BACCALAUREAT
SESSION 2022

Coefficient : 4
Durée : 3 h

MATHEMATIQUES

SERIE B

Cette épreuve comporte deux (02) pages numérotées 1 sur 2 et 2 sur 2.
L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé
Le candidat recevra une (01) feuille de papier millimétré.

EXERCICE 1

On repique des plantes de 10 cm de haut sous une serre. La taille maximale de ces plantes est de 1 m. On note $f(t)$ la taille, en mètre (m) d'une plante après t jours. On a donc $f(0) = 0{,}1$.
Le modèle de Verharlot consiste à considérer que la vitesse de croissance d'une plante évolue suivant la relation $f'(t) = af(t)(1 - f(t))$, où a est une constante non nulle dépendant des conditions expérimentales, autrement dit, f est une solution sur $[0\ ;+\infty[$ de l'équation différentielle
(E) : $y' = ay(1-y)$.

1. On pose : pour tout t élément de $]0\ ;+\infty[$, $z(t) = \dfrac{1}{f(t)}$.
   a) Déterminer $z'(t)$ en fonction de $f(t)$.
   b) Justifier que z est une solution de (E) si et seulement si $z' = -az + a$.
2. On se propose de résoudre l'équation différentielle (E) : $z' + az = a$.
   a) Résoudre l'équation différentielle homogène : $z' + az = 0$.
   b) Déterminer une solution particulière z_0 de l'équation (E) sous la forme d'une fonction constante $p(t) = b$.
   c) En déduire une solution générale de (E).
   d) Justifier que : pour tout nombre réel positif t, on a : $f(t) = \dfrac{1}{9e^{-at} + 1}$.

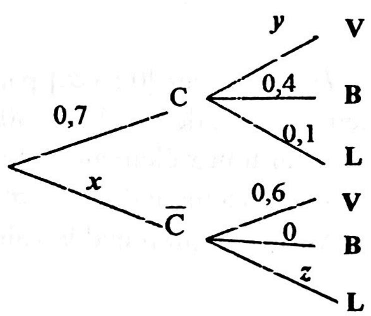
EXERCICE 2

Un vendeur de vêtements propose en vente des chemises et des pantalons qui sont confectionnés uniquement, soit en velours, soit en bazin, soit en lin. Le client ne peut choisir qu'un seul article, soit une chemise, soit un pantalon.
Le vendeur a observé que :

- 70 % de ses clients achètent une chemise et 10 % d'entre eux achètent une chemise en lin ;
- Lorsqu'un client achète un pantalon, il n'achète jamais un pantalon en basin, mais demande un pantalon velours dans 60 % des cas.

On considère les évènements suivants :
B : « Le client achète du bazin » ;
C : « Le client achète une chemise » ;
L : « Le client achète du lin » ;
V : « Le client achète du velours ».

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre des probabilités
   Déterminer les nombres réels x, y et z indiqués sur l'arbre.



2. a) Calculer la probabilité que le client achète une chemise en velours.
   b) Calculer la probabilité que le client achète un pantalon en lin.
3. Montrer que la probabilité que le client achète du velours est 0,53.
4. La chemise est vendue à 3 000 F l'unité.
   Le pantalon en velours est vendu à 1 000 F l'unité, celui en lin ou bien en bazin à 2 000 F.
   a) On note x_i la valeur possible en francs (F) du gain du vendeur et p_i la probabilité de réalisation. Recopier et compléter le tableau suivant donnant la loi du gain du vendeur en justifiant les réponses.

Valeur x_i	3000	2000	1000
Probabilité p_i			

   b) Calculer l'espérance mathématique de la vente.
   c) Déterminer le gain en francs (F) que le vendeur peut espérer pour 150 articles vendus.

PROBLEME

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x)=\frac{1}{2}x^2+1-\ln x$.

1. On admet que la fonction g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et g' sa fonction dérivée.
   a) Démontrer que pour tout x élément de $]0\,;+\infty[$, $g'(x)=\frac{x^2-1}{x}$.
   b) Justifier que : pour tout $x\in\,]0\,;1[$, $g'(x)<0$;
   pour tout $x\in\,]1\,;+\infty[$, $g'(x)>0$.
2. *a*) Justifier que $g(1)$ est le minimum de g sur $]0\,;+\infty[$.
   b) En déduire que pour tout x élément de $]0\,;+\infty[$, $g(x)>0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=3-x-\frac{2\ln x}{x}$.

Soit $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal (O, I, J).
Unités graphiques : OI = 2 cm et OJ = 1 cm.

1. a) Calculer la limite de f en 0 puis interpréter graphiquement le résultat.
   b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   c) Démontrer que la droite (D) d'équation $y=-x+3$ une asymptote à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.
   d) Etudier les positions relatives de $(\mathscr{C})$ par rapport à (D).
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et f' sa fonction dérivée.
   a) Démontrer que, pour tout x élément de $]0\,;+\infty[$, $f'(x)=\frac{-2g(x)}{x^2}$.
   b) En déduire les variations de f sur $]0\,;+\infty[$ puis dresser son tableau de variation.
3. a) Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 1.
   b) Tracer les droites (D) et (T) puis construire $(\mathscr{C})$ dans le repère (O, I, J).

Partie C

On considère la fonction H définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $H(x)=(\ln x)^2$.

1. On admet que la fonction H est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et H' sa fonction dérivée.
   a) Déterminer $H'(x)$ pour tout x élément de $]0\,;+\infty[$.
   b) Justifier que pour tout x élément de $]0\,;+\infty[$, $f(x)=3-x-H'(x)$.
2. En déduire une primitive F de f qui prend la valeur 2 en 1.