Université Sultan Moulay Slimane
Faculté d'économie et de gestion
Béni Mellal

FILIERE : SEG– S1- SECTION B&C FEUILLE DE TD N° 1 Année : 2020-2021

ANALYSE MATHEMATIQUE

Exercice 1 *Calculer les limites suivantes*

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1-e^{x}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-1}{1+e^{x}+e^{-x}}$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x-1}{1+e^{x}+e^{-x}}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2+x}-x$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}+sinx}{lnx}$ g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$ h) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n-1}$

Exercice 2

Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes et calculer la dérivée lorsqu'elle existe

1. $x \longrightarrow f(x) = \ln(\ln(x))$ si $x > 1$

2. $x \longrightarrow g(x) = \ln(e^{x^2}+1)$ si $x \in \mathbb{R}$

3. $x \longrightarrow h(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & si \quad x < 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \\ xln(x) - x & si \quad x > 0 \end{cases}$

Exercice 3 *(théorème des accroissement finis & théorème de Rolle)*

Soit f la fonction $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x)\begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & si \quad x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & si \quad 1 < x \end{cases}$

1. Montrer qu'il existe $c \in]0\,;2[$ tel que : $f(2) - f(0) = (2-0)f'(c)$
2. Déterminer les valeurs possible de c.

Exercice 4 (Etude d'une fonction). Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x}{x^2-5x+4}$$

(1) Donner le domaine de définition de la fonction f

(2) Calculer les limites de f en 1, 4,$-\infty$ et $+\infty$

(3) Calculer la dérivée f' de f

(4) Donner l'équation de la tangente au graphe de f au point *x=0*

(5) Etudier le signe de la dérivée f', et donner le tableau de variations de f. Indiquer les extrema (locaux au globaux) de f sur son domaine de définition.

(6) Tracer le graphe de la fonction f

Exercice 6

On considéré la fonction f définie par :

$f(x) = \sqrt{x} - \ln(2x)$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f, noté $\mathcal{D}_f$
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition *
3. Déterminer la fonction dérivée f' de f, puis donner le tableau des variations de f
4. Etudier les asymptotes et branche infinies éventuelles de $\mathcal{C}_f$
5. Démontrer que l'équation (E) = $\sqrt{x} = \ln(2x)$ possède deux solutions réelles α et β (où α < β) dont vous donnerez un encadrement 'amplitude 1 pour chacune d'entre elles ; pour cela vous vous aiderez du tableau suivant :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	0,31	0,03	−0,06	−0,08	−0,07	−0,04	0,01	0,06	0,12	0,17

Exercice 7 (théorème de l'hôpital : cas : $\infty * 0$; $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; 1^{∞})

Calculer les limites suivantes

a) $\lim_{x\to\infty} xe^{-x}$ b) $\lim_{x\to\infty} (\ln(x) - \ln(x+1))$ c) $\lim_{x\to\infty} (1+x^2)^{\frac{1}{\ln x}}$ d) $\lim_{x\to 0^+} (\sin x)^{\frac{3}{\ln x}}$

e) $\lim_{x\to\infty} (\frac{x+4}{x-3})^{3x}$ f) $\lim_{x\to\infty} x\sin(\frac{1}{x})$ g) $\lim_{x\to\infty} (\frac{x^2}{e^x})$ h) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(7x)}{\sin(4x)}$

Correction

Exercice 1

a) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\,(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)-x}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})} = 0$

b) $\lim_{x\to+\infty} x - 1 - e^x = -e^x(\frac{-x}{e^x} + \frac{1}{e^x} + 1)$

on a $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x/x} = 0$ (pusique on sait déjà que $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$)

et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ donc la parenthèse $(\frac{-x}{e^x} + \frac{1}{e^x} + 1)$ tend vers 1 et l'expression vers $-\infty$

finalement $\lim_{x\to+\infty} x - 1 - e^x = -\infty$

c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{1+e^x+e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(1-\frac{1}{x})}{e^x(\frac{1}{e^x}+1+e^{-2x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x}(\frac{(1-\frac{1}{x})}{(\frac{1}{e^x}+1+e^{-2x})}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x/x} \frac{(1-\frac{1}{x})}{(\frac{1}{e^x}+1+e^{-2x})}$

On a $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$, d'autre part $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\frac{(1-\frac{1}{x})}{(\frac{1}{e^x}+1+e^{-2x})} \to 1$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x/x} = 0$ (puisque on sait déjà que $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$)) finalement $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{1+e^x+e^{-x}} = 0$

d) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{1+e^x+e^{-x}}=0$ (on procède de la même maniéré)

e)

$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+x}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{4x^2+x}-x)((\sqrt{4x^2+x}+x)}{(\sqrt{4x^2+x}+x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(4x^2+x)-(x^2)}{(\sqrt{4x^2+x}+x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+x}{(\sqrt{4x^2+x}+x)}=$
$\lim_{x\to+\infty}\frac{x(3x+1)}{x(\sqrt{4+\frac{1}{x}}+\frac{1}{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(3x+1)}{(\sqrt{4+\frac{1}{x}}+\frac{1}{x})}=+\infty$

f) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+sinx}{lnx}$ c'est une limite indéterminée. Pour le calculer on va utiliser le théorème de l'hôpital :

on a $1\le sinx\le 1\Leftrightarrow\sqrt{x}-1\le sinx+\sqrt{x}\le 1+\sqrt{x}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}-1}{lnx}\le\frac{sinx+\sqrt{x}}{lnx}\le\frac{\sqrt{x}+1}{lnx}$

l'étape suivante consiste à déterminer les limites de $\frac{\sqrt{x}-1}{lnx}$ et $\frac{\sqrt{x}+1}{lnx}$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+1}{lnx}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{lnx}+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{lnx}.$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{lnx}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{lnx}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x})'}{(lnx)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/2\sqrt{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x\sqrt{x}}=0$

D'où $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+1}{lnx}=0$ de la même maniéré on démontre que $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}-1}{lnx}$=0

Donc d'après le théorème de gendarme on déduite que $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+sinx}{lnx}=0$

g) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1}{3((\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}=\frac{1}{3}$

h) $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^n-1}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots\ldots\ldots+x^n}=\frac{1}{n}$

Exercice 2

1. Si $x>1$ alors ln(x) >0 donc f est définie , continue et dérivable sur $]1,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{1/x}{lnx}=\frac{1}{xln(x)}$$

2. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^x+1>0$, donc g est définie , continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

$$g'(x)=\frac{2xe^{x^2}}{1+e^{x^2}}$$

3. h est évidement définie sur $\mathbb{R}$, avant d'étudier la dérivabilité on va étudier la continuité, pout tout $x\in\mathbb{R}^*$ h est continue

$\underline{lim}_{x\to0^-}h(x)=\underline{lim}_{x\to0^-}e^{1/x}=0=h(0)$ car $\frac{1}{x}\to-\infty\ quand\ x\to0^-$

$\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x - x = 0 = h(0)$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ (on utilisant la règle de l'Hôpital)

Puisque on a $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = 0 = h(0)$ donc h est continue en 0

h est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.on va étudier la dérivabilité en 0 .

méthode

On calcule la limite du taux de variation en 0 . Donc on va étudier la limite à gauche et à droite de ce taux.

Pour $x < 0$ $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^{1/x}}{x} = \frac{0}{0}$ il s'agit d'une forme indéterminée on peut appliquer la règle de l'hôpital ou posons X=1/x ainsi $X \to -\infty$ quand $x \to 0^-$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{1/x}}{x} = \lim_{X\to -\infty} Xe^X$$

Il s'agit encore d'une forme indéterminée mais le résultat est connu. C'est l'exponentielle qui l'emporte, la limite est donc nulle.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = 0$$

Pour $x > 0$ $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x\ln x - x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x - 1 = -\infty$

On conclut donc que $\frac{h(x)-h(0)}{x-0}$ n'a pas de limite en, donc la fonction n'est pas dérivable en 0

Exercice 3

Soit f la fonction $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x)\begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & si \quad x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & si \quad 1 < x \end{cases}$

Pour utiliser le théorème des accroissements finis, il faut d'abord montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. si $x \neq 0$, f est dérivable. Etudions la fonction en $x = 0$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{3-x^2}{2} = 1 = f(1)$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{x} = 1 = f(1)$

Ce qui montre que la fonction est continue en x=

Pour $x < 0$ $f'(x) = \frac{1}{x}(-2x) = -x$

$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} -x = -1$

Pour $x > 0$ $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$

$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{-1}{x^2} = -1$

Le fait que f est continue en 1 et $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f'(x)$ montre que f est dérivable en 1

Comme f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier continue sur $[0;2]$ et dérivable sur $]0;2[$, on peut appliquer le théorème des accroissement finis sur $[0;2]$ donc il existe $c \in]0;2[$ telle que $f(2) - f(0) = (2-0)f'(c)$

$$f(2) = \frac{1}{2} \text{ et } f(0) = \frac{3}{2}$$

Par conséquent

$f(2) - f(0) = (2-0)f'(0) \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 2f'(c) \Leftrightarrow f'(c) = -\frac{1}{2}$

Supposons que $0 \leq c \leq 1$ alors $f'(c) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -c = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow = \frac{1}{2}$

On vérifie que $1/2 \in [0;1[$ donc $c = \frac{1}{2}$ est une solution.

Supposons que $1 < c \leq 2$ alors $f'(c) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-1}{c^2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow c^2 = 2 \Leftrightarrow c = \pm\sqrt{2}$

On a $-\sqrt{2} \notin]1;2]$ et $\sqrt{2} \in]1;2]$. donc $\sqrt{2}$ une solution . Finalement il existe deux solutions : $c = \sqrt{2}$ et $c = \frac{1}{1}$

Exercice 4

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{x^2 - 5x + 4}$

1. ***Domaine de définition de f***

Le polynôme s'annule aux points

$$x_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{25 - (4*4)}}{2*1} = 1 \text{ et } x_2 = \frac{-(-5) + \sqrt{25 - (4*4)}}{2*1} = 4$$

Donc le domaine de définition de f est $]-\infty; 1[\cup]1; 4[\cup]4; +\infty[$

2. On fait les calculs suivant

$$\lim_{x\to-\infty} f\ \ (x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2-5x+4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f\ \ (x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2-5x+4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Pour les autres limites , on remarque que le polynôme $x^2 - 5x + 4$ est positive sur $]-\infty; 1[\cup]4; +\infty[$ et négative sur $]1; 4[$, on en déduit :

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{x}{x^2-5x+4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1^+}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to4^+} f(x) = \lim_{x\to4^+} \frac{x}{x^2-5x+4} = \lim_{x\to4^+} \frac{4^+}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{x}{x^2-5x+4} = \lim_{x\to1^-} \frac{1^-}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to4^-} f(x) = \lim_{x\to4^-} \frac{x}{x^2-5x+4} = \lim_{x\to4^-} \frac{4^-}{0^-} = +\infty$$

3. On calcule

$$f'(x) = \frac{1(x^2-5x+4) - x(2x-5)}{(x^2-5x+4)^2} = \frac{-x^2+4}{(x^2-5x+4)^2}$$

4. La tangente au graphe de f au point x=0 a pour équation :
   $y = f(0)(x-0) + f(0)$
   Et on trouve donc $y = \frac{4}{x^2}(x-0) + 0 = \frac{x}{4}$
5. Le dénominateur de la dérivée f' est toujours positif (c'est un carré) , donc f'(x) est du signe du polynôme $-x^2 + 4$. On a

   $-x^2 + 4 = -(x-2)(x+2)$

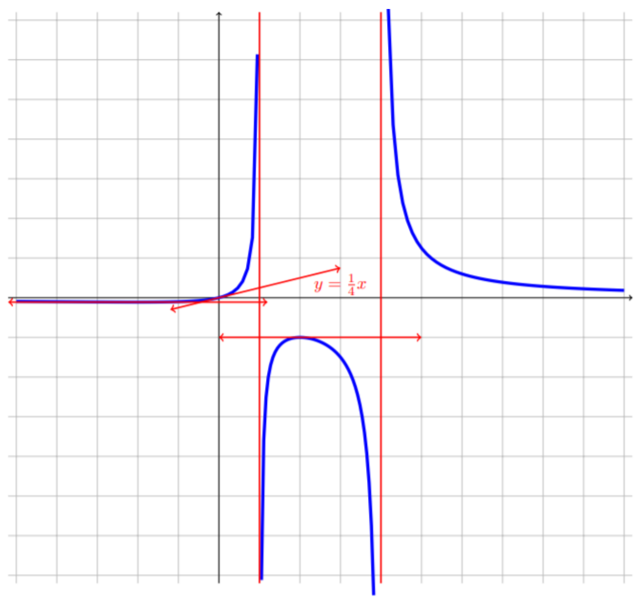
Donc $-x^2 + 4$ est positive pour $x \in [-2; 2]$ et négative pour $]-\neq\infty; -2] \cup [2; +\infty[$. On en déduit que f est croissante sur les intervalles $[-2; 1[et\ ]1; 2]$ et décroissante sur les intervalles $[-\infty; -2[$ et $[2; 4[$ et $]4; +\infty[$ on a donc le tableau de variation

x	$-\infty$		-2		1		2		4		$+\infty$
f'	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
f	‖ 0				$+\infty$ ‖		-1		‖ $+\infty$		
	‖	↘		↗	‖	↗		↘	‖	↘	
	‖		$-\frac{1}{9}$		‖ $-\infty$				$-\infty$ ‖		0

Ou *f(-2)=-1/9 et f(2)=-1*. La fonction f atteint un minimum local en *x=-2* et un maximum local en *x=2*

6. On regroupe les informations précédentes : les limites en -∞ et +∞ indiquent que le graphe de f a pout asymptote la droite *y=0* en -∞ et +∞. Elle a aussi deux asymptotes verticales aux points *x=1* et *x=4*. Enfin, elle a des tangentes horizontales en *x=-2 et x=2* , et on connait la tangent en *x=0*

Cela donne le graphe suivant



Exercice 6

On considère la fonction *f* définie par :

$f(x) = \sqrt{x} - \ln(2x)$

1. $D_f = \mathbb{R}_+^*$ car la fonction « ln » est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction « racine carré » est définie sur $\mathbb{R}_+$.
2.

$\lim_{x\to 0^+} lnx = -\infty$ et $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$ donc par différence $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

$\forall x > 0, f(x) = \sqrt{x} + ln2 - lnx = \sqrt{x}(1 - \frac{ln2}{\sqrt{x}} - \frac{lnx}{\sqrt{x}})$

Par croissance comparées $\lim_{x\to+\infty} \frac{lnx}{\sqrt{x}} = 0$ comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{ln2}{\sqrt{x}} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$; par somme et produit on a : et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

3. F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$:

   $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x} = \frac{\sqrt{x}-2}{2x}$, f'(x) est de signe de $\sqrt{x} - 2$ sur $\mathbb{R}_+^*$

   On a donc le tableau de variation de *f* suivant
4. D'après l'étude de $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, C_f admet l'axe des ordonnées pour asymptotes verticale

x	0		4		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$\Vert$	$+\infty \searrow$	$2-3\ln 2$	$\nearrow +\infty$	

En $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{ln2}{x}-\frac{lnx}{x}=0$ (fonction de référence et croissances comparées)
Donc C_f admet une branche parabolique de direction horizontale au voisinage de $+\infty$.

5. On remarque que le minimum de f sur $\mathbb{R}_+^*$ est $f(4)=2-\ln(8)\approx-0{,}1<0$.
On peut donc utiliser deux fois le théorème des valeurs intermédiaires :

- Sur $]0;4[$: f est continue et strictement croissante : de plus $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\ et\ f(4)<0$
  Donc d'après le théorème Du T.V.I 0 possèdent un unique antécédent α par f dans $]0;4[$ en fin d'après le tableau fourni $2<\alpha<3$

- Sur $]4;+\infty[$: f est continue et strictement décroissante : de plus $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\ et\ f(4)<0$
  Donc d'après le théorème Du T.V.I 0 possèdent un unique antécédent β par f dans $]4;+\infty[$ enfin d'après le tableau fourni $6<\beta<7$
  Conclusion : l'équation (E) $\Leftrightarrow f(x)=0$ possédé deux solution sur $\mathbb{R}_+^*$: $\alpha\ et\ \beta$