1. Nombres réels

1.1 Définition axiomatique du corps des réels

On admet l'existence d'un ensemble $\mathbb{R}$ qui contient $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$. On rappelle que $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\},$$

$\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\},$$

et $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{n}{p} : n \in \mathbb{Z},\ p \in \mathbb{N} \text{ avec } p \neq 0\right\}.$$

$\mathbb{R}$ est appelé **ensemble des nombres réels**. Si $a \in \mathbb{R}$ on dit que a est un **nombre réel** (ou en abrégé a est un **réel**). Le but de ce chapitre n'est pas de construire l'ensemble des nombres réels mais d'en donner une définition axiomatique. Plus précisément nous admettons son existence et nous donnons les propriétés qui le régissent. Avant d'énoncer les propriétés de $\mathbb{R}$, nous allons d'abord donner quelques définitions.

Définition 1.1 On dit que A est un **sous-ensemble** de $\mathbb{N}$ (resp. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$) si tout élément de A est élément de $\mathbb{N}$ (resp. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$).

Définition 1.2 On dit qu'un ensemble est **vide** s'il ne contient aucun élément. On note **$\emptyset$ l'ensemble vide** et on écrit $A = \emptyset$ pour dire que A est un ensemble vide.

Notations 1.1 Soient A et B deux sous-ensembles non vides de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$.

a) On écrit $x \in A$ pour dire que x est un élément de A (ou x appartient à A).

b) On note $A \cap B$ l'ensemble des éléments qui sont à la fois dans A et B. On lit A inter B.

c) On note $A \cup B$ l'ensemble des éléments qui sont dans A ou dans B. On lit A union B.

d) $\complement_A B = A \setminus B$ l'ensemble des éléments qui sont dans A et qui ne sont pas dans B. On lit complémentaire de B dans A ou A privé de B.

e) On écrit $A \subset B$ pour dire que tout élément de A est élément de B. On lit A est inclus dans B ou A est un sous ensemble de B.

f) On note $A \supset B$ si et seulement si $B \subset A$. On lit A contient B.

g) On écrit $A = B$ si et seulement si $A \subset B$ et $B \subset A$. On lit $A = B$.

h) On écrit $A \subseteq B$ si et seulement si $A \subset B$ ou $A = B$. On lit A est inclus dans B ou égal à B.

i) On écrit $A \subsetneq B$ si et seulement si $A \subset B$ et il existe au moins un élément de B qui n'est pas dans A. On lit A est strictement inclus dans B.

Définition 1.3 On appelle ensemble **des nombres irrationnels** l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Un élément de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est appelé **nombre irrationnel**.

Avec les notations précédentes on a

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

et

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

1.1.1 Le corps des réels $\mathbb{R}$

Dans la suite nous écrirons $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ (resp. $(x,y) \in \mathbb{R}^2$) pour dire que x, y et z sont des éléments de $\mathbb{R}$ (resp. x et y sont des éléments de $\mathbb{R}$).

Axiome 1.1 L'ensemble des réels $\mathbb{R}$ muni de l'addition $+$ et de la multiplication $\times$ est un corps commutatif. C'est-à-dire que les propriétés suivantes sont satisfaites :

P1 : **Propriétés de l'addition**

$$x + y \in \mathbb{R}, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

et

a) commutativité : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x + y = y + x$;
b) associativité : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $(x+y)+z = x+(y+z)$;
c) 0 est un élément neutre de $\mathbb{R}$ pour l'addition : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x + 0 = x$;
d) tout $x \in \mathbb{R}$ admet un unique opposé $y \in \mathbb{R}$ tel que $x + y = 0$. Il est noté $-x$.

P2 : **Propriétés de la multiplication**

$$x \times y \in \mathbb{R}, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

et

e) commutativité : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x \times y = y \times x$;
f) associativité : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$;
g) 1 est un élément neutre de $\mathbb{R}$ pour la multiplication : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \times 1 = x$;
h) tout $x \in \mathbb{R}$ **différent de** 0 admet un unique inverse $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tel que $x \times y = 1$. Il est noté x^{-1} ou $\dfrac{1}{x}$.

P3 : Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition

i) Distributivité : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $x \times (y+z) = x \times y + x \times z$.

Il est facile de vérifier que $\mathbb{Q}$ est un corps par contre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ ne le sont pas. En effet dans $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ les éléments différents de 1 ne sont inversibles. Plus précisément si $n \in \mathbb{Z}$ (ou $\mathbb{N}$) avec $n \neq 1$ alors il n'existe aucun entier p (relatif ou naturel) tel que $n \times p = 1$.

1.1.2 L'ordre dans $\mathbb{R}$

La relation $\leq$ (inférieur ou égal) est une **relation d'ordre** sur $\mathbb{R}$ c'est-à-dire qu'elle est :

- réflexive : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \leq x$;
- transitive : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,
$$x \leq y \text{ et } y \leq z \Longrightarrow x \leq z\,;$$
- antisymétrique : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$$x \leq y \text{ et } y \leq x \Longleftrightarrow x = y.$$

$\mathbb{R}$ muni de la relation d'ordre $\leq$ est totalement ordonné c'est-à-dire que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a
$$\text{soit } x \leq y, \quad \text{soit } y \leq x.$$

Définition 1.4 On dit que $a \in \mathbb{R}$ est positif si et seulement si $0 \leq a$. L'ensemble des nombre réels positifs est noté $\mathbb{R}_+$.

La relation d'ordre $\leq$ sur $\mathbb{R}$ possède les propriétés suivantes :

- compatibilité avec l'addition : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,
$$x \leq y \Longrightarrow x + z \leq y + z\,;$$
- compatibilité avec la multiplication avec un nombre réel positif : $\forall (x,y,z)^3 \in \mathbb{R}$,
$$x \leq y \text{ et } 0 \leq z \Longrightarrow zx \leq zy.$$

Définition 1.5

a) On dit que $a \in \mathbb{R}$ est négatif si et seulement si $a \leq 0$. L'ensemble des nombre réels négatifs est noté $\mathbb{R}_-$.

b) On dit que $a \in \mathbb{R}$ est strictement négatif si et seulement si $a \leq 0$ et $a \neq 0$. On note $a < 0$. L'ensemble des nombre réels strictement négatifs est noté $\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_- \setminus \{0\}$.

c) On dit que x est strictement inférieur à y si et seulement si $x \leq y$ et $x \neq y$. On note $x < y$.

d) On dit que $a \in \mathbb{R}$ est strictement positif si et seulement si $0 \leq a$ et $0 \neq a$. On note $a > 0$. L'ensemble des nombre réels strictement positifs est noté $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$.

e) On dit que x est supérieur ou égal à y si et seulement si $y \leq x$. On note $x \geq y$.

f) On dit que x est strictement supérieur à y si et seulement si $y \leq x$ et $y \neq x$. On note $x > y$.

Définition 1.6 **(Majorant/Minorant)** Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$.

a) Un réel M est un majorant de A si $x \leq M$ pour tout $x \in A$. Si un tel réel existe on dit que A est majoré par M ou encore que M majore A.

b) Un réel m est un minorant de A si $m \leq x$ pour tout $x \in A$. Si un tel réel existe on dit que A est minoré par m ou encore que m minore A.

c) On dit que A est borné s'il admet un majorant et un minorant.

Si A admet un majorant alors il admet une infinité de majorants dans $\mathbb{R}$. Il suffit de remarquer que si M est un majorant de A alors tout $M' > M$ est encore un majorant de A.
De même si A admet un minorant alors il admet une infinité de minorants dans $\mathbb{R}$.

Exemple 1.1 L'ensemble $K = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$ admet 0 comme minorant et 1 comme majorant. En effet on a

$$0 \leq \frac{1}{n}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

et

$$\frac{1}{n} \leq 1, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

K est borné car car il admet un majorant 1 et un minorant 0.

Axiome 1.2 **(de la borne supérieure)** Soit A un sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbb{R}$. Alors l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément **dans** $\mathbb{R}$.

1.2 Quelques propriétés de $\mathbb{R}$

- Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, s'il n'y a aucune ambiguïté, nous écrirons xy au lieu de $x \times y$ pour désigner la multiplication de x par y.
- Si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on écrira $x-y$ plutôt que $x+(-y)$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on pose $x^0 = 1$.
- Si $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ on pose
$$x^n = \underbrace{x \cdots x}_{\text{n facteurs}}$$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $x \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$ on pose $x^{-n} = (x^n)^{-1}$.
- Si $\mathbb{F} = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ on note $\mathbb{F}^* = \mathbb{F} \setminus \{0\}$.

Propriétés 1.1 Les propriétés suivantes sont vérifiées dans $\mathbb{R}$.

i) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \times 0 = 0$.

ii) $\forall x \in \mathbb{R}$ et $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $x^{n+p} = x^n x^p$ et $(x^n)^p = x^{np}$.

iii) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, $(xy)^n = x^n y^n$.

iv) $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $(-x)^{-1} = -x^{-1}$.

v) $\forall x, y \in \mathbb{R}^*$, $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$.

vi) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $xy = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ ou $y = 0$.

Preuve. **La preuve est laissée en exercice !** ∎

1.3 Maximum et minimum d'un ensemble

Soit $\mathbb{F} = \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ on pose

$$\mathbb{F}_+ = \{x \in \mathbb{F} : x \geq 0\} \text{ et } \mathbb{F}_- = \{x \in \mathbb{F} : x \leq 0\}.$$

On définit

$$\mathbb{F}_+^* = \mathbb{F}_+ \setminus \{0\} = \{x \in \mathbb{F} : x > 0\} \text{ et } \mathbb{F}_-^* = \mathbb{F}_- \setminus \{0\} = \{x \in \mathbb{F} : x < 0\}.$$

Définition 1.7 **(Maximum/Minimum)** Soit A un sous ensemble non vide de $\mathbb{F}$.

a) On dit que M_0 est **le plus grand élément de** A (ou maximum de A) si et seulement si $M_0 \in A$ et M_0 est un majorant de A. S'il existe on le note $\max(A)$.

b) On dit que m_0 est **le plus petit élément de** A (ou minimum de A) si et seulement si $m_0 \in A$ et m_0 est un minorant de A. S'il existe on le note $\min(A)$.

a) Le maximum (resp. minimum) d'un sous ensemble non vide A de $\mathbb{R}$, s'il existe, est unique. En effet si M_0 et M_0' sont deux maximums de A alors d'après la définition 1.7 on a $M_0 \leq M_0'$ (car $M_0 \in A$) et $M_0' \leq M_0$ (car $M_0' \in A$) ce qui entraîne que $M_0 = M_0'$. On fait le même raisonnement pour le minimum.

b) Le maximum (resp. minimum) n'existe pas toujours même si l'ensemble est majoré (resp. minoré).

Exemple 1.2 L'ensemble $K = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$ admet un maximum mais n'admet pas de minimum.
On a déjà vu que 1 est un majorant de K. Comme $1 \in K$ il s'ensuit que $\max(K) = 1$.
Supposons que K admet un minimum que l'on va noter m_0. Etant donné que $m_0 \in K$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $m_0 = \frac{1}{p}$. Or $m_0 = \frac{1}{p}$ est un minimum de K signifie aussi que

$$\frac{1}{p} \leq \frac{1}{n}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

en particulier on aura $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{p+1}$. Ce qui est impossible. Par conséquent K n'admet pas de minimum.

1.4 Borne supérieure, borne inférieure d'un ensemble

Définition 1.8 **(Borne supérieure/ Borne inférieure)** Soit A un sous ensemble non vide de $\mathbb{R}$.

a) On appelle borne supérieure de A dans $\mathbb{R}$, si elle existe, le plus petit des majorants de A dans $\mathbb{R}$ et on la note $\sup(A)$. Si A n'est pas majoré on pose $\sup(A) = +\infty$.

b) On appelle borne inférieure de A dans $\mathbb{R}$, si elle existe, le plus grand des minorants de A dans $\mathbb{R}$ et on la note $\inf(A)$. Si A n'est pas minoré on pose $\inf(A) = -\infty$.

Exemple 1.3 L'ensemble $K = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure dans $\mathbb{R}$. En effet 1 est majorant de K et comme $1 \in K$ alors tout majorant M de K vérifie $M \geq 1$. Par conséquent $\sup(K) = 1$.
Nous montrerons plus loin que 0 est la borne inférieure de K.

Nous avons vu que $K = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$ est

a) borné ;

b) minoré mais n'admet pas de minimum ;

c) minoré et admet une borne inférieure ;

d) majoré, admet une borne supérieure et un maximum.

On voit ainsi qu'un ensemble minoré peut admettre une borne inférieure sans admettre un minimum.

Proposition 1.1 Soit A un sous ensemble non vide de $\mathbb{R}$. Alors

i) $m = \min(A) \Longrightarrow m = \inf(A) \Longrightarrow m$ est un minorant de A. La réciproque est fausse.

ii) $M = \max(A) \Longrightarrow M = \sup(A) \Longrightarrow M$ est un majorant de A. La réciproque est fausse.

Preuve. **Preuve de *i)*** : Supposons que $m = \min(A)$. Alors par définition $m \in A$ et m est un minorant de A. Soit m' est un minorant quelconque de A alors on a

$$m' \leq m,$$

car $m \in A$. Par conséquent m est le plus grand des minorants de A c'est-à-dire $m = \inf(A)$.
Supposons que $m = \inf(A)$. Alors m est par définition un minorant de A.
Preuve de *ii)* : La preuve est similaire à celle de *i)*. Elle est laissée en exercice. ∎

Proposition 1.2 Soit A un sous ensemble non vide de $\mathbb{R}$. Alors

i) $M = \sup(A) \Longleftrightarrow (M$ est un majorant de $A)$ et $(\forall \varepsilon > 0\ \exists a \in A : M - \varepsilon < a)$.

ii) $m = \inf(A) \Longleftrightarrow (m$ est un minorant de $A)$ et $(\forall \varepsilon > 0\ \exists a \in A : a < m + \varepsilon)$.

Preuve. **Preuve de *i)*** : Supposons que $M = \sup(A)$. Alors M est un majorant de A. C'est aussi le plus petit des majorants de A. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Puisque $M - \varepsilon < M$ il est claire que $M - \varepsilon$ ne peut pas être un majorant de A (car sinon il serait un majorant plus petit que M). Comme $M - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A alors il existe au moins $a \in A$ tel que $a > M - \varepsilon$.
Supposons maintenant que M est un majorant de A et

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists a \in A : M - \varepsilon < a.$$

Pour montrer que $M = \sup(A)$ il suffit de montrer que M est le plus petit des majorants de A. Supposons qu'il existe un majorant M' de A tel que $M' < M$. En posant $\varepsilon = M - M' > 0$ on sait qu'il existe $a \in A$ tel que

$$M - (M - M') < a$$

c'est-à-dire

$$M' < a$$

ce qui contredit le fait que M' est un majorant de A. On conclut alors que tous les majorants de A sont supérieurs ou égaux à M. Par conséquent M est le plus petit des majorants de A c'est-à-dire $M = \sup(A)$.
Preuve de *ii)* : La preuve se fait de la même manière qu'en *i)*. À faire en exercice. ∎

Définition 1.9 Un corps $\mathbb{K}$ ordonné possède **la propriété de la borne supérieure** si tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{K}$ majoré admet une borne supérieure appartenant à $\mathbb{K}$.

Lemme 1.1 Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$. On pose

$$-A = \{-x : x \in A\}.$$

Alors on a les propriétés suivantes

i) Si A admet une borne supérieure alors $-A$ admet une borne inférieure avec $\inf(-A) = -\sup(A)$.

ii) Si A admet une borne inférieure alors $-A$ admet une borne supérieure avec $\sup(-A) = -\inf(A)$.

Preuve. **Preuve de *i)*** : Supposons que A admet une borne supérieure et posons $M = \sup(A)$. On a alors

$$x \leq M, \ \forall x \in A \Longrightarrow -x \geq -M, \ \forall x \in A$$

d'où $-M$ est un minorant de $-A$. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Puisque $M = \sup(A)$ il existe $a \in A$ tel que

$$M - \varepsilon < a \Longrightarrow -M + \varepsilon > -a.$$

On a donc démontré que $-M$ est un minorant de $-A$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $-a \in -A$ tel que $-a < -M + \varepsilon$. La Proposition 1.2 entraîne que $\inf(-A) = -M = -\sup(A)$. ∎

Faire la **preuve de *ii)*** en exercice.

Théorème 1.1 **(de la borne supérieure)** Tout sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbb{R}$ (resp. minoré) admet une borne supérieure (resp. borne inférieure) dans $\mathbb{R}$.

Preuve. L'affirmation tout ensemble non vide et majoré de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$ est une conséquence de l'axiome de la borne supérieure. Soit maintenant A un sous-ensemble non vide et minoré de $\mathbb{R}$. Posons $B = -A$. Alors il est claire que B est majoré. Par conséquent B admet une borne supérieure et on a $\sup(B) = \sup(-A)$. En utilisant le lemma 1.1 on en déduit que $-B$ admet une borne inférieure avec

$$\inf(-B) = -\sup(B).$$

Le résultat s'ensuit car $-B = A$. ∎

Le théorème 1.1 implique que $\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne supérieure.

1.5 Quelques conséquences du théorème de la borne supérieure

Lemme 1.2 Tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Preuve. Soit B un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$. Donc on a

$$b \geq 0, \ \forall b \in B$$

c'est-à-dire que B est minoré par 0. D'après le théorème de la borne supérieure, B admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$. Posons $m = \inf(B)$. Puisque $m = \inf(B)$, en posant $\varepsilon = 1$, il existe $b_1 \in B$ tel que

$$b_1 < m + 1 \Longrightarrow b_1 - 1 < m.$$

Par conséquent on a

$$b_1 - 1 < m \leq b, \ \forall b \in B \Longrightarrow b_1 - 1 < b \ \forall b \in B$$

et comme les éléments de B sont des entiers naturels il en résulte que

$$b_1 \leq b, \ \forall b \in B.$$

Donc b_1 est le plus petit élément de B. On peut noter qu'on a forcément $m = b_1$. En effet on a

$$b_1 = \min(B) \Longrightarrow b_1 = \inf(B) \Longrightarrow b_1 = m.$$

■

> Lemme 1.3 Tout sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

Preuve. Soit B un sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbb{N}$. Le théorème de la borne supérieure implique que B admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$. Posons $M = \sup(B)$. Comme $M = \sup(B)$, en posant $\varepsilon = 1$, il existe $b_1 \in B$ tel que

$$M - 1 < b_1 \Longrightarrow M < b_1 + 1.$$

Par conséquent on a

$$b \leq M < b_1 + 1, \ \forall b \in B \Longrightarrow b < b_1 + 1 \ \forall b \in B$$

et puisque les éléments de B sont des entiers naturels il en résulte que

$$b \leq b_1, \ \forall b \in B.$$

Donc b_1 est le plus grand élément de B. Comme précédemment on peut remarquer qu'on a forcément $M = b_1$. En effet on a

$$b_1 = \max(B) \Longrightarrow b_1 = \sup(B) \Longrightarrow b_1 = M.$$

■

Une conséquence importante du théorème 1.1 est le lemme suivant.

> Lemme 1.4 $\mathbb{R}$ est **archimédien** c'est-à-dire que pour tout $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $na > b$.

Preuve. Soit $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ quelconque. Si $b \leq 0$ alors le lemme est trivial. Faisons la démonstration avec $b > 0$. Considérons l'ensemble

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N} : n \leq \frac{b}{a} \right\}.$$

Observons que A est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ car $0 \in A$. De plus A est majoré par $\frac{b}{a}$. On en déduit donc que A admet un plus grand élément que nous noterons n_0. L'entier n_0 étant le plus grand élément de A, l'entier $n_0 + 1$ n'est donc pas élément de A. Par conséquent

$$n_0 + 1 > \frac{b}{a} \Longrightarrow (n_0 + 1)a > b$$

et le résultat s'ensuit. ■

Suite de l'exemple 1.3 : Montrons que $0 = \inf(K)$. Nous allons faire un raisonnement par l'absurde. Supposons que K admet une borne inférieure $m \neq 0$. Puisque 0 est un minorant de K et m est le plus grand des minorants de K on a forcément $m \geq 0$. Comme première conséquence on a

$$m \geq 0 \text{ et } m \neq 0 \Longrightarrow m > 0.$$

Etant donné que $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nm > 1$. D'où $n \in \mathbb{N}^*$ et $m > \frac{1}{n}$ ce qui est impossible car $\frac{1}{n} \in K$. Par conséquent $0 = \inf(K)$.

> Lemme 1.5 Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors il existe un unique $m \in \mathbb{Z}$ tel que
>
> $$m \leq x < m + 1.$$
>
> En particulier m est positif ou nul (resp. négatif ou nul) si x est positif ou nul (resp. négatif ou nul).

Preuve. **Existence :** Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque. Supposons que $x \geq 0$. En appliquant le lemme d'Archimède avec $a = 1$ et $b = x$ on en déduit qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \times 1 > x$. Considérons l'ensemble

$$A = \{p \in \mathbb{N}^* : p > x\}.$$

A est un sous-ensemble non vide et minoré de $\mathbb{N}$ car $n \in A$. Par conséquent A admet un plus petit élément que nous allons noter m_0. Donc $m_0 \in \mathbb{N}^*$ et satisfait

$$m_0 > x.$$

Puisque $m_0 \in \mathbb{N}^*$ on a $m_0 - 1 \geq 0$ et ne peut pas être élément de A car $m_0 - 1 < m_0$. Il en résulte que

$$m_0 - 1 \leq x,$$

d'où

$$m_0 - 1 \leq x < m_0.$$

En posant $m = m_0 - 1 \geq 0$ on obtient

$$m \leq x < m + 1.$$

Supposons maintenant que $x < 0$. Comme $-x > 0$ nous avons montré qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$k \leq -x < k + 1$$

d'où

$$-k-1 < x \leq -k.$$

Si $x = -k$ alors en posant $m = -k \leq 0$ on obtient

$$m \leq x < m+1.$$

Si $x < -k$ alors on a $-k-1 < x < -k$. Dans ce cas en posant $m = -k-1 \leq 0$ on a

$$m < x < m+1 \Longrightarrow m \leq x < m+1.$$

Unicité : Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons qu'il existe $m_1 \in \mathbb{Z}$ et $m_2 \in \mathbb{Z}$ satisfaisant

$$m_1 \leq x < m_1 + 1 \text{ et } m_2 \leq x < m_2 + 1.$$

Alors il est facile de voir que

$$m_1 \leq x < m_2 + 1 \Longrightarrow m_1 < m_2 + 1 \Longrightarrow m_1 \leq m_2$$

et

$$m_2 \leq x < m_1 + 1 \Longrightarrow m_2 < m_1 + 1 \Longrightarrow m_2 \leq m_1$$

d'où $m_1 = m_2$. ■

Définition 1.10 Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle **partie entière de** x l'unique entier relatif $m \in \mathbb{Z}$ vérifiant

$$m \leq x < m+1.$$

On note la partie entière de x par $E(x)$ ou $[x]$.

Lemme 1.6 $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Plus précisément pour tout $c, d \in \mathbb{R}$ avec $c < d$ il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $c < q < d$.

Preuve. Soient $c, d \in \mathbb{R}$ tels que $c < d$. On sait que

$$kc < [kc] + 1 \leq kc + 1, \ \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Posons $a = d - c > 0$ et $b = 1$. Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$n(d-c) > 1 \Longleftrightarrow nd > nc + 1.$$

D'où

$$nc < [nc] + 1 \leq nc + 1 < nd \Longrightarrow c < \frac{[nc]+1}{n} < d.$$

■

1.6 Les intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 1.11 On appelle intervalle de $\mathbb{R}$ tout sous-ensemble I tel que si $a, b \in I$ et $a \leq x \leq b$ alors $x \in I$.

La propriété de la borne supérieure permet de décrire tous les intervalles I de $\mathbb{R}$ contenant plus d'un élément. En effet si I est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ borné contenant plus d'un élément alors il admet une borne supérieure et une borne inférieure distinctes. On a les possibilités suivantes :

- Intervalle fermé ou segment : $I = [a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$;
- Intervalle ouvert : $I =]a,b[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$;
- Intervalle semi-ouvert à droite : $I = [a,b[:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$;
- Intervalle semi-ouvert à gauche : $I =]a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$.

Si I est un intervalle non borné alors on a les possibilités suivantes:

- Demi-droite fermée à droite : $I =]-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$;
- Demi-droite ouverte à droite : $I =]-\infty, b[:= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$;
- Demi-droite fermée à gauche : $I = [a, +\infty[:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$;
- Demi-droite ouverte à gauche : $I =]a, +\infty[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$;
- Droite réelle : $I = \mathbb{R} :=]-\infty, +\infty[$.

Les singletons (i.e. les ensembles du type $\{a\}$ avec $a \in \mathbb{R}$) sont aussi des intervalles de $\mathbb{R}$.

Définition 1.12 Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit que A est un ouvert de $\mathbb{R}$ si et seulement si au moins une des propriétés suivantes est vérifiée

i) $A = \emptyset$;

ii) $A = \mathbb{R}$;

iii) pour tout $x \in A$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset A$.

Proposition 1.3 Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Alors les intervalles

$$]-\infty, b[,\ ]a,b[\text{ et }]a,+\infty[$$

sont des ouverts de $\mathbb{R}$.

Preuve. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrons que $]a,b[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. Soit $x \in]a,b[$ quelconque. Alors on a

$$a < x < b \Longrightarrow x - a > 0 \text{ et } b - x > 0.$$

Posons

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{x-a}{2}, \frac{b-x}{2}\right\} > 0.$$

Alors on a
$$\varepsilon \leq \frac{b-x}{2} \text{ et } \varepsilon \leq \frac{x-a}{2} \Longrightarrow \varepsilon \leq \frac{b-x}{2} \text{ et } -\varepsilon \geq -\frac{x-a}{2}$$
d'où
$$x-\varepsilon \geq x-\frac{x-a}{2}=\frac{x+a}{2}>a$$
et
$$x+\varepsilon \leq x+\frac{b-x}{2}=\frac{b+x}{2}<b$$
ce qui entraîne que
$$a<x-\varepsilon<x+\varepsilon<b \Longrightarrow]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset]a,b[.$$
Montrons que $]-\infty,b[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. Soit $x\in]-\infty,b[$ quelconque. En posant
$$\varepsilon=\frac{b-x}{2}>0$$
on obtient
$$x+\varepsilon=x+\frac{b-x}{2}=\frac{b+x}{2}<b$$
d'où
$$-\infty<x-\varepsilon<x+\varepsilon<b \Longrightarrow]x-\varepsilon,x+\varepsilon[\subset]-\infty,b[.$$
Faire en exercice la démonstration pour $]a,+\infty[$. ∎

Proposition 1.4 Une réunion quelconque d'ouverts de $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Preuve. Soit Ω une famille d'indices. C'est-à-dire que Ω peut être $\mathbb{N}$, une partie de $\mathbb{N}$, l'ensemble des lettres de l'alphabet ou tout autre ensemble qui permet d'indexer. Soit A_k, $k\in\Omega$ une famille d'ouverts. Posons
$$A=\bigcup_{k\in\Omega} A_k$$
et montrons que A est un ouvert de $\mathbb{R}$. Si A est l'ensemble vide ou $\mathbb{R}$ alors il n'y a rien à faire. Supposons que $A\neq\emptyset$ et $A\neq\mathbb{R}$. Soit $x\in A$. Alors il existe $k\in\Omega$ tel que $x\in A_k$. Comme A_k est un ouvert de $\mathbb{R}$, il existe $\varepsilon>0$ tel que $]x-\varepsilon,x+\varepsilon[\subset A_k$. Par conséquent
$$]x-\varepsilon,x+\varepsilon[\subset A$$
car $A_k\subset A$. ∎

Définition 1.13 Soit F un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit que F est un fermé de $\mathbb{R}$ si et seulement si $\mathbb{R}\setminus F$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Les ensembles $\mathbb{R}$ et $\emptyset$ sont des ensembles qui sont à la fois ouverts et fermés. Ce sont les seuls qui vérifient cette propriété dans $\mathbb{R}$.

Proposition 1.5 Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Alors les intervalles

$$\{a\},\ ]-\infty, b],\ [a, b] \text{ et } [a, +\infty[$$

sont des fermés de $\mathbb{R}$.

Preuve. Il suffit de remarquer que le complémentaire de chacun des intervalles cités est une réunion d'ouverts. ■

Proposition 1.6 Une intersection quelconque de fermés de $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

Preuve. Soit Ω une famille d'indices. Soit F_k, $k \in \Omega$ une famille de fermés. Posons

$$F = \bigcap_{k \in \Omega} F_k$$

et montrons que F est un fermé. Il suffit de remarquer que

$$\mathbb{R} \setminus F = \bigcup_{k \in \Omega} \mathbb{R} \setminus F_k$$

est une réunion quelconque d'ouverts. ■

Exercice 1.1 Démontrer les affirmations suivantes :

i) une intersection finie d'ouverts de $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$;

ii) une réunion finie de fermés de $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

1.7 Valeur absolue et distance

Définition 1.14 On appelle valeur absolue d'un réel x, et on note $|x|$, le réel

$$|x| = \max\{-x, x\}.$$

Propriétés 1.2 La valeur absolue satisfait les propriétés suivantes:

i) $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0$;

ii) $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = x$ si $x \geq 0$ et $|x| = -x$ si $x \leq 0$;

iii) $\forall x \in \mathbb{R}, |-x| = |x|$;

iv) $\forall x, y \in \mathbb{R}, |xy| = |x||y|$;

v) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \alpha \geq 0, |x| \leq \alpha \Longleftrightarrow -\alpha \leq x \leq \alpha$;

vi) Inégalité triangulaire : $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x + y| \leq |x| + |y|$;

vii) Inégalité triangulaire renversée : $\forall x, y \in \mathbb{R}, ||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Preuve. Les propriétés **i)** et **ii)** sont des conséquences directes de la définition de la valeur absolue. **Preuve de iii) :** Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$|-x| = \max\{-(-x), -x\} = \max\{x, -x\} = |x|.$$

Preuve de iv) : Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Si x ou y est nul alors $|x|$ ou $|y|$ est nulle et on a

$$|xy| = |0| = |x||y|.$$

Supposons maintenant qu'aucun des deux n'est nul. Alors ni $|x|$, ni $|y|$ n'est nulle. On a

$$\frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \frac{y}{|y|} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad y > 0 \\ -1 & \text{si} \quad y < 0 \end{cases}$$

d'où

$$\frac{x}{|x|}\frac{y}{|y|} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{x}{|x|}\frac{y}{|y|} = -1 \Longleftrightarrow |x||y| = xy \quad \text{ou} \quad |x||y| = -xy$$

et comme $|xy| = \max\{xy, -xy\}$ il en résulte que $|xy| = |x||y|$.
Preuve de v) : Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\alpha \geq 0$. On a

$$\begin{aligned} |x| \leq \alpha &\Longleftrightarrow \max\{-x, x\} \leq \alpha \\ &\Longleftrightarrow x \leq \alpha \ \text{ et } \ -x \leq \alpha \\ &\Longleftrightarrow x \leq \alpha \ \text{ et } x \leq -\alpha \\ &\Longleftrightarrow -\alpha \leq x \leq \alpha. \end{aligned}$$

Preuve de vi) : Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On sait que comparer deux quantités positives revient à comparer leur carré. Calculons $|x+y|^2$ et $(|x|+|y|)^2$. On a

$$|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

et

$$(|x|+|y|)^2 = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = x^2 + 2|x||y| + y^2$$

d'où

$$(|x|+|y|)^2 - |x+y|^2 = 2(|x||y| - xy) \geq 0 \Longrightarrow (|x|+|y|)^2 \geq |x+y|^2 \Longrightarrow |x|+|y| \geq |x+y|.$$

Preuve de vii) : Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Remarquons d'abord que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, ||x| - |y|| \leq |x-y| \Longleftrightarrow -|x-y| \leq |x| - |y| \leq |x-y|.$$

Or on a

$$|x| = |x - y + y| \leq |x-y| + |y| \Longrightarrow |x| - |y| \leq |x-y|$$

et

$$|y| = |-(x-y) + x| \leq |-(x-y)| + |x| \Longrightarrow -|x-y| \leq |x| - |y|.$$

Le résultat s'ensuit. ∎

Exercice **1.2** Montrer que :

i) pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$ on a i)-a) $|x| < \alpha \Longleftrightarrow -\alpha < x < \alpha$

i)-b) $|x| \geq \alpha \Longleftrightarrow x \leq -\alpha$ ou $x \geq \alpha$

ii) pour tout $x, y \in \mathbb{R}, ||x| - |y|| \leq |x + y|$.

Lemme 1.7 Si $x \in \mathbb{R}$ vérifie

$$|x| \leq \varepsilon, \ \forall \varepsilon > 0$$

alors $x = 0$.

Preuve. Nous allons faire un raisonnement par l'absurde. Pour cela supposons que $x \neq 0$ et vérifie

$$|x| \leq \varepsilon, \ \forall \varepsilon > 0.$$

Comme $x \neq 0$, $|x| > 0$. Donc en posant $\varepsilon = \dfrac{|x|}{2} > 0$ on obtient

$$|x| \leq \frac{|x|}{2} \Longrightarrow 1 \leq \frac{1}{2} \ \text{absurde.}$$

On a donc nécessairement $x = 0$. ■

Définition 1.15 On appelle distance dans $\mathbb{R}$ toute application $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ telle que

i) $d(x,x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$,

ii) $d(x,y) = d(y,x), \ \forall x, y \in \mathbb{R}$,

iii) $d(x,y) \leq d(y,z) + d(z,y), \ \forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

L'application $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$d(x,y) = |x - y|,$$

est une distante dans $\mathbb{R}$.