



**PRIX D'EXCELLENCE
EPREUVE DE
MATHÉMATIQUES
SUJET n°2**

**EDITION 2022-2023
NIVEAU : Tle B & D
DUREE : 3 heures
M. DJAHA : 0709521305
0506448812
djaha.anicet@gmail.com**

EXERCICE 1 :

L'objet de cet exercice est d'étudier la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x} dx.$$

- 1) Donne les expressions sans calculer de I_0 et I_1 .
- 2) Calcule $A = I_0 + I_1$ et $B = I_1$, puis en déduire la valeur exacte de I_0 .
- 3) Pour tout entier naturel n , calcule la somme $I_n + I_{n+1}$ en fonction de n .
- 4) Puis déduis-en les valeurs exactes de I_2 et I_3 .
- 5) Compare e^{nx} et $e^{(n+1)x}$ lorsque $x \in [0; 1]$. Puis déduis-en le sens de variation de la suite numérique (I_n) .
- 6) Démontre que, pour tout x élément de $[0; 1]$: $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{1+e^x} \leq \frac{1}{2}$.
- 7) Calcule $\int_0^1 e^{nx} dx$ puis déduis un encadrement de I_n .
- 8) Précise la limite de la suite numérique (I_n) .

EXERCICE 2 :

On considère la fonction P définie par : $x \mapsto \frac{x^2-1}{2x^2-x}$

Partie A :

Etudie la fonction P et trace sa représentation graphique sur son domaine de définition.

Partie B :

n est un nombre entier naturel non nul. Une urne électorale opaque contient des bulletins tous indiscernables au toucher dont $n - 1$ bulletins défavorables « NON » et $n + 1$ bulletins favorables « OUI ». Pour réaliser un sondage sommaire, on prélève deux bulletins de l'urne, chaque bulletin ayant la même chance d'être prélevé.

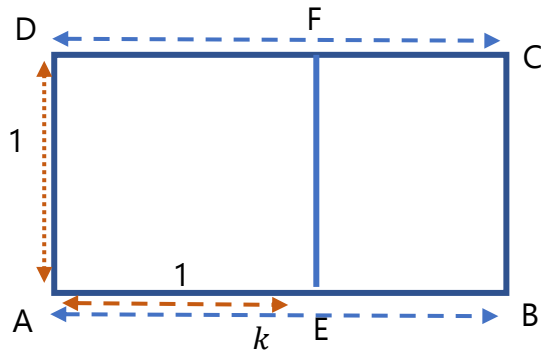
- 1- Calcule la probabilité P_n de l'événement : « On a prélevé 2 bulletins portant des votes différents ».
- 2- En t'appuyant sur la partie A, trouve le nombre entier naturel k pour lequel cette probabilité P_k soit maximale. Puis calcule la valeur de P_k .

EXERCICE 3 :

Soit la fonction f définie par : $x \mapsto x^2 + x + 1$.

- 1- Construis la parabole représentant f .
- 2- Démontre que pour tout $x \in [0; 10]$,
d'une part: $1 \leq f'(x) \leq 21$ puis que : $x + 1 \leq f(x) \leq 21x + 1$. (on pourra s'aider du théorème des accroissements finis)
- 3- Interprète graphiquement ces deux inégalités.
- 4- Donne par procédé analogue un encadrement de f sur $[1; 3]$.

EXERCICE 4 :



L'harmonie de la façade du Parthénon tient à la forme d'un rectangle ABCD comme l'indique la figure codée ci-dessus.

En effet l'histoire raconte que, si on inscrit le carré AEFD dans ce rectangle ABCD, le rectangle EBCF aura les mêmes proportions que ABCD. Autrement dit : $\frac{AD}{AB} = \frac{EB}{BC}$. Un tel rectangle est appelé : rectangle d'or.

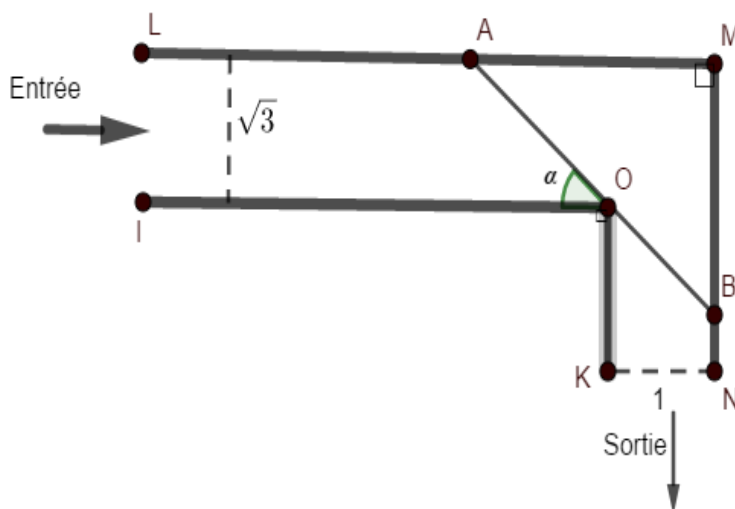
Comme il est indiqué sur le schéma : $AD = AE = 1$; $AB = DC = k$ (inconnue).

On admet la relation $\frac{AD}{AB} = \frac{EB}{BC}$.

- 1- Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 = x + 1$. La solution positive de cette équation est notée φ et appelé nombre d'or.
- 2- Exprime la relation $\frac{AD}{AB} = \frac{EB}{BC}$ en fonction du paramètre k .
- 3- Déduis en une valeur approchée de EB au dixième près.
- 4- Montre que si ABCD est un rectangle d'or alors EBCF en est un aussi.
- 5- Démontre successivement chacune des relations : $k^2 = k + 1$ (a) et $k^3 = 2k + 1$ (b)
- 6- Exprime k^4 sous la forme de $mk + p$ ou m et p sont deux nombres entiers naturels à préciser.

EXERCICE 5 :

Tu assiste ton oncle sur un projet de construction de tunnel de canalisation pour évacuation des eaux usées. Ce couloir de largeur $\sqrt{3}$ mètres à l'entrée, tourne à angle droit et sa largeur est de 1 mètre à la sortie comme l'indique la figure codée ci-après :



Sur la figure, une droite passe par le point O et fait avec l'un des murs, un angle α puis coupe deux côtés de deux murs en A et en B. Pour optimiser la fluidité et éviter les goulots, le projet doit respecter deux contraintes suivant chacune des deux possibilités. D'une part la longueur AB doit valoir 4 mètres ou d'autre part que les longueurs OA et OB soient égales.

Ne sachant comment faire il te sollicite. En suivant ces étapes de raisonnement, propose une solution à ton oncle.

- 1) Exprime en fonction de α , les longueurs OA, OB et AB.
- 2) On pose $AB = f(\alpha)$. Démontre que : $f(\alpha) = \frac{4\cos(\alpha - \frac{\pi}{6})}{\sin 2\alpha}$
- 3) Détermine α pour que : $AB = 4$.
- 4) Détermine α pour que : $OA = OB$.
- 5) Réponds aux préoccupations de ton oncle.

« BONNE CHANCE »

A NUL SACRIFICE, NUL VICTOIRE & A VAINCRE SANS PERIL LE TRIOMPE EST SANS GLOIRE

Seglass ni tonday