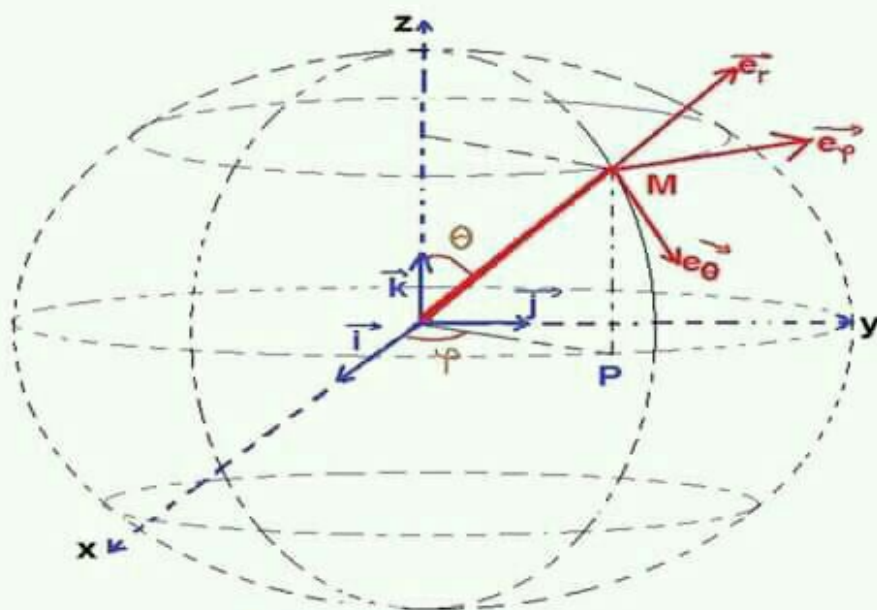
$$\vec{V}(M/R) = \dot{s} \vec{e}_s + s \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{z} \vec{k}$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\bigg|_R = \frac{d}{dt} (\dot{s} \vec{e}_s + s \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{z} \vec{k})$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = \ddot{s} \vec{e}_s + \dot{s} \frac{d\vec{e}_s}{dt}\bigg|_R + \dot{s} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + s \ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi + s \dot{\varphi} \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}\bigg|_R + \ddot{z} \vec{k}$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = \ddot{s} \vec{e}_s + \dot{s} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{s} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + s \ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi + s \dot{\varphi}^2 \vec{e}_s + \ddot{z} \vec{k}$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = (\ddot{s} - s \dot{\varphi}^2) \vec{e}_s + (2 \dot{s} \dot{\varphi} + s \ddot{\varphi}) \vec{e}_\varphi + \ddot{z} \vec{k}$$



$$\vec{OM} = r \vec{e}_r$$

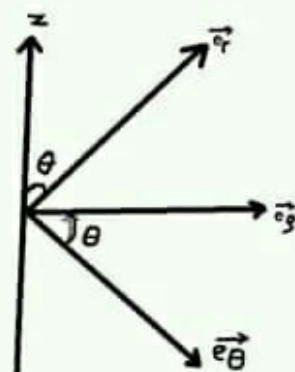
relation entre les coordonnées sphérique et cartésiennes

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \frac{x}{r} \vec{e}_x + \frac{y}{r} \vec{e}_y + \frac{z}{r} \vec{e}_z = \sin\theta \cos\varphi \vec{e}_x + \sin\theta \sin\varphi \vec{e}_y + \cos\theta \vec{e}_z \\ &= \sin\theta \cos\varphi \vec{i} + \sin\theta \sin\varphi \vec{j} + \cos\theta \vec{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{e}_\theta &= \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \cos\theta \cos\varphi \vec{i} + \cos\theta \sin\varphi \vec{j} - \sin\theta \vec{k} \\ &= (\cos\theta \cos\varphi) \vec{i} + (\cos\theta \sin\varphi) \vec{j} - \sin\theta \vec{k} \end{aligned}$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j}$$

$$\vec{e}_\theta = r \vec{e}_r + \frac{1}{r} \vec{e}_\theta = \sin\theta \vec{e}_r + \cos\theta \vec{e}_\theta$$



$$\vec{V}(M/R) = \frac{d\vec{OM}}{dt} \Big|_R = \frac{d}{dt} (r \vec{e}_r) = r \frac{d\vec{e}_r}{dt} \Big|_R + \dot{r} \vec{e}_r$$

$$= \dot{r} \vec{e}_r + r \frac{d}{dt} (\sin\theta \vec{e}_\theta + \cos\theta \vec{e}_\varphi)$$

$$= \dot{r} \vec{e}_r + r \left(\frac{d\sin\theta}{dt} \vec{e}_\theta + \sin\theta \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} + \frac{d\cos\theta}{dt} \vec{e}_\varphi + \cos\theta \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} \right)$$

$$= \dot{r} \vec{e}_r + r (-\dot{\theta} \sin\theta \vec{e}_\varphi + \dot{\theta} \cos\theta \vec{e}_\theta + \sin\theta \dot{\varphi} \vec{e}_\theta + \cos\theta \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi)$$

$$= \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \sin\theta \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{V}(M/R) = (\dot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta) \vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin\theta \cos\theta) \vec{e}_\theta + (2\dot{r}\dot{\varphi} \sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos\theta + r\ddot{\varphi} \sin\theta) \vec{e}_\varphi$$

Vecteurs vitesse et accélération en coordonnées sphériques

$$\vec{v}(M|R) = \frac{d\vec{v}(M|R)}{dt} \Big|_R = \frac{d}{dt} \left[\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi \right]$$

$$\vec{a}(M|R) = \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} \frac{d\vec{e}_r}{dt} \Big|_R + \dot{r} \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \ddot{\theta} \vec{e}_\theta + r \dot{\theta} \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \Big|_R + \dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi$$

$$+ r \ddot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi + r \dot{\varphi} \frac{d \sin \theta}{dt} \Big|_R \vec{e}_\varphi + r \dot{\varphi} \sin \theta \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} \Big|_R$$

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} \Big|_R = \frac{d}{dt} (\sin \theta \vec{e}_\varphi + \cos \theta \vec{k}) = \dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_\varphi + \sin \theta \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi - \dot{\theta} \sin \theta \vec{k}$$

$$= \dot{\theta} (\cos \theta \vec{e}_\varphi - \sin \theta \vec{k}) + \sin \theta \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi = \boxed{\dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi}$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \Big|_R = \frac{d}{dt} (\cos \theta \vec{e}_\varphi - \sin \theta \vec{k}) = -\dot{\theta} \sin \theta \vec{e}_\varphi + \cos \theta \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi - \dot{\theta} \cos \theta \vec{k}$$

$$= -\dot{\theta} (\sin \theta \vec{e}_\varphi + \cos \theta \vec{k}) + \cos \theta \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi = \boxed{-\dot{\theta} \vec{e}_r + \dot{\varphi} \cos \theta \vec{e}_\varphi}$$

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} \Big|_R = -\dot{\varphi} \vec{e}_r = -\dot{\varphi} (\sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta) =$$

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} \Big|_R = \boxed{-\dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_r - \dot{\varphi} \cos \theta \vec{e}_\theta}$$

$$\vec{a}(M|R) = \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} (\dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi) + \dot{r} \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \ddot{\theta} \vec{e}_\theta + r \dot{\theta} (-\dot{\theta} \vec{e}_r + \dot{\varphi} \cos \theta \vec{e}_\varphi)$$

$$+ \dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi + r \dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi + r \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_\varphi + r \dot{\varphi} \sin \theta (-\dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_r - \dot{\varphi} \cos \theta \vec{e}_\theta)$$

$$\vec{a}(M|R) = \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi + \dot{r} \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - r \dot{\theta}^2 \vec{e}_r$$

$$+ r \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_\varphi + \dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi + r \dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi + r \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_\varphi$$

$$- r \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \vec{e}_r - r \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta \vec{e}_\theta$$

$$\vec{a}(M|R) = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) \vec{e}_r + (2 \dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta} - r \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta) \vec{e}_\theta$$

$$+ (2 \dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta + 2 r \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta + r \ddot{\varphi} \sin \theta) \vec{e}_\varphi$$

Le vecteur vitesse est porté par le vecteur unitaire $\vec{e}_t$ tangent à la trajectoire

la vitesse algébrique de M est $v = \frac{ds}{dt}$

le vecteur vitesse instantannée peut donc s'écrire:

$$\vec{V}(M/R) = \frac{ds}{dt} \vec{e}_t$$

vecteur accélération:

La dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse ci-dessus donne le vecteur accélération, qui s'écrit comme suit:

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{e}_t + \frac{ds}{dt} \frac{d\vec{e}_t}{dt} \quad \text{or} \quad \frac{d\vec{e}_t}{dt} = \frac{d\vec{e}_t}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$$

et $\frac{d\vec{e}_t}{d\theta} = \vec{e}_n$ désigne le vecteur normal dirigé vers le centre.

de courbure de la trajectoire du point M.

$$\text{et} \quad s = r\theta \Rightarrow \frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r} \frac{ds}{dt}$$

par conséquent

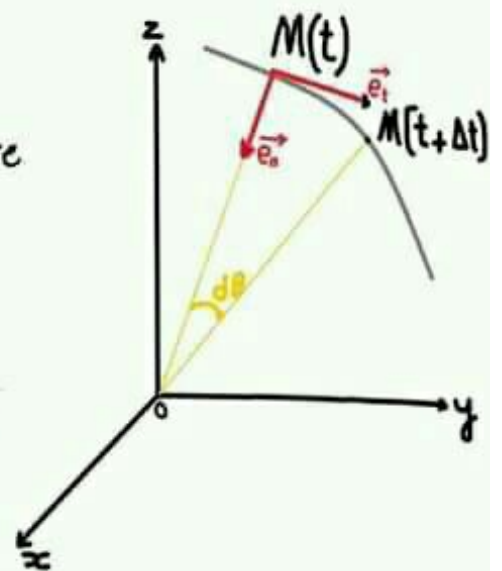
$$\frac{d\vec{e}_t}{dt} = \frac{1}{r} \frac{ds}{dt} \vec{e}_n = \frac{v}{r} \vec{e}_n$$

le vecteur accélération instantannée du point M s'écrit alors:

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{dv}{dt} \vec{e}_t + \frac{v^2}{r} \vec{e}_n = \gamma_t \vec{e}_t + \gamma_n \vec{e}_n$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = \vec{\gamma}_t + \vec{\gamma}_n$$

le vecteur unitaire $\vec{B} = \vec{e}_t \wedge \vec{e}_n$ est appelé vecteur binormal



Changements de référentiel

$$R(O, x, y, z) \rightarrow (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$$

$$R_1(O_1, x_1, y_1, z_1) \rightarrow (\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$$

R et R_1 en mouvement l'un par rapport à l'autre. $R: \vec{V}_R(M), \vec{\gamma}_R(M)$ absolue

$R_1: \vec{V}_{R_1}(M), \vec{\gamma}_{R_1}(M)$: relative

on cherche la relation entre R et R_1
c'est-à-dire $\vec{V}_R(M)$ et $\vec{V}_{R_1}(M)$

et $\vec{\gamma}_R(M)$ et $\vec{\gamma}_{R_1}(M)$

ona par relation de chaslee $\vec{OM} = \vec{OO_1} + \vec{O_1M}$
avec $\vec{OO_1} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{O_1M} = x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1$

$$\vec{V}_R(M) = \frac{d\vec{OM}}{dt}\bigg|_R = \frac{d\vec{OO_1}}{dt}\bigg|_R + \frac{d\vec{O_1M}}{dt}\bigg|_R ; \text{ on a } \frac{d\vec{OO_1}}{dt}\bigg|_R = \vec{V}_R(O_1)$$

$$\text{et } \frac{d\vec{O_1M}}{dt}\bigg|_R = \frac{d\vec{O_1M}}{dt}\bigg|_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{O_1M} \quad \boxed{\frac{d\vec{u}}{dt}\bigg|_R = \frac{d\vec{u}}{dt}\bigg|_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{u}}$$

$$\frac{d\vec{O_1M}}{dt}\bigg|_{R_1} = \vec{V}_{R_1}(M) + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{O_1M}$$

$$\text{donc } \vec{V}_R(M) = \underbrace{\vec{V}_R(O_1)}_{\text{translation}} + \underbrace{\vec{V}_{R_1}(M)}_{\text{V. relative}} + \underbrace{\vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{O_1M}}_{\text{rotation}}$$

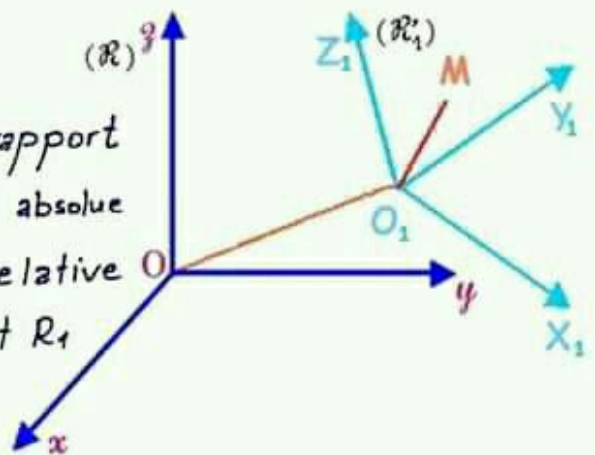
$$\text{donc } \vec{V}_R(M) = \vec{V}_r(M) + \vec{V}_e(M) \quad \text{avec } \vec{V}_r(M) = \vec{V}_{R_1}(M) = \frac{d\vec{O_1M}}{dt}\bigg|_{R_1}$$

$$\text{et } \vec{V}_e(M) = \vec{V}_R(O_1) + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{O_1M}$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = \vec{\gamma}_R(M) = \frac{d\vec{V}_R(M)}{dt}\bigg|_R = \frac{d\vec{V}_R(O_1)}{dt}\bigg|_R + \frac{d\vec{V}_{R_1}(M)}{dt}\bigg|_R + \frac{d}{dt}(\vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{O_1M})\bigg|_R$$

$$\text{on a: } \frac{d\vec{V}_R(O_1)}{dt}\bigg|_R = \vec{\gamma}_R(O_1)$$

$$\begin{aligned} \text{et } \frac{d\vec{V}_{R_1}(M)}{dt}\bigg|_R &= \frac{d\vec{V}_{R_1}(M)}{dt}\bigg|_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{V}_{R_1}(M) = \vec{\gamma}_{R_1}(M) + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{V}_{R_1}(M) \\ &= \vec{\gamma}_r(M) + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{V}_{R_1}(M) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \text{et } \frac{d}{dt} (\vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{O_1 M}) /_R &= \frac{d\vec{\Omega}(R_1/R)}{dt} /_R \wedge \vec{O_1 M} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \frac{d\vec{O_1 M}}{dt} /_R \\
 &= \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{O_1 M} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge (\vec{V}_{R_1}(M) + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{O_1 M}) \\
 &= \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{O_1 M} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{V}_{R_1}(M) + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge (\vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{O_1 M})
 \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
 \vec{\gamma}_R(M) &= \vec{\gamma}_R(O_1) + \vec{\gamma}_{R_1}(M) + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{V}_{R_1}(M) + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{O_1 M} \\
 &\quad + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{V}_{R_1}(M) + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge (\vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{O_1 M})
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{\gamma}_R(M) = \vec{\gamma}_r(M) + \vec{\gamma}_c(M) + \vec{\gamma}_e(M)}$$

$$\text{avec } \vec{\gamma}_r(M) = \vec{\gamma}_{R_1}(M) = \frac{d\vec{V}_{R_1}(M)}{dt} /_R = \frac{d\vec{V}_r(M)}{dt} /_R$$

$$\text{et } \vec{\gamma}_c(M) = 2 \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{V}_r(M) \quad \Delta \quad (2(\vec{u} \wedge \vec{v}) = 2\vec{u} \wedge \vec{v})$$

$$\text{et } \vec{\gamma}_e(M) = \vec{\gamma}_R(O_1) + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{O_1 M} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge (\vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{O_1 M})$$

Application aux coordonnées cylindriques .

on sait que $\vec{OM} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{k}$ et $\vec{V}_R(M) = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{z} \vec{k}$

$R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ référentiel fixe

$R_1(O_1 \equiv O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ relatif

la vitesse relative : $\vec{V}_r(M) = \frac{d\vec{OM}}{dt} /_{R_1} = \frac{d}{dt} (\rho \vec{e}_\rho + z \vec{k}) /_{R_1} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \dot{z} \vec{k}$

la vitesse d'entraînement :

$$\vec{V}_e(M) = \vec{V}_R(O_1) + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{O_1 M} = \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{OM}$$

$$\text{or } \vec{\Omega}(R_1/R) = \dot{\varphi} \vec{k} \text{ donc } \vec{V}_e(M) = \dot{\varphi} \vec{k} \wedge (\rho \vec{e}_\rho + z \vec{k})$$

$$\vec{V}_e(M) = \dot{\varphi} \vec{k} \wedge \rho \vec{e}_\rho = \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\text{donc } \vec{V}_R(M) = \vec{V}_e(M) + \vec{V}_r(M) = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{z} \vec{k}$$

l'accélération absolue : $\vec{\gamma}_R(M) = \vec{\gamma}_r(M) + \vec{\gamma}_c(M) + \vec{\gamma}_e(M)$

$$\vec{\gamma}_r(M) = \frac{d\vec{V}_r(M)}{dt} /_{R_1} = \frac{d}{dt} (\dot{\rho} \vec{e}_\rho + \dot{z} \vec{k}) /_{R_1} = \ddot{\rho} \vec{e}_\rho + \ddot{z} \vec{k}$$

$$\vec{\gamma}_c(M) = 2 \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{V}_r(M) = 2 \dot{\varphi} \vec{k} \wedge (\dot{\rho} \vec{e}_\rho + \dot{z} \vec{k}) = 2 \dot{\rho} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{\gamma}_e(M) = \frac{d\vec{V}_e(M)}{dt} / R$$

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}_e(M) &= \vec{\gamma}_R(O_1) + \vec{\omega}(R_1/R) \wedge \vec{O_1M} + \vec{\omega}(R_1/R) \wedge (\vec{\omega}(R_1/R) \wedge \vec{O_1M}) \\ &= \vec{\gamma}_R(O) + \vec{\omega}(R_1/R) \wedge \vec{OM} + \vec{\omega}(R_1/R) \wedge (\vec{\omega}(R_1/R) \wedge \vec{OM}) \\ &= \ddot{\psi} \vec{k} \wedge (\rho \vec{e}_\rho + z \vec{k}) + \dot{\psi} \vec{k} (\dot{\psi} \vec{k} \wedge (\rho \vec{e}_\rho + z \vec{k})) \\ &= \rho \ddot{\psi} \vec{e}_\psi + \dot{\psi} \vec{k} (\rho \dot{\psi} \vec{e}_\psi) = \rho \ddot{\psi} \vec{e}_\psi - \rho \dot{\psi}^2 \vec{e}_\rho\end{aligned}$$

$$\text{donc } \vec{\gamma}_R(M) = \vec{\gamma}_e(M) + \vec{\gamma}_c(M) + \vec{\gamma}_r(M)$$

$$\vec{\gamma}_R(M) = \rho \ddot{\psi} \vec{e}_\psi - \rho \dot{\psi}^2 \vec{e}_\rho + 2 \dot{\psi} \dot{\rho} \vec{e}_\psi + \ddot{\rho} \vec{e}_\rho + \ddot{z} \vec{k}$$

$$\vec{\gamma}_R(M) = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\psi}^2) \vec{e}_\rho + (2 \dot{\rho} \dot{\psi} + \rho \ddot{\psi}) \vec{e}_\psi + \ddot{z} \vec{k}$$

Dynamique du point Matériel.

Tout référentiel R_1 en translation uniforme par rapport à un référentiel R_0 galiléen est considéré aussi galiléen

- Le principe fondamental de la dynamique dans un repère galiléen est : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \vec{\gamma}_R(M)$ (R : galiléen)

- Le principe fondamental de la dynamique dans un repère non galiléen est : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} + \vec{F}_{\text{ic}} + \vec{F}_{\text{ie}} = m \vec{\gamma}_{R_1}(M)$ (R_1 non galiléen)
avec $\vec{F}_{\text{ic}} = -m \vec{\gamma}_c$ et $\vec{F}_{\text{ie}} = -m \vec{\gamma}_e$

- Moment cinétique dans un repère relatif:

$$\vec{\sigma}_a(M/R_1) = \vec{O_1M} \wedge m \vec{V}_r(M)$$

- Théorème du moment cinétique dans un repère relatif

$$\frac{d\vec{\sigma}_a(M)}{dt} / R_1 = \vec{O_1M} \wedge (\sum \vec{F}_{\text{ext}} + \vec{F}_{\text{ic}} + \vec{F}_{\text{ie}})$$

MECANIQUE DU POINT

I) Cinématique du point matériel:

1) Référentiel:

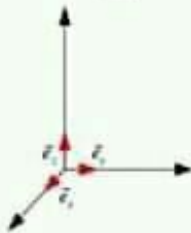
L'ensemble de tous les systèmes d'axes de coordonnées liés à un même solide de référence S constitue un repère.

Soit une horloge permettant de mesurer des durées ou intervalles de temps. Si on choisit un instant origine, on dispose alors d'un repère temporel ou chronologie.

L'ensemble d'un repère lié à un solide de référence S et d'une chronologie constitue un référentiel lié à S.

2) Systèmes de coordonnées:

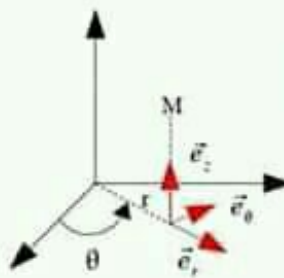
coordonnées cartésiennes:



$$\overrightarrow{OM} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

$[O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z]$ est le trièdre de référence

coordonnées cylindriques:



On a: $\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z$ où $[O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z]$ est le trièdre de référence.

r est la distance à l'axe, θ l'angle polaire et z la cote

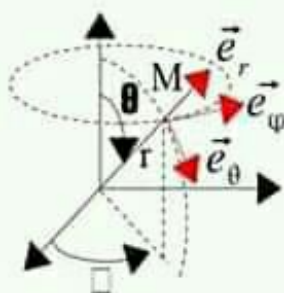
Rem 1: on obtient les coordonnées polaires en supprimant la coordonnée z.

Rem 2: attention! $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ sont des vecteurs mobiles.

Si on pose $\vec{\Omega} = \dot{\theta} \vec{e}_z$, leurs dérivées temporelles se calculent par :

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_r = \dot{\theta} \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\theta = -\dot{\theta} \vec{e}_r$$

coordonnées sphériques:



On a: $\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$ où $[O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi]$ est le trièdre de référence.

r est la rayon vecteur, $\theta \in [0, \pi]$ est la colatitude et $\phi \in [0, 2\pi]$ est la longitude

Rem 2: attention! $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$ sont des vecteurs mobiles. Si on pose $\vec{\Omega} = \dot{\theta} \vec{e}_\phi + \dot{\phi} \vec{e}_z = \dot{\phi} \cos \theta \vec{e}_r - \dot{\phi} \sin \theta \vec{e}_\theta + \dot{\theta} \vec{e}_\phi$, leurs dérivées temporelles se

calculent par : $\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_r = \dot{\phi} \sin \theta \vec{e}_\phi + \dot{\theta} \vec{e}_\theta$.

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\theta = \dot{\phi} \cos \theta \vec{e}_\phi - \dot{\theta} \vec{e}_r \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{e}_\phi}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\phi = -\dot{\phi} \cos \theta \vec{e}_r - \dot{\theta} \sin \theta \vec{e}_\theta$$

trièdre de Frenet:

$\vec{T}$ est le vecteur tangent, $\vec{N} = R \frac{d\vec{T}}{ds}$ est le vecteur normal. Ils engendrent le plan osculateur. $\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N}$ est la binormale.

