MATHEMATIQUE

NB : Pas d'exercice QCM, ni APC

EXERCICE 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$. (UA : $5cm$).

On considère les points A et B d'affixes $Z_A = 1 + i$ et $Z_B = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

On désigne par ($\mathcal{C}$) le cercle de centre O et de rayon 1.

1) Donne la forme trigonométrique de Z_A et Z_B.

2) Dans la suite de l'exercice, M désigne un point de ($\mathcal{C}$) d'affixe $e^{i\alpha}$ avec $\alpha \in [0\ ; 2\pi[$.

On considère l'application f qui à tout point M de ($\mathcal{C}$), associe $f(M)$ = MA×MB.

a- Montre, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'égalité suivante : $e^{i2\alpha} - 1 = 2ie^{i\alpha}sin\alpha$.

b- Montre l'égalité suivante : $f(M) = \left|e^{i2\alpha} - 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)e^{i\alpha}\right|$.

c- En déduis l'égalité suivante : $f(M) = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{2} + 2sin\alpha\right)^2}$

3) a- En utilisant la question 2) c-, montre qu'il existe deux points M de ($\mathcal{C}$), dont on donnera les coordonnées, pour les quels $f(M)$ est minimal. Donne cette valeur minimale.

b- En utilisant la question 2) c-, montre qu'il existe un seul point M de ($\mathcal{C}$), dont on donnera les coordonnées, pour les quels $f(M)$ est maximal. Donne cette valeur maximale.

EXERCICE 2

On désigne par A et B deux points d'affixes respectives $Z_A = 2 - i$ et $Z_B = -2i$ et pour tout nombre complexes z différent de Z_B, on pose $Z = \frac{z - Z_A}{z - Z_B}$.

1) Détermine dans chaque cas, l'ensemble des points $M(z)$ telque :
   a- Z soit un réel ;
   b- Z soit un imaginaire pure (éventuellement nul) ;
   c- Z soit de module 1
2) Calcule $|Z - 1| \times |z - Z_B|$ puis en déduis que, lorsque $M(z)$ parcourt le cercle de centre B et de rayon R, les points d'affixes Z sont tous situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

EXERCICE 3

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = ln(e^{2x} + 2e^{-x})$.

On désigne par (Cf) la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$, unité graphique $2\ cm$.

1) Montre que pour tout réel x positif, $f(x) = 2x + ln(1 + 2e^{-3x})$.
2) a- Etudie la limite de f en $+\infty$.

   b- Montre que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est asymptote à (Cf) en $+\infty$.

   c- Etudie la position de (Cf) et (D).
3) Etudie les variations de f.
4) Trace (Cf) et (D) dans le même repère.
5) Montre que pour tout réel α strictement positif, on a : $\int_0^{\alpha} e^{-3x}dx \leq \frac{1}{3}$.
6) Etablis que pour tout réel u positif ou nul , on a : $ln(1 + u) \leq u$.
7) En déduis que pour tout réel α strictement positif, on a : $\int_0^{\alpha} ln(1 + e^{-3x})dx \leq \frac{2}{3}$.
8) Soit $A(\alpha)$ l'aire, exprimée en cm^2 du domaine limité par les droites d'équations : $x = 0\ ; x = \alpha\ ; y = 2x$ et la courbe (Cf).

En déduis des questions précédentes une majoration de $A(\alpha)$ par un nombre indépendant de α.

Partie B : Soit h la fonction définie sur $[2\ ; 4]$ par $h(x) = 2 - x + lnx$.

1) Etudie les variations de h puis en déduis que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique β.

2) Soit (u_n) la suite définie par $\forall\ n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2 + lnu_n \end{cases}$

Montre que l'image de l'intervalle $[2\ ; 4]$ par la fonction $g : x \mapsto 2 + lnx$ est incluse dans l'intervalle $[2\ ; 4]$.

3) Montre en utilisant le théorème de l'inégalité des accroissements finis que pour tout entier naturel n, on a : $|u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{2}|u_n - \beta|$.

3) En utilisant un raisonnement par récurrence, prouve que pour tout entier naturel n, on a :

$$|u_n - \beta| \leq 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

5) En déduis que (u_n) est convergence.

6) Détermine un entier N tel que $|u_N - \beta| \leq 10^{-4}$.

PROBLEME

A) Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1 - x$.
   On appelle (C) la courbe représentative de f.

1) a- Calcule la fonction dérivée de f.

   b- Dresse le tableau de variation de f' sur $[0; +\infty[$ puis en déduis le signe de f' sur $[0; +\infty[$.

   c- Dresse le tableau de variation de f sur $[0; +\infty[$.

d- Montre que (C) admet une asymptote (D) dont on déterminera une équation.

e- Construit (C) et (D) sur un même graphique.

2) a- Etablis que l'équation $f(x) = 0$ admet sur l'intervalle $[0; +\infty[$ une solution et une seule notée α.

b- Justifie l'encadrement : $1 \leq \alpha \leq 2$.

B) Soit la fonction g définie sur l'intervalle $J = [1; +\infty[$ par $g(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1$.

1) Etudie les variations de g sur J puis en déduis que pour tout $x \in J, g(x) \in J$.

2) Montre que pour tout $x \in J$, on a : $|g'(x)| \leq \frac{3}{e^2}$.

En déduis que pour tout $x \in J$, on a : $|g(x) - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|x - \alpha|$.

3) Soit (u_n) la suite d'éléments de J définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$ pour tout entier n positif ou nul.

a- Montre que pour tout entier n positif ou nul, on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|u_n - \alpha|$.

b- En déduis que pour tout entier n positif ou nul, on a : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{e^2}\right)^n$.

c- Détermine la limite de la suite u_n

d- Détermine un entier p pour lequel on est sûr d'avoir $|u_p - \alpha| \leq 10^{-3}$.

Calcule u_p à 10^{-3} près.

EXERCICE 4

1-/ Soit l'équation (E) : $z^2 - 6z + 12 = 0$ où z est l'inconnue complexe.

a-/ Montre que (E) admet deux solutions complexes conjuguées u et $\overline{\boldsymbol{u}}$, u étant celle dont la partie imaginaire est positive.

b-/ Calcule le module et un argument de u. En déduis le module et un argument de $\overline{\boldsymbol{u}}$.

c-/ Écris $u - 4$ sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

d-/ Calcule le module et un argument de $\frac{u}{u-4}$. En déduis le module et un argument de $\frac{\overline{u}}{\overline{u}-4}$.

2-/ Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O ; I, J). On considère les points A ; B et C d'affixes respectives : $Z_A = -3$; $Z_B = 2 + 2i$ et $Z_C = 7i$.

a-/ Construis le triangle ABC.

b-/ Calcule les distances AB et BC.

c-/ Écris le nombre complexe $\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B}$ sous forme trigonométrique.

d-/ Déduis des questions a-/ et b-/ la nature du triangle ABC.

EXERCICE 5

A// Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x} - 1$

1-/ a-/ Détermine les limites de φ en $-\infty$ puis en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat de

$lim\ \varphi(x)$

$x \to +\infty$

b-/ Calcule $\varphi'(x)$ et Étudie son signe. Dressez le tableau de variation de φ.

2-/ Démontre que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$, dont l'une notée α est dans $[1\,;+\infty[$. Vérifie que $1{,}79 < \alpha < 1{,}80$.

3-/ En déduis le signe de φ sur $\mathbb{R}$.

B-// On donne les fonctions f et g définies par $f(x) = (2x + 1)\,e^{-x}$ et $g(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ Leurs courbes sont respectivement notées (C_f) et (C_g)

1-/ Détermine les domaines de définition de f et de g puis Calcule leurs limites aux bornes de ces domaines de définition.

2-/ Montre que (C_f) et (C_g) admettent au point A(0 ; 1) une tangente commune (T). Donne une équation cartésienne de (T).

3-/ a-/ Vérifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - g(x) = \dfrac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$ où φ est la fonction définie dans la partie A .

b-/ Étudie le signe de $f(x) - g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$

c-/ En déduis la position relative des courbes (C_f) et (C_g).

4-/ a-/ Détermine une primitive G de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 6

Une substance est injectée par voie intramusculaire. Elle passe du muscle au sang et est éliminée par les reins. Après étude, on constate que la quantité de substance contenue dans le sang à un instant t est donnée approximativement par la fonction q définie par :
$q(t) = q_0(e^{-0,5t} - e^{-t})$où $t \geq 0$ est le temps exprimé en heure, q_0 la quantité de substance injectée en milligramme.
1) Etablis le tableau de variation de q.
2) On désire contrôler les effets de cette substance. Pour cela, il faut que la quantité de ce médicament contenue dans le sang soit comprise entre deux valeurs q_m *et* q_M.
$q_m = 1{,}2\ mg$ est le seuil d'efficacité et $q_M = 2{,}6mg$ est le seuil de toxicité.
Déduis du tableau de variation de q, les valeurs qu'on peut donner à q_0 pour qu'à aucun moment, la quantité de substance dans le sang ne soit toxique.
3) On pose $q_0 = 10$
a) Trace soigneusement la courbe de q dans un repère de votre choix.
b) Détermine graphiquement l'intervalle de temps durant lequel le médicament est efficace.