

Les nombres réels

Vidéo ■ partie 1. L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$

Vidéo ■ partie 2. Propriétés de $\mathbb{R}$

Vidéo ■ partie 3. Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Vidéo ■ partie 4. Borne supérieure

Fiche d'exercices ♦ Propriétés de $\mathbb{R}$

Motivation

Voici une introduction, non seulement à ce chapitre sur les nombres réels, mais aussi aux premiers chapitres de ce cours d'analyse.

Aux temps des Babyloniens (en Mésopotamie de 3000 à 600 avant J.C.) le système de numération était en base 60, c'est-à-dire que tous les nombres étaient exprimés sous la forme $a + \frac{b}{60} + \frac{c}{60^2} + \dots$. On peut imaginer que pour les applications pratiques c'était largement suffisant (par exemple estimer la surface d'un champ, le diviser en deux parties égales, calculer le rendement par unité de surface,...). En langage moderne cela correspond à compter uniquement avec des nombres rationnels $\mathbb{Q}$.

Les pythagoriciens (vers 500 avant J.C. en Grèce) montrent que $\sqrt{2}$ n'entre pas ce cadre là. C'est-à-dire que $\sqrt{2}$ ne peut s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ avec p et q deux entiers. C'est un double saut conceptuel : d'une part concevoir que $\sqrt{2}$ est de nature différente mais surtout d'en donner une démonstration.

Le fil rouge de ce cours va être deux exemples très simples : les nombres $\sqrt{10}$ et $1, 10^{1/12}$. Le premier représente par exemple la diagonale d'un rectangle de base 3 et de hauteur 1 ; le second correspond par exemple au taux d'intérêt mensuel d'un taux annuel de 10 %. Dans ce premier chapitre vous allez apprendre à montrer que $\sqrt{10}$ n'est pas un nombre rationnel mais aussi à encadrer $\sqrt{10}$ et $1, 10^{1/12}$ entre deux entiers consécutifs.

Pour pouvoir calculer des décimales après la virgule, voire des centaines de décimales, nous aurons besoin d'outils beaucoup plus sophistiqués :

- une construction solide des nombres réels,
- l'étude des suites et de leur limites,
- l'étude des fonctions continues et des fonctions dérivables.

Ces trois points sont liés et permettent de répondre à notre problème, car par exemple nous verrons en étudiant la fonction $f(x) = x^2 - 10$ que la suite des rationnels (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{10}{u_n} \right)$ tend très vite vers $\sqrt{10}$. Cela nous permettra de calculer des centaines de décimales de $\sqrt{10}$ et de certifier qu'elles sont exactes :

$$\sqrt{10} = 3,1622776601683793319988935444327185337195551393252168\dots$$

1. L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$

1.1. Écriture décimale

Par définition, l'ensemble des **nombres rationnels** est

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

On a noté $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Par exemple : $\frac{2}{5}$; $\frac{-7}{10}$; $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Les nombres décimaux, c'est-à-dire les nombres de la forme $\frac{a}{10^n}$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, fournissent d'autres exemples :

$$1,234 = 1234 \times 10^{-3} = \frac{1234}{1000} \quad 0,00345 = 345 \times 10^{-5} = \frac{345}{100\,000}.$$

Proposition 1.

Un nombre est rationnel si et seulement s'il admet une écriture décimale périodique ou finie.

Par exemple :

$$\frac{3}{5} = 0,6 \quad \frac{1}{3} = 0,3333\dots \quad 1,179\overline{325325325}\dots$$

Nous n'allons pas donner la démonstration mais le sens direct ($\implies$) repose sur la division euclidienne. Pour la réciproque ($\impliedby$) voyons comment cela marche sur un exemple : Montrons que $x = 12,34\overline{20212021}\dots$ est un rationnel.

L'idée est d'abord de faire apparaître la partie périodique juste après la virgule. Ici la période commence deux chiffres après la virgule, donc on multiplie par 100 :

$$100x = 1234,\overline{20212021}\dots \quad (1)$$

Maintenant on va décaler tout vers la gauche de la longueur d'une période, donc ici on multiplie encore par 10 000 pour décaler de 4 chiffres :

$$10\,000 \times 100x = 12342021,\overline{2021}\dots \quad (2)$$

Les parties après la virgule des deux lignes (1) et (2) sont les mêmes, donc si on les soustrait en faisant (2)-(1) alors les parties décimales s'annulent :

$$10\,000 \times 100x - 100x = 12\,342\,021 - 1234$$

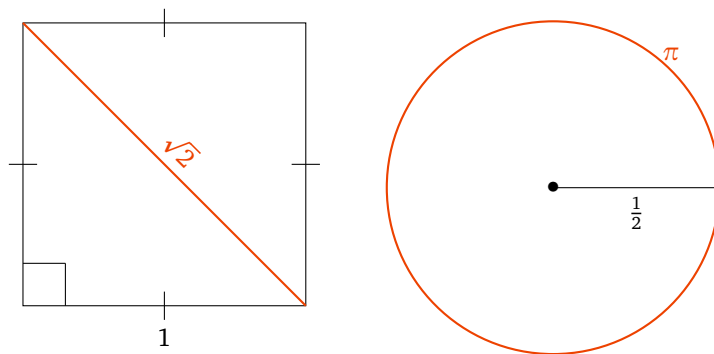
donc $999\,900x = 12\,340\,787$ donc

$$x = \frac{12\,340\,787}{999\,900}.$$

Et donc bien sûr $x \in \mathbb{Q}$.

1.2. $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel

Il existe des nombres qui ne sont pas rationnels, les **irrationnels**. Les nombres irrationnels apparaissent naturellement dans les figures géométriques : par exemple la diagonale d'un carré de côté 1 est le nombre irrationnel $\sqrt{2}$; la circonférence d'un cercle de rayon $\frac{1}{2}$ est π qui est également un nombre irrationnel. Enfin $e = \exp(1)$ est aussi irrationnel.



Nous allons prouver que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Proposition 2.

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Démonstration. Par l'absurde supposons que $\sqrt{2}$ soit un nombre rationnel. Alors il existe des entiers $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, de plus –ce sera important pour la suite– on suppose que p et q sont premiers entre eux (c'est-à-dire que la fraction $\frac{p}{q}$ est sous une écriture irréductible).

En élevant au carré, l'égalité $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ devient $2q^2 = p^2$. Cette dernière égalité est une égalité d'entiers. L'entier de gauche est pair, donc on en déduit que p^2 est pair ; en terme de divisibilité 2 divise p^2 .

Mais si 2 divise p^2 alors 2 divise p (cela se prouve par facilement l'absurde). Donc il existe un entier $p' \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 2p'$.

Repartons de l'égalité $2q^2 = p^2$ et remplaçons p par $2p'$. Cela donne $2q^2 = 4p'^2$. Donc $q^2 = 2p'^2$. Maintenant cela entraîne que 2 divise q^2 et comme avant alors 2 divise q .

Nous avons prouvé que 2 divise à la fois p et q . Cela rentre en contradiction avec le fait que p et q sont premiers entre eux. Notre hypothèse de départ est donc fausse : $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. $\square$

Comme ce résultat est important en voici une deuxième démonstration, assez différente, mais toujours par l'absurde.

Autre démonstration. Par l'absurde, supposons $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, donc $q\sqrt{2} = p \in \mathbb{N}$. Considérons l'ensemble

$$\mathcal{N} = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n\sqrt{2} \in \mathbb{N}\}.$$

Cet ensemble n'est pas vide car on vient de voir que $q\sqrt{2} = p \in \mathbb{N}$ donc $q \in \mathcal{N}$. Ainsi $\mathcal{N}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, elle admet donc un plus petit élément $n_0 = \min \mathcal{N}$.

Posons

$$n_1 = n_0\sqrt{2} - n_0 = n_0(\sqrt{2} - 1),$$

il découle de cette dernière égalité et de $1 < \sqrt{2} < 2$ que $0 < n_1 < n_0$.

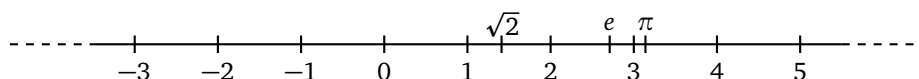
De plus $n_1\sqrt{2} = (n_0\sqrt{2} - n_0)\sqrt{2} = 2n_0 - n_0\sqrt{2} \in \mathbb{N}$. Donc $n_1 \in \mathcal{N}$ et $n_1 < n_0$: on vient de trouver un élément n_1 de $\mathcal{N}$ strictement plus petit que n_0 qui était le minimum. C'est une contradiction.

Notre hypothèse de départ est fausse, donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. $\square$

Exercice 1.

Montrer que $\sqrt{10} \notin \mathbb{Q}$.

On représente souvent les nombres réels sur une « droite numérique » :



Il est bon de connaître les premières décimales de certains réels $\sqrt{2} \simeq 1,4142\dots$ $\pi \simeq 3,14159265\dots$
 $e \simeq 2,718\dots$

Il est souvent pratique de rajouter les deux extrémités à la droite numérique.

Définition 1.

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

Mini-exercices.

1. Montrer que la somme de deux rationnels est un rationnel. Montrer que le produit de deux rationnels est un rationnel. Montrer que l'inverse d'un rationnel non nul est un rationnel. Qu'en est-il pour les irrationnels ?
2. Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction : $0,1212$; $0,12\overleftrightarrow{12}\dots$; $78,33456\overleftrightarrow{456}\dots$
3. Sachant $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, montrer $2 - 3\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.
4. Notons D l'ensemble des nombres de la forme $\frac{a}{2^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\frac{1}{3} \notin D$. Trouver $x \in D$ tel que $1234 < x < 1234,001$.
5. Montrer que $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \notin \mathbb{Q}$.
6. Montrer que $\log 2 \notin \mathbb{Q}$ ($\log 2$ est le logarithme décimal de 2 : c'est le nombre réel tel que $10^{\log 2} = 2$).

2. Propriétés de $\mathbb{R}$

2.1. Addition et multiplication

Ce sont les propriétés que vous avez toujours pratiquées. Pour $a, b, c \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{array}{ll} a + b = b + a & a \times b = b \times a \\ 0 + a = a & 1 \times a = a \text{ si } a \neq 0 \\ a + b = 0 \iff a = -b & ab = 1 \iff a = \frac{1}{b} \\ (a + b) + c = a + (b + c) & (a \times b) \times c = a \times (b \times c) \\ \\ a \times (b + c) = a \times b + a \times c \\ a \times b = 0 \iff (a = 0 \text{ ou } b = 0) \end{array}$$

On résume toutes ces propriétés en disant que :

Propriété ($\mathbb{R}1$).

$(\mathbb{R}, +, \times)$ est un **corps commutatif**.

2.2. Ordre sur $\mathbb{R}$

Nous allons voir que les réels sont ordonnés. La notion d'ordre est générale et nous allons définir cette notion sur un ensemble quelconque. Cependant gardez à l'esprit que pour nous $E = \mathbb{R}$ et $\mathcal{R} = \leq$.

Définition 2.

Soit E un ensemble.

1. Une **relation** $\mathcal{R}$ sur E est un sous-ensemble de l'ensemble produit $E \times E$. Pour $(x, y) \in E \times E$, on dit que x est en relation avec y et on note $x\mathcal{R}y$ pour dire que $(x, y) \in \mathcal{R}$.

2. Une relation $\mathcal{R}$ est une **relation d'ordre** si

- $\mathcal{R}$ est **réflexive** : pour tout $x \in E$, $x\mathcal{R}x$,
- $\mathcal{R}$ est **antisymétrique** : pour tout $x, y \in E$, $(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \implies x = y$,
- $\mathcal{R}$ est **transitive** : pour tout $x, y, z \in E$, $(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \implies x\mathcal{R}z$.

Définition 3.

Une relation d'ordre $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est **totale** si pour tout $x, y \in E$ on a $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$. On dit aussi que $(E, \mathcal{R})$ est un **ensemble totalement ordonné**.

Propriété ($\mathbb{R}2$).

La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est une relation d'ordre, et de plus, elle est totale.

Nous avons donc :

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \leq x$,
- pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$,
- pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$ si $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$.

Remarque.

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a par définition :

$$\begin{aligned} x \leq y &\iff y - x \in \mathbb{R}_+ \\ x < y &\iff (x \leq y \text{ et } x \neq y). \end{aligned}$$

Les opérations de $\mathbb{R}$ sont compatibles avec la relation d'ordre $\leq$ au sens suivant, pour des réels a, b, c, d :

$$\begin{aligned} (a \leq b \text{ et } c \leq d) &\implies a + c \leq b + d \\ (a \leq b \text{ et } c \geq 0) &\implies a \times c \leq b \times c \\ (a \leq b \text{ et } c \leq 0) &\implies a \times c \geq b \times c. \end{aligned}$$

On définit le maximum de deux réels a et b par :

$$\max(a, b) = \begin{cases} a & \text{si } a \geq b \\ b & \text{si } b > a. \end{cases}$$

Exercice 2.

Comment définir $\max(a, b, c)$, $\max(a_1, a_2, \dots, a_n)$? Et $\min(a, b)$?

2.3. Propriété d'Archimède

Propriété ($\mathbb{R}3$, Propriété d'Archimède).

$\mathbb{R}$ est **archimédien**, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad n > x$$

« Pour tout réel x , il existe un entier naturel n strictement plus grand que x . »

Cette propriété peut sembler évidente, elle est pourtant essentielle puisque elle permet de définir la partie entière d'un nombre réel :

Proposition 3.

Soit $x \in \mathbb{R}$, il **existe** un **unique** entier relatif, la **partie entière** notée $E(x)$, tel que :

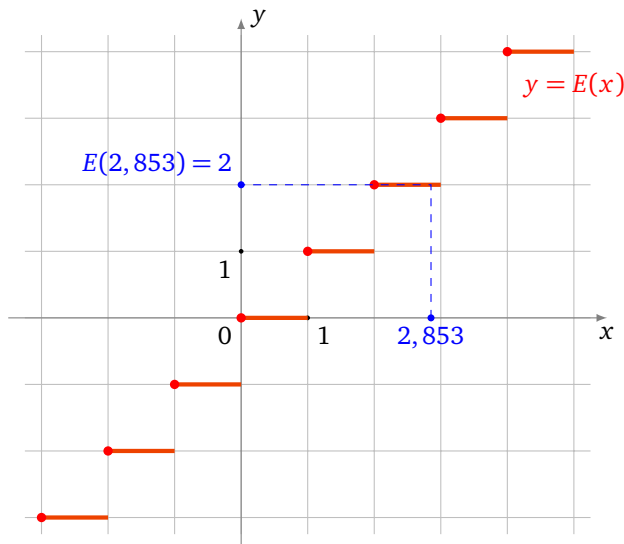
$$E(x) \leq x < E(x) + 1$$

Exemple 1.

- $E(2,853) = 2$, $E(\pi) = 3$, $E(-3,5) = -4$.
- $E(x) = 3 \iff 3 \leq x < 4$.

Remarque.

- On note aussi $E(x) = [x]$.
- Voici le graphe de la fonction partie entière $x \mapsto E(x)$:



Pour la démonstration de la proposition 3 il y a deux choses à établir : d'abord qu'un tel entier $E(x)$ existe et ensuite qu'il est unique.

Démonstration.

Existence. Supposons $x \geq 0$, par la propriété d'Archimède (Propriété $\mathbb{R}3$) il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > x$. L'ensemble $K = \{k \in \mathbb{N} \mid k \leq x\}$ est donc fini (car pour tout k dans K , on a $0 \leq k < n$). Il admet donc un plus grand élément $k_{\max} = \max K$. On a alors $k_{\max} \leq x$ car $k_{\max} \in K$, et $k_{\max} + 1 > x$ car $k_{\max} + 1 \notin K$. Donc $k_{\max} \leq x < k_{\max} + 1$ et on prend donc $E(x) = k_{\max}$.

Unicité. Si k et ℓ sont deux entiers relatifs vérifiant $k \leq x < k + 1$ et $\ell \leq x < \ell + 1$, on a donc $k \leq x < \ell + 1$, donc par transitivité $k < \ell + 1$. En échangeant les rôles de ℓ et k , on a aussi $\ell < k + 1$. On en conclut que $\ell - 1 < k < \ell + 1$, mais il n'y a qu'un seul entier compris strictement entre $\ell - 1$ et $\ell + 1$, c'est ℓ . Ainsi $k = \ell$. Le cas $x < 0$ est similaire. $\square$

Exemple 2.

Encadrons $\sqrt{10}$ et $1,1^{1/12}$ par deux entiers consécutifs.

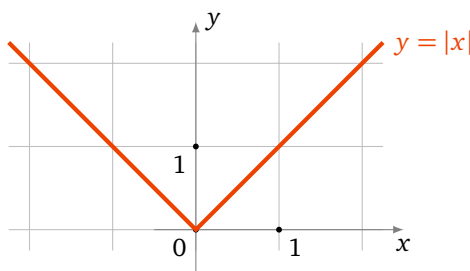
- Nous savons $3^2 = 9 < 10$ donc $3 = \sqrt{3^2} < \sqrt{10}$ (la fonction racine carrée est croissante). De même $4^2 = 16 > 10$ donc $4 = \sqrt{4^2} > \sqrt{10}$. Conclusion : $3 < \sqrt{10} < 4$ ce qui implique $E(\sqrt{10}) = 3$.
- On procède sur le même principe. $1^{12} < 1,10 < 2^{12}$ donc en passant à la racine 12-ième (c'est-à-dire à la puissance $\frac{1}{12}$) on obtient : $1 < 1,1^{1/12} < 2$ et donc $E(1,1^{1/12}) = 1$.

2.4. Valeur absolue

Pour un nombre réel x , on définit la *valeur absolue* de x par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Voici le graphe de la fonction $x \mapsto |x|$:

**Proposition 4.**

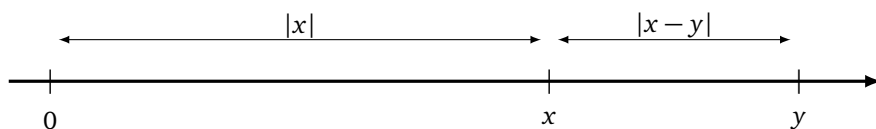
1. $|x| \geq 0$; $|-x| = |x|$; $|x| > 0 \iff x \neq 0$
2. $\sqrt{x^2} = |x|$
3. $|xy| = |x||y|$
4. **Inégalité triangulaire** $|x + y| \leq |x| + |y|$
5. **Seconde inégalité triangulaire** $||x| - |y|| \leq |x - y|$

Démonstration des inégalités triangulaires.

- $-|x| \leq x \leq |x|$ et $-|y| \leq y \leq |y|$. En additionnant $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$, donc $|x + y| \leq |x| + |y|$.
- Puisque $x = (x - y) + y$, on a d'après la première inégalité : $|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|$. Donc $|x| - |y| \leq |x - y|$, et en intervertissant les rôles de x et y , on a aussi $|y| - |x| \leq |y - x|$. Comme $|y - x| = |x - y|$ on a donc $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

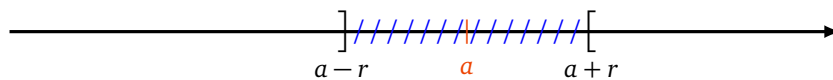
□

Sur la droite numérique, $|x - y|$ représente la distance entre les réels x et y ; en particulier $|x|$ représente la distance entre les réels x et 0.



De plus on a :

- $|x - a| < r \iff a - r < x < a + r$.
- Ou encore, comme on le verra bientôt, $|x - a| < r \iff x \in]a - r, a + r[$.

**Exercice 3.**

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x - a| < |a|$. Montrer que $x \neq 0$ et ensuite que x est du même signe que a .

Mini-exercices.

1. On munit l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ des parties de $\mathbb{R}$ de la relation $\mathcal{R}$ définie par $A\mathcal{R}B$ si $A \subset B$. Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre. Est-elle totale ?
2. Soient x, y deux réels. Montrer que $|x| \geq ||x + y| - |y||$.
3. Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels. Montrer que $|x_1 + \dots + x_n| \leq |x_1| + \dots + |x_n|$. Dans quel cas a-t-on égalité ?
4. Soient $x, y > 0$ des réels. Comparer $E(x + y)$ avec $E(x) + E(y)$. Comparer $E(x \times y)$ et $E(x) \times E(y)$.
5. Soit $x > 0$ un réel. Encadrer $\frac{E(x)}{x}$. Quelle est la limite de $\frac{E(x)}{x}$ lorsque $x \rightarrow +\infty$?

6. On note $\{x\} = x - E(x)$ la *partie fractionnaire* de x , de sorte que $x = E(x) + \{x\}$. Représenter les graphes des fonctions $x \mapsto E(x)$, $x \mapsto \{x\}$, $x \mapsto E(x) - \{x\}$.

3. Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

3.1. Intervalle

Définition 4.

Un **intervalle de $\mathbb{R}$** est un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété :

$$\forall a, b \in I \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (a \leq x \leq b \implies x \in I)$$

Remarque.

- Par définition $I = \emptyset$ est un intervalle.
- $I = \mathbb{R}$ est aussi un intervalle.

Définition 5.

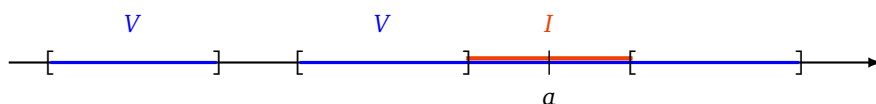
Un **intervalle ouvert** est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ de la forme $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, où a et b sont des éléments de $\mathbb{R}$.

Même si cela semble évident il faut justifier qu'un intervalle ouvert est un intervalle (!). En effet soient a', b' des éléments de $]a, b[$ et $x \in \mathbb{R}$ tel que $a' \leq x \leq b'$. Alors on a $a < a' \leq x \leq b' < b$, donc $x \in]a, b[$.

La notion de voisinage sera utile pour les limites.

Définition 6.

Soit a un réel, $V \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble. On dit que V est un **voisinage** de a s'il existe un intervalle ouvert I tel que $a \in I$ et $I \subset V$.



3.2. Densité

Théorème 1.

1. $\mathbb{Q}$ est **dense** dans $\mathbb{R}$: tout intervalle ouvert (non vide) de $\mathbb{R}$ contient une infinité de rationnels.
2. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$: tout intervalle ouvert (non vide) de $\mathbb{R}$ contient une infinité d'irrationnels.

Démonstration. On commence par remarquer que tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient un intervalle du type $]a, b[$, $a, b \in \mathbb{R}$. On peut donc supposer que $I =]a, b[$ par la suite.

1. *Tout intervalle contient un rationnel.*

On commence par montrer l'affirmation :

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad (a < b \implies \exists r \in \mathbb{Q} \quad a < r < b) \quad (3)$$

Donnons d'abord l'idée de la preuve. Trouver un tel rationnel $r = \frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, revient à trouver de tels entiers p et q vérifiant $qa < p < qb$. Cela revient à trouver un $q \in \mathbb{N}^*$ tel que l'intervalle ouvert $]qa, qb[$ contienne un entier p . Il suffit pour cela que la longueur $qb - qa = q(b - a)$ de l'intervalle dépasse strictement 1, ce qui équivaut à $q > \frac{1}{b-a}$.

Passons à la rédaction définitive. D'après la propriété d'Archimède (propriété $\mathbb{R}3$), il existe un entier q tel que $q > \frac{1}{b-a}$. Comme $b-a > 0$, on a $q \in \mathbb{N}^*$. Posons $p = E(aq) + 1$. Alors $p-1 \leq aq < p$. On en déduit d'une part $a < \frac{p}{q}$, et d'autre part $\frac{p}{q} - \frac{1}{q} \leq a$, donc $\frac{p}{q} \leq a + \frac{1}{q} < a + b - a = b$. Donc $\frac{p}{q} \in]a, b[$. On a montré l'affirmation (3).

2. *Tout intervalle contient un irrationnel.*

Partant de a, b réels tels que $a < b$, on peut appliquer l'implication de l'affirmation (3) au couple $(a - \sqrt{2}, b - \sqrt{2})$. On en déduit qu'il existe un rationnel r dans l'intervalle $]a - \sqrt{2}, b - \sqrt{2}[$ et par translation $r + \sqrt{2} \in]a, b[$. Or $r + \sqrt{2}$ est irrationnel, car sinon comme les rationnels sont stables par somme, $\sqrt{2} = -r + r + \sqrt{2}$ serait rationnel, ce qui est faux d'après la proposition 2. On a donc montré que si $a < b$, l'intervalle $]a, b[$ contient aussi un irrationnel.

3. *Tout intervalle contient une infinité de rationnels et d'irrationnels.*

On va déduire de l'existence d'un rationnel et d'un irrationnel dans tout intervalle $]a, b[$ le fait qu'il existe une infinité de chaque dans un tel intervalle ouvert. En effet pour un entier $N \geq 1$, on considère l'ensemble de N sous-intervalles ouverts disjoints deux à deux :

$$\left]a, a + \frac{b-a}{N}\right[, \quad \left]a + \frac{b-a}{N}, a + \frac{2(b-a)}{N}\right[, \quad \dots \quad \left]a + \frac{(N-1)(b-a)}{N}, b\right[.$$

Chaque sous-intervalle contient un rationnel et un irrationnel, donc $]a, b[$ contient (au moins) N rationnels et N irrationnels. Comme ceci est vrai pour tout entier $N \geq 1$, l'intervalle ouvert $]a, b[$ contient alors une infinité de rationnels et une infinité d'irrationnels.

□

Mini-exercices.

1. Montrer qu'une intersection d'intervalles est un intervalle. Qu'en est-il pour une réunion ? Trouver une condition nécessaire et suffisante afin que la réunion de deux intervalles soit un intervalle.
2. Montrer que l'ensemble des nombres décimaux (c'est-à-dire ceux de la forme $\frac{a}{10^n}$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{Z}$) est dense dans $\mathbb{R}$.
3. Construire un rationnel compris strictement entre 123 et 123,001. Ensuite construire un irrationnel. Sauriez-vous en construire une infinité ? Et entre π et $\pi + 0,001$?
4. Montrer que si $z = e^{i\alpha}$ et $z' = e^{i\beta}$ sont deux nombres complexes de module 1, avec $\alpha < \beta$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et une racine n -ième de l'unité $z = e^{i\gamma}$ avec $\alpha < \gamma < \beta$.

4. Borne supérieure

4.1. Maximum, minimum

Définition 7.

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Un réel α est un **plus grand élément** de A si :

$$\alpha \in A \quad \text{et} \quad \forall x \in A \quad x \leq \alpha.$$

S'il existe, le plus grand élément est unique, on le note alors $\max A$.

Le **plus petit élément** de A , noté $\min A$, s'il existe est le réel α tel que $\alpha \in A$ et $\forall x \in A \quad x \geq \alpha$.

Le plus grand élément s'appelle aussi le **maximum** et le plus petit élément, le **minimum**. Il faut garder à l'esprit que le plus grand élément ou le plus petit élément n'existent pas toujours.

Exemple 3.

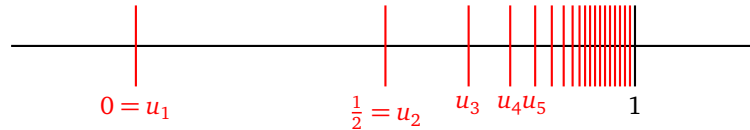
- $\max[a, b] = b$, $\min[a, b] = a$.
- L'intervalle $]a, b[$ n'a pas de plus grand élément, ni de plus petit élément.

- L'intervalle $[0, 1[$ a pour plus petit élément 0 et n'a pas de plus grand élément.

Exemple 4.

Soit $A = \left\{ 1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Notons $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$. Voici une représentation graphique de A sur la droite numérique :



1. A n'a pas de plus grand élément : Supposons qu'il existe un plus grand élément $\alpha = \max A$. On aurait alors $u_n \leq \alpha$, pour tout u_n . Ainsi $1 - \frac{1}{n} \leq \alpha$ donc $\alpha \geq 1 - \frac{1}{n}$. À la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$ cela implique $\alpha \geq 1$. Comme α est le plus grand élément de A alors $\alpha \in A$. Donc il existe n_0 tel que $\alpha = u_{n_0}$. Mais alors $\alpha = 1 - \frac{1}{n_0} < 1$. Ce qui est en contradiction avec $\alpha \geq 1$. Donc A n'a pas de maximum.
2. $\min A = 0$: Il y a deux choses à vérifier tout d'abord pour $n = 1$, $u_1 = 0$ donc $0 \in A$. Ensuite pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq 0$. Ainsi $\min A = 0$.

4.2. Majorants, minorants

Définition 8.

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Un réel M est un **majorant** de A si $\forall x \in A \ x \leq M$.

Un réel m est un **minorant** de A si $\forall x \in A \ x \geq m$.

Exemple 5.

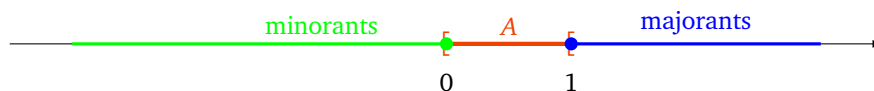
- 3 est un majorant de $]0, 2[$;
- $-7, -\pi, 0$ sont des minorants de $]0, +\infty[$ mais il n'y a pas de majorant.

Si un majorant (resp. un minorant) de A existe on dit que A est **majorée** (resp. **minorée**).

Comme pour le minimum et le maximum il n'existe pas toujours de majorant ni de minorant, en plus on n'a pas l'unicité.

Exemple 6.

Soit $A = [0, 1[$.



1. les majorants de A sont exactement les éléments de $[1, +\infty[$,
2. les minorants de A sont exactement les éléments de $] -\infty, 0]$.

4.3. Borne supérieure, borne inférieure

Définition 9.

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et α un réel.

1. α est la **borne supérieure** de A si α est un majorant de A et si c'est le plus petit des majorants. S'il existe on le note $\sup A$.
2. α est la **borne inférieure** de A si α est un minorant de A et si c'est le plus grand des minorants. S'il existe on le note $\inf A$.

Exemple 7.

Soit $A =]0, 1]$.

1. $\sup A = 1$: en effet les majorants de A sont les éléments de $[1, +\infty[$. Donc le plus petit des majorants est 1.
2. $\inf A = 0$: les minorants sont les éléments de $] -\infty, 0]$ donc le plus grand des minorants est 0.

Exemple 8.

- $\sup[a, b] = b$,
- $\inf[a, b] = a$,
- $\sup]a, b[= b$,
- $]0, +\infty[$ n'admet pas de borne supérieure,
- $\inf]0, +\infty[= 0$.

Théorème 2 ($\mathbb{R}4$).

Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure.

De la même façon : Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée admet une borne inférieure.

Remarque.

C'est tout l'intérêt de la borne supérieure par rapport à la notion de plus grand élément, dès qu'une partie est bornée elle admet toujours une borne supérieure et une borne inférieure. Ce qui n'est pas le cas pour le plus grand ou plus petit élément. Gardez à l'esprit l'exemple $A = [0, 1[$.

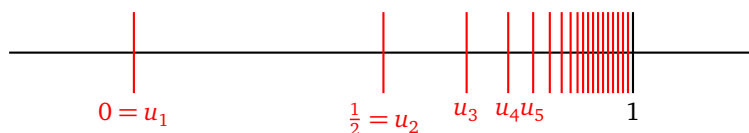
Proposition 5 (Caractérisation de la borne supérieure).

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. La borne supérieure de A est l'unique réel $\sup A$ tel que

- (i) si $x \in A$, alors $x \leq \sup A$,
- (ii) pour tout $y < \sup A$, il existe $x \in A$ tel que $y < x$.

Exemple 9.

Reprenons l'exemple de la partie $A = \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.



1. Nous avons vu que $\min A = 0$. Lorsque le plus petit élément d'une partie existe alors la borne inférieure vaut ce plus petit élément : donc $\inf A = \min A = 0$.
2. *Première méthode pour $\sup A$.* Montrons que $\sup A = 1$ en utilisant la définition de la borne supérieure. Soit M un majorant de A alors $M \geq 1 - \frac{1}{n}$, pour tout $n \geq 1$. Donc à la limite $M \geq 1$. Réciproquement si $M \geq 1$ alors M est un majorant de A . Donc les majorants sont les éléments de $[1, +\infty[$. Ainsi le plus petit des majorants est 1 et donc $\sup A = 1$.
3. *Deuxième méthode pour $\sup A$.* Montrons que $\sup A = 1$ en utilisant la caractérisation de la borne supérieure.
 - (i) Si $x \in A$, alors $x \leq 1$ (1 est bien un majorant de A) ;
 - (ii) pour tout $y < 1$, il existe $x \in A$ tel que $y < x$: en effet prenons n suffisamment grand tel que $0 < \frac{1}{n} < 1 - y$. Alors on a $y < 1 - \frac{1}{n} < 1$. Donc $x = 1 - \frac{1}{n} \in A$ convient.
 Par la caractérisation de la borne supérieure, $\sup A = 1$.

Démonstration.

1. Montrons que $\sup A$ vérifie ces deux propriétés. La borne supérieure est en particulier un majorant, donc vérifie la première propriété. Pour la seconde, fixons $y < \sup A$. Comme $\sup A$ est le plus petit des majorants de A alors y n'est pas un majorant de A . Donc il existe $x \in A$ tel que $y < x$. Autrement dit $\sup A$ vérifie également la seconde propriété.
2. Montrons que réciproquement si un nombre α vérifie ces deux propriétés, il s'agit de $\sup A$. La première propriété montre que α est un majorant de A . Supposons par l'absurde que α n'est pas le plus petit des majorants. Il existe donc un autre majorant y de A vérifiant $y < \alpha$. La deuxième propriété montre l'existence d'un élément x de A tel que $y < x$, ce qui contredit le fait que y est un majorant de A . Cette contradiction montre donc que α est bien le plus petit des majorants de A , à savoir $\sup A$.

□

Nous anticipons sur la suite pour donner une autre caractérisation, très utile, de la borne supérieure.

Proposition 6.

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. La borne supérieure de A est l'unique réel $\sup A$ tel que

- (i) $\sup A$ est un majorant de A ,
- (ii) il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers $\sup A$.

Remarques historiques

- Les propriétés $\mathbb{R}1$, $\mathbb{R}2$, $\mathbb{R}3$ et le théorème $\mathbb{R}4$ sont intrinsèques à la construction de $\mathbb{R}$ (que nous admettons).
- Il y a un grand saut entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$: on peut donner un sens précis à l'assertion « il y a beaucoup plus de nombres irrationnels que de nombres rationnels », bien que ces deux ensembles soient infinis, et même denses dans $\mathbb{R}$.

D'autre part, la construction du corps des réels $\mathbb{R}$ est beaucoup plus récente que celle de $\mathbb{Q}$ dans l'histoire des mathématiques.

- La construction de $\mathbb{R}$ devient une nécessité après l'introduction du calcul infinitésimal (Newton et Leibniz vers 1670). Jusqu'alors l'existence d'une borne supérieure était considérée comme évidente et souvent confondue avec le plus grand élément.
- Ce n'est pourtant que beaucoup plus tard, dans les années 1860-1870 (donc assez récemment dans l'histoire des mathématiques) que deux constructions complètes de $\mathbb{R}$ sont données :
 - Les coupures de Dedekind : $\mathcal{C}$ est une coupure si $\mathcal{C} \subset \mathbb{Q}$ et si $\forall r \in \mathcal{C}$ on a $r' < r \implies r' \in \mathcal{C}$.
 - Les suites de Cauchy : ce sont les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant la propriété

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad (m \geq N, n \geq N) \implies |u_m - u_n| < \epsilon.$$

Les réels sont l'ensemble des suites de Cauchy (où l'on identifie deux suites de Cauchy dont la différence tend vers 0).

Mini-exercices.

1. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On note $-A = \{-x | x \in A\}$. Montrer que $\min A = -\max(-A)$, c'est-à-dire que si l'une des deux quantités a un sens, l'autre aussi, et on a égalité.
2. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Montrer que A admet un plus petit élément si et seulement si A admet une borne inférieure qui appartient à A .
3. Même exercice, mais en remplaçant min par inf et max par sup.
4. Soit $A = \{(-1)^n \frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Déterminer, s'ils existent, le plus grand élément, le plus petit élément, les majorants, les minorants, la borne supérieure et la borne inférieure.
5. Même question avec $A = \{\frac{1}{1+x} \mid x \in [0, +\infty[\}$.

Propriétés de $\mathbb{R}$

1 Les rationnels $\mathbb{Q}$

Exercice 1

1. Démontrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $r + x \notin \mathbb{Q}$ et si $r \neq 0$ alors $r.x \notin \mathbb{Q}$.
2. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$,
3. En déduire : entre deux nombres rationnels il y a toujours un nombre irrationnel.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[000451]

Exercice 2

Montrer que $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ est irrationnel.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[000461]

Exercice 3

1. Soit $N_n = 0,19971997 \dots 1997$ (n fois). Mettre N_n sous la forme $\frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit $M = 0,199719971997 \dots$. Donner le rationnel dont l'écriture décimale est M .
3. Même question avec : $P = 0,11111 \dots + 0,22222 \dots + 0,33333 \dots + 0,44444 \dots + 0,55555 \dots + 0,66666 \dots + 0,77777 \dots + 0,88888 \dots + 0,99999 \dots$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[000459]

Exercice 4

Soit $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i$. On suppose que tous les a_i sont des entiers.

1. Montrer que si p a une racine rationnelle $\frac{\alpha}{\beta}$ (avec α et β premiers entre eux) alors α divise a_0 et β divise a_n .
2. On considère le nombre $\sqrt{2} + \sqrt{3}$. En calculant son carré, montrer que ce carré est racine d'un polynôme de degré 2. En déduire, à l'aide du résultat précédent qu'il n'est pas rationnel.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[000457]

2 Maximum, minimum, borne supérieure...

Exercice 5

Le maximum de deux nombres x, y (c'est-à-dire le plus grand des deux) est noté $\max(x, y)$. De même on notera $\min(x, y)$ le plus petit des deux nombres x, y . Démontrer que :

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2} \quad \text{et} \quad \min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}.$$

Trouver une formule pour $\max(x, y, z)$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[000464]

Exercice 6

Déterminer la borne supérieure et inférieure (si elles existent) de : $A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ en posant $u_n = 2^n$ si n est pair et $u_n = 2^{-n}$ sinon.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[000465]

Exercice 7

Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

$$[0, 1] \cap \mathbb{Q}, \quad]0, 1[\cap \mathbb{Q}, \quad \mathbb{N}, \quad \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

[Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[000466]

Exercice 8

Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. On note $A + B = \{a + b \mid (a, b) \in A \times B\}$.

1. Montrer que $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A + B$.
2. Montrer que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[000476]

Exercice 9

Soit A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. **Vrai ou faux ?**

1. $A \subset B \Rightarrow \sup A \leq \sup B$,
2. $A \subset B \Rightarrow \inf A \leq \inf B$,
3. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$,
4. $\sup(A + B) < \sup A + \sup B$,
5. $\sup(-A) = -\inf A$,
6. $\sup A + \inf B \leq \sup(A + B)$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[000477]

3 Divers

Exercice 10

Soit x un réel.

1. Donner l'encadrement qui définit la partie entière $E(x)$.
2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \frac{E(x) + E(2x) + \dots + E(nx)}{n^2}$.
Donner un encadrement simple de $n^2 \times u_n$, qui utilise $\sum_{k=1}^n k$.
3. En déduire que (u_n) converge et calculer sa limite.
4. En déduire que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[005982]

Exercice 11

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Montrer que

1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = n \cdot f(1).$
2. $\forall n \in \mathbb{Z} \quad f(n) = n \cdot f(1).$
3. $\forall q \in \mathbb{Q} \quad f(q) = q \cdot f(1).$
4. $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x \cdot f(1)$ si f est croissante.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[000497]

Indication pour l'exercice 1 ▲

1. Reasonner par l'absurde.
 2. Reasonner par l'absurde en écrivant $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux. Ensuite plusieurs méthodes sont possibles par exemple essayer de montrer que p et q sont tous les deux pairs.
 3. Considérer $r + \frac{\sqrt{2}}{2}(r' - r)$ (faites un dessin !) pour deux rationnels r, r' . Puis utiliser les deux questions précédentes.
-

Indication pour l'exercice 2 ▲

Raisonner par l'absurde !

Indication pour l'exercice 3 ▲

1. Multiplier N_n par une puissance de 10 suffisamment grande pour obtenir un nombre entier.
 2. Multiplier M par une puissance de 10 suffisamment grande (pas trop grande) puis soustraire M pour obtenir un nombre entier.
-

Indication pour l'exercice 4 ▲

1. Calculer $\beta^n p(\frac{\alpha}{\beta})$ et utiliser le lemme de Gauss.
 2. Utiliser la première question avec $p(x) = (x^2 - 5)^2 - 24$.
-

Indication pour l'exercice 5 ▲

Distinguer des cas.

Indication pour l'exercice 6 ▲

$\inf A = 0$, A n'a pas de borne supérieure.

Indication pour l'exercice 8 ▲

Il faut revenir à la définition de la borne supérieure d'un ensemble borné : c'est le plus petit des majorants. En particulier la borne supérieure est un majorant.

Indication pour l'exercice 9 ▲

Deux propositions sont fausses...

Indication pour l'exercice 10 ▲

1. Rappelez-vous que la partie entière de x est le plus grand entier, inférieur ou égal à x . Mais il est ici préférable de donner la définition de $E(x)$ en disant que $E(x) \in \mathbb{Z}$ et que x vérifie un certain encadrement...
 2. Encadrer $E(kx)$, pour $k = 1, \dots, n$.
 3. Rappelez-vous d'abord de la formule $1 + 2 + \dots + n$ puis utilisez le fameux théorème des gendarmes.
 4. Les u_n ne seraient-ils pas des rationnels ?
-

Indication pour l'exercice 11 ▲

1. $f(2) = f(1+1) = \dots$, faire une récurrence.
 2. $f((-n) + n) = \dots$.
-

3. Si $q = \frac{a}{b}$, calculer $f(\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \cdots + \frac{a}{b})$ avec b termes dans cette somme.
 4. Utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$: pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, prendre une suite de rationnels qui croît vers x , et une autre qui décroît vers x .
-

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Soit $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$. Par l'absurde supposons que $r + x \in \mathbb{Q}$ alors il existe deux entiers p', q' tels que $r + x = \frac{p'}{q'}$. Donc $x = \frac{p'}{q'} - \frac{p}{q} = \frac{qp' - pq'}{qq'}$ ce qui est absurde car $x \notin \mathbb{Q}$.

De la même façon si $r \cdot x \in \mathbb{Q}$ alors $r \cdot x = \frac{p'}{q'}$ Et donc $x = \frac{p'}{q'} \cdot \frac{q}{p}$. Ce qui est absurde.

2. Méthode "classique". Supposons, par l'absurde, que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ alors il existe deux entiers p, q tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. De plus nous pouvons supposer que la fraction est irréductible (p et q sont premiers entre eux). En élevant l'égalité au carré nous obtenons $q^2 \times 2 = p^2$. Donc p^2 est un nombre pair, cela implique que p est un nombre pair (si vous n'êtes pas convaincu écrivez la contraposée " p impair $\Rightarrow p^2$ impair"). Donc $p = 2 \times p'$ avec $p' \in \mathbb{N}$, d'où $p^2 = 4 \times p'^2$. Nous obtenons $q^2 = 2 \times p'^2$. Nous en déduisons maintenant que q^2 est pair et comme ci-dessus que q est pair. Nous obtenons ainsi une contradiction car p et q étant tous les deux pairs la fraction $\frac{p}{q}$ n'est pas irréductible et aurait pu être simplifiée. Donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Autre méthode. Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Alors $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ pour deux entiers $p, q \in \mathbb{N}^*$. Alors nous avons $q \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{N}$. Considérons l'ensemble suivant :

$$\mathcal{N} = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \mid n \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{N} \right\}.$$

Cet ensemble $\mathcal{N}$ est une partie de $\mathbb{N}^*$ qui est non vide car $q \in \mathcal{N}$. On peut alors prendre le plus petit élément de $\mathcal{N}$: $n_0 = \min \mathcal{N}$. En particulier $n_0 \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{N}$. Définissons maintenant n_1 de la façon suivante : $n_1 = n_0 \cdot \sqrt{2} - n_0$. Il se trouve que n_1 appartient aussi à $\mathcal{N}$ car d'une part $n_1 \in \mathbb{N}$ (car n_0 et $n_0 \cdot \sqrt{2}$ sont des entiers) et d'autre part $n_1 \cdot \sqrt{2} = n_0 \cdot 2 - n_0 \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{N}$. Montrons maintenant que n_1 est plus petit que n_0 . Comme $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$ alors $n_1 = n_0(\sqrt{2} - 1) < n_0$ et est non nul.

Bilan : nous avons trouvé $n_1 \in \mathcal{N}$ strictement plus petit que $n_0 = \min \mathcal{N}$. Ceci fournit une contradiction. Conclusion : $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

3. Soient r, r' deux rationnels avec $r < r'$. Notons $x = r + \frac{\sqrt{2}}{2}(r' - r)$. D'une part $x \in]r, r'[$ (car $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$) et d'après les deux premières questions $\sqrt{2} \left(\frac{r' - r}{2} \right) \notin \mathbb{Q}$ donc $x \notin \mathbb{Q}$. Et donc x est un nombre irrationnel compris entre r et r' .

Correction de l'exercice 2 ▲

Par l'absurde supposons que $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ soit un rationnel. Il s'écrit alors $\frac{p}{q}$ avec $p \geq 0, q > 0$ des entiers. On obtient $q \ln 3 = p \ln 2$. En prenant l'exponentielle nous obtenons : $\exp(q \ln 3) = \exp(p \ln 2)$ soit $3^q = 2^p$. Si $p \geq 1$ alors 2 divise 3^q donc 2 divise 3, ce qui est absurde. Donc $p = 0$. Ceci nous conduit à l'égalité $3^q = 1$, donc $q = 0$. La seule solution possible est $p = 0, q = 0$. Ce qui contredit $q \neq 0$. Donc $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ est irrationnel.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. Soit $p = 19971997 \dots 1997$ et $q = 100000000 \dots 0000 = 10^{4n}$. Alors $N_n = \frac{p}{q}$.
2. Remarquons que $10000 \times M = 1997,19971997 \dots$ Alors $10000 \times M - M = 1997$; donc $9999 \times M = 1997$ d'où $M = \frac{1997}{9999}$.
3. $0,111\dots = \frac{1}{9}, 0,222\dots = \frac{2}{9}$, etc. D'où $P = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \dots + \frac{9}{9} = \frac{1+2+\dots+9}{9} = \frac{45}{9} = 5$.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. Soit $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$ avec $\text{pgcd}(\alpha, \beta) = 1$. Pour $p\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = 0$, alors $\sum_{i=0}^n a_i \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^i = 0$. Après multiplication par β^n nous obtenons l'égalité suivante :

$$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} \beta + \dots + a_1 \alpha \beta^{n-1} + a_0 \beta^n = 0.$$

En factorisant tous les termes de cette somme sauf le premier par β , nous écrivons $a_n \alpha^n + \beta q = 0$. Ceci entraîne que β divise $a_n \alpha^n$, mais comme β et α^n sont premiers entre eux alors par le lemme de Gauss

β divise a_n . De même en factorisant par α tous les termes de la somme ci-dessus, sauf le dernier, nous obtenons $\alpha q' + a_0 \beta^n = 0$ et par un raisonnement similaire α divise a_0 .

- Notons $\gamma = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Alors $\gamma^2 = 5 + 2\sqrt{2}\sqrt{3}$ Et donc $(\gamma^2 - 5)^2 = 4 \times 2 \times 3$, Nous choisissons $p(x) = (x^2 - 5)^2 - 24$, qui s'écrit aussi $p(x) = x^4 - 10x^2 + 1$. Vu notre choix de p , nous avons $p(\gamma) = 0$. Si nous supposons que γ est rationnel, alors $\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$ et d'après la première question α divise le terme constant de p , c'est-à-dire 1. Donc $\alpha = \pm 1$. De même β divise le coefficient du terme de plus haut degré de p , donc β divise 1, soit $\beta = 1$. Ainsi $\gamma = \pm 1$, ce qui est évidemment absurde !

Correction de l'exercice 5 ▲

Explicitons la formule pour $\max(x, y)$. Si $x \geq y$, alors $|x - y| = x - y$ donc $\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) = \frac{1}{2}(x + y + x - y) = x$. De même si $x \leq y$, alors $|x - y| = -x + y$ donc $\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) = \frac{1}{2}(x + y - x + y) = y$.

Pour trois éléments, nous avons $\max(x, y, z) = \max(\max(x, y), z)$, donc d'après les formules pour deux éléments :

$$\begin{aligned} \max(x, y, z) &= \frac{\max(x, y) + z + |\max(x, y) - z|}{2} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) + z + \left| \frac{1}{2}(x + y + |x - y|) - z \right|}{2}. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 6 ▲

$(u_{2k})_k$ tend vers $+\infty$ et donc A ne possède pas de majorant, ainsi A n'a pas de borne supérieure (cependant certains écrivent alors $\sup A = +\infty$). D'autre part toutes les valeurs de (u_n) sont positives et $(u_{2k+1})_k$ tend vers 0, donc $\inf A = 0$.

Correction de l'exercice 7 ▲

- $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Les majorants : $[1, +\infty[$. Les minorants : $] - \infty, 0]$. La borne supérieure : 1. La borne inférieure : 0. Le plus grand élément : 1. Le plus petit élément 0.
- $]0, 1[\cap \mathbb{Q}$. Les majorants : $[1, +\infty[$. Les minorants : $] - \infty, 0]$. La borne supérieure : 1. La borne inférieure : 0. Il n'existe pas de plus grand élément ni de plus petit élément.
- $\mathbb{N}$. Pas de majorants, pas de borne supérieure, ni de plus grand élément. Les minorants : $] - \infty, 0]$. La borne inférieure : 0. Le plus petit élément : 0.
- $\left\{ (-1)^n + \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Les majorants : $\left[\frac{5}{4}, +\infty[$. Les minorants : $] - \infty, -1]$. La borne supérieure : $\frac{5}{4}$. La borne inférieure : -1 . Le plus grand élément : $\frac{5}{4}$. Pas de plus petit élément.

Correction de l'exercice 8 ▲

- Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. On sait que $\sup A$ est un majorant de A , c'est-à-dire, pour tout $a \in A$, $a \leq \sup A$. De même, pour tout $b \in B$, $b \leq \sup B$. On veut montrer que $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A + B$. Soit donc $x \in A + B$. Cela signifie que x est de la forme $a + b$ pour un $a \in A$ et un $b \in B$. Or $a \leq \sup A$, et $b \leq \sup B$, donc $x = a + b \leq \sup A + \sup B$. Comme ce raisonnement est valide pour tout $x \in A + B$ cela signifie que $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A + B$.
- On veut montrer que, quel que soit $\varepsilon > 0$, $\sup A + \sup B - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $A + B$. On prend donc un $\varepsilon > 0$ quelconque, et on veut montrer que $\sup A + \sup B - \varepsilon$ ne majore pas $A + B$. On s'interdit donc dans la suite de modifier ε . Comme $\sup A$ est le plus petit des majorants de A , $\sup A - \varepsilon/2$ n'est pas un majorant de A . Cela signifie qu'il existe un élément a de A tel que $a > \sup A - \varepsilon/2$. Attention : $\sup A - \varepsilon/2$ n'est pas forcément dans A ; $\sup A$ non plus. De la même manière, il existe $b \in B$ tel que $b > \sup B - \varepsilon/2$. Or l'élément x défini par $x = a + b$ est un élément de $A + B$, et il vérifie $x > (\sup A - \varepsilon/2) + (\sup B - \varepsilon/2) = \sup A + \sup B - \varepsilon$. Ceci implique que $\sup A + \sup B - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $A + B$.

3. $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A + B$ d'après la partie 1. Mais, d'après la partie 2., dès qu'on prend un $\varepsilon > 0$, $\sup A + \sup B - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $A + B$. Donc $\sup A + \sup B$ est bien le plus petit des majorants de $A + B$, c'est donc la borne supérieure de $A + B$. Autrement dit $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Correction de l'exercice 9 ▲

1. Vrai.
2. Faux. C'est vrai avec l'hypothèse $B \subset A$ et non $A \subset B$.
3. Vrai.
4. Faux. Il y a égalité.
5. Vrai.
6. Vrai.

Correction de l'exercice 10 ▲

1. Par définition est l'unique nombre $E(x) \in \mathbb{Z}$ tel que

$$E(x) \leq x < E(x) + 1.$$

2. Pour le réel kx , ($k = 1, \dots, n$) l'encadrement précédent s'écrit $E(kx) \leq kx < E(kx) + 1$. Ces deux inégalités s'écrivent aussi $E(kx) \leq kx$ et $E(kx) > kx - 1$, d'où l'encadrement $kx - 1 < E(kx) \leq kx$. On somme cet encadrement, k variant de 1 à n , pour obtenir :

$$\sum_{k=1}^n (kx - 1) < \sum_{k=1}^n E(kx) \leq \sum_{k=1}^n kx.$$

Ce qui donne

$$x \cdot \sum_{k=1}^n k - n < n^2 \cdot u_n \leq x \cdot \sum_{k=1}^n k.$$

3. On se rappelle que $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ donc nous obtenons l'encadrement :

$$x \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{n} < u_n \leq x \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$$

$\frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$ tend vers $\frac{1}{2}$, donc par le théorème des gendarmes (u_n) tend vers $\frac{x}{2}$.

4. Chaque u_n est un rationnel (le numérateur et le dénominateur sont des entiers). Comme la suite (u_n) tend vers $\frac{x}{2}$, alors la suite de rationnels ($2u_n$) tend vers x . Chaque réel $x \in \mathbb{R}$ peut être approché d'aussi près que l'on veut par des rationnels, donc $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 11 ▲

1. Calculons d'abord $f(0)$. Nous savons $f(1) = f(1+0) = f(1) + f(0)$, donc $f(0) = 0$. Montrons le résultat demandé par récurrence : pour $n = 1$, nous avons bien $f(1) = 1 \times f(1)$. Si $f(n) = nf(1)$ alors $f(n+1) = f(n) + f(1) = nf(1) + f(1) = (n+1)f(1)$.
2. $0 = f(0) = f(-1+1) = f(-1) + f(1)$. Donc $f(-1) = -f(1)$. Puis comme ci-dessus $f(-n) = nf(-1) = -nf(1)$.
3. Soit $q = \frac{a}{b}$. Alors $f(a) = f(\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \dots + \frac{a}{b}) = f(\frac{a}{b}) + \dots + f(\frac{a}{b})$ (b termes dans ces sommes). Donc $f(a) = bf(\frac{a}{b})$. Soit $af(1) = bf(\frac{a}{b})$. Ce qui s'écrit aussi $f(\frac{a}{b}) = \frac{a}{b}f(1)$.

4. Fixons $x \in \mathbb{R}$. Soit (α_i) une suite croissante de rationnels qui tend vers x . Soit (β_i) une suite décroissante de rationnels qui tend vers x :

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \dots \leq x \leq \dots \leq \beta_2 \leq \beta_1.$$

Alors comme $\alpha_i \leq x \leq \beta_i$ et que f est croissante nous avons $f(\alpha_i) \leq f(x) \leq f(\beta_i)$. D'après la question précédent cette inéquation devient : $\alpha_i f(1) \leq f(x) \leq \beta_i f(1)$. Comme (α_i) et (β_i) tendent vers x . Par le "théorème des gendarmes" nous obtenons en passant à la limite : $xf(1) \leq f(x) \leq xf(1)$. Soit $f(x) = xf(1)$.



Le binôme. Les symboles $\sum$ et $\prod$

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile

I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1 IT Identités combinatoires

La difficulté va en augmentant graduellement de facile à assez difficile sans être insurmontable.

1. Calculer $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$.
2. Montrer que $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots$ et trouver la valeur commune des deux sommes.
3. Calculer les sommes $\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \dots$ et $\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \dots$.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.
5. Montrer que $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$ (utiliser le polynôme $(1+x)^{2n}$).
6. Calculer les sommes $0 \cdot \binom{n}{0} + 1 \cdot \binom{n}{1} + \dots + n \cdot \binom{n}{n}$ et $\frac{\binom{n}{0}}{1} + \frac{\binom{n}{1}}{2} + \dots + \frac{\binom{n}{n}}{n+1}$ (considérer dans chaque cas un certain polynôme astucieusement choisi).
7. Montrer que $\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \dots + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1}$ où $0 \leq p \leq n$. Interprétation dans le triangle de PASCAL ?
8. (a) Soit $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$. Trouver une relation de récurrence liant I_n et I_{n+1} et en déduire I_n en fonction de n (faire une intégration par parties dans $I_n - I_{n+1}$).
- (b) Démontrer l'identité valable pour $n \geq 1$: $1 - \frac{\binom{n}{1}}{3} + \frac{\binom{n}{2}}{5} + \dots + (-1)^n \frac{\binom{n}{n}}{2n+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+1)}$.

[Correction ▼](#)

[005137]

Exercice 2 **

Quel est le coefficient de $a^4 b^2 c^3$ dans le développement de $(a - b + 2c)^9$.

[Correction ▼](#)

[005138]

Exercice 3 **I

Développer $(a + b + c + d)^2$ et $(a + b + c)^3$.

[Correction ▼](#)

[005139]

Exercice 4 ***

Soit $(n, a, b) \in \mathbb{N}^* \times]0, +\infty[\times]0, +\infty[$. Quel est le plus grand terme du développement de $(a + b)^n$?

[Correction ▼](#)

[005140]

Exercice 5 *

Résoudre dans $\mathbb{N}^*$ l'équation $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = 5n$.

[Correction ▼](#)

[005141]

Exercice 6 IT

Cet exercice est consacré aux sommes de termes consécutifs d'une suite arithmétique ou d'une suite géométrique.

1. (*) Calculer $\sum_{i=3}^n i$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$, $\sum_{i=1}^n (2i-1)$, $n \in \mathbb{N}^*$, et $\sum_{k=4}^{n+1} (3k+7)$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$.

2. (*) Calculer le nombre $1,1111\dots = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1, \underbrace{11\dots 1}_n$ et le nombre $0,9999\dots = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0, \underbrace{99\dots 9}_n$.
3. (*) Calculer $\underbrace{1 - 1 + 1 - \dots + (-1)^{n-1}}_n, n \in \mathbb{N}^*$.
4. (*) Calculer $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$.
5. (**) Calculer $\sum_{k=0}^n \cos \frac{k\pi}{2}, n \in \mathbb{N}$.
6. (**) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$.
7. (***) Pour $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.
8. (**) On pose $u_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n - 3$.
 - (a) Calculer la suite $(u_n - 3)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - (b) Calculer $\sum_{k=0}^n u_k$.

[Correction ▼](#)

[005142]

Exercice 7 Sommes télescopiques

Calculer les sommes suivantes :

1. (**) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ et $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$
2. (***) Calculer $S_p = \sum_{k=1}^n k^p$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \{1, 2, 3, 4\}$ (dans chaque cas, chercher un polynôme P_p de degré $p+1$ tel que $P_p(x+1) - P_p(x) = x^p$).
3. (**) Calculer $\sum_{k=1}^n \arctan \frac{1}{k^2+k+1}$ (aller relire certaines formules établies dans une planche précédente).
4. (**) Calculer $\sum_{k=1}^n \arctan \frac{2}{k^2}$.

[Correction ▼](#)

[005143]

Exercice 8 I

Calculer les sommes suivantes :

1. (**) $\sum_{1 \leq i < j \leq n} 1$.
2. (**) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} j$ et $\sum_{1 \leq i < j \leq n} j$.
3. (*) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} ij$.
4. (***) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{n^5} \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n (5h^4 - 18h^2k^2 + 5k^4)$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ (utiliser les résultats de l'exercice 7, 2)).

[Correction ▼](#)

[005144]

Exercice 9 I

1. (*) Calculer $\prod_{k=1}^n (1 + \frac{1}{k}), n \in \mathbb{N}^*$.
2. (***) Calculer $\prod_{k=1}^n \cos \frac{a}{2^k}, a \in]0, \pi[, n \in \mathbb{N}^*$.

[Correction ▼](#)

[005145]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. D'après la formule du binôme de NEWTON,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n.$$

2. Soit n un entier naturel non nul. Posons $S_1 = \sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2k}$ et $S_2 = \sum_{k=0}^{E((n-1)/2)} \binom{n}{2k+1}$. Alors

$$S_1 - S_2 = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = (1-1)^n = 0 \text{ (car } n \geq 1),$$

et donc $S_1 = S_2$. Puis $S_1 + S_2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$, et donc $S_1 = S_2 = 2^{n-1}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots = 2^{n-1}.$$

3. En posant $j = e^{2i\pi/3}$, on a :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n, \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} j^k = (1+j)^n \text{ et } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} j^{2k} = (1+j^2)^n.$$

En additionnant ces trois égalités, on obtient

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1 + j^k + j^{2k}) = 2^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n.$$

Maintenant,

- si $k \in 3\mathbb{N}$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $k = 3p$ et $1 + j^k + j^{2k} = 1 + (j^3)^p + (j^3)^{2p} = 3$ car $j^3 = 1$.
- si $k \in 3\mathbb{N} + 1$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $k = 3p + 1$ et $1 + j^k + j^{2k} = 1 + j(j^3)^p + j^2(j^3)^{2p} = 1 + j + j^2 = 0$
- si $k \in 3\mathbb{N} + 2$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $k = 3p + 2$ et $1 + j^k + j^{2k} = 1 + j^2(j^3)^p + j^4(j^3)^{2p} = 1 + j^2 + j = 0$.

Finalement, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1 + j^k + j^{2k}) = 3 \sum_{k=0}^{E(n/3)} \binom{n}{3k}$. Par suite,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{E(n/3)} \binom{n}{3k} &= \frac{1}{3} (2^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n) = \frac{1}{3} (2^n + 2 \operatorname{Re}((1+j)^n)) \\ &= \frac{1}{3} (2^n + 2 \operatorname{Re}((-j^2)^n)) = \frac{1}{3} (2^n + 2 \cos \frac{n\pi}{3}) \end{aligned}$$

4. Pour $1 \leq k \leq n$, on a

$$k \binom{n}{k} = k \frac{n!}{k!(n-k)!} = n \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

5. $\binom{2n}{n}$ est le coefficient de x^n dans le développement de $(1+x)^{2n}$. Mais d'autre part ,

$$(1+x)^{2n} = (1+x)^n (1+x)^n = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \right) \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \right).$$

Dans le développement de cette dernière expression, le coefficient de x^n vaut $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$ ou encore $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$. Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont mêmes coefficients et donc

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.$$

6. **1ère solution.** Pour x réel, posons $P(x) = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^{k-1}$.

Pour x réel,

$$P(x) = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \right)' = ((1+x)^n)' = n(1+x)^{n-1}.$$

En particulier, pour $x = 1$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}.$$

2ème solution. D'après 4),

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}.$$

1ère solution. Pour x réel, posons $P(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1}$. On a

$$P'(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n,$$

et donc, pour x réel,

$$P(x) = P(0) + \int_0^x P'(t) dt = \int_0^1 (1+t)^n dt = \frac{1}{n+1} ((1+x)^{n+1} - 1).$$

En particulier, pour $x = 1$, on obtient

$$\sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{k+1} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}.$$

2ème solution. D'après 4), $(n+1) \binom{n}{k} = (k+1) \binom{n+1}{k+1}$ et donc

$$\sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{k+1} = \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n+1}{k+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} = \frac{1}{n+1} ((1+1)^{n+1} - 1) = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}.$$

7. Pour $1 \leq k \leq n-p$, $\binom{p+k}{p} = \binom{p+k+1}{p+1} - \binom{p+k}{p+1}$ (ce qui reste vrai pour $k = p$ en tenant compte de $\binom{p}{p+1} = 0$). Par suite,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-p} \binom{p+k}{p} &= 1 + \sum_{k=1}^{n-p} \left(\binom{p+k+1}{p+1} - \binom{p+k}{p+1} \right) = 1 + \sum_{k=2}^{n-p+1} \binom{p+k}{p+1} - \sum_{k=1}^{n-p} \binom{p+k}{p+1} \\ &= 1 + \binom{n+1}{p+1} - 1 = \binom{n+1}{p+1}. \end{aligned}$$

Interprétation dans le triangle de PASCAL. Quand on descend dans le triangle de PASCAL, le long de la colonne p , du coefficient $\binom{p}{p}$ (ligne p) au coefficient $\binom{p}{n}$ (ligne n), et que l'on additionne ces coefficients, on trouve $\binom{n+1}{p+1}$ qui se trouve une ligne plus bas et une colonne plus loin.

8. (a) Pour n naturel donné, posons $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$. Une intégration par parties fournit :

$$\begin{aligned} I_n - I_{n+1} &= \int_0^1 ((1-x^2)^n - (1-x^2)^{n+1}) dx = \int_0^1 x^2 (1-x^2)^n dx = \int_0^1 x \cdot x (1-x^2)^n dx \\ &= \left[-x \frac{(1-x^2)^{n+1}}{2(n+1)} \right]_0^1 + \frac{1}{2(n+1)} \int_0^1 (1-x^2)^{n+1} dx = \frac{1}{2(n+1)} I_{n+1} \end{aligned}$$

et donc $2(n+1)(I_n - I_{n+1}) = I_{n+1}$ ou encore :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (2n+3)I_{n+1} = 2(n+1)I_n.$$

On a déjà $I_0 = 1$. Puis, pour $n \geq 1$,

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1} = \frac{2n}{2n+1} \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3} I_0 = \frac{(2n)(2n-2)\dots 2}{(2n+1)(2n-1)\dots 3.1}.$$

(b) Pour n naturel non nul donné :

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\binom{n}{1}}{3} + \frac{\binom{n}{2}}{5} + \dots + (-1)^n \frac{\binom{n}{n}}{2n+1} &= \int_0^1 (1 - \binom{n}{1}x^2 + \binom{n}{2}x^4 + \dots + (-1)^n \binom{n}{n}x^{2n}) dx \\ &= \int_0^1 (1-x^2)^n dx = I_n = \frac{(2n)(2n-2)\dots 2}{(2n+1)(2n-1)\dots 3.1}. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2 ▲

La formule du binôme de NEWTON fournit

$$(a-b+2c)^9 = \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} (a-b)^k (2c)^{9-k} = (a-b)^9 + \dots + \binom{9}{6} (a-b)^6 (2c)^3 + \dots + (2c)^9.$$

Ensuite,

$$(a-b)^6 = \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} a^k (-b)^{6-k} = a^6 - \dots + \binom{6}{4} a^4 b^2 - \dots + b^6.$$

Le coefficient cherché est donc

$$\binom{9}{6} \binom{6}{4} 2^3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 2^3 = 3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 8 = 10080.$$

Correction de l'exercice 3 ▲

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$

et

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2) + 6abc.$$

Correction de l'exercice 4 ▲

Soit n un entier naturel non nul. Le terme général du développement de $(a+b)^n$ est $u_k = \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, $0 \leq k \leq n$. Pour $0 \leq k \leq n-1$, on a :

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{\binom{n}{k+1} a^{k+1} b^{n-k-1}}{\binom{n}{k} a^k b^{n-k}} = \frac{n-k}{k+1} \frac{a}{b}.$$

Par suite,

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} > 1 \Leftrightarrow \frac{n-k}{k+1} \frac{a}{b} > 1 \Leftrightarrow (n-k)a > (k+1)b \Leftrightarrow k < \frac{na-b}{a+b}.$$

1er cas. Si $\frac{na-b}{a+b} > n-1$ (ce qui équivaut à $n < \frac{a}{b}$), alors la suite $(u_k)_{0 \leq k \leq n}$ est strictement croissante et le plus grand terme est le dernier : a^n .

2ème cas. Si $\frac{na-b}{a+b} \leq 0$ (ce qui équivaut à $n \leq \frac{b}{a}$), alors la suite $(u_k)_{0 \leq k \leq n}$ est strictement décroissante et le plus grand terme est le premier : b^n .

3ème cas. Si $0 < \frac{na-b}{a+b} \leq n-1$. Dans ce cas, la suite est strictement croissante puis éventuellement momentanément constante, suivant que $\frac{na-b}{a+b}$ soit un entier ou non, puis strictement décroissante (on dit que la suite u est unimodale).

Si $\frac{na-b}{a+b} \notin \mathbb{N}$, on pose $k = E(\frac{na-b}{a+b}) + 1$, la suite u croît strictement jusqu'à ce rang puis redécroit strictement. Le plus grand des termes est celui d'indice k , atteint une et une seule fois.

Si $\frac{na-b}{a+b} \in \mathbb{N}$, le plus grand des termes est atteint deux fois à l'indice k et à l'indice $k+1$.

Correction de l'exercice 5 ▲

Pour $n \geq 3$,

$$\begin{aligned} \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{2} &= 5n \Leftrightarrow n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 5n \\ &\Leftrightarrow n(-24 + 3(n-1) + (n-1)(n-2)) = 0 \Leftrightarrow n^2 - 25 = 0 \\ &\Leftrightarrow n = 5. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 6 ▲

1. Soit $n \geq 3$.

$$\sum_{i=3}^n i = \frac{(3+n)(n-2)}{2} = \frac{(n-2)(n+3)}{2}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{i=1}^n (2i-1) = \frac{(1+(2n-1))n}{2} = n^2$$

et

$$\sum_{k=4}^{n+1} (3k+7) = \frac{(19+3n+10)(n-2)}{2} = \frac{1}{2}(3n+29)(n-2) = \frac{1}{2}(3n^2+23n-58).$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $u_n = 1, \underbrace{11\dots 1}_n$. On a

$$u_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{10^k} = 1 + \frac{1}{10} \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}} = 1 + \frac{1}{9} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = \frac{10}{9} - \frac{1}{9 \cdot 10^n}.$$

Quand n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{9 \cdot 10^n}$ tend vers 0, et donc, u_n tend vers $\frac{10}{9}$.

$$\boxed{1,1111\dots = \frac{10}{9}.}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $u_n = 0, \underbrace{99\dots 9}_n$. On a

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{9}{10^k} = \frac{9}{10} \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}} = 1 - \frac{1}{10^n}.$$

Quand n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{10^n}$ tend vers 0, et donc, u_n tend vers 1.

$$\boxed{0,9999\dots = 1.}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $u_n = \underbrace{1 - 1 + 1 - \dots + (-1)^{n-1}}_n$. On a

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k = \frac{1 - (-1)^n}{1 - (-1)} = \frac{1}{2}(1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \cos \frac{k\pi}{2} &= \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n e^{ik\pi/2} \right) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n i^k \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{1 - e^{i(n+1)\pi/2}}{1 - e^{i\pi/2}} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i(n+1)\pi/4} - 2i \sin \frac{(n+1)\pi}{4}}{e^{i\pi/4} - 2i \sin \frac{\pi}{4}} \right) = \sqrt{2} \sin \frac{(n+1)\pi}{4} \cos \frac{n\pi}{4} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{(2n+1)\pi}{4} + \frac{1}{2} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in 4\mathbb{N} \cup (4\mathbb{N} + 1) \\ 0 & \text{si } n \in (4\mathbb{N} + 2) \cup (4\mathbb{N} + 3) \end{cases} \end{aligned}$$

En fait, on peut constater beaucoup plus simplement que $\cos 0 + \cos \frac{\pi}{2} + \cos \pi + \cos \frac{3\pi}{2} = 1 + 0 - 1 + 0 = 0$, on a immédiatement $S_{4n} = 1$, $S_{4n+1} = S_{4n} + 0 = 1$, $S_{4n+2} = S_{4n+1} - 1 = 0$ et $S_{4n+3} = S_{4n+2} + 0 = 0$.

6. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Posons $C_n = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$ et $S_n = \sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$. Alors, d'après la formule de MOIVRE,

$$C_n + iS_n = \sum_{k=0}^n (\cos(k\theta) + i \sin(k\theta)) = \sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^n (e^{i\theta})^k.$$

- **1er cas.** Si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, alors $e^{i\theta} \neq 1$. Par suite,

$$C_n + iS_n = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = e^{i\theta(n+1)/2} \frac{-2i \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{-2i \sin \frac{\theta}{2}} = e^{in\theta/2} \frac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

Par suite,

$$C_n = \operatorname{Re}(C_n + iS_n) = \frac{\cos \frac{n\theta}{2} \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \text{ et } S_n = \operatorname{Im}(C_n + iS_n) = \frac{\sin \frac{n\theta}{2} \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

- **2ème cas.** Si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, on a immédiatement $C_n = n + 1$ et $S_n = 0$.

Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \begin{cases} \frac{\cos \frac{n\theta}{2} \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} & \text{si } \theta \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ n + 1 & \text{si } \theta \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases} \text{ et } \sum_{k=0}^n \sin(k\theta) = \begin{cases} \frac{\sin \frac{n\theta}{2} \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} & \text{si } \theta \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } \theta \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}.$$

7. Soient $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $-x \neq 1$, on a

$$S'_n(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k = \frac{1 - (-x)^n}{1 - (-x)} = \frac{1}{1+x} (1 - (-x)^n).$$

Par suite,

$$S_n(x) = S_n(0) + \int_0^x S'_n(t) dt = \int_0^x \frac{1 - (-t)^n}{1+t} dt = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t} dt = \ln(1+x) - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t} dt.$$

Mais alors,

$$|S_n(x) - \ln(1+x)| = \left| \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t} dt \right| \leq \int_0^x \left| \frac{(-t)^n}{1+t} \right| dt = \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt \leq \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Comme $\frac{1}{n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on en déduit que

$$\forall x \in [0, 1], \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} x^{k-1} = \ln(1+x).$$

En particulier,

$$\ln 2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right)$$

8. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - 3 = 2u_n - 6 = 2(u_n - 3)$. La suite $(u_n - 3)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique, de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 - 3 = -2$. On en déduit que, pour n entier naturel donné, $u_n - 3 = -2 \cdot 2^n$. Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3 - 2^{n+1}.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n 3 - 2 \sum_{k=0}^n 2^k = 3(n+1) - 2 \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = -2^{n+2} + 3n + 5.$$

Correction de l'exercice 7 ▲

1. Pour tout naturel non nul k , on a $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, et donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Pour tout naturel non nul k , on a $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \frac{(k+2)-k}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right)$, et donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- **Calcul de S_1 .** Posons $P_1 = aX^2 + bX + c$. On a

$$P_1(X+1) - P_1(X) = a((X+1)^2 - X^2) + b((X+1) - X) = 2aX + (a+b).$$

Par suite,

$$\begin{aligned} P_1(X+1) - P_1(X) &= X \Leftrightarrow 2a = 1 \text{ et } a+b = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \text{ et } b = -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow P_1 = \frac{X^2}{2} - \frac{X}{2} = \frac{X(X-1)}{2}. \end{aligned}$$

Mais alors,

$$\sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^n (P_1(k+1) - P_1(k)) = P_1(n+1) - P_1(1) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- **Calcul de S_2 .** Posons $P_2 = aX^3 + bX^2 + cX + d$. On a

$$P_2(X+1) - P_2(X) = a((X+1)^3 - X^3) + b((X+1)^2 - X^2) + c((X+1) - X) = 3aX^2 + (3a+2b)X + a+b+c.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} P_2(X+1) - P_2(X) = X^2 &\Leftrightarrow 3a = 1 \text{ et } 3a+2b = 0 \text{ et } a+b+c = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3} \text{ et } b = -\frac{1}{2} \text{ et } c = \frac{1}{6} \\ &\Leftrightarrow P_2 = \frac{X^3}{3} - \frac{X^2}{2} + \frac{X}{6} = \frac{X(X-1)(2X-1)}{6}. \end{aligned}$$

Mais alors,

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \sum_{k=1}^n (P_2(k+1) - P_2(k)) = P_2(n+1) - P_2(1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- **Calcul de S_3 .** Posons $P_3 = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$. On a

$$\begin{aligned} P_3(X+1) - P_3(X) &= a((X+1)^4 - X^4) + b((X+1)^3 - X^3) + c((X+1)^2 - X^2) + d((X+1) - X) \\ &= 4aX^3 + (6a+3b)X^2 + (4a+3b+2c)X + a+b+c+d. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} P_3(X+1) - P_3(X) = X^3 &\Leftrightarrow 4a = 1, 6a+3b = 0, 4a+3b+2c = 0 \text{ et } a+b+c+d = 0 \\ &\Leftrightarrow a = \frac{1}{4}, b = -\frac{1}{2}, c = \frac{1}{4} \text{ et } d = 0 \\ &\Leftrightarrow P_3 = \frac{X^4}{4} - \frac{X^3}{2} + \frac{X^2}{4} = \frac{X^2(X-1)^2}{4}. \end{aligned}$$

Mais alors,

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \sum_{k=1}^n (P_3(k+1) - P_3(k)) = P_3(n+1) - P_3(1) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

- **Calcul de S_4 .** Posons $P_4 = aX^5 + bX^4 + cX^3 + dX^2 + eX + f$. On a

$$\begin{aligned} P_4(X+1) - P_4(X) &= a((X+1)^5 - X^5) + b((X+1)^4 - X^4) + c((X+1)^3 - X^3) + d((X+1)^2 - X^2) \\ &\quad + e((X+1) - X) \\ &= 5aX^4 + (10a+4b)X^3 + (10a+6b+3c)X^2 + (5a+4b+3c+2d)X + a+b+c+d+e. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} P_4(X+1) - P_4(X) = X^4 &\Leftrightarrow 5a = 1, 10a+4b = 0, 10a+6b+3c = 0, 5a+4b+3c+2d = 0 \\ &\quad \text{et } a+b+c+d+e = 0 \\ &\Leftrightarrow a = \frac{1}{5}, b = -\frac{1}{2}, c = \frac{1}{3}, d = 0 \text{ et } e = -\frac{1}{30} \\ &\Leftrightarrow P_4 = \frac{X^5}{5} - \frac{X^4}{2} + \frac{X^3}{3} - \frac{X}{30} = \frac{X(X-1)(6X^3-9X^2+X+1)}{30}. \end{aligned}$$

Mais alors,

$$\sum_{k=1}^n k^4 = \sum_{k=1}^n (P_4(k+1) - P_4(k)) = P_4(n+1) - P_4(1) = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (\sum_{k=1}^n k)^2$$

$$\text{et } \sum_{k=1}^n k^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On rappelle que

$$\forall (a, b) \in]0, +\infty[^2, \quad \arctan a - \arctan b = \arctan \frac{a-b}{1+ab}.$$

Soit alors k un entier naturel non nul. On a

$$\arctan \frac{1}{k^2 + k + 1} = \arctan \frac{(k+1) - k}{1 + k(k+1)} = \arctan(k+1) - \arctan k.$$

Par suite,

$$\sum_{k=1}^n \arctan \frac{1}{k^2 + k + 1} = \sum_{k=1}^n (\arctan(k+1) - \arctan k) = \arctan(n+1) - \arctan 1 = \arctan(n+1) - \frac{\pi}{4}.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour k entier naturel non nul donné, on a

$$\arctan \frac{2}{k^2} = \arctan \frac{(k+1) - (k-1)}{1 + (k-1)(k+1)} = \arctan(k+1) - \arctan(k-1).$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \arctan \frac{2}{k^2} &= \sum_{k=1}^n (\arctan(k+1) - \arctan(k-1)) = \sum_{k=1}^n \arctan(k+1) - \sum_{k=1}^n \arctan(k-1) \\ &= \sum_{k=2}^{n+1} \arctan k - \sum_{k=0}^{n-1} \arctan k = \arctan(n+1) + \arctan n - \arctan 1 - \arctan 0 \\ &= \arctan(n+1) + \arctan n - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 8 ▲

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Parmi les n^2 couples (i, j) tels que $1 \leq i, j \leq n$, il y en a n tels que $i = j$ et donc $n^2 - n = n(n-1)$ tels que $1 \leq i, j \leq n$ et $i \neq j$. Comme il y a autant de couples (i, j) tels que $i > j$ que de couples (i, j) tels que $i < j$, il y a $\frac{n(n-1)}{2}$ couples (i, j) tels que $1 \leq i < j \leq n$. Finalement,

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n j \right) = \sum_{j=1}^n nj = n \sum_{j=1}^n j = n \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq i < j \leq n} j &= \sum_{j=2}^n \left(\sum_{i=1}^{j-1} j \right) = \sum_{j=2}^n (j-1)j = \sum_{j=2}^n j^2 - \sum_{j=2}^n j \\
&= \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1 \right) - \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1 \right) = \frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{2n+1}{3} - 1 \right) \\
&= \frac{n(n+1)^2}{6}.
\end{aligned}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} ij = \left(\sum_{1 \leq i \leq n} i \right) \left(\sum_{1 \leq j \leq n} j \right) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{1 \leq h, k \leq n} h^2 k^2 = \sum_{h=1}^n (h^2 \sum_{k=1}^n k^2) = \left(\sum_{k=1}^n k^2 \right) \left(\sum_{h=1}^n h^2 \right) = \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)^2.$$

Comme d'autre part, $\sum_{h=1}^n h^4 = \sum_{k=1}^n k^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$, on a

$$\sum_{1 \leq h, k \leq n} h^4 = \sum_{h=1}^n \left(\sum_{k=1}^n h^4 \right) = \sum_{h=1}^n n h^4 = n \sum_{h=1}^n h^4 = \frac{n^2(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30},$$

et bien sûr $\sum_{1 \leq h, k \leq n} k^4 = \frac{n^2(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$. Par suite,

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{1}{n^5} \left(2.5 \frac{n^2(n+1)(6n^3+9n^2+n+14)}{30} - 18 \frac{n^2(n+1)^2(2n+1)^2}{36} \right) \\
&= \frac{1}{n^5} (2n^6 - 2n^6 + n^5 \left(\frac{15}{3} - \frac{12}{2} \right) + \text{termes de degré au plus 4}) \\
&= -1 + \text{termes tendant vers 0}
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1.$$

Correction de l'exercice 9 ▲

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k} \right) = \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} = \frac{\prod_{k=1}^n (k+1)}{\prod_{k=1}^n k} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1$$

2. Soit $a \in]0, \pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, pour tout naturel non nul k , on a $0 < \frac{a}{2^k} \leq \frac{a}{2} < \frac{\pi}{2}$ et donc $\sin \frac{a}{2^k} \neq 0$. On sait alors que pour tout réel x , $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$. Par suite, pour tout naturel k ,

$$\sin\left(2 \cdot \frac{a}{2^k}\right) = 2 \sin \frac{a}{2^k} \cos \frac{a}{2^k} \quad \text{et donc} \quad \cos \frac{a}{2^k} = \frac{\sin(a/2^{k-1})}{2 \sin(a/2^k)}.$$

Mais alors,

$$\prod_{k=1}^n \cos \frac{a}{2^k} = \prod_{k=1}^n \frac{\sin(a/2^{k-1})}{2 \sin(a/2^k)} = \frac{1}{2^n} \frac{\prod_{k=1}^n \sin(a/2^{k-1})}{\prod_{k=1}^n \sin(a/2^k)} = \frac{1}{2^n} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} \sin(a/2^k)}{\prod_{k=1}^n \sin(a/2^k)} = \frac{\sin a}{2^n \sin(a/2^n)}.$$

Valeurs absolues. Partie entière. Inégalités

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile

I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1 **I Moyennes arithmétique, géométrique et harmonique

Soient x et y deux réels tels que $0 < x \leq y$. On pose $m = \frac{x+y}{2}$ (moyenne arithmétique), $g = \sqrt{xy}$ (moyenne géométrique) et $\frac{1}{h} = \frac{1}{2}(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})$ (moyenne harmonique). Montrer que $x \leq h \leq g \leq m \leq y$.

[Correction ▼](#)

[005146]

Exercice 2 *I Inégalité de BERNOULLI

Montrer que, pour a réel positif et n entier naturel donnés, $(1+a)^n \geq 1+na$.

[Correction ▼](#)

[005147]

Exercice 3 ***

On veut montrer de manière élémentaire (c'est-à-dire en se passant du logarithme népérien et en ne travaillant qu'avec les deux opérations $+$ et $\times$) que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(1 + \frac{1}{n})^n < 3$.

Pour cela développer, puis majorer $u_k = \frac{C_n^k}{n^k}$ en commençant par majorer $v_k = \frac{u_{k+1}}{u_k}$ par $\frac{1}{2}$.

[Correction ▼](#)

[005148]

Exercice 4 ***I

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, a_2, \dots, a_n, n$ réels strictement positifs.

Montrer que $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}) \geq n^2$ (développer et penser à $f(x) = x + \frac{1}{x}$).

[Correction ▼](#)

[005149]

Exercice 5 ***I Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n, 2n$ réels. Montrer que

$$|\sum_{k=1}^n a_k b_k| \leq \sum_{k=1}^n |a_k| \cdot |b_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}.$$

(Indication. Considérer le polynôme $f(x) = \sum_{k=1}^n (a_k + b_k x)^2$, développer puis ordonner suivant les puissances décroissantes puis utiliser, dans le cas général, les connaissances sur le second degré). Retrouver alors le résultat de l'exercice 4.

[Correction ▼](#)

[005150]

Exercice 6 ***

Soient a, b et c trois réels positifs. Montrer que l'un au moins des trois réels $a(1-b)$, $b(1-c)$, $c(1-a)$ est inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$.

[Correction ▼](#)

[005151]

Exercice 7 **I

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, E(x+1) = E(x) + 1$.

2. Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, E(x) + E(y) \leq E(x + y)$.
3. Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, E(x) + E(y) + E(x + y) \leq E(2x) + E(2y)$.

[Correction ▼](#)

[005152]

Exercice 8 **I

Tout entier naturel non nul n s'écrit de manière unique sous la forme

$$n = a_0 + 10a_1 + \dots + 10^p a_p,$$

où p est un entier naturel et les a_i sont des entiers éléments de $\{0, \dots, 9\}$, a_p étant non nul. Déterminer p en fonction de n .

[Correction ▼](#)

[005153]

Exercice 9 **I

Soient x un réel. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(x) + E(2x) + \dots + E(nx)}{n^2}$.

[Correction ▼](#)

[005154]

Exercice 10 **I

Soient n un entier naturel et x un réel positif.

1. Combien y a-t-il d'entiers naturels entre 1 et n ? entre 1 et x ?
2. Combien y a-t-il d'entiers naturels entre 0 et n ? entre 0 et x ?
3. Combien y a-t-il d'entiers naturels pairs entre 0 et x ? Combien y a-t-il d'entiers naturels impairs entre 0 et x ?
4. Combien y a-t-il de multiples de 3 entre 0 et x ?
5. Combien l'équation $x + 2y = n$, n entier naturel donné et x et y entiers naturels inconnus, a-t-elle de couples solutions ?
6. De combien de façons peut-on payer 10 euros avec des pièces de 10 et 20 centimes d'euros ?
7. (***) Combien l'équation $2x + 3y = n$, n entier naturel donné et x et y entiers naturels inconnus, a-t-elle de couples solutions ?

[Correction ▼](#)

[005155]

Exercice 11 ****

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n-1} E(x + \frac{k}{n}) = E(nx)$ (poser la division euclidienne de $E(nx)$ par n).

[Correction ▼](#)

[005156]

Exercice 12 ****

Montrer que pour $n \in \mathbb{N}, E(\frac{1}{3}(n + 2 - E(\frac{n}{25}))) = E(\frac{8n+24}{25})$.

[Correction ▼](#)

[005157]

Exercice 13 ****I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer qu'il existe $(a_n, b_n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $(2 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$, puis que $3b_n^2 = a_n^2 - 1$.
2. Montrer que $E((2 + \sqrt{3})^n)$ est un entier impair (penser à $(2 - \sqrt{3})^n$).

[Correction ▼](#)

[005158]

Exercice 14 **

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, E(\frac{E(nx)}{n}) = E(x)$.

Exercice 15 ***

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in [-1, 1]^n$ tels que $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$.

Montrer que $|x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n| \leq E\left(\frac{n^2}{4}\right)$.

Correction ▼

[005160]

Exercice 16 ***I

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n \geq 3 \Rightarrow \sqrt{n} < \sqrt[n]{n!})$.

(commencer par vérifier que pour $k = 2, 3, \dots, n$, on a : $(n - k + 1)k > n$).

Correction ▼

[005161]

Exercice 17 ***

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n |\cos k| \geq \frac{n}{4}$ (remarquer que si $x \in [0; 1]$, $x^2 \leq x$).

Correction ▼

[005162]

Exercice 18 **I

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin(nx)| \leq n|\sin x|$.

Correction ▼

[005163]

Correction de l'exercice 1 ▲

Soient x et y deux réels tels que $0 < x \leq y$.

1. On a déjà $x = \frac{x+x}{2} \leq \frac{x+y}{2} = m \leq \frac{y+y}{2} = y$ et donc $x \leq m \leq y$.
(on peut aussi écrire : $m - x = \frac{x+y}{2} - x = \frac{y-x}{2} \geq 0$).
2. On a ensuite $x = \sqrt{x \cdot x} \leq \sqrt{xy} = g \leq \sqrt{y \cdot y} = y$ et donc $x \leq g \leq y$.
3. $m - g = \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{1}{2}((\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{xy} + (\sqrt{y})^2) = \frac{1}{2}(\sqrt{y} - \sqrt{x})^2 \geq 0$ et donc, $x \leq g \leq m \leq y$.
4. D'après 1), la moyenne arithmétique de $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$ est comprise entre $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$, ce qui fournit $\frac{1}{y} \leq \frac{1}{h} \leq \frac{1}{x}$, ou encore $x \leq h \leq y$.
5. D'après 3), la moyenne géométrique des deux réels $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$ est inférieure ou égale à leur moyenne arithmétique. Ceci fournit $\sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}} \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})$ ou encore $\frac{1}{g} \leq \frac{1}{h}$ et finalement

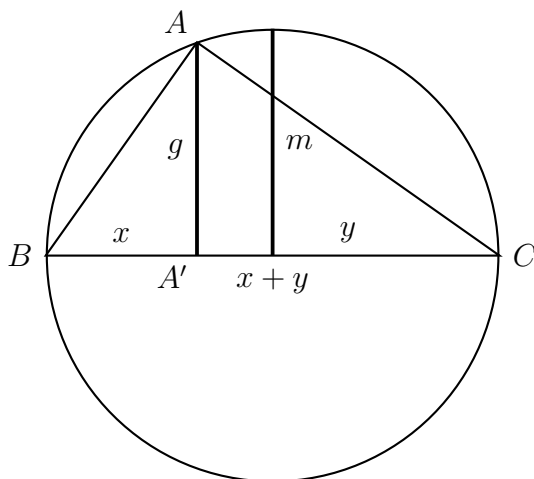
$$x \leq h \leq g \leq m \leq y \text{ où } \frac{1}{h} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right), g = \sqrt{xy} \text{ et } m = \frac{x+y}{2}.$$

Remarque 1. On a $h = \frac{2xy}{x+y}$, mais cette expression ne permet pas de comprendre que $\frac{1}{h}$ est la moyenne arithmétique de $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$.

Remarque 2. On peut visualiser l'inégalité entre moyenne arithmétique et géométrique.

Si (ABC) est un triangle rectangle en A et A' est le pied de la hauteur issue de A , on sait que $AA'^2 = A'B \cdot A'C$. On se sert de cette remarque pour construire g et la comparer graphiquement à m .

On accole deux segments de longueurs respectives x et y . On construit alors un triangle rectangle d'hypothénuse ce segment (de longueur $x+y$) noté $[BC]$, tel que le troisième sommet A ait une projection orthogonale A' sur (BC) vérifiant $BA' = x$ et $CA' = y$.



La moyenne arithmétique de x et y est $m = \frac{x+y}{2}$, le rayon du cercle, et la moyenne géométrique de x et y est $g = \sqrt{xy} = \sqrt{A'B \cdot A'C} = AA'$, la hauteur issue de A du triangle (ABC) .

Correction de l'exercice 2 ▲

$$(1+a)^n = (1+a) \dots (1+a) = 1 + na + \dots \geq 1 + na.$$

Correction de l'exercice 3 ▲

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(1 + \frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{n^k}$. Pour $k \in \{0, \dots, n\}$, posons $u_k = \frac{C_n^k}{n^k}$ puis $v_k = \frac{u_{k+1}}{u_k}$. Pour $k \in \{1, \dots, n-1\}$, on a alors

$$\begin{aligned}
v_k &= \frac{C_n^{k+1} \cdot n^k}{C_n^k \cdot n^{k+1}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n!k!(n-k)!}{n!(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n-k}{n(k+1)} = \frac{(n+1)-(k+1)}{n(k+1)} = -\frac{1}{n} + \frac{n+1}{n(k+1)} \\
&\leq -\frac{1}{n} + \frac{n+1}{2n} \quad (\text{car } k \geq 1) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} < \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour $k \in \{1, \dots, n-1\}$, $u_{k+1} \leq \frac{1}{2}u_k$ et donc, immédiatement par récurrence,

$$u_k \leq \frac{1}{2^{k-1}}u_1 = \frac{1}{2^{k-1}} \frac{n}{n} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

En tenant compte de $u_0 = 1$, on a alors pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n u_k \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Correction de l'exercice 4 ▲

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, a_2, \dots, a_n, n$ réels strictement positifs.

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right) \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j}\right) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{a_i}{a_j} = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_i} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i}\right) = n + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i}\right)$$

Pour $x > 0$, posons alors $f(x) = x + \frac{1}{x}$. f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$. f est donc strictement décroissante sur $]0, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$. f admet ainsi un minimum en 1. Par suite,

$$\forall x > 0, f(x) \geq f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2.$$

(**Remarque.** L'inégalité entre moyenne géométrique et arithmétique permet aussi d'obtenir le résultat :

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 1.)$$

On en déduit alors que

$$\sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} \geq n + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2 = n + 2 \frac{n^2 - n}{2} = n^2.$$

Correction de l'exercice 5 ▲

Pour x réel, posons $f(x) = \sum_{k=1}^n (a_k + b_k x)^2$. On remarque que pour tout réel x , $f(x) \geq 0$. En développant les n carrés, on obtient,

$$f(x) = \sum_{k=1}^n (b_k^2 x^2 + 2a_k b_k x + a_k^2) = \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right) x^2 + 2\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right) x + \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right).$$

1er cas. Si $\sum_{k=1}^n b_k^2 \neq 0$, f est un trinôme du second degré de signe constant sur $\mathbb{R}$. Son discriminant réduit est alors négatif ou nul. Ceci fournit

$$0 \geq \Delta' = \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right),$$

et donc

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}.$$

2ème cas. Si $\sum_{k=1}^n b_k^2 = 0$, alors tous les b_k sont nuls et l'inégalité est immédiate.

Finalement, dans tous les cas,

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}.$$

Cette inégalité est encore valable en remplaçant les a_k et les b_k par leurs valeurs absolues, ce qui fournit les inégalités intermédiaires.

Retrouvons alors l'inégalité de l'exercice 4. Puisque les a_k sont strictement positifs, on peut écrire :

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right) = \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{a_i^2} \right) \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{1}{a_i^2}} \right) \geq \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{a_i} \sqrt{\frac{1}{a_i}} \right)^2 = n^2.$$

Correction de l'exercice 6 ▲

Si l'un des réels a, b ou c est strictement plus grand que 1, alors l'un au moins des trois réels $a(1-b)$, $b(1-c)$, $c(1-a)$ est négatif (puisque a, b et c sont positifs) et donc inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$.

Sinon, les trois réels a, b et c sont dans $[0, 1]$. Le produit des trois réels $a(1-b)$, $b(1-c)$ et $c(1-a)$ vaut

$$a(1-a)b(1-b)c(1-c).$$

Mais, pour $x \in [0, 1]$, $x(1-x)$ est positif et d'autre part, $x(1-x) = -(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$. Par suite,

$$a(1-a)b(1-b)c(1-c) \leq \frac{1}{4^3}.$$

Il est alors impossible que les trois réels $a(1-b)$, $b(1-c)$ et $c(1-a)$ soient strictement plus grand que $\frac{1}{4}$, leur produit étant dans ce cas strictement plus grand que $\frac{1}{4^3}$.

On a montré dans tous les cas que l'un au moins des trois réels $a(1-b)$, $b(1-c)$ et $c(1-a)$ est inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$.

Correction de l'exercice 7 ▲

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, $E(x) \leq x < E(x) + 1$ puis $E(x) + 1 \leq x + 1 < (E(x) + 1) + 1$. Comme $E(x) + 1 \in \mathbb{Z}$, on a bien $E(x + 1) = E(x) + 1$.

2. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a $E(x) + E(y) \leq x + y$. Ainsi, $E(x) + E(y)$ est un entier relatif inférieur ou égal à $x + y$. Comme $E(x + y)$ est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à $x + y$, on a donc $E(x) + E(y) \leq E(x + y)$.

Améliorons. $E(x) \leq x < E(x) + 1$ et $E(y) \leq y < E(y) + 1$ fournit $E(x) + E(y) \leq x + y < E(x) + E(y) + 2$ et donc $E(x + y)$ vaut, suivant le cas, $E(x) + E(y)$ ou $E(x) + E(y) + 1$ (et est dans tous les cas supérieur ou égal à $E(x) + E(y)$).

3. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Posons $k = E(x)$ et $l = E(y)$.

1er cas. Si $x \in [k, k + \frac{1}{2}[$ et $y \in [l, l + \frac{1}{2}[$, alors $x + y \in [k + l, k + l + 1[$ et donc $E(x + y) = k + l$, puis $E(x) + E(y) + E(x + y) = k + l + k + l = 2k + 2l$. D'autre part, $2x \in [2k, 2k + 1[$ et $2y \in [2l, 2l + 1[$. Par suite, $E(2x) + E(2y) = 2k + 2l$. Dans ce cas, $E(x) + E(y) + E(x + y) = E(2x) + E(2y)$.

2ème cas. Si $x \in [k + \frac{1}{2}, k + 1[$ et $y \in [l, l + \frac{1}{2}[$, alors $x + y \in [k + l + \frac{1}{2}, k + l + \frac{3}{2}[$ et donc $E(x + y) = k + l$ ou $k + l + 1$, puis $E(x) + E(y) + E(x + y) = 2k + 2l$ ou $2k + 2l + 1$. D'autre part, $2x \in [2k + 1, 2k + 2[$ et $2y \in [2l, 2l + 1[$. Par suite, $E(2x) + E(2y) = 2k + 2l + 1$. Dans ce cas, $E(x) + E(y) + E(x + y) \leq E(2x) + E(2y)$.

3ème cas. Si $x \in [k, k + \frac{1}{2}[$ et $y \in [l + \frac{1}{2}, l + 1[$, on a de même $E(x) + E(y) + E(x + y) \leq E(2x) + E(2y)$.

4ème cas. Si $x \in [k + \frac{1}{2}, k + 1[$ et $y \in [l + \frac{1}{2}, l + 1[$, on a $E(x) + E(y) + E(x+y) = 2k + 2l + 2 = E(2x) + E(2y)$.

Finalement, on a dans tous les cas $E(x) + E(y) + E(x+y) \leq E(2x) + E(2y)$.

Correction de l'exercice 8 ▲

p est déterminé par l'encadrement : $10^p \leq n < 10^{p+1}$ qui s'écrit encore $p \leq \frac{\ln n}{\ln 10} < p + 1$. Par suite,

$$p = E(\log_{10}(n)).$$

Le nombre de chiffres d'un entier n en base 10 est donc $E(\log_{10}(n)) + 1$.

Correction de l'exercice 9 ▲

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $1 \leq k \leq n$, on a

$$kx - 1 < E(kx) \leq kx.$$

En sommant ces inégalités, on obtient

$$\frac{E(x) + E(2x) + \dots + E(nx)}{n^2} \leq \frac{x + 2x + \dots + nx}{n^2} = \frac{n(n+1)x}{2n^2} = \frac{(n+1)x}{2n},$$

et aussi,

$$\frac{E(x) + E(2x) + \dots + E(nx)}{n^2} > \frac{(x-1) + (2x-1) + \dots + (nx-1)}{n^2} = \frac{n(n+1)x/2 - n}{n^2} = \frac{(n+1)x}{2n} - \frac{1}{n}.$$

Finalement, pour tout naturel non nul,

$$\frac{(n+1)x}{2n} - \frac{1}{n} < \frac{E(x) + E(2x) + \dots + E(nx)}{n^2} \leq \frac{(n+1)x}{2n}.$$

Les deux membres extrêmes de cet encadrement tendent vers $\frac{x}{2}$ quand n tend vers $+\infty$. D'après le théorème des gendarmes, on peut affirmer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(x) + E(2x) + \dots + E(nx)}{n^2} = \frac{x}{2}.$$

Correction de l'exercice 10 ▲

1. Par définition d'un entier, il y a n entiers entre 1 et n . Ensuite, pour tout entier naturel k , on a

$$1 \leq k \leq x \Leftrightarrow 1 \leq k \leq E(x).$$

Il y a donc $E(x)$ entiers entre 1 et x .

2. Il y a $n+1$ entiers entre 0 et n et $E(x)+1$ entiers entre 0 et x .

3. Les entiers naturels pairs sont les entiers de la forme $2k$, $k \in \mathbb{N}$. Or,

$$0 \leq 2k \leq x \Leftrightarrow 0 \leq k \leq \frac{x}{2}.$$

Le nombre des entiers pairs compris entre 0 et x est encore le nombre des entiers k compris au sens large entre 0 et $\frac{x}{2}$. D'après 2), il y a $E(\frac{x}{2}) + 1$ entiers pairs entre 0 et x . De même, il y a $E(\frac{x}{3}) + 1$ multiples de 3 entre 0 et x .

De même,

$$0 \leq 2k+1 \leq x \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{x-1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq k \leq E\left(\frac{x-1}{2}\right).$$

Il y a donc $E\left(\frac{x-1}{2}\right) + 1 = E\left(\frac{x+1}{2}\right)$ entiers impairs entre 0 et x .

4. Il y a $E\left(\frac{x}{3}\right) + 1$ multiples de 3 entre 0 et x .

5. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(x, y) \in \mathbb{N}^2$. On a

$$x + 2y = n \Leftrightarrow x = n - 2y.$$

Donc, (x, y) est solution si et seulement si $y \in \mathbb{N}$ et $n - 2y \in \mathbb{N}$ ou encore si et seulement si $0 \leq 2y \leq n$.

Il y a donc $E\left(\frac{n}{2}\right) + 1$ couples solutions.

6. Si x et y sont respectivement le nombre de pièces de 10 centimes d'euros et le nombre de pièces de 20 centimes d'euros, le nombre cherché est le nombre de couples d'entiers naturels solutions de l'équation $10x + 20y = 1000$ qui s'écrit encore $x + 2y = 100$. D'après 5), il y a $E\left(\frac{100}{2}\right) + 1 = 51$ façons de payer 10 euros avec des pièces de 10 et 20 centimes d'euros.

7. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(x, y) \in \mathbb{N}^2$. On a

$$2x + 3y = n \Leftrightarrow x = \frac{n - 3y}{2}.$$

Donc,

$$(x, y) \text{ solution} \Leftrightarrow x = \frac{n - 3y}{2} \text{ et } y \in \mathbb{N} \text{ et } n - 3y \in 2\mathbb{N}.$$

Maintenant, comme $n - 3y = (n - y) - 2y$ et que $2y$ est un entier pair, $n - 3y$ est pair si et seulement si $n - y$ est pair ce qui revient à dire que y a la parité de n . Ainsi,

$$(x, y) \text{ solution} \Leftrightarrow x = \frac{n - 3y}{2} \text{ et } y \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leq y \leq \frac{n}{3} \text{ et } y \text{ a la parité de } n.$$

1er cas. Si n est pair, le nombre de couples solutions est encore le nombre d'entiers pairs y compris au sens large entre 0 et $\frac{n}{3}$. Il y a $E\left(\frac{n}{6}\right) + 1 = E\left(\frac{n+6}{6}\right)$ tels entiers.

2ème cas. Si n est impair, le nombre de couples solutions est encore le nombre d'entiers impairs y compris au sens large entre 0 et $\frac{n}{3}$. Il y a $E\left(\frac{\frac{n}{2}-1}{2}\right) + 1 = E\left(\frac{n+3}{6}\right)$ tels entiers.

Finalement, le nombre cherché est $E\left(\frac{n+6}{6}\right)$ si n est pair et $E\left(\frac{n+3}{6}\right)$ si n est impair.

Correction de l'exercice 11 ▲

1. Par définition d'un entier, il y a n entiers entre 1 et n . Ensuite, pour tout entier naturel k , on a

$$1 \leq k \leq x \Leftrightarrow 1 \leq k \leq E(x).$$

Il y a donc $E(x)$ entiers entre 1 et x .

2. Il y a $n + 1$ entiers entre 0 et n et $E(x) + 1$ entiers entre 0 et x .

3. Les entiers naturels pairs sont les entiers de la forme $2k$, $k \in \mathbb{N}$. Or,

$$0 \leq 2k \leq x \Leftrightarrow 0 \leq k \leq \frac{x}{2}.$$

Le nombre des entiers pairs compris entre 0 et x est encore le nombre des entiers k compris au sens large entre 0 et $\frac{x}{2}$. D'après 2), il y a $E\left(\frac{x}{2}\right) + 1$ entiers pairs entre 0 et x . De même, il y a $E\left(\frac{x}{3}\right) + 1$ multiples de 3 entre 0 et x .

De même,

$$0 \leq 2k + 1 \leq x \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{x-1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq k \leq E\left(\frac{x-1}{2}\right).$$

Il y a donc $E\left(\frac{x-1}{2}\right) + 1 = E\left(\frac{x+1}{2}\right)$ entiers impairs entre 0 et x .

4. Il y a $E(\frac{x}{3}) + 1$ multiples de 3 entre 0 et x .

5. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(x, y) \in \mathbb{N}^2$. On a

$$x + 2y = n \Leftrightarrow x = n - 2y.$$

Donc, (x, y) est solution si et seulement si $y \in \mathbb{N}$ et $n - 2y \in \mathbb{N}$ ou encore si et seulement si $0 \leq 2y \leq n$.
Il y a donc $E(\frac{n}{2}) + 1$ couples solutions.

6. Si x et y sont respectivement le nombre de pièces de 10 centimes d'euros et le nombre de pièces de 20 centimes d'euros, le nombre cherché est le nombre de couples d'entiers naturels solutions de l'équation $10x + 20y = 1000$ qui s'écrit encore $x + 2y = 100$. D'après 5), il y a $E(\frac{100}{2}) + 1 = 51$ façons de payer 10 euros avec des pièces de 10 et 20 centimes d'euros.

7. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(x, y) \in \mathbb{N}^2$. On a

$$2x + 3y = n \Leftrightarrow x = \frac{n - 3y}{2}.$$

Donc,

$$(x, y) \text{ solution} \Leftrightarrow x = \frac{n - 3y}{2} \text{ et } y \in \mathbb{N} \text{ et } n - 3y \in 2\mathbb{N}.$$

Maintenant, comme $n - 3y = (n - y) - 2y$ et que $2y$ est un entier pair, $n - 3y$ est pair si et seulement si $n - y$ est pair ce qui revient à dire que y a la parité de n . Ainsi,

$$(x, y) \text{ solution} \Leftrightarrow x = \frac{n - 3y}{2} \text{ et } y \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leq y \leq \frac{n}{3} \text{ et } y \text{ a la parité de } n.$$

1er cas. Si n est pair, le nombre de couples solutions est encore le nombre d'entiers pairs y compris au sens large entre 0 et $\frac{n}{3}$. Il y a $E(\frac{n}{6}) + 1 = E(\frac{n+6}{6})$ tels entiers.

2ème cas. Si n est impair, le nombre de couples solutions est encore le nombre d'entiers impairs y compris au sens large entre 0 et $\frac{n}{3}$. Il y a $E(\frac{\frac{n}{3}-1}{2}) + 1 = E(\frac{n+3}{6})$ tels entiers.

Finalement, le nombre cherché est $E(\frac{n+6}{6})$ si n est pair et $E(\frac{n+3}{6})$ si n est impair.

Correction de l'exercice 12 ▲

Soit $n \in \mathbb{N}$. La division euclidienne de n par 25 fournit un quotient entier q et un reste r élément de $\{0, 1, \dots, 24\}$ tels que $n = 25q + r$.

On a alors

$$E(\frac{1}{3}(n + 2 - E(\frac{n}{25}))) = E(\frac{25q + r + 2 - q}{3}) = E(8q + \frac{r + 2}{3}) = 8q + E(\frac{r + 2}{3}),$$

et

$$E(\frac{8n + 24}{25}) = E(\frac{8(25q + r) + 24}{25}) = 8q + E(\frac{8r + 24}{25}).$$

Pour montrer l'égalité de l'énoncé, il reste donc à vérifier les 25 égalités $E(\frac{r+2}{3}) = E(\frac{8r+24}{25})$, $0 \leq r \leq 24$, (*), ce qui peut déjà se vérifier « à la main ».

Diminuons encore le nombre de vérifications. La division euclidienne de r par 3 s'écrit $r = 3k + l$ avec $0 \leq l \leq 2$. Mais alors,

$$E(\frac{r+2}{3}) = k + E(\frac{l+2}{3}) \text{ et } E(\frac{8r+24}{25}) = E(\frac{25k - k + 8l + 24}{25}) = k + E(\frac{-k + 8l + 24}{25}).$$

Si $l = 0$, k varie de 0 à 8 et dans ce cas, $0 \leq \frac{-k+24}{25} = \frac{-k+8l+24}{25} \leq \frac{24}{25} < 1$. Par suite,

$$E(\frac{-k + 8l + 24}{25}) = 0 = E(\frac{2}{3}) = E(\frac{l+2}{3}).$$

On a ainsi vérifié (*) quand $r \in \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\}$.

Si $l = 1$ ou $l = 2$, $E(\frac{l+2}{3}) = 1$ et d'autre part, k varie de 0 à 7. Dans ce cas,

$$1 = \frac{-7+8+24}{25} \leq \frac{-k+8l+24}{25} \leq \frac{16+24}{25} < 2$$

et donc

$$E\left(\frac{-k+8l+24}{25}\right) = 1 = E\left(\frac{l+2}{3}\right).$$

On a ainsi vérifié (*) pour les autres valeurs de r . Finalement, on a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, E\left(\frac{1}{3}\left(n+2-E\left(\frac{n}{25}\right)\right)\right) = E\left(\frac{8n+24}{25}\right).$$

Correction de l'exercice 13 ▲

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. La formule du binôme de NEWTON permet d'écrire

$$\begin{aligned} (2 + \sqrt{3})^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sqrt{3}^k 2^{n-k} = \sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2k} \sqrt{3}^{2k} 2^{n-2k} + \sum_{k=0}^{E((n-1)/2)} \binom{n}{2k+1} \sqrt{3}^{2k+1} 2^{n-2k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2k} 3^k 2^{n-2k} + \sqrt{3} \sum_{k=0}^{E((n-1)/2)} \binom{n}{2k+1} 3^k 2^{n-2k-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, en posant $a_n = \sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2k} 3^k 2^{n-2k}$ et $b_n = \sum_{k=0}^{E((n-1)/2)} \binom{n}{2k+1} 3^k 2^{n-2k-1}$, a_n et b_n sont des **entiers** tels que $(2 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n \sqrt{3}$. En remplaçant $\sqrt{3}$ par $-\sqrt{3}$, on a aussi $(2 - \sqrt{3})^n = a_n - b_n \sqrt{3}$. Mais alors,

$$a_n^2 - 3b_n^2 = (a_n + b_n \sqrt{3})(a_n - b_n \sqrt{3}) = (2 + \sqrt{3})^n (2 - \sqrt{3})^n = (4 - 3)^n = 1.$$

2. On note que $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n = (a_n + b_n \sqrt{3}) + (a_n - b_n \sqrt{3}) = 2a_n$. Mais,

$$0 < (2 - \sqrt{3})^n < 1.$$

Par suite,

$$(2 + \sqrt{3})^n < (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n = 2a_n < (2 + \sqrt{3})^n + 1,$$

ou encore

$$2a_n - 1 < (2 + \sqrt{3})^n < 2a_n.$$

On en déduit que $E((2 + \sqrt{3})^n) = 2a_n - 1$ et donc que $E((2 + \sqrt{3})^n)$ est un entier impair.

Correction de l'exercice 14 ▲

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} E(x) \leq x < E(x) + 1 &\Rightarrow nE(x) \leq nx < nE(x) + n \Rightarrow nE(x) \leq E(nx) < nE(x) + n \Rightarrow E(x) \leq \frac{E(nx)}{n} < E(x) + 1 \\ &\Rightarrow E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x). \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 15 ▲

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in [-1, 1]^n$ tels que $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$.

On écrit

$$(x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n) = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) + (x_2 + x_3 + \dots + x_n) + (x_3 + \dots + x_n) + \dots + (x_{n-1} + x_n) + x_n,$$

avec $x_1 + \dots + x_n = 0$ et donc $x_2 + \dots + x_n = -x_1 \dots$

1er cas. Si $n = 2p$ est pair, alors $\frac{n^2}{4} = p^2$ et donc, $E(\frac{n^2}{4}) = p^2 = \frac{n^2}{4}$. Dans ce cas, on peut écrire

$$\begin{aligned} |x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n| &\leq |x_1 + x_2 + \dots + x_{2p}| + |x_2 + \dots + x_{2p}| + \dots + |x_p + \dots + x_{2p}| \\ &\quad + |x_{p+1} + \dots + x_{2p}| \dots + |x_{2p-1} + x_{2p}| + |x_{2p}| \\ &= 0 + |-x_1| + |-x_1 - x_2| + \dots + |-x_1 + \dots - x_{p-1}| \\ &\quad + |x_{p+1} + \dots + x_{2p}| \dots + |x_{2p-1} + x_{2p}| + |x_{2p}| \\ &\leq 0 + 1 + 2 + \dots + (p-1) + p + (p-1) + \dots + 1 = 2 \frac{p(p-1)}{2} + p = p^2 = E(\frac{n^2}{4}) \end{aligned}$$

2ème cas. Si $n = 2p + 1$ est impair, alors $\frac{n^2}{4} = p^2 + p + \frac{1}{4}$ et donc, $E(\frac{n^2}{4}) = p^2 + p = \frac{n^2-1}{4}$. Dans ce cas, on peut écrire

$$\begin{aligned} |x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n| &\leq |x_1 + x_2 + \dots + x_{2p+1}| + \dots + |x_{p+1} + \dots + x_{2p+1}| \\ &\quad + |x_{p+2} + \dots + x_{2p+1}| \dots + |x_{2p+1}| \\ &= 0 + |-x_1| + |-x_1 - x_2| + \dots + |-x_1 + \dots - x_p| \\ &\quad + |x_{p+2} + \dots + x_{2p+1}| \dots + |x_{2p+1}| \\ &\leq 0 + 1 + 2 + \dots + (p-1) + p + p + (p-1) + \dots + 1 = 2 \frac{p(p+1)}{2} = p^2 + p = E(\frac{n^2}{4}) \end{aligned}$$

Dans tous les cas, on a montré que

$\forall n \in \mathbb{N}^*, |x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n| \leq E(\frac{n^2}{4}).$

Correction de l'exercice 16 ▲

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$.

$$n!^2 = \prod_{k=1}^n (n+1-k) \prod_{k=1}^n k = \prod_{k=1}^n k(n+1-k).$$

Maintenant, la fonction $x \mapsto x(n+1-x)$ est strictement croissante sur $[0, \frac{n+1}{2}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{n+1}{2}, n+1]$. Puisque $f(1) = f(n) = n$, on en déduit que pour $x \in [2, n-1]$, $f(x) > n$. Puisque $n \geq 3$, on a $n-1 \geq 2$ et on peut écrire

$$n!^2 = n^2 \prod_{k=2}^{n-1} k(n+1-k) > n^2 \prod_{k=2}^{n-2} n = n^n,$$

et donc,

$$\sqrt[n]{n!} = (n!^2)^{1/(2n)} > (n^n)^{1/2n} = \sqrt{n}.$$

Correction de l'exercice 17 ▲

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque, pour tout entier k , $|\cos k| \in [0, 1]$, on a alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n |\cos k| &\geq \sum_{k=1}^n \cos^2 k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2}(1 + \cos(2k)) = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^n e^{2ik}\right) = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(e^{2i} \frac{1 - e^{2in}}{1 - e^{2i}}\right) \\ &= \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(e^{i(n-1+2)} \frac{\sin n}{\sin 1}\right) = \frac{n}{2} + \frac{\cos(n+1) \sin n}{2 \sin 1} \geq \frac{n}{2} - \frac{1}{2 \sin 1}.\end{aligned}$$

Maintenant, $\frac{1}{2 \sin 1} = 0,594\dots$. Par suite, pour $n \geq 3$, $\frac{1}{2 \sin 1} \leq 0,75 = \frac{3}{4} \leq \frac{n}{4}$, et donc

$$\frac{n}{2} - \frac{1}{2 \sin 1} \geq \frac{n}{2} - \frac{n}{4} = \frac{n}{4}.$$

Enfin, si $n = 1$, $|\cos 1| = 0.5\dots \geq 0.25 = \frac{1}{4}$ et si $n = 2$, $|\cos 1| + |\cos 2| = 0.9\dots \geq 0.5 = \frac{2}{4}$. Finalement,

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n |\cos k| \geq \frac{n}{4}.$

Correction de l'exercice 18 ▲

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\sin(nx)| \leq n|\sin x|$.

- C'est clair pour $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que $|\sin(nx)| \leq n|\sin x|$. Alors,

$$\begin{aligned}|\sin(n+1)x| &= |\sin nx \cos x + \cos nx \sin x| \leq |\sin nx| \cdot |\cos x| + |\cos nx| \cdot |\sin x| \\ &\leq |\sin nx| + |\sin x| \\ &\leq n|\sin x| + |\sin x| \quad (\text{par hypothèse de récurrence}) \\ &= (n+1)|\sin x|\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |\sin(nx)| \leq n|\sin x|$

.

Les rationnels, les réels

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile

I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1 I

Montrer que les nombres suivants sont irrationnels.

- (**) $\sqrt{2}$ et plus généralement $\sqrt[n]{m}$ où n est un entier supérieur ou égal à 2 et m est un entier naturel supérieur ou égal à 2, qui n'est pas une puissance n -ième parfaite.
- (**) $\log 2$.
- (****) π (LAMBERT a montré en 1761 que π est irrationnel, LEGENDRE a démontré en 1794 que π^2 est irrationnel, LINDEMANN a démontré en 1882 que π est transcendant).
Pour cela, supposer par l'absurde que $\pi = \frac{p}{q}$ avec p et q entiers naturels non nuls et premiers entre eux. Considérer alors $I_n = \int_0^{p/q} \frac{x^n (p-qx)^n}{n!} \sin x \, dx$, $n \in \mathbb{N}^*$ et montrer que I_n vérifie
 - I_n est un entier relatif;
 - $I_n > 0$;
 - $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ (voir devoir).
- (****) e (HERMITE a démontré en 1873 que e est transcendant. C'est historiquement le premier « vrai » nombre dont on a réussi à démontrer la transcendance).
Pour cela, établir que pour tout entier naturel n , $e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t \, dt$, puis que **pour tout** entier naturel non nul n , $0 < e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < \frac{3}{(n+1)!}$. Raisonner alors par l'absurde.
- (****) $\cos(\frac{2\pi}{7})$. Pour cela trouver une équation du troisième degré à coefficients entiers dont les solutions sont $\cos(\frac{2\pi}{7})$, $\cos(\frac{4\pi}{7})$ et $\cos(\frac{6\pi}{7})$, puis vérifier que cette équation n'a pas de racine rationnelle (supposer par l'absurde qu'il y a une racine rationnelle $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $\text{PGCD}(p, q) = 1$ et montrer que p divise 1 et q divise 8). (On rappelle le théorème de GAUSS : soient a , b et c trois entiers relatifs tous non nuls. Si a divise bc et a et b sont premiers entre eux, alors a divise c).
- (****) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.

[Correction ▼](#)

[005209]

Exercice 2 **IT

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$, non vides et bornées. Montrer que $\sup A$, $\sup B$, $\sup(A+B)$, $\inf A$, $\inf B$, $\inf(A+B)$ existent et que l'on a $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$ et $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$. ($A+B$ désigne l'ensemble des sommes d'un élément de A et d'un élément de B).

[Correction ▼](#)

[005210]

Exercice 3 **

Soit $A = \{\frac{1}{n} + (-1)^n, n \in \mathbb{N}^*\}$. Déterminer $\sup A$ et $\inf A$.

[Correction ▼](#)

[005211]

Exercice 4 **IT

Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que $\sup\{|x-y|, (x,y) \in A^2\} = \sup A - \inf A$.

Exercice 5 ***IT

Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. Que dire de $\sup(A \cap B)$, $\sup(A \cup B)$, $\sup(A + B)$ et $\sup(AB)$? ($A + B$ (resp. AB) désigne l'ensemble des sommes (resp. des produits) d'un élément de A et d'un élément de B).

Correction ▼

[005213]

Exercice 6 ****

Soit u_n le chiffre des unités de C_n^k , k entier naturel fixé non nul et n entier naturel supérieur ou égal à k . Montrer que le nombre $0, u_k u_{k+1} u_{k+2} \dots$ est rationnel.

Correction ▼

[005214]

Exercice 7 ** Identité de CATALAN

Montrer que pour tout entier naturel non nul n , $\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

Correction ▼

[005215]

Exercice 8 **I Inégalités de CAUCHY-SCHWARZ et de MINKOWSKI

Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des nombres réels.

1. En considérant la fonction $f : x \mapsto \sum_{k=1}^n (a_k + x b_k)^2$, montrer que $|\sum_{k=1}^n a_k b_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}$ (inégalité de CAUCHY-SCHWARZ).
2. En déduire l'inégalité de MINKOWSKI : $\sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}$.
(l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ affirme que le produit scalaire de deux vecteurs est inférieur ou égal au produit de leurs normes et l'inégalité de MINKOWSKI est l'inégalité triangulaire).

Correction ▼

[005216]

Exercice 9 **

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 1$.

Correction ▼

[005217]

Exercice 10 **** Sous groupes de $(\mathbb{R}, +)$

1. Montrer que les sous groupes du groupe $(\mathbb{R}, +)$ sont soit de la forme $a\mathbb{Z}$, a réel donné, soit denses dans $\mathbb{R}$.
Indication : pour G sous-groupe donné de $(\mathbb{R}, +)$, non réduit à $\{0\}$, considérer $a = \inf (G \cap]0; +\infty[)$ puis envisager les deux cas $a = 0$ et $a > 0$.
(Definition : G est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si : $(\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists y \in G / |y - x| < \varepsilon)$).
2. Application 1. Montrer que $\{a + b\sqrt{2}, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
3. Application 2 (groupe des périodes d'une fonction).
(a) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble des périodes de f est un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$ (ce sous-groupe est réduit à $\{0\}$ si f n'est pas périodique).
(b) Montrer qu'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui admet 1 et $\sqrt{2}$ pour périodes, est constante sur $\mathbb{R}$.

Correction ▼

[005218]

Exercice 11 **

Montrer que $\{r^3, r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Correction ▼

[005219]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Soient m et n deux entiers naturels supérieurs à 2.

$$\sqrt[n]{m} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \exists (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2 / \sqrt[n]{m} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \exists (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2 / a^n = m \times b^n.$$

Tout d'abord, si $b = 1$, $m = a^n$ et m est une puissance n -ième parfaite. Ensuite, $a = 1$ est impossible car $m \times b^n \geq 2$. Supposons alors que a et b soient des entiers supérieurs à 2 (et que $a^n = m \times b^n$). L'exposant de tout facteur premier de a^n ou de b^n est un multiple de n et par unicité de la décomposition en facteurs premiers, il en est de même de tout facteur premier de m . Ceci montre que, si $\sqrt[n]{m}$ est rationnel, m est une puissance n -ième parfaite. Réciproquement, si m est une puissance n -ième parfaite, $\sqrt[n]{m}$ est un entier et en particulier un rationnel. En résumé :

$$\forall (m, n) \in (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\})^2, \sqrt[n]{m} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \sqrt[n]{m} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow m \text{ est une puissance } n\text{-ième parfaite.}$$

Par suite, si m n'est pas une puissance n -ième parfaite, $\sqrt[n]{m}$ est irrationnel.

- 2.

$$\begin{aligned} \log 2 \in \mathbb{Q} &\Rightarrow \exists (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2 / \log 2 = \frac{a}{b} \Rightarrow \exists (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2 / 10^{a/b} = 2 \Rightarrow \exists (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2 / 10^a = 2^b \\ &\Rightarrow \exists (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2 / 5^a = 2^{b-a}. \end{aligned}$$

Puisque $5^a > 1$, ceci impose $b - a \in \mathbb{N}^*$. Mais alors, l'égalité ci-dessus est impossible pour $a \neq 0$ et $b \neq 0$ par unicité de la décomposition en facteurs premiers d'un entier naturel supérieur ou égal à 2. On a montré par l'absurde que

$$\log 2 \text{ est irrationnel.}$$

3. Supposons par l'absurde que π soit rationnel. Il existe alors deux entiers naturels non nuls p et q tels que $\pi = \frac{p}{q}$. Pour n entier naturel non nul donné, posons

$$I_n = \frac{1}{n!} \int_0^\pi x^n (p - qx)^n \sin x \, dx = \frac{1}{n!} \int_0^{p/q} x^n (p - qx)^n \sin x \, dx.$$

- Tout d'abord, pour $0 \leq x \leq \frac{p}{q}$, on a $0 \leq x(p - qx) = \frac{p}{2q} \left(p - \frac{p}{2q} \times q \right) = \frac{p^2}{4q}$, et donc (puisque $0 \leq \sin x \leq 1$ pour $x \in [0, \pi]$),

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!} \int_0^{p/q} \left(\frac{p^2}{4q} \right)^n dx = \frac{\pi}{n!} \left(\frac{p^2}{4q} \right)^n.$$

D'après le résultat admis par l'énoncé, $\frac{\pi}{n!} \left(\frac{p^2}{4q} \right)^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, et donc d'après le théorème de la limite par encadrement, la suite (I_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$. • Ensuite, puisque pour x élément de $[0, \pi]$, on a $x^n (p - qx)^n \sin x \geq 0$, pour n entier naturel non nul donné, on a

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{n!} \int_0^\pi x^n (p - qx)^n \sin x \, dx \geq \frac{1}{n!} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} x^n (p - qx)^n \sin x \, dx \geq \frac{1}{n!} \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) \left(\frac{p}{4q} \left(p - \frac{p}{4q} \times q \right) \right)^n \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}n!} \left(\frac{3p^2}{16q} \right)^n > 0. \end{aligned}$$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n > 0$. • Vérifions enfin que, pour tout entier naturel non nul n , I_n est un entier (relatif). Soit $P_n = \frac{1}{n!} x^n (p - qx)^n$. P_n est un polynôme de degré $2n$ et 0 et $\frac{p}{q}$ sont racines d'ordre n de P_n et donc, pour $0 \leq k \leq n$, racines d'ordre $n - k$ de $P_n^{(k)}$. En particulier, $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}\left(\frac{p}{q}\right)$ sont, pour $0 \leq k < n$, des entiers relatifs. De même, puisque $\deg P_n = 2n$, pour $k \geq 2n + 1$, $P_n^{(k)} \geq 0$ et en particulier, $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}\left(\frac{p}{q}\right)$ sont, pour $k \geq 2n + 1$, des entiers relatifs. Soit k un entier tel que $n \leq k \leq 2n$.

$$\frac{1}{n!}x^n(p-qx)^n = \frac{1}{n!}x^n \sum_{i=0}^n C_n^i p^{n-i}(-1)^i q^i x^i = \sum_{i=0}^n \frac{C_n^i}{n!} p^{n-i}(-1)^i q^i x^{n+i} = \sum_{k=n}^{2n} \frac{C_n^{k-n}}{n!} p^{2n-k}(-1)^{k-n} q^{k-n} x^k.$$

On sait alors que

$$P_n^{(k)}(0) = k! \times (\text{coefficient de } x^k) = (-1)^{k-n} \frac{k!}{n!} C_n^{k-n} p^{2n-k} q^{k-n}.$$

ce qui montre que $P_n^{(k)}(0)$ est entier relatif (puisque $n \leq k \leq 2n$). Puis, comme $P_n\left(\frac{p}{q} - x\right) = P_n(x)$, on a encore $P_n^{(k)}\left(\frac{p}{q} - x\right) = (-1)^k P_n^{(k)}(x)$ et en particulier $P_n^{(k)}\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^k P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$. On a montré que pour tout entier naturel k , $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}\left(\frac{p}{q}\right)$ sont des entiers relatifs. Montrons alors que I_n est un entier relatif. Une première intégration par parties fournit : $I_n = [-P_n(x) \cos x]_0^{p/q} + \int_0^{p/q} P_n'(x) \cos x \, dx$. $\cos$ prend des valeurs entières en 0 et $\frac{p}{q} = \pi$ de même que P_n . Par suite,

$$I_n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \int_0^{p/q} P_n'(x) \cos x \, dx \in \mathbb{Z}.$$

Une deuxième intégration par parties fournit : $\int_0^{p/q} P_n'(x) \cos x \, dx = [P_n'(x) \sin x]_0^{p/q} - \int_0^{p/q} P_n''(x) \sin x \, dx$. $\sin$ prend des valeurs entières en 0 et $\frac{p}{q} = \pi$, de même que P_n' et

$$I_n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \int_0^{p/q} P_n''(x) \sin x \, dx \in \mathbb{Z}.$$

En renouvelant les intégrations par parties et puisque $\sin$ et $\cos$ prennent des valeurs entières en 0 et π de même que les dérivées successives de P_n , on en déduit que :

$$I_n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \int_0^{p/q} P_n^{(2n)}(x) \sin x \, dx \in \mathbb{Z}.$$

Mais,

$$\int_0^{p/q} P_n^{(2n)}(x) \sin x \, dx = \int_0^{p/q} \frac{1}{n!} (-q)^n (2n)! \sin x \, dx = 2(-q)^n (2n)(2n-1)\dots(n+1) \in \mathbb{Z}.$$

Donc pour tout naturel n , I_n est un entier relatif, strictement positif d'après plus haut. On en déduit que pour tout naturel n , $I_n \geq 1$. Cette dernière constatation contredit le fait que la suite (I_n) converge vers 0. L'hypothèse π est rationnel est donc absurde et par suite,

π est irrationnel.

4. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t \, dt$. • Pour $n = 0$, $\int_0^1 \frac{(1-t)^0}{0!} e^t \, dt = \int_0^1 e^t \, dt = e - 1$ et donc, $e = 1 + \int_0^1 e^t \, dt = \sum_{k=0}^0 \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^0}{0!} e^t \, dt$. • Soit $n \geq 0$. Supposons que $e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t \, dt$. Une intégrations par parties fournit :

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t \, dt = \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1) \times n!} e^t \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t \, dt = \frac{1}{(n+1)!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t \, dt,$$

et donc,

$$e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t \, dt = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t \, dt.$$

Le résultat est ainsi démontré par récurrence. Soit n un entier naturel non nul. D'après ce qui précède,

$$0 < e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt < e \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} dt = \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Supposons alors par l'absurde que e soit rationnel. Alors, il existe $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2 / e = \frac{a}{b}$. Soit n un entier naturel non nul quelconque. D'après ce qui précède, on a $0 < \frac{a}{b} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < \frac{3}{(n+1)!}$, ce qui s'écrit encore après multiplication des trois membres par $bn!$

$$0 < a \times n! - b \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} < \frac{3b}{n+1}.$$

En particulier, pour $n = 3b$, on a $0 < a \times (3b)! - b \sum_{k=0}^{3b} \frac{(3b)!}{k!} < \frac{3b}{3b+1} < 1$. Mais ceci est impossible car $a \times n! - b \sum_{k=0}^{3b} \frac{(3b)!}{k!}$ est un entier relatif. Il était donc absurde de supposer que e est rationnel et finalement,

e est irrationnel.

5. Une équation du troisième degré dont les solutions sont $\cos \frac{2\pi}{7}$, $\cos \frac{4\pi}{7}$ et $\cos \frac{6\pi}{7}$ est

$$(X - \cos \frac{2\pi}{7})(X - \cos \frac{4\pi}{7})(X - \cos \frac{6\pi}{7}) = 0,$$

ou encore

$$X^3 - \left(\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} \right) X^2 + \left(\cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} \right) X - \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} = 0.$$

Calculons alors ces trois coefficients. Soit $\omega = e^{2i\pi/7}$. Puisque $\omega^7 = 1$ et que $\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = -1$, on a d'après les formules d'EULER

$$\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = \frac{1}{2}(\omega + \omega^6 + \omega^2 + \omega^5 + \omega^3 + \omega^4) = -\frac{1}{2},$$

puis,

$$\begin{aligned} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} &= \frac{1}{4}((\omega + \omega^6)(\omega^2 + \omega^5) + (\omega + \omega^6)(\omega^3 + \omega^4) + (\omega^2 + \omega^5)(\omega^3 + \omega^4)) \\ &= \frac{1}{4}((\omega^3 + \omega^6 + \omega + \omega^4) + (\omega^4 + \omega^5 + \omega^2 + \omega^3) + (\omega^5 + \omega^6 + \omega + \omega^2)) \\ &= \frac{2(-1)}{4} = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

et enfin,

$$\begin{aligned} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} &= \frac{1}{8}(\omega + \omega^6)(\omega^2 + \omega^5)(\omega^3 + \omega^4) \\ &= \frac{1}{8}(\omega^3 + \omega^6 + \omega + \omega^4)(\omega^3 + \omega^4) = \frac{1}{8}(\omega^6 + 1 + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + 1 + \omega) = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Les trois nombres $\cos \frac{2\pi}{7}$, $\cos \frac{4\pi}{7}$ et $\cos \frac{6\pi}{7}$ sont donc solution de l'équation $X^3 + \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{8} = 0$ ou encore de l'équation

$$8X^3 + 4X^2 - 4X - 1 = 0.$$

Montrons que cette équation n'admet pas de racine rationnelle. Dans le cas contraire, si, pour p entier relatif non nul et q entier naturel non nul tels que p et q sont premiers entre eux, le nombre $r = \frac{p}{q}$ est racine de cette équation, alors $8p^3 + 4p^2q - 4pq^2 - q^3 = 0$. Ceci peut encore s'écrire $8p^3 = q(-4p^2 + 4pq + q^2)$ ce qui montre que q divise $8p^3$. Comme q est premier avec p et donc avec p^3 , on en déduit d'après le théorème de GAUSS que q divise 8. De même, l'égalité $q^3 = p(8p^2 + 4pq - 4q^2)$ montre que p divise q^3 et donc que p divise 1. Ainsi, $p \in \{-1, 1\}$ et $q \in \{1, 2, 4, 8\}$ ou encore $r \in \{1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\}$. On vérifie alors aisément qu'aucun de ces nombres n'est racine de l'équation considérée et donc cette équation n'a pas de racine rationnelle. En particulier,

$\cos \frac{2\pi}{7}$ est irrationnel.

6. On sait que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$ sont irrationnels mais ceci n'impose rien à la somme $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$. Soit $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.

$$\begin{aligned}\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} &\Rightarrow (\alpha - \sqrt{2})^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 \Rightarrow \alpha^2 - 2\sqrt{2}\alpha + 2 = 8 + 2\sqrt{15} \\ &\Rightarrow (\alpha^2 - 2\sqrt{2}\alpha - 6)^2 = 60 \Rightarrow \alpha^4 + 8\alpha^2 - 24 = 4\sqrt{2}\alpha(\alpha^2 - 6)\end{aligned}$$

Si maintenant, on suppose que α est rationnel, puisque $\sqrt{2}$ est irrationnel, on a nécessairement $\alpha(\alpha^2 - 6) = 0$ (dans le cas contraire, $\sqrt{2} = \frac{\alpha^4 + 8\alpha^2 - 24}{4\alpha(\alpha^2 - 6)} \in \mathbb{Q}$). Mais α n'est ni 0, ni $-\sqrt{6}$, ni $\sqrt{6}$ (car $\alpha^2 > 2 + 3 + 5 = 10 > 6$). Donc

$\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ est irrationnel.

Correction de l'exercice 2 ▲

A et B sont deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$ et admettent donc des bornes supérieures notées respectivement α et β . Pour tout $(a, b) \in A \times B$, on a $a + b \leq \alpha + \beta$. Ceci montre que $A + B$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, et donc que $\sup(A + B)$ existe dans $\mathbb{R}$. (De plus, puisque $\alpha + \beta$ est un majorant de $A + B$, on a déjà $\sup(A + B) \leq \alpha + \beta$). Soit alors $\varepsilon > 0$. Il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < a \leq \alpha$ et $\beta - \frac{\varepsilon}{2} < b \leq \beta$, et donc tels que $\alpha + \beta - \varepsilon < a + b \leq \alpha + \beta$.

En résumé,

$$(1) \forall (a, b) \in A \times B, a + b \leq \alpha + \beta \text{ et } (2) \forall \varepsilon > 0, \exists (a, b) \in A \times B / a + b > \alpha + \beta - \varepsilon.$$

On en déduit que

$$\sup(A + B) = \alpha + \beta = \sup A + \sup B.$$

Pour les bornes inférieures, on peut refaire le travail précédent en l'adaptant ou appliquer le résultat précédent aux ensembles $-A$ et $-B$ car $\inf A = -\sup(-A)$.

Correction de l'exercice 3 ▲

Posons pour n entier naturel non nul $u_n = \frac{1}{n} + (-1)^n$ de sorte que $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}^*\} = \{0, \frac{1}{2} + 1, \frac{1}{3} - 1, \frac{1}{4} + 1, \frac{1}{5} - 1, \dots\}$. Pour $n \geq 1$, $u_{2n} = 1 + \frac{1}{2n}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 < u_{2n} \leq \frac{3}{2}$. Pour $n \geq 1$, $u_{2n-1} = -1 + \frac{1}{2n-1}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, -1 < u_{2n-1} \leq 0$. Par suite, $\forall n \in \mathbb{N}^*, -1 < u_n \leq \frac{3}{2}$. Donc, $\sup A$ et $\inf A$ existent dans $\mathbb{R}$ et de plus $-1 \leq \inf A \leq \sup A \leq \frac{3}{2}$. Ensuite, $\frac{3}{2} = u_2 \in A$. Donc,

$$\sup A = \max A = \frac{3}{2}.$$

Enfin, pour chaque entier naturel non nul n , on a $-1 \leq \inf A \leq u_{2n-1} = -1 + \frac{1}{2n-1}$. On fait tendre n tend vers l'infini dans cet encadrement, on obtient

$$\inf A = -1$$

(cette borne inférieure n'est pas un minimum).

Correction de l'exercice 4 ▲

Posons $B = \{|y - x|, (x, y) \in A^2\}$. A est une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$, et donc $m = \inf A$ et $M = \sup A$ existent dans $\mathbb{R}$. Pour $(x, y) \in A^2$, on a $m \leq x \leq M$ et $m \leq y \leq M$, et donc $y - x \leq M - m$ et $x - y \leq M - m$ ou encore $|y - x| \leq M - m$. Par suite, B est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. B admet donc une borne supérieure. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $(x_0, y_0) \in A^2$ tel que $x_0 < \inf A + \frac{\varepsilon}{2}$ et $y_0 > \sup A - \frac{\varepsilon}{2}$.

Ces deux éléments x_0 et y_0 vérifient,

$$|y_0 - x_0| \geq y_0 - x_0 > \left(\sup A - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(\inf A + \frac{\varepsilon}{2}\right) = \sup A - \inf A - \varepsilon.$$

En résumé,

1. $\forall (x, y) \in A^2, |y - x| \leq \sup A - \inf A$ et
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists (x, y) \in A^2 / |y - x| > \sup A - \inf A - \varepsilon$.

Donc, $\sup B = \sup A - \inf A$.

$$\sup \{|y - x|, (x, y) \in A^2\} = \sup A - \inf A.$$

Correction de l'exercice 5 ▲

1. $A \cap B$ peut être vide et on n'a rien à dire. Supposons donc $A \cap B$ non vide. Pour $x \in A \cap B$, on a $x \leq \sup A$ et $x \leq \sup B$ et donc $x \leq \min\{\sup A, \sup B\}$. Dans ce cas, $\sup(A \cap B)$ existe et $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$. On ne peut pas améliorer. Par exemple, soit $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ et $B = ([0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) \cup \{0\}$. On a $\sup A = 1$, $\sup B = 1$, $A \cap B = \{0\}$ et donc $\sup(A \cap B) = 0 < 1 = \min\{\sup A, \sup B\}$.
2. Pour $x \in A \cup B$, on a $x \leq \max\{\sup A, \sup B\}$. Donc $\sup(A \cup B)$ existe dans $\mathbb{R}$ et $\sup(A \cup B) \leq \max\{\sup A, \sup B\}$. Inversement, supposons par exemple $\sup A \geq \sup B$ de sorte que $\max\{\sup A, \sup B\} = \sup A$. Soit alors $\varepsilon > 0$. Il existe $a \in A$ tel que $\sup A - \varepsilon < a \leq \sup A$. a est dans A et donc dans $A \cup B$. En résumé, $\forall x \in (A \cup B), x \leq \max\{\sup A, \sup B\}$ et $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in (A \cup B) / \max\{\sup A, \sup B\} - \varepsilon < x$ et donc

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}.$$

3. D'après l'exercice 2, $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.
4. Pour $\sup(AB)$, tout est possible. Par exemple, si $A = B =]-\infty, 0]$ alors $\sup A = \sup B = 0$, mais $AB = [0, +\infty[$ et $\sup(AB)$ n'existe pas dans $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 6 ▲

Soient k un entier naturel non nul et n un entier naturel supérieur ou égal à k .

$$\begin{aligned} \binom{n+10 \times k!}{k} &= \frac{(n+10 \times k!)(n+10 \times k! - 1) \dots (n+10 \times k! - k + 1)}{k!} \\ &= \frac{n(n-1) \dots (n-k+1) + 10 \times k! \times K}{k!} \quad (\text{pour un certain entier } K) \\ &= \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} + 10K = \binom{n}{k} + 10K. \end{aligned}$$

La différence $\binom{n+10 \times k!}{k} - \binom{n}{k}$ est donc divisible par 10. Par suite, $\binom{n+10 \times k!}{k}$ et $\binom{n}{k}$ ont même chiffre des unités en base 10. Ainsi, $\forall n \geq k, u_{n+10 \times k!} = u_n$ et donc la suite u est donc $10k!$ -périodique. On sait alors que

$$0, u_k u_{k+1} u_{k+2} \dots \text{ est rationnel.}$$

Correction de l'exercice 7 ▲

Pour $n = 1$, $\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{2}$. L'identité proposée est donc vraie pour $n = 1$.

Soit $n \geq 1$. Supposons que $\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

On a alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2(n+1)-1} \frac{(-1)^k}{k+1} &= \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(n+1)} \\ &= \frac{1}{n+1} + \sum_{k=n+2}^{2n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2(n+1)} = \sum_{k=n+2}^{2n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+2} = \sum_{k=n+2}^{2(n+1)} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que $\forall n \geq 1$, $\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ (identité de CATALAN).

Correction de l'exercice 8 ▲

1. Si les b_k sont tous nuls, l'inégalité est claire. Sinon, pour x réel, posons

$$f(x) = \sum_{k=1}^n (a_k + xb_k)^2 = \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right) x^2 + 2\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right) x + \sum_{k=1}^n a_k^2.$$

f est un trinôme du second degré de signe constant sur $\mathbb{R}$. Son discriminant réduit est donc négatif ou nul ce qui fournit :

$$0 \geq \Delta' = \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right),$$

ou encore $|\sum_{k=1}^n a_k b_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}$, qui est l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ.

2.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 &= \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^n a_k b_k + \sum_{k=1}^n b_k^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| + \sum_{k=1}^n b_k^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} + \sum_{k=1}^n b_k^2 \quad (\text{CAUCHY-SCHWARZ}) \\ &= \left(\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} \right)^2 \end{aligned}$$

et donc, $\sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}$, qui est l'inégalité de MINKOWSKI.

Correction de l'exercice 9 ▲

Pour $x \geq 1$, $x + 2\sqrt{x-1} = x - 1 + 2\sqrt{x-1} + 1 = (\sqrt{x-1} + 1)^2 \geq 0$. De même, $x - 2\sqrt{x-1} = (\sqrt{x-1} - 1)^2 \geq 0$. Donc, si on pose $f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$, $f(x)$ existe si et seulement $x \geq 1$ et pour $x \geq 1$, $f(x) = \sqrt{x-1} + 1 + |\sqrt{x-1} - 1|$. Par suite,

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} + |\sqrt{x-1} - 1| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 0 \text{ et } \sqrt{x-1} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 0 \text{ et } \sqrt{x-1} = 1,$$

ce qui est impossible. L'équation proposée n'a pas de solution.

Correction de l'exercice 10 ▲

1. Soit G un sous groupe non nul de $(\mathbb{R}, +)$ ($\{0\} = 0\mathbb{Z}$ est du type voulu). Il existe dans G un réel non nul x_0 . Puisque G est un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$, le réel $-x_0$ est aussi dans G et l'un des deux réels x_0 ou $-x_0$ est strictement positif. Soit alors $A = G \cap]0, +\infty[$. D'après ce qui précède, A est une partie non vide et minorée (par 0) de $\mathbb{R}$. A admet donc une borne inférieure que l'on note a .

1er cas. Si $a = 0$, montrons dans ce cas que G est dense dans $\mathbb{R}$ (c'est par exemple le cas de $(\mathbb{Q}, +)$). Soient x un réel et ε un réel strictement positif. Puisque $\inf A = \inf(G \cap]0, +\infty[) = 0$, il existe dans G un élément g tel que $0 < g < \varepsilon$. Puis il existe un entier relatif n tel que $ng \leq x - \varepsilon < (n+1)g$ à savoir $n = E\left(\frac{x-\varepsilon}{g}\right)$. Soit $y = (n+1)g$. D'une part, y est dans G (si $n+1 = 0$, $(n+1)g = 0 \in G$, si $n+1 > 0$, $(n+1)g = g + g + \dots + g \in G$ et si $n+1 < 0$, $(n+1)g = -(-(n+1)g) \in G$) et d'autre part

$$x - \varepsilon < (n+1)g = ng + g < x - \varepsilon + \varepsilon = x.$$

On a montré que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists y \in G / x - \varepsilon < y < x$ et donc

si $G \neq \{0\}$ et si $\inf(G \cap]0, +\infty[) = 0$, G est dense dans $\mathbb{R}$.

2ème cas. Si $a > 0$, montrons dans ce cas que $G = a\mathbb{Z}$. Pour cela, montrons tout d'abord que a est dans G . Mais si a n'est pas élément de G , par définition de a , il existe un réel x dans $G \cap]a, 2a[$ puis il existe un réel y dans $G \cap]a, x[$. Le réel $x - y$ est alors dans $G \cap]0, a[$ ce qui est impossible. Donc a est élément de G . Montrons alors que $G = a\mathbb{Z}$. Puisque a est dans G , G contient encore $a + a = 2a$, puis $a + a + a = 3a$ et plus généralement tous les na , $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque G contient aussi les opposés de ces nombres et également $0 = 0 \times a$, G contient finalement tous les na , $n \in \mathbb{Z}$. On a ainsi montré que $a\mathbb{Z} \subset G$. Réciproquement, soit x un élément de G et $n = E\left(\frac{x}{a}\right) (\in \mathbb{Z})$. Alors, $n \leq \frac{x}{a} < n+1$ puis $0 \leq x - na < a$. Or, x est dans G et na est dans G . Donc, $x - na$ est dans $G \cap [0, a[= \{0\}$, puis $x = na \in a\mathbb{Z}$. On a ainsi montré l'inclusion contraire et donc $G = a\mathbb{Z}$.

si $\inf(G \cap]0, +\infty[) = a > 0$, $G = a\mathbb{Z}$.

2. Soit $G = \{a + b\sqrt{2}, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$. On vérifie aisément que G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Maintenant, la formule du binôme de NEWTON montre que, pour chaque entier naturel n ,

$$(\sqrt{2} - 1)^n \in G \cap]0, +\infty[.$$

Or, $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{2} - 1)^n = 0$. Ceci montre que $\inf(G \cap]0, +\infty[) = 0$ et donc que G est dense dans $\mathbb{R}$.

3. (a) Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $G_f = \{T \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)\}$. 0 est élément de G_f (et c'est même le seul élément de G_f si f n'est pas périodique) et donc $G \neq \emptyset$. De plus, si T et T' sont deux éléments de G alors, pour x réel donné :

$$f(x + (T - T')) = f((x - T') + T) = f(x - T') = f(x - T' + T') = f(x),$$

et $T - T'$ est encore un élément de G . On a montré que

G_f est un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

- (b) Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant 1 et $\sqrt{2}$ pour périodes. G_f contient encore tous les nombres de la forme $a + b\sqrt{2}$, $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ et est donc dense dans $\mathbb{R}$. Montrons que si de plus f est continue sur $\mathbb{R}$, f est constante. Soit x un réel quelconque. On va montrer que $f(x) = f(0)$. Remarque préliminaire : soit T une période strictement positive de f . Il existe un entier relatif p tel que $pT \leq x < (p+1)T$ à savoir $p = E\left(\frac{x}{T}\right)$. On a alors $f(x) = f(x - pT)$ avec $0 \leq x - pT < T$. Soit alors $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque G_f est dense dans $\mathbb{R}$, il existe dans G_f un réel T_n tel que $0 < T_n < \frac{1}{n}$ (ce qui implique que $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = 0$). Mais alors, puisque $0 < x - E\left(\frac{x}{T_n}\right)T_n < T_n$, on a aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} x - E\left(\frac{x}{T_n}\right)T_n = 0$. Maintenant, la suite $\left(f\left(x - E\left(\frac{x}{T_n}\right)T_n\right)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante égale à $f(x)$ et donc convergente vers $f(x)$. On en déduit que

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(x - E\left(\frac{x}{T_n}\right) T_n\right) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(x - E\left(\frac{x}{T_n}\right) T_n\right)\right) \quad (\text{par continuité de } f \text{ en } 0)$$

$$= f(0)$$

ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 11 ▲

Soient x un réel et ε un réel strictement positif. On a $\sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{x+\varepsilon}$. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe un rationnel r tel que $\sqrt[3]{x} < r < \sqrt[3]{x+\varepsilon}$ et donc tel que $x < r^3 < x + \varepsilon$, par stricte croissance de la fonction $t \mapsto t^3$ sur $\mathbb{R}$. On a montré que

$\{r^3, r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.