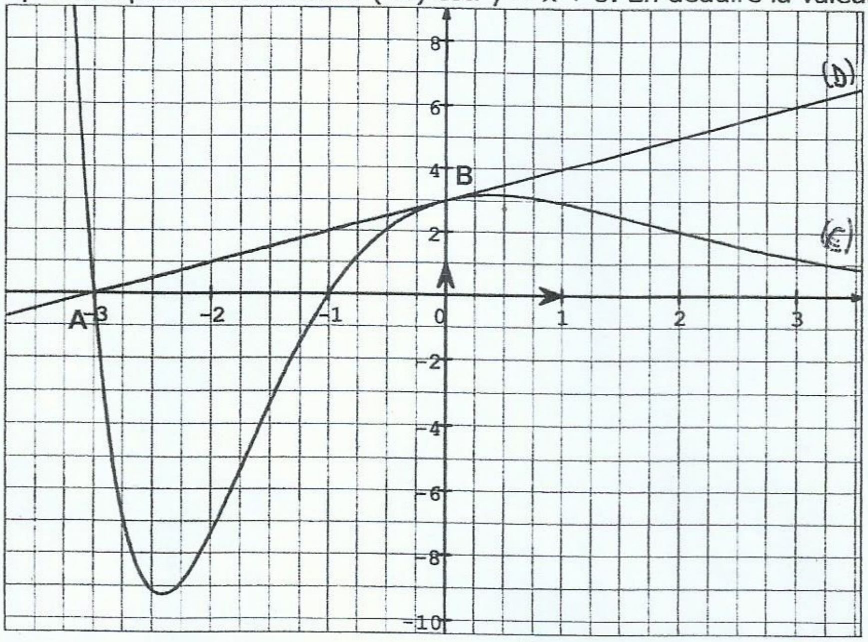
ETUDE D'UNE FONCTION DEFINIE PAR UNE REPRESENTATION GRAPHIQUE

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$ où a, b et c désignent trois nombres réels que l'on se propose de déterminer dans cette partie. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté (C) la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni du repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées.

On admet que la droite (D) passe par A et est tangente à la courbe (C) au point B.

1. a. À l'aide d'une lecture graphique, déterminer les coordonnées entières des points A et B.
   En déduire f(−3) et f(0).
   b. Montrer qu'une équation de la droite (AB) est: y = x + 3. En déduire la valeur de f '(0).



2.a Montrer que, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $f'(x)=\left(-ax^2+(2a-b)x+b-c\right)e^{-x}$.

b. En déduire f'(0) en fonction de b et c.

3.a. En utilisant les questions précédentes, montrer que les réels a, b et c sont solutions du système

$$\begin{cases} 9a-3b+c=0 \\ b-c=1 \\ c=3 \end{cases}$$

Résoudre le système et en déduire l'expression de f(x) en fonction de x.

Partie B

On suppose que f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\left(x^2+4x+3\right)e^{-x}$.

1. a. Vérifier que pour x différent de zéro, $f(x)=\left(1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)x^2e^{-x}$
   b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. En déduire une asymptote à la courbe (C)
   c. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
2. a. Vérifier que, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $f'(x)=\left(-x^2-2x+1\right)e^{-x}$
   b. Pour tout x réel, étudier le signe de f'(x) et dresser le tableau de variations de la fonction f.
   c. Calculer une valeur approchée à 10^{-1} près de l'ordonnée de chacun des points de la courbe (C) où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

3.Montrer que l'équation f(x) = 2 admet une solution unique α, pour x appartenant à l'intervalle $[-1;0]$.

Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie C

1. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=\left(-x^2-6x-9\right)e^{-x}$.
   Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire une primitive, G, de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par g(x) = x + 3 − f(x).
3. On considère la partie du plan comprise entre la droite(D), la courbe (C) et les droites d'équations

x = −3 et x = 0. On désigne par A la valeur, exprimée en cm^2, de l'aire de cette partie. Calculer A.