EXERCICE n° 1 (France septembre 2006)

.

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]\ 0\ ;\ +\infty\ [$ par

$$g(x) = 2x^2 - 4\ln x + 4.$$

1. Déterminer la fonction dérivée g' de la fonction g et prouver que, pour tout nombre réel x strictement positif : $g'(x) = \dfrac{4x^2-4}{x}$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]\ 0\ ;\ +\infty\ [$ puis dresser son tableau de variations (on ne demande pas le calcul des limites).
3. Déterminer le signe de la fonction g sur l'intervalle $]\ 0\ ;\ +\infty\ [$.

Partie B

Dans toute la suite du problème, on étudie la fonction f définie sur l'intervalle $]\ 0\ ;\ +\infty\ [$ par

$$f(x) = 2x - 3 + 4\frac{\ln x}{x}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath})$ d'unité graphique 1 cm.

1. (a) Déterminer la limite de f en 0.
   (b) Interpréter graphiquement le résultat précédent.
2. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (b) Démontrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 2x - 3$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$.
   (c) Étudier la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite $\mathcal{D}$.
3. Déterminer la dérivée f' de la fonction f et prouver que, pour tout nombre réel x strictement positif :
$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$
4. À l'aide des résultats de la partie A, indiquer le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]\ 0\ ;\ +\infty\ [$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f.
5. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[\ 1\ ;\ 2\ ]$.
   (b) Donner un encadrement d'amplitude 10^{-4} de α.
6. Pour quelle valeur de x la courbe $\mathcal{C}$ admet-elle, au point d'abscisse x, une tangente parallèle à $\mathcal{D}$?
7. Construire avec soin la droite $\mathcal{D}$ et la courbe $\mathcal{C}$ (on utilisera une feuille de papier millimétré).

Partie C

Dans cette partie, on souhaite calculer l'aire $\mathcal{A}$, en cm^2, du domaine $\mathcal{E}$ situé entre les droites d'équations $x = 1$ et $x = 5$, la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}$.

1. Hachurer le domaine $\mathcal{E}$ sur le graphique réalisé à la partie B.
2. Montrer que $\mathcal{A} = \displaystyle\int_1^5 4\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$.
3. (a) On pose, pour tout nombre réel x strictement positif, $H(x) = (\ln x)^2$.
   Déterminer la dérivée de la fonction H.
   (b) Calculer la valeur exacte de $\mathcal{A}$, puis en donner une valeur approchée au mm^2 près.

EXERCICE n° 2 (Polynésie juin 2007)

.

Le plan est rapporté au repère orthonorinal $(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath})$ (L'unité graphique est 2 cm).
Le but du problème est l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle $]\,0\,;\,+\infty\,[$ par

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{x} - \frac{2\ln(x)}{x}$$

puis de calculer une aire.

I. Étude d'une fonction auxiliaire g

On note g la fonction définie sur l'intervalle $]\,0\,;\,+\infty\,[$ par :

$$g(x) = x^2 - 4 + 2\ln(x).$$

1. Calculer la fonction dérivée g' de la fonction g.
2. Déterminer le sens de variation de la fonction g. (On ne demande pas les limites en 0 et en $+\infty$).
3. Résolution de l'équation $g(x) = 0$.
   (a) Démontrer que sur l'intervalle $[\,1\,;\,2\,]$ l'équation $g(x) = 0$ possède une solution unique α.
   (b) Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de ce nombre α.
4. Déduire de ce qui précède le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x, dans l'intervalle $]\,0\,;\,+\infty\,[$.

II. Étude de la fonction f

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le repère $(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath})$.

1. Déterminer la limite de f en 0. Qu'en déduit-on pour la courbe $\mathcal{C}$?
2. Etude en $+\infty$.
   (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (b) Démontrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.
   (c) Déterminer les coordonnées du point A commun à la courbe $\mathcal{C}$ et à la droite $\mathcal{D}$.
   (d) Étudier la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite $\mathcal{D}$.
3. Étude des variations de f.
   (a) Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f. Vérifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]\,0\,;\,+\infty\,[$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$, où g est la fonction étudiée dans la partie I.
   (b) En utilisant les résultats de la partie I, dresser le tableau des variations de la fonction f
4. On note $\mathcal{T}$ la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse e^2. Montrer que $\mathcal{T}$ est parallèle à l'asymptote $\mathcal{D}$.
5. Dans le repère $(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath})$, tracer la droite $\mathcal{D}$, la tangente $\mathcal{T}$ et la courbe $\mathcal{C}$ à l'aide de l'étude précédente. (On prendra $f(\alpha) \approx 1,25$.)

III. Calcul d'une aire

On définit sur l'intervalle $]\,0\,;\,+\infty\,[$ la fonction H par

$$H(x) = \frac{x^2}{2} - x + 2\ln x - (\ln x)^2$$

1. Démontrer que H est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]\,0\,;\,+\infty\,[$.
2. Soit la région du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.
   (a) Hachurer la région sur votre figure.
   (b) On note S l'aire, exprimée en unité d'aire, de la région S. Déterminer la valeur exacte de S.
   (c) Donner la valeur décimale approchée de cette aire, arrondie au mm^2.

EXERCICE n° 3 (France deptembre 2007)

.

Partie A. Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]\ 0\ ;\ +\infty\ [$ par :

$$g(x) = x + 1 + \ln x$$

1. Étudier les variations de g sur l'intervalle $]\ 0\ ;\ +\infty\ [$.
2. Démontrer qu'il existe une solution unique α de l'équation $g(x) = 0$ dans l'intervalle $[\ 0,1\ ;\ 0,5\ ]$.
3. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
4. Étudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $]\ 0\ ;\ +\infty\ [$.

Partie B. Étude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]\ 0\ ;\ +\infty\ [$ par

$$f(x) = \frac{x \ln x}{x+1} + 2$$

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm.

1. On rappelle que $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$. Déterminer la limite de f en 0.
2. Montrer que, pour tout nombre réel strictement positif x : $f(x) = \dfrac{\ln x}{1 + \frac{1}{x}} + 2$.
   En déduire la limite de f en $+\infty$.
3. Soit f' la dérivée de f. Montrer que, pour tour nombre réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$.
4. Étudier, en utilisant les résultats de la partie A, le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
5. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   (On indiquera une valeur approchée de $f(\alpha)$ en prenant $\alpha \approx 0,28$.)
6. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.
7. On a tracé ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}'$ de la fonction h définie dans la partie C. Sur le graphique, tracer la tangente T ainsi que la courbe $\mathcal{C}$.

Partie C. Aire comprise entre deux courbes

On considère dans cette partie la fonction h définie sur l'intervalle $]\ 0\ ;\ +\infty\ [$ par :

$$h(x) = -\frac{\ln x}{x+1}$$

1. On pose, pour tout nombre réel strictement positif x : $u(x) = f(x) - h(x)$.
   Montrer que $u(x) = \ln x + 2$.
2. Montrer que la fonction U définie sur l'intervalle $]\ 0\ ;\ +\infty\ [$ par : $U(x) = x \ln x + x$ est une primitive de la fonction u.
3. (a) Étudier le signe de $u(x)$ sur l'intervalle $]\ 0\ ;\ +\infty\ [$.
   (b) En déduire les positions relatives des courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sur l'intervalle $]\ 0\ ;\ +\infty\ [$.
4. Hachurer le domaine $\mathcal{D}$ compris entre les courbes $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.
5. Déterminer alors l'aire exacte du domaine $\mathcal{D}$ en unités d'aire, puis en cm^2. Donner une valeur approchée de cette aire au mm^2 près.

EXERCICE n° 4 (Polynésie juin 2008)

.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]\ 0\ ;\ +\infty\ [$ par :

$$f(x) = 2 - \frac{1}{x} - \ln x.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath})$; la courbe $\mathcal{C}$ est donnée en annexe.

Partie A - Étude de la fonction f

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. On rappelle le résultat suivant : $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$.
   (a) En remarquant que $f(x) = \dfrac{2x - 1 - x\ln x}{x}$, déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.
   (b) En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ et en donner une équation.
3. (a) Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]\ 0\ ;\ +\infty\ [$ on a : $f'(x) = \dfrac{1-x}{x^2}$.
   (b) Déterminer le tableau des variations de f sur l'intervalle $]\ 0\ ;\ +\infty\ [$. Indiquer la valeur de l'extremum.
4. (a) Démontrer que, sur l'intervalle $[\ 0,1\ ;\ 10\ ]$, la fonction f s'annule pour deux valeurs exactement. On note x_1 et x_2 ces deux valeurs, avec $x_1 < x_2$.
   (b) Placer x_1 et x_2 sur l'axe $(\mathrm{O}\ ;\ \imath)$ représenté sur la feuille annexe, et donner les valeurs approchées arrondies au centième de ces deux nombres.

Partie B - Étude d'une tangente

On désigne par $\mathcal{T}$ la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 2.

1. Démontrer qu'une équation de la droite $\mathcal{T}$ est : $y = 3x + 2 - \ln 2$.
2. On considère la fonction h définie sur $]\ 0\ ;\ +\infty\ [$ par $h(x) = f(x) - \left(-\dfrac{1}{4}x + 2 - \ln 2\right)$.
   (a) Calculer $h'(x)$ et vérifier que pour tout x de $]\ 0\ ;\ +\infty\ [$, on a : $h'(x) = \dfrac{(x-2)^2}{4x^2}$.
   (b) En déduire le sens de variation de la fonction h sur l'intervalle $]\ 0\ ;\ +\infty[$.
   (c) Calculer $h(2)$ et en déduire le signe de la fonction h sur l'intervalle $]\ 0\ ;\ +\infty\ [$.
3. À l'aide des questions précédentes, déterminer la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la tangente $\mathcal{T}$.
4. Tracer la droite $\mathcal{T}$ sur la feuille annexe en tenant compte du résultat obtenu dans la question précédente.

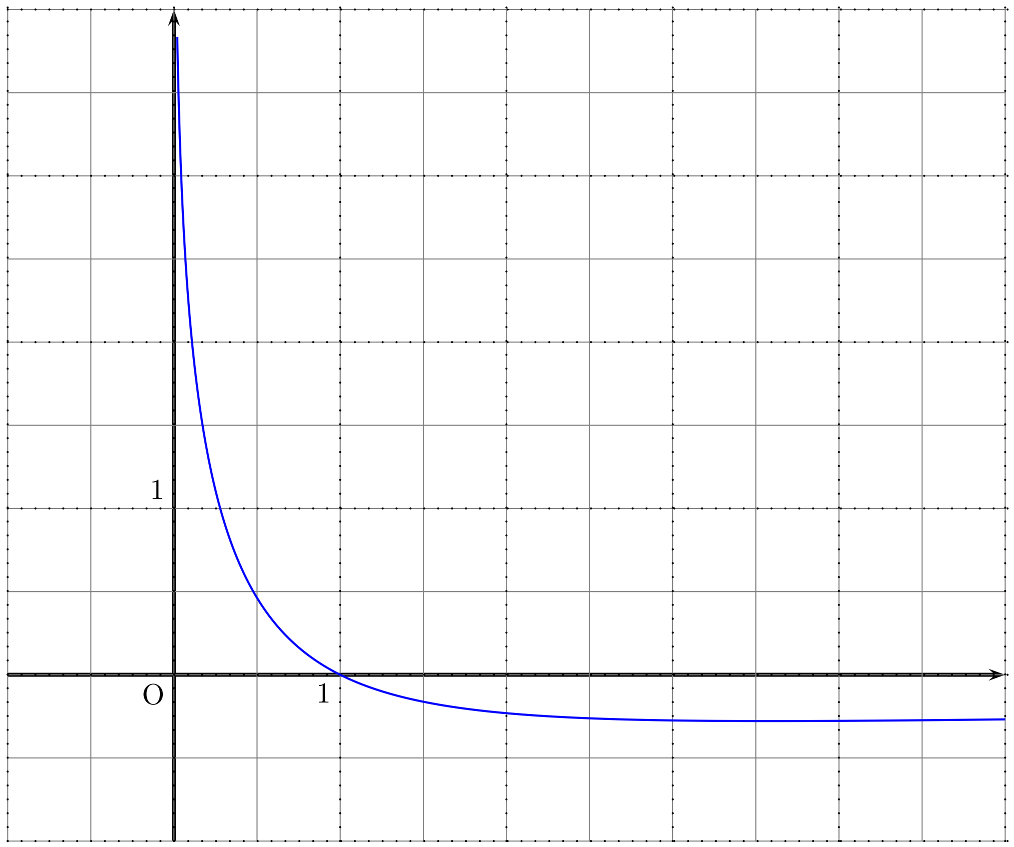
Partie C Calcul d'une aire

1. On note G la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

   $$G(x) = x - x\ln x$$

   Calculer $G'(x)$.
2. En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]\ 0\ ;\ +\infty\ [$.
3. On considère la partie du plan comprise entre les droites d'équation $x = 1$ et $x = 6$ d'une part, entre l'axe horizontal et la courbe $\mathcal{C}$ d'autre part. On note $\mathcal{A}$ l'aire de cette partie de plan, exprimée en unités d'aire.
   (a) Hachurer cette partie de plan sur la feuille annexe.
   (b) Donner la valeur exacte de l'aire $\mathcal{A}$, puis sa valeur arrondie au centième.

Graphique de l'exercice n°2 :



Graphique de l'exercice n°3 :