

INYASS COULIBALY ADAMA

CALCULS ALGÈBRIQUES

Sommes et produits finis

Exercice 1 : Parmi les formules suivantes, lesquelles sont vraies ?

1. $\sum_{i=1}^n (\alpha + a_i) = \alpha + \sum_{i=1}^n a_i$
2. $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$
3. $\sum_{i=1}^n \alpha a_i = \alpha \sum_{i=1}^n a_i$
4. $\sum_{i=1}^n (a_i b_i) = \sum_{i=1}^n a_i \times \sum_{i=1}^n b_i$
5. $\sum_{i=1}^n (a_i b_i) = \sum_{i=1}^n [a_i \sum_{i=1}^n b_i]$
6. $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{i,j}$

Exercice 2 : Démontrez que pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}$,

1. $S_1 = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $S_2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $S_3 = \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Exercice 3 : Soit $n \in \mathbf{N}$.

1. En utilisant l'égalité $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n+1} ((k-1) + 1)^2$, et en développant le second membre, retrouvez la valeur de la somme $S_1 = \sum_{k=0}^n k$.
2. Utilisez une méthode analogue pour retrouver les valeurs des sommes

$$S_2 = \sum_{k=1}^n k^2 \quad \text{et} \quad S_3 = \sum_{k=1}^n k^3$$

Exercice 4 : Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Factorisez la somme $1.n + 2.(n-1) + \dots + (n-1).2 + n.1$.

Exercice 5 : Somme de termes en progression arithmétique —. Soit (u_k) une suite de nombres réels en progression arithmétique. Soit $(m, n) \in \mathbf{N}^2$ tel que $m < n$.

Montrez que $\sum_{k=m}^n u_k = \frac{u_m + u_n}{2} \times (n - m + 1)$.

Exercice 6 : Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}^*$

$$\sum_{k=1}^n (k \times k!) = (n+1)! - 1.$$

Changements d'indice et télescopes

Exercice 7 : Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

1. Simplifiez l'expression de $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$
2. Simplifiez l'expression de $V_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$.
3. Simplifiez l'expression de $W_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

Exercice 8 : À l'aide d'un changement d'indice, calculez les sommes suivantes.

1. $S_n = \sum_{k=1}^n k 2^k$. On posera $j = k - 1$.
2. $T_n = \sum_{k=0}^n \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$. En posant $j = n - k$, on donnera une autre expression de T_n ; puis on calculera la valeur de $2T_n$.

Sommes doubles

Exercice 9 : Utilisez les résultats de l'**Exercice 2** pour calculer

1. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (i + j)^2$

3. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \min\{i, j\}$

2. $\sum_{1 \leq i < j \leq n} ij$

4. $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$

Coefficients du binôme

Exercice 10 : Au moyen de la formule du binôme de Newton, développez $f(x) = (1 + x)^n$. En déduire

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} k \binom{n}{k}.$$

Exercice 11 : Soit $(n, p, k) \in \mathbf{N}^3$ tel que $0 \leq p \leq k \leq n$.

1. Démontrez que

$$\binom{n}{k} \binom{k}{p} = \binom{n}{p} \binom{n-p}{n-k}.$$

2. En déduire

$$S_1 = \sum_{p=0}^k \binom{n}{p} \binom{n-p}{n-k}; \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{k=p}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{p}.$$

CORRECTION DES EXERCICES

INYASS COULIBALY ADAMA

Exercice 1 .— 1. F ; 2. V ; 3. V ; 4. ARCHIFEAUX ; 5. F 6. V. ▲

Exercice 2 .— Par récurrence, montrons la troisième assertion :

- **Initialisation** : lorsque $n = 0$, la somme est indexée par le vide, elle est nulle.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Montrons que $n+1$ hérite de cette bonne propriété :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^n k^3 + \sum_{k=n+1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \quad \text{where HR comes into play} \\ &= \frac{(n+1)^2}{4} [n^2 + 4n + 4] \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \quad \text{c'est l'identité } k^2 + 4k + 4 = (k+2)^2 \end{aligned}$$

- **Conclusion** : ainsi, la formule est vraie pour $n = 0$, elle est héréditaire à partir de $n = 0$. Par récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel. ▲

Exercice 3 .—

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n+1} ((k-1) + 1)^2 = \sum_{k=1}^{n+1} (k-1)^2 + 2 \sum_{k=1}^{n+1} (k-1) + n+1 \\ &= \sum_{k=0}^n k^2 + 2 \sum_{k=0}^n k + (n+1). \end{aligned}$$

à l'aide des chgts d'indice $\ell = k - 1$ puis $k = \ell + 1$

On reconnaît S_1 au second membre. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^{n+1} k^2 - \sum_{k=0}^n k^2 - (n+1) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[(n+1)^2 - 0 - (n+1) \right] = \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Pour le calcul de S_2 et S_3 , on utilise la même astuce dans le calcul de $\sum_{k=1}^{n+1} k^3$ et

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^4.$$

▲ 3

Exercice 4 .— La difficulté réside essentiellement dans l'écriture de cette somme finie à l'aide d'un \sum .

$$\begin{aligned} 1.n + 2.(n-1) + \dots + (n-1).2 + n.1 &= \sum_{k=1}^n k(n+1-k) \\ &= (n+1) \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= (n+1)S_1 - S_2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \end{aligned}$$

Exercice 6 .—

- **Initialisation** : pour $n = 1$, on a bien $1 \times 1! = 2! - 1$.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $\sum_{k=1}^n k \times k! = (n+1)! - 1$. Montrons que $n+1$ hérite de cette bonne propriété :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (k \times k!) &= \sum_{k=1}^n k \times k! + (n+1) \times (n+1)! \\ &= (n+1)! - 1 + (n+1) \times (n+1)! \quad \text{HR inside!} \\ &= (n+1)! \times [1 + (n+1)] - 1 = (n+2)! - 1 \end{aligned}$$

- **Conclusion** : par récurrence, on a prouvé que pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n k \times k! = (n+1)! - 1.$$

▲

Exercice 7 .—

- il s'agit de faire apparaître $\frac{1}{k(k+1)}$ comme différence de deux termes consécutifs d'une même suite, pour pouvoir télescoper. Pour se faire, on écrit 1 sous la forme $1 = (k+1) - k$. Puis ça roule!

- Remarquez en ce cas que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$,

$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{(k+1) - 1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$$

- On factorise puis on sépare ce produit en deux, ce qui permet de faire apparaître deux produits télescopiques :

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{k=2}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) \\ &= \prod_{k=2}^n \frac{k+1}{k} \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} = \left(\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \cdots \times \frac{n+1}{n}\right) \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n-1}{n}\right) \\ &= \frac{n+1}{2} \times \frac{1}{n} = \frac{n+1}{2n}. \end{aligned}$$

▲

Exercice 8 .— 1. Le changement d'indice $j = k - 1$ donne :

$$S_n = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)2^{j+1} = \sum_{j=0}^{n-1} j2^{j+1} + \sum_{j=0}^{n-1} 2^{j+1} = 2 \sum_{j=0}^{n-1} j2^j + 2 \sum_{j=0}^{n-1} 2^j.$$

Dans la deuxième somme, on reconnaît une progression géométrique. Pour la première, on écrit :

$$\sum_{j=0}^{n-1} j2^j = \sum_{j=1}^{n-1} j2^j = \left(\sum_{j=1}^n j2^j \right) - n2^n = S_n - n2^n.$$

Par conséquent,

$$S_n = 2(S_n - n2^n) + 2 \frac{1-2^n}{1-2} = 2S_n - n2^{n+1} + 2^{n+1} - 2.$$

On en déduit que : $S_n = (n-1)2^{n+1} + 2$.

- 2.** Le changement d'indice $j = n - k$ permet d'écrire :

$$T_n = \sum_{j=0}^n \cos^2 \left[\frac{(n-j)\pi}{2n} \right] = \sum_{j=0}^n \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{j\pi}{2n} \right) = \sum_{j=0}^n \sin^2 \left(\frac{j\pi}{2n} \right)$$

On en déduit la valeur de $2T_n$:

$$\begin{aligned} 2T_n &= T_n + T_n = \sum_{k=0}^n \cos^2 \frac{k\pi}{2n} + \sum_{k=0}^n \sin^2 \frac{k\pi}{2n} = \sum_{k=0}^n \left(\cos^2 \frac{k\pi}{2n} + \sin^2 \frac{k\pi}{2n} \right) \\ &= \sum_{k=0}^n 1 = n + 1. \end{aligned}$$

Finalement, $T_n = \frac{n+1}{2}$.

▲

Exercice 9 .— Avec les notations de l'**Exercice 3**

- 1.**

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j)^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i^2 + 2ij + j^2) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ij + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n j^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \left(i^2 \sum_{j=1}^n 1 \right) + 2 \sum_{i=1}^n \left(i \sum_{j=1}^n j \right) + \sum_{i=1}^n S_2 \\ &= \sum_{i=1}^n (ni^2) + 2 \sum_{i=1}^n (iS_1) + nS_2 \\ &= nS_2 + 2S_1^2 + nS_2 = \frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6} \end{aligned}$$

- 2.** Visualisez à l'aide d'un schéma l'ensemble des indices. Il s'agit des points à coordonnées entières d'un triangle. Après réflexion, pour calculer cette somme double, on commence par sommer en i :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq n} ij &= \sum_{j=2}^n \left(\sum_{i=1}^{j-1} ij \right) = \sum_{j=2}^n \left(j \sum_{i=1}^{j-1} i \right) \\ &= \sum_{j=2}^n \left(j \frac{j(j-1)}{2} \right) \text{ d'après l'expression de } S_1 \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=2}^n j^3 - \sum_{j=2}^n j^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n j^3 - \sum_{j=1}^n j^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} (S_3 - S_2) \end{aligned}$$

- 3.** La difficulté ici c'est que l'on a pas d'expression explicite du terme général de cette suite double. C'est i ou j suivant les cas. Justement, pour calculer

$\sum_{i=1}^n \min(i, j)$, nous distinguons deux cas.

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \min\{i, j\} &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \min(i, j) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^j \min(i, j) + \sum_{i=j+1}^n \min(i, j) \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^j i + \sum_{i=j+1}^n j \right) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{j(j+1)}{2} + j \cdot (n-j) \right) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

4. En choisissant astucieusement l'ordre de sommation, il vient :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j} \sum_{i=1}^j i \right) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \times \frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (j+1) = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n+1} k \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n+1} k - 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{n^2 + 3n + 2 - 2}{2} \right) = \frac{n(n+3)}{4}. \end{aligned}$$

Exercice 10 .— Notons pour $n \in \mathbf{N}^*$, et $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = (1+x)^n$. D'après la formule du binôme

$$(1) \quad f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

1. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. En évaluant (1) en 1, il vient $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = f(1) = (1+1)^n = 2^n$.

Lorsque $n = 0$, on a $\binom{0}{0} = 1$. La formule précédente est encore valide.

2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. En évaluant (1) en -1 , il vient $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = f(-1) = (1-1)^n = 0$

Lorsque $n = 0$, on a $\binom{0}{0} (-1)^0 = 1$.

3. Dérivons l'équation (1). On obtient (pour $n \in \mathbf{N}^*$)

$$(2) \quad f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k x^{k-1}$$

Il en résulte en évaluant (2) en 1 que $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = f'(1) = n 2^{n-1}$.

Lorsque $n = 0$, on a $0 \cdot \binom{0}{0} = 0$.

4. Soit $n \in \mathbf{N}$ supérieur ou égal à 2. En évaluant (2) en -1 , on obtient que

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} (-1)^{k+1} = \sum_{k=1}^n k (-1)^{k-1} \binom{n}{k} = f'(-1) = n(1-1)^{n-1} = 0.$$

Lorsque $n = 1$, la somme proposée est $(-1)^2 1 \binom{1}{1} = 1$. Lorsque $n = 0$, la somme est nulle. ▲

Remarque : Dans les numéros 3. et 4. la difficulté est de sommer le produit $k \binom{n}{k}$. On peut aussi transformer ce produit à l'aide de la "petite formule"

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

et conclure via le changement d'indice $\ell = k - 1$. ☺

Exercice 11 .—

1. On utilise l'expression des coefficients du binôme à l'aide des nombres factoriels et hop !!

2. La difficulté est ici de sommer des produits. La relation du 1. permet de transformer ces produits.

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{p=0}^k \binom{n}{p} \times \binom{n-p}{n-k} = \sum_{p=0}^k \binom{n}{k} \binom{k}{p} \\ &= \binom{n}{k} \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} = 2^k \binom{n}{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{k=p}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{p} \binom{n-p}{n-k} \\ &= \binom{n}{p} \sum_{k=p}^n (-1)^{n-k} \binom{n-p}{n-k} \\ &= \binom{n}{p} \sum_{k=0}^{n-p} (-1)^k \binom{n-p}{k} \quad \text{chgt d'indice } n-k \leftrightarrow k \end{aligned}$$

Lorsque $n-p$ est nul, ie $n=p$, on obtient 1. Si $n-p \neq 0$, en ce cas, la somme est nulle (cf **Exercice 7**). ▲