COLLEGE CATHOLIQUE SAINT JEAN BOSCO
DEVOIR DE CLASSE
ANNEE SCOLAIRE : 2018-2019
NIVEAU : TERMINALE D
DUREE : 2H

Problème

Partie A

$g(x) = 2e^x + 2x - 7$

1) Etudier les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2e^x + 2x - 7 = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} 2x - 7 = +\infty \end{cases}$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2e^x + 2x - 7 = -\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} 2x - 7 = -\infty \end{cases}$

2) Etudions le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$ et dressons son tableau de variation.

$\forall\, x \in \mathbb{R}, g'(x) = (2e^x + 2x - 7)'$
$= 2e^x + 2$
$= 2(e^x + 1)$

$g'(x) = 0 \leftrightarrow e^x + 1 = 0 \rightarrow e^x = -1$ (Absurde) donc

$\forall\, x \in \mathbb{R}, g'(x) > 0$. Alors ***g* est croissante sur $\mathbb{R}$.**

<u>Tableau de variation de g.</u>

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3) g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$g(0.94) = -3.71$

$g(0.941) = 0.708$ on a $g(0.94) \times g(0.941) < 0$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α tel que $0.94 < \alpha < 0.941$.

4) g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $g(\alpha) = 0$

$\forall\, x \in]-\infty; \alpha[; x < \alpha \rightarrow g(x) < g(\alpha)$ *or* $g(\alpha) = 0$

donc $\forall\, x \in]-\infty; \alpha[; g(x) < 0$

$\forall\, x \in]\alpha; +\infty[; x > \alpha \rightarrow g(x) > g(\alpha)$ *or* $g(\alpha) = 0$

$donc\ \forall x \in]\alpha; +\infty[; g(x) > 0$

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \alpha[; g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[; g(x) > 0 \end{cases}$$

Partie B

1) Signe de $f(x)$

$$f(x) = 0 \leftrightarrow (2x-5)(1-e^{-x}) = 0$$
$$\leftrightarrow 2x - 5 = 0 \ ou\ 1 - e^{-x} = 0$$
$$\leftrightarrow x = \frac{5}{2} \ ou\ e^{-x} = 1$$
$$\leftrightarrow x = \frac{5}{2} \ ou\ x = 0$$

x	$-\infty$	0		$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$2x-5$	$-$		$-$	0	$+$
$1-e^{-x}$	$+$	0	$-$		$-$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

- $\boldsymbol{\forall x \in]-\infty; 0[\cup]\frac{5}{2}; +[; f(x) < 0}$
- $\boldsymbol{\forall x \in]0; \frac{5}{2}[; f(x) > 0}$

2) Etudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (2x-5)(1-e^{-x}) = +\infty \quad \text{car} \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} 2x-5 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1-e^{-x} = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (2x-5)(1-e^{-x}) = +\infty \quad \text{car} \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} 2x-5 = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 1-e^{-x} = -\infty \end{cases}$$

3) Montrons que $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2\left(1 - \frac{1}{e^x}\right) + \frac{1}{e^x}(2x-5)$$
$$= \frac{2e^x - 2 + 2x - 5}{e^x}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{2e^x + 2x - 7}{e^x}$$

$$Donc\ \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$$

b) Sens de variation de f

$\forall\, x \in \mathbb{R}, e^{x} > 0$ donc $f'(x)$ a le signe de $g(x)$. Or

$$\begin{cases} \forall\, x \in]-\infty; \alpha[;\, g(x) < 0 \;\; d'où \;\; \forall\, x \in]-\infty; \alpha[;\, f'(x) < 0 \\ \forall\, x \in]\alpha; +\infty[;\, g(x) > 0 \;\; d'où \;\; \forall\, x \in]\alpha; +\infty[;\, f'(x) > 0 \end{cases}$$

- f est décroissante sur $]-\infty; \alpha[$
- f est croissante sur $]\alpha; +\infty[$

<u>Tableau de variation</u>

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

4) a) Démontrons l'égalité $f(\alpha) = \frac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}$

$$\begin{aligned} g(\alpha) = 0 &\leftrightarrow 2e^{\alpha} + 2\alpha - 7 \\ &\leftrightarrow 2e^{\alpha} = -2\alpha + 7 \\ &\leftrightarrow e^{\alpha} = \frac{-2\alpha + 7}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } f(\alpha) &= (2\alpha - 5)\left(1 - \frac{1}{e^{\alpha}}\right) \\ &= (2\alpha - 5)\left(\frac{e^{\alpha} - 1}{e^{\alpha}}\right) \\ &= (2\alpha - 5)\left(\frac{\frac{-2\alpha + 7}{2} - 1}{\frac{-2\alpha + 7}{2}}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= (2\alpha - 5)\left(\frac{\frac{-2\alpha + 7 - 2}{2}}{\frac{-2\alpha + 7}{2}}\right) \\ &= (2\alpha - 5)\left(\frac{-2\alpha + 7 - 2}{-2\alpha + 7}\right) \\ &= (2\alpha - 5)\left(\frac{-2\alpha + 5}{-2\alpha + 7}\right) \\ &= (2\alpha - 5)\left(\frac{2\alpha - 5}{2\alpha - 7}\right) \end{aligned}$$

Donc $\boldsymbol{f(\alpha) = \frac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}}$

b) Etudier le sens de variation de la fonction $h : x \mapsto \frac{(2x-5)^2}{2x-7}$ sur l'intervalle $]-\infty; \frac{5}{2}[$.

On a : $h'(x) = \left(\frac{(2x-5)^2}{2x-7}\right)'$

$$h'(x) = \frac{2\times 2(2x-5) - 2(2x-5)^2}{(2x-7)^2}$$

$$h'(x) = \frac{2(2x-5)(2-2x+5)}{(2x-7)^2}$$

$$h'(x) = \frac{2(2x-5)(7-2x)}{(2x-7)^2}$$

$$h'(x) = \frac{-2(2x-5)}{2x-7}$$

$$h'(x) = 0 \leftrightarrow \frac{-2(2x-5)}{2x-7} = 0 \leftrightarrow 2x-5 = 0 \rightarrow x = \frac{5}{2}$$

Tableau de signe de h

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$2x-5$		$-$	0	$+$		$+$	
-2		$-$		$-$	0	$-$	
$2x-7$		$-$		$-$	0	$+$	
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\forall\, x \in]-\infty; \frac{5}{2}[$, $h'(x) < 0$ donc **h est strictement décroissante sur** $\in]-\infty; \frac{5}{2}[$.

Encadrement de $f(\alpha)$

$0.94 < \alpha < 0.941$

$2 \times 0.94 < 2 \times \alpha < 2 \times 0.941$

$1.88 < 2\alpha < 1.882$

$1.88 - 7 < 2\alpha - 7 < 1.882 - 7$

$-5.12 < 2\alpha - 7 < -5.118$

$$-\frac{1}{5.118} < \frac{1}{2\alpha - 7} < -\frac{1}{5.12}$$

$$-1.89 < \frac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7} < -1.88$$

Donc $\boldsymbol{-1.8 < f(\alpha) < -1.7}$

5) On a : $f(x) - (2x-5) = (2x-5)(1-e^{-x}) - (2x-5)$

$$= (2x - 5)(1 - e^{-x} - 1)$$
$$= -(2x - 5)e^{-x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (2x - 5)] = \lim_{x \to +\infty} -(2x - 5)e^{-x}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} -2xe^{-x} + \lim_{x \to +\infty} 5e^{-x}$$
$$\boldsymbol{\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (2x - 5)] = 0} \text{ car } \lim_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0.$$

Donc **la droite (D) d'équation $y = 2x - 5$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$.**

Position de (C) par rapport à (D).
On a :
$f(x) - (2x - 5) = -(2x - 5)e^{-x}$
$f(x) - (2x - 5) = 0 \leftrightarrow -(2x - 5)e^{-x} = 0$
$\leftrightarrow 2x - 5 = 0$
$\leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f(x) - y$		$+$	0	$-$	

- $\forall x \in]-\infty; \frac{5}{2}[, f(x) - y > 0$ donc (C) est au-dessus de (D)
- $\forall x \in]\frac{5}{2}; +\infty[, f(x) - y < 0$ donc (C) est en-dessous de (D).

6) Traçons (C) et (D).