SUJET PREPA BAC Tle D et B 2023 n°1 : MATHEMATIQUES

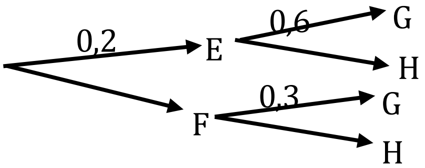
EXERCICE 1 :

Pour chaque énoncé, écris le numéro suivi de vrai si l'énoncé est vrai ou Faux si l'énoncé est faux. Aucune justification n'est demandée.

N°	Énoncés
1	La fonction ln est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$
2	La fonction ln est la primitive sur $]0\,;\, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1.
3	On considère la suite (u) définie par : $\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = 3U_n \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}$. La suite (u) est une suite arithmétique de raison 3.
4	Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle K. a et b sont deux éléments de K tels que $a < b$. S'il existe deux nombres réels m et M tels que pour tout x élément de $[a\,;\,b]$, $m \leq f'(x) \leq M$ alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.

EXERCICE 2

Pour chacune des propositions suivantes, indique le numéro suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	Propositions	Réponses	
1	$\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x^2-1}$ est égale à	A	$\frac{1}{2}$
		B	0
		C	$+\infty$
2	Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé, on donne $E(-2+i)$ et $F(-4)$ Alors l'ensemble des points M(z) tels que : $\lvert z+2-i\rvert = \lvert z+4\rvert$ est	A	Le cercle de centre E et de rayon 4
		B	Le cercle de diamètre [EF]
		C	La médiatrice du segment [EF]
3	X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{3}{4}$ alors la variance V(X) est égale à :	A	$\frac{15}{4}$
		B	$\frac{15}{16}$
		C	$\frac{3}{16}$
4	On considère l'arbre pondéré ci-dessous. 	A	$P_H(F) = 0{,}7$
		B	$P_H(F) = 0{,}56$
		C	$P_H(F) = 0{,}875$

EXERCICE 3 :

Dans une association sportive composée du golf et du tennis, un quart des femmes et un tiers des hommes adhèrent à la section golf. On sait aussi qu'en tout, 30 % des membres de cette association ont adhéré à la section golf.

Partie A :

1. On choisit au hasard un membre de cette association et on note les évènements : F : « le membre choisi est une femme » ; G : « le membre choisi adhère à la section golf. »
Démontre que la probabilité de l'évènement F est égal à $\frac{2}{5}$.

2. On choisit un membre parmi les adhérents à la section golf. Calcule la probabilité que ce membre choisi soit une femme.

PARTIE B : Pour financer une sortie, les membres de cette association organise une loterie sur un mois (quatre semaines) pour lequel un tirage au sort est effectué chaque semaine, le membre étant choisi au hasard et de façon indépendante. On note X la variable aléatoire désignant le nombre de fois qu'un membre de la section golf ait été choisi.

1- Justifie de façon succincte que X suit une loi binomiale de paramètres à préciser.
2- Etablis la loi de probabilité de X.
3- Traduis par une phrase puis détermine : a) P(X = 2) ; b) P(X≥ 1).
4- Si on devait établir la loterie sur n semaines consécutives.
   a) Justifie que la probabilité noté P_n traduisant qu'il y ait au moins un membre de la section golf choisi au tirage au sort est $P_n = 1 - (0,7)^n$.
   b) Détermine le nombre minimal de semaines pour que P_n soit supérieure à 0,9999.

EXERCICE 4

PARTIE A/ 1- Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation :$z^2 - (4+2i)z + 7 + 4i = 0$.

2- On considère dans $\mathbb{C}$ le polynôme complexe : $P(z) = z^3 - (4+3i)z^2 + (5+8i)z + 4 - 7i$.

On note (E) l'équation complexe : $z \in \mathbb{C}, P(z) = 0$.

a) Vérifie que i est une solution de (E).

b) Résous l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

PARTIE B/ Dans le plan muni du repère orthonormé (O ; $\vec{u}; \vec{v}$) d'unité graphique 1 cm, on donne les points : $A(i); B(2+3i) et\ c(2-i)$

1- Démontre que le triangle ABC est isocèle et rectangle en A.

2- Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que: $z\bar{z} + i(z - \bar{z}) = 7$

a) Vérifie que le point B appartient à (Γ).

b) On pose que : $z = x + iy$.

Démontre que : $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y = 7$

c) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de (Γ).

3-a) Place les points A, B et C.

b) Construis (Γ).

4- Soit B' l'image de B par la symétrie centrale de centre A.

a) Calcule l'affixe du point B'.

b) Justifie que : $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{B'C}; \overrightarrow{B'B}}\right) = \frac{\pi}{4}$

EXERCICE 5

PARTIE A : On considère la fonction g dérivable et définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = e^x + 2lnx$.

1. Détermine la limite de g en 0 puis en $+\infty$.
2. Etudie le sens de variation de g puis dresse son tableau de variation.
3. a) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0; +\infty[$.
   b) Justifie que $0,4 \leq \alpha \leq 0,5$.
   c) Démontre que : $\forall\ x \in]0; \alpha[, g(x) < 0$ et que $\forall\ x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0$.

PARTIE B : Soit la fonction f dérivable et définie sur $]0; +\infty[$ par :$\begin{cases} f(x) = e^x - 2x + 2xlnx; si\ x > 0. \\ f(0) = 1 \end{cases}$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ;I ;J) d'unité 4 cm.

1. Détermine la limite en $+\infty$ de $f(x)$ puis de $\frac{f(x)}{x}$. Interprète graphiquement les résultats.
2. Justifie que f est continue en 0.
3. Etudie la dérivabilité de f en 0. Interprète graphiquement le résultat obtenu.
4. a) Démontre que $\forall\ x \in]0; +\infty[, f'(x) = g(x)$.

b) Déduis en les variations de f puis dresse son tableau de variation.

c) Démontre que la courbe (C) coupe l'axe (OI) en deux points dont on localisera les intervalles.

d) Etablis que $f(\alpha) = (2\alpha - 2)ln\alpha - 2\alpha$ et que $f(\alpha) = (1-\alpha)e^{\alpha} - 2\alpha$.

5. Trace la courbe (C) sur l'intervalle [0 ;2]. (On prendra $\alpha = 0{,}45$ et on admettra que la courbe (C) coupe l'axe (OI) aux abscisses respectives 0,3 et 0,6. On calculera $f(\alpha)$).

PARTIE C : Intégrale et calculs d'aire.

1. On pose $K = \int_1^2 xlnxdx$. A l'aide d'une intégration par partie, montre que $K = 2ln2 - \frac{3}{4}$.
2. Soit $\mathcal{A}$ l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par la courbe (C), la droite (OI) et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$.
   a) Hachure sur le graphique la partie correspondante à $\mathcal{A}$.
   b) Donne le signe de $f(x)$ sur [1 ;2]
   c) Détermine la valeur de $\mathcal{A}$. Le résultat sera arrondi à l'ordre 2.

EXERCICE 6 :

Une entreprise propose, pour recruter un employé sur 10 ans, deux types de rémunérations.
Le contrat 1 prévoit un salaire annuel de 3 800 000 FCFA avec une augmentation salariale fixe de 100 000 FCFA par an.

Quant au contrat 2, il prévoit un saliare annuel de 3 000 000 FCFA avec une augmentation salariale de 10% par
an.
Ton ami, nouvel employé dans cette entreprise te sollicite pour déterminer le contrat le plus avantageux sur les 10 ans afin de clore la signature de son contrat.
Détermine à l'aide d'un raisonnement rigoureux, le contrat le plus avantageux.

« A NUL SACRIFICE, NUL VICTOIRE »

« A VAINCRE SANS PERIL (SOUFFRANCE) ON TRIOMPHE SANS GLOIRE »

''''''SEGLASS NI TONDAY'''' ......EVITE DE TRICHER.