

EXERCICE 2. Exprimer les assertions suivantes à l'aide des quantificateurs et répondre aux questions :

- (1) Le produit de deux nombres pairs est-il pair ?
- (2) Le produit de deux nombres impairs est-il impair ?
- (3) Le produit d'un nombre pair et d'un nombre impair est-il pair ou impair ?
- (4) Un nombre entier est pair si et seulement si son carré est pair ?

EXERCICE 4. Par l'absurde montrer que :

- (1) $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.
- (2) $\forall n \in \mathbf{N}, n^2 \text{ pair} \Rightarrow n \text{ est pair}$.

EXERCICE 5. Par contraposée, montrer que

- (1) Si $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8 $\Rightarrow n$ est pair.
- (2) $(\forall \epsilon > 0, |x| \leq \epsilon) \Rightarrow x = 0$.

EXERCICE 6. Montrer par récurrence que

- $\forall n \in \mathbf{N}^* : 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
- $\forall n \in \mathbf{N}^*, 4^n + 6n - 1$ est un multiple de 9.

Exercice 3.1. Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel n

$$5 / (12^n - 7^n),$$

$$6 / (3(3^{2n} + 1)).$$

Exercice 3.2. En utilisant les congruences, montrer que

$$n \text{ est impair} \Rightarrow 8 / (7^n + 1)$$

puis donner le reste de la division de $(7^n + 1)$ par 8 lorsque n est pair.

Exercice 3.3. Montrer que la somme de trois cubes consécutifs est toujours divisible par 9, i.e. il faut montrer ce qui suit

$$\left[n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 \right] \equiv 0 [9]$$

Exercice 3.4. En utilisant les congruences, montrer qu'un entier est divisible par 3 (resp par 9) ssi la somme de ses chiffres est divisible par 3 (resp par 9).

Exercice 3.8. *A quelle condition nécessaire et suffisante le système*

$$\begin{cases} x \equiv a [m] \\ x \equiv b [n] \end{cases}$$

admet-il une solution ?

Exercice 3.9.

1. *Résoudre l'équation diophantienne suivante :*

$$37x + 27y = 1000.$$

2. *Préciser x et y , sachant que y représente un nombre d'étudiants et x le nombre de chaises disponibles.*

Exercice 3.5. *Calculer ce qui suit $\text{pgcd}(955, 183)$, $\text{ppcm}(955, 183)$, $\text{pgcd}(126, 230)$, $\text{ppcm}(126, 230)$.*

Exercice 3.6. *Résoudre le système*

$$\begin{cases} \text{pgcd}(x, y) = 18 \\ \text{ppcm}(x, y) = 540 \end{cases}$$

où x et y sont des entiers naturels.

Exercice 3.7. *Résoudre les équations diophantiennes suivantes :*

1. $7x - 9y = 6$
2. $955x + 183y = 1$
3. $123x + 67y = 10$
4. $13x - 10y = 13$
5. $70x + 30y = 6$
6. $111x + 90y = 12.$