COLLEGE VICTOR HUGO DE BOUAKE
BAC BLANC SESSION 2022
Année Scolaire : 2021-2022
Durée : 4h
Classe : Tle D

CORRECTION DE MATHEMATIQUES

Leçons :

- Limites et continuité
- Nombres complexes
- Dérivabilité et études de fonctions
- Probabilité conditionnelle et variable aléatoire
- Fonctions logarithmes
- Primitives

EXERCICE 1

Répondons par vrai ou faux

1-Vrai ; 2- Vrai ; 3- Faux ; 4- Faux ; 5- Vrai.

EXERCICE 2

Écrivons le numéro de la ligne suivi de la lettre correspondant à la réponse juste

1- B ; 2- B ; 3- B ; 4- C ; 5- C.

EXERCICE 3

1- Vérifions que pour tout $x \neq -1; f(x) = \frac{-3}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3}$.

Considérons pour tout $x \neq -1; f(x) = \frac{-3}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3}$

Rendons au même dénominateur :

Pour tout $x \neq -1; f(x) = \frac{-3(x+1)^2}{(x+1)(x+1)^2} + \frac{3(x+1)}{(x+1)^2(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^3}$

$$f(x) = \frac{-3(x^2+2x+1)}{(x+1)^3} + \frac{3x+3}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+1)^3}$$

$$f(x) = \frac{-3x^2 - 6x - 3 + 3x + 3 + 1}{(x+1)^3}$$

Pour tout $x \neq -1; f(x) = \frac{-3x^2-3x+1}{(x+1)^3}$

Donc, pour tout $x \neq -1; f(x) = \frac{-3}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3}$.

2-

a) Déterminons les primitives sur $]-\infty; -1[$ de f.

Pour tout $x \neq -1; f(x) = \frac{-3}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3}$

Posons : $u(x) = x + 1 \Rightarrow u'(x) = 1$

Alors, pour tout $x \neq -1; f(x) = -3\left(\frac{1}{x+1}\right) + 3\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right) + \frac{1}{(x+1)^3}$

$$f(x) = -3\left(\frac{u'(x)}{u(x)}\right) + 3\left(\frac{u'(x)}{(u(x))^2}\right) + \frac{u'(x)}{(u(x))^3}$$

$$F(x) = -3\,ln|u(x)| + 3\left(-\frac{1}{(2-1)u^{(2-1)}}\right) + \left(-\frac{1}{(3-1)u^{(3-1)}}\right) + c; (c \in \mathbb{R})$$

$F(x) = -3\,ln|x+1| + 3\left(-\frac{1}{x+1}\right) + \left(-\frac{1}{2(x+1)^2}\right) + c; (c \in \mathbb{R})$

On constate que pour tout $x \in]-\infty; -1[; x + 1 < 0.$

Donc ; sur $]-\infty; -1[; |x+1| = -(x+1) = -x-1.$

Par conséquent, les primitives sur $]-\infty; -1[$ de f sont les fonctions :

$F(x) = -3\,ln(-x-1) - \frac{3}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + c; (c \in \mathbb{R}).$

b) Déduisons la primitive F de f sur $]-\infty; -1[$ qui prend la valeur 3 en -2.

$$F(x) = -3\,ln|x+1| + 3\left(-\frac{1}{x+1}\right) + \left(-\frac{1}{2(x+1)^2}\right) + c; (c \in \mathbb{R})$$

$F(-2) = \frac{5}{2} + c$. Or, $F(-2) = 3$. Donc, $C = \frac{1}{2}$.

D'où la primitive F de f sur $]-\infty; -1[$ qui prend la valeur 3 en 2 est :

$$F(x) = -3\,ln(-x-1) - \frac{3}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{1}{2}$$

<u>EXERCICE 4</u>

1- Calculons sous forme algébrique le nombre complexe $(1+2i)^2$.

$$(1+2i)^2 = 1^2 + 2 \times 1(2i) + (2\,i) = 1 + 4\,i - 4$$
$$(1+2i)^2 = -3 + 4i$$

2- Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 3z + 3 - i = 0.$

$$z^2 - 3z + 3 - i = 0$$
$$\Delta = (-3)^2 - 4(1)(3-i)$$
$$\Delta = -3 + 4i$$

Or, $1 + 2i$ est une racine carrée de $-3 + 4i$. Donc, l'équation admet deux solutions :

$z_1 = \frac{3-(1+2i)}{2} = 1 - i$ et $z_2 = \frac{3+(1+2i)}{2} = 2 + i$

$$S_{\mathbb{C}} = \{1 - i; 2 + i\}$$

3- a) Démontrons que $P(z)$ admet un unique zéro imaginaire pur z_0 qu'on déterminera.

$$P(z) = z^3 - (3+2i)z^2 + (3+5i)z - 2 - 6i; (z \in \mathbb{C}).$$

$P(z)$ admet un unique zéro imaginaire pur $z_0 \Leftrightarrow P(z_0) = 0$ avec $z_0 = x + iy$ où $x = 0$.

Donc, $z_0 = iy$.

Ainsi, on a : $P(iy) = 0 \Leftrightarrow (iy)^3 - (3+2i)(iy)^2 + (3+5i)(iy) = 0$

$$-iy^3 - (3+2i)(-y^2) + (3+5i)(iy) - 2 - 6i = 0$$
$$-iy^3 + 3y^2 + 2iy^2 + 3iy - 5y - 2 - 6i = 0$$
$$3y^2 - 5y - 2 - iy^3 + 2iy^2 + 3iy - 6i = 0$$
$$(3y^2 - 5y - 2) + (-y^3 + 2y^2 + 3y - 6)\, i = 0$$
$$\Leftrightarrow y = 2$$

Par conséquent, $P(z)$ admet un unique zéro imaginaire pur $z_0 = 2i$.

b) Déterminons les nombres complexes a et b tels que $P(z) = (z-2i)(z^2 + az + bz)$

$$P(z) = z^3 - (3+2i)z^2 + (3+5i)z - 2 - 6i; (z \in \mathbb{C})$$

$z_0 = 2i$ est un unique zéro imaginaire pur

$$\Leftrightarrow P(z) = (z-2i)(z^2 + az + bz)$$
$$P(z) = z^3 + az^2 + bz - 2iz^2 - 2aiz - 2ib$$
$$P(z) = z^3 + (a-2i)z^2 + (b-2ai)z - 2ib$$
$$P(z) = z^3 - (3+2i)z^2 + (3+5i)z - 2 - 6i.$$

Alors, par identification, on a : $a = -3$ et $b = 3 - i$.

D'où : $P(z) = (z-2i)(z^2 - 3z + 3 - i)$

c) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

$P(z) = 0 \Leftrightarrow z^3 - (3+2i)z^2 + (3+5i)z - 2 - 6i = 0$

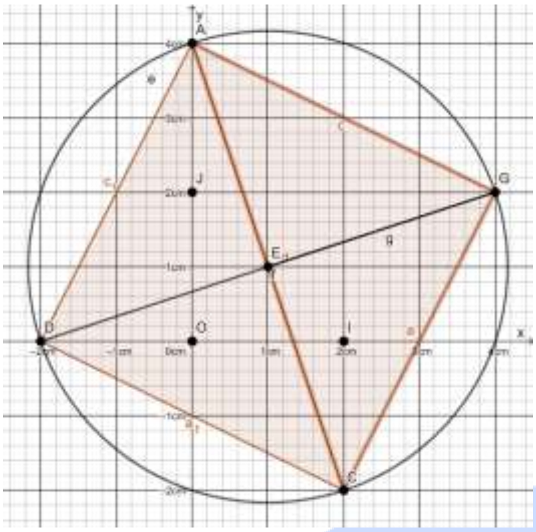
$\Leftrightarrow (z-2i)(z^2 - 3z + 3 - i) = 0$

$\Leftrightarrow z - 2i = 0$ ou $z^2 - 3z + 3 - i = 0$

$\Leftrightarrow z = 2i$ ou $z = 1 - i$ ou $z = 2 + i$ (Voir la question2).

$$S_{\mathbb{C}} = \{2i; 1-i; 2+i\}.$$

4- a) Plaçons les points A, B et C.



b) Calculons sous algébrique $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$ puis déduisons la nature du triangle ABC.

$\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B} = \frac{(1-i)-(2+i)}{2i-(2+i)} = i$. Donc, ABC est un triangle rectangle isocèle en B.

c) Déterminons l'affixe du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.

ABCD est un parallélogramme $\Leftrightarrow \vec{AD} = \vec{BC} \Leftrightarrow z_D - z_A = z_C - z_B \Leftrightarrow z_D = z_C - z_B + z_A$

$$z_D = (1-i) - (2+i) + 2\,i = 1 - i - 2 - i + 2i$$

$$z_D = -1$$

5- Démontrons que les points A ; B ; C et D sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Les points A ; B ; C et D sont situés sur un même cercle $\Leftrightarrow \frac{\left(\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}\right)}{\left(\frac{z_D-z_B}{z_C-z_B}\right)}$ est un nombre réel non nul.

$$\frac{\left(\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}\right)}{\left(\frac{z_D-z_B}{z_C-z_B}\right)} = \left(\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}\right) \times \left(\frac{z_C-z_B}{z_D-z_B}\right) == \frac{-3+4i}{-6+8i} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$$

Par suite, nous disons que les points A ; B ; C et D sont situés sur un même cercle (C).

<u>**Précisons le centre et le rayon**</u>

On sait que le triangle ABC est isocèle rectangle en B. Donc, le centre Ω de (C) est le milieu de $[AC]$. Ainsi, $z_\Omega = \frac{z_A+z_C}{2} = \frac{2i+1-i}{2} = \frac{1+i}{2}$

$$z_\Omega = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Le rayon de (C) est $\Omega B = |z_B - z_\Omega|$.

$$\Omega B = |z_B - z_\Omega| = \left|2 + i - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)\right| = \left|\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right| = \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$\Omega B = \frac{1}{2}\sqrt{10}.$

EXERCICE 5

A. 1) Calculons les limites de g en 0 à droite et en$+\infty$.

$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0}(x^2+1-\ln x) = +\infty$

car $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+1) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0}(-\ln x) = -(-\infty) = +\infty$.

Donc, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}(x^2+1-\ln x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(x+\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$$

Car $\lim\limits_{x\to 0} g$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$

Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

2) Démontrons que : $\forall x \in]0;+\infty[;\ g'(x) = \frac{2x^2-1}{x}$

$\forall x \in]0;+\infty[;\ g(x) = x^2+1-\ln x$

$g'(x) = (x^2+1-\ln x)'$

$$g'(x) = \frac{2x^2-1}{x}$$

Donc, $\forall x \in]0;+\infty[;\ g'(x) = \frac{2x^2-1}{x}$

3) a- Étudions le signe de $g'(x)$ puis dressons le tableau de variation de g.

$\forall x \in]0;+\infty[\Leftrightarrow x > 0$. Donc, le signe de $g'(x)$ est celui de $2x^2-1$.

Alors, $\forall x \in]0;+\infty[\,;\ g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-1}{x} = 0 \Leftrightarrow 2x^2-1 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} \in]0;+\infty[$ ou $\Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \notin]0;+\infty[$.

$$2x^2-1 = \left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$x-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$-$	$+$
$x+\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+$	$+$
$g'(x)$		$-$	$+$

$\forall x \in \left]0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right[\,;\ g'(x) < 0$. Donc, la fonction g est continue et strictement décroissante sur $\left]0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$.

$\forall x \in \left]\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[\,;\ g'(x) > 0$. Donc, la fonction g est continue et strictement croissante $\left]\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$.

Pour $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $g'(x) = 0$. Donc, la fonction g est constante pour$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Dressons le tableau de variation de g

x	0 $\qquad\qquad$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	‖ $-$ $\qquad$ $+$
$g(x)$	‖ $+\infty$ ↘ 1,85 ↗ $+\infty$

4) Démontrons que : $\forall x \in]0; +\infty[; g(x) > 0$
D'après le tableau de variation, 1,85est le minimum relatif de la fonction g. Donc, $\forall x \in$ $]0; +\infty[; g(x) > 0$.

B-

1) Calculons la limite de f en $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x-1+\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$$ car $\lim_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$

Donc, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2) a- Calculons la limite de f à droite en 0.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(x-1+\frac{\ln x}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(x^2 - x + \ln x\right) = -\infty$$

car $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to 0}\left(x^2 - x + \ln x\right) = -\infty$

Donc, $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$

b- Interprétons graphiquement le résultat

$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ Donc, la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe (C) en $-\infty$.

3) a- Démontrons que : $\forall x \in]0; +\infty[; f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

$\forall x \in]0; +\infty[\,; f(x) = x - 1 + \frac{\ln x}{x}$

$$\forall x \in]0; +\infty[; f'(x) = \left(x - 1 + \frac{\ln x}{x}\right)' = 1 + \frac{x(\ln x)' - x'(\ln x)}{x^2} = 1 + \frac{\left(\frac{1}{x}(x)\right) - \ln x}{x^2}$$
$$= 1 + \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} - \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 + 1 - \ln x}{x^2}$$

Donc, $\forall x \in]0; +\infty[; f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

b) Étudions les variations de f, puis dressons son tableau de variation.

$$\forall x \in]0; +\infty[; f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

$\forall x \in]0; +\infty[\Leftrightarrow x > 0$. Donc, $x^2 > 0$. Or, $\forall x \in]0; +\infty[; g(x) > 0$.
Par conséquent, $\forall x \in]0; +\infty[; f'(x) > 0$.
D'où, la fonction f est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Dressons son tableau de variation.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4) a- Démontrons que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

$(\Delta): y = x - 1$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (x - 1)] = 0$

Alors, calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (x - 1)]$.

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (x - 1)] = \lim_{x\to+\infty} \left[x - 1 + \frac{\ln x}{x} - (x - 1)\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left[x - 1 + \frac{\ln x}{x} - x + 1\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (x - 1)] = 0$$

Donc, la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

b- Étudions la position relative de (C) par rapport à (Δ).
Étudions sur $]0; +\infty[$, le signe de $f(x) - y$.

$$\forall x \in]0; +\infty[; f(x) - y = 0 \Leftrightarrow x - 1 + \frac{\ln x}{x} - (x - 1) = x - 1 + \frac{\ln x}{x} - x + 1$$

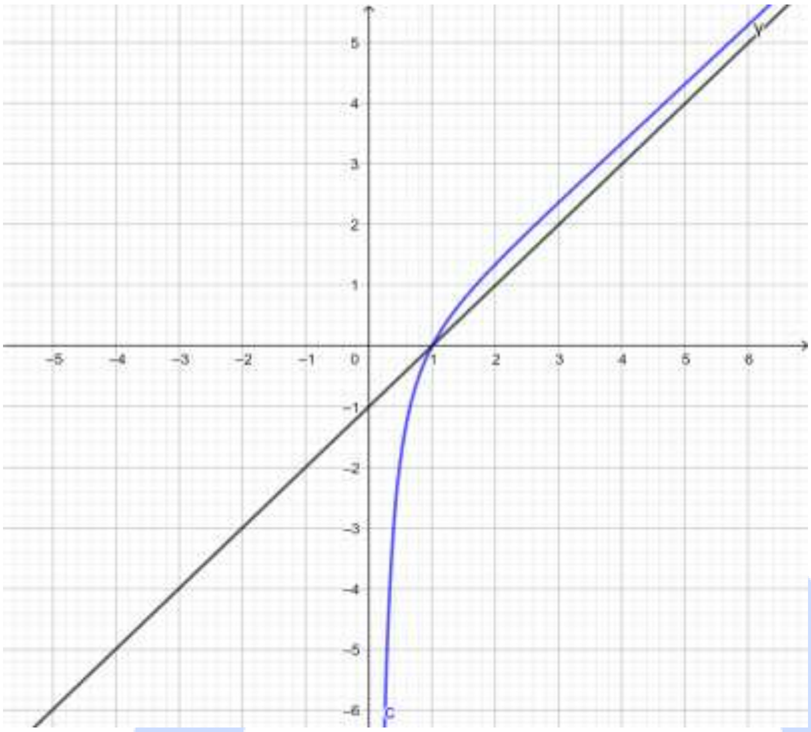
$$\Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow e^{\ln x} = e^0 \Leftrightarrow x = 1$$

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - y$	‖ $-$	$+$	

$\forall x \in]0; 1[; f(x) - y < 0$. Donc, la courbe (C) est au-dessous de la droite (Δ) sur $]0; 1[$.
$\forall x \in]1; +\infty[; f(x) - y > 0$. Donc, la courbe (C) est au-dessus de la droite (Δ) sur $]1; +\infty[$.

Pour $x = 1, f(x) - y = 0$. Donc, la courbe (C) et la droite (Δ) se coupent au point d'abscisse 1.

5) Construisons (C) et (Δ).



EXERCICE 6

Répondons à la préoccupation du Directeur des études

Pour répondre à la préoccupation du Directeur des études, je vais utiliser mes connaissances mathématiques des chapitres intitulés probabilité conditionnelle et variable aléatoire d'une part et d'autre part, les fonctions logarithmes ; c'est-à-dire utiliser particulièrement la loi binomiale et une inéquation comportant ln.
Pour ce faire, je vais procéder de la manière suivante :

- A partir de l'énoncé, construire un arbre de choix ;
- Traduire la probabilité que le test soit positif ;
- Calculer la probabilité d'avoir au moins un test positif parmi les n élèves contrôlés ;
- Résoudre l'inéquation pour déterminer le nombre minimal d'élèves à contrôler pour que la probabilité d'avoir un test positif soit supérieure à 0,99.

ARBRE DE CHOIX

Considérons les événements suivants :

D :≪ L'élève consomme la drogue≫.

T : ≪Le test est positif≫.

Traduisons la probabilité que le test soit positif

Considérons les événements suivants :

D :≪ L'élève consomme la drogue≫.

T : ≪Le test est positif≫.

$$P(T) = P(T \cap D) + P(T \cap \bar{D})$$
$$P(T) = P_D(T) \times P(D) + P_{\bar{D}}(T) \times P(\bar{D})$$
$$P(T) = 0{,}8 \times 0{,}08 + 0{,}05 \times 0{,}92$$
$$P(T) = 0{,}11$$

Calculons la probabilité d'avoir au moins un test positif parmi les n élèves contrôlés.

Soit P_n cette probabilité. On a : $P_n = 1-(0{,}89)^n$; n étant un nombre entier naturel non nul.

Résolvons l'inéquation pour déterminer le nombre minimal d'élèves à contrôler pour que la probabilité d'avoir un test positif soit supérieure à 0,99.

$$P_n \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 1-(0{,}89)^n \geq 0{,}99$$
$$-(0{,}89)^n \geq 0{,}99-1$$
$$-(0{,}89)^n \geq -0{,}01$$
$$(0{,}89)^n \leq 0{,}01$$
$$\ln(0{,}89)^n \leq \ln(0{,}01)$$

$n\, ln(0{,}89) \leq ln(0{,}01)$, car la fonction $x \mapsto ln\, x$est une bijection croissante.

$n\, ln(0{,}89) \leq ln(0{,}01)$

$n \geq \frac{ln(0{,}01)}{ln(0{,}89)}$; car $ln(0{,}89) < 0$. Or, $\frac{ln(0{,}01)}{ln(0{,}89)} \simeq 39{,}518 \simeq 40$.

Donc, le nombre minimal d'élèves recherché est 40.