



**UE : Mécanique du Point Matériel (24 Heures)**

ECUE : Outils Mathématiques (6 Heures)

**Exercice 1 :**

Dans l'espace vectoriel  $E$  de dimension 3, on donne les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  et on définit les vecteurs réciproques des 3 vecteurs respectivement par :

$$\vec{u}^* = 2\pi \frac{\vec{v} \wedge \vec{w}}{V}; \quad \vec{v}^* = 2\pi \frac{\vec{w} \wedge \vec{u}}{V}; \quad \vec{w}^* = 2\pi \frac{\vec{u} \wedge \vec{v}}{V} \quad \text{où } V = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}).$$

1. Vérifier la relation :  $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w}$   
(on pourra utiliser les coordonnées des vecteurs).
2. Evaluer les produits scalaires suivants :  $\vec{u} \cdot \vec{u}^*$ ,  $\vec{u} \cdot \vec{v}^*$ .
3.  $V^* = \vec{u}^* \cdot (\vec{v}^* \wedge \vec{w}^*)$ . Etablir la relation entre  $V$  et  $V^*$ .

**Exercice 2 :**

Soit  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  trois vecteurs donnés dans un espace vectoriel  $E$ . Résoudre les équations vectorielles suivantes d'inconnue  $\vec{x}$  dans  $E$  :

1.  $\vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b}$  ;
2.  $\vec{a} \wedge (\vec{x} \wedge \vec{b}) = \vec{c}$ .

**Exercice 3 :**

On considère un vecteur  $\vec{a}$  de coordonnées  $(2, 1, -2)$  dans la base de  $\mathcal{R} = (O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  et un point  $B$  de coordonnées  $(1, 2, 3)$ .

1. Trouver les cosinus directeurs de  $\vec{a}$ .
2. Donner l'équation du plan passant par  $B$  et perpendiculaire à  $\vec{a}$ . Déterminer la distance de  $O$  à ce plan.

**Exercice 4 :**

Soit un repère cartésien  $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On considère un point  $M$  repéré par ses coordonnées : cartésiennes  $(x, y, z)$ , cylindriques  $(\rho, \varphi, z)$ , sphériques  $(r, \theta, \varphi)$ .

1. Etablir les relations entre les coordonnées :  
a- cartésiennes et cylindriques de  $M$  ;  
b- cartésiennes et sphériques de  $M$ .

2. Exprimer la longueur  $dS$  du vecteur déplacement élémentaire du point  $M$  en fonction des coordonnées :
  - a- cartésiennes ;
  - b- cylindriques ;
  - c- sphériques.

**Exercice 5 :**

1. Représenter dans le référentiel cartésien  $Oxyz$  les coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$  d'un point  $M$ .
2. Exprimer les coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  en fonction des coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$ . En déduire les coordonnées  $(r, \theta, \phi)$  en fonction des coordonnées  $(x, y, z)$ .
3. Calculer le vecteur déplacement élémentaire  $d\vec{r}$  dans la base  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$ . En déduire la surface élémentaire  $dS$  en coordonnées sphériques, à la surface de la terre (de centre  $O$  et de rayon  $R$ ), puis la surface de la terre.