

CALCUL DE PRIMITIVES ET D'INTÉGRALES

Une fois n'est pas coutume, nous allons utiliser dans ce chapitre des résultats que nous admettrons pour l'instant, mais démontrerons plus tard, afin de nous intéresser à l'aspect calculatoire, et à la pratique du calcul de primitives.

Cela dit, il n'y aura pas de grandes surprises, les résultats que nous admettrons momentanément ayant déjà été admis en terminale. Il s'agit essentiellement des propriétés de l'intégrale, et du théorème stipulant que toute fonction continue sur un intervalle y admet des primitives.

Il faudra malgré tout que nous y revenions plus tard dans l'année, en donnant une définition plus rigoureuse de l'intégrale¹.

9.1 RAPPELS SUR LES PRIMITIVES ET LES INTÉGRALES

9.1.1 Le théorème fondamental de l'analyse

Définition 9.1 – Soit f une fonction continue sur un intervalle I . On appelle **primitive** de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$.

Proposition 9.2 : Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit F une primitive de f sur I . Alors une fonction $G : I \rightarrow \mathbf{R}$ est une primitive de f si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $G = F + \lambda$ (c'est-à-dire que pour tout $x \in I, G(x) = F(x) + \lambda$).

Démonstration. Il est évident qu'une fonction qui ne diffère de F que par l'ajout d'une constante possède encore f comme dérivée, et donc est une primitive de f .

Inversement, si G est une primitive de f , alors la fonction $G - F$ est dérivable sur I , et sa dérivée est $f - f = 0$.

Donc $G - F$ est constante : il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $G - F = \lambda \Leftrightarrow G = F + \lambda$. \square

Ce résultat a une conséquence immédiate : dès qu'il existe une primitive de f , il en existe une infinité.

On se gardera donc bien de parler de **la** primitive de f , mais bien **d'une** primitive de f .

Une question que l'on peut se poser est la suivante : quelles sont les fonctions qui admettent des primitives ? Autrement dit, parmi les fonctions continues, lesquelles sont des dérivées ? Une dérivée peut-elle être n'importe quelle fonction continue, ou possède-t-elle d'autres propriétés spécifiques aux dérivées ? Le théorème suivant répond très clairement à cette question :

Proposition 9.3 (Théorème fondamental de l'analyse, version 1) :
Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Alors f admet une² primitive F sur I .

Démonstration. Admis pour l'instant. \square

Le théorème fondamental de l'analyse garantit l'existence de primitives, mais il ne dit absolument pas comment les trouver.

De manière générale, le calcul de primitives est un problème difficile, contrairement au

¹ Qui nous permettra notamment de faire le lien avec la notion d'aire.

Remarque

La définition reste valable même si f n'est pas continue, mais dans ce chapitre, nous ne considérerons que des primitives de fonctions continues.

Soyons clair !

Le λ est une constante qui ne dépend pas de $x \in I$!

² Et donc une infinité.

calcul de dérivées, qui est totalement algorithmique : la connaissance des dérivées usuelles, et des formules pour la dérivée d'une somme, d'un produit et d'une composée permettent de calculer les dérivées d'un grand nombre de fonctions.

À titre d'exemple, la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ admet des primitives, puisqu'elle est continue, mais pourtant il n'est pas possible d'exprimer l'une de ces primitives à l'aide d'opérations sur les fonctions usuelles.

9.1.2 Fonctions de classe \mathcal{C}^1

Définition 9.4 – Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que f est de classe \mathcal{C}^1 si elle est dérivable sur I et que sa dérivée f' est continue sur I .

Un résultat qui a été mentionné au lycée, et qui sera bientôt prouvé affirme qu'une fonction dérivable est nécessairement continue. La réciproque est fautive, et vous connaissez la valeur absolue comme contre-exemple : elle est continue en 0, mais n'y est pas dérivable. Donc :

- ▶ vous ne direz pas «une fonction continue et dérivable», alors qu'il suffit de dire «une fonction dérivable»
- ▶ vous ne prouverez pas qu'une fonction est \mathcal{C}^1 en prouvant qu'elle est continue et dérivable. Il faudra prouver qu'elle est dérivable, puis que sa dérivée est continue.

Il est facile de constater que les fonctions suivantes sont \mathcal{C}^1 sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de dérivabilité, car leurs dérivées sont continues :

1. les fonctions polynomiales et les fractions rationnelles³,
2. toutes les fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha$,
3. l'exponentielle, et plus généralement toutes les $x \mapsto a^x$,
4. les logarithmes (népérien ou de base quelconque),
5. les fonctions sinus, cosinus, tangente et arc sinus, arc cosinus et arc tangente,
6. les fonction sinus, cosinus et tangente hyperbolique.

Il est également aisé de constater⁴ que la somme/le produit/le quotient/la composée de deux fonctions \mathcal{C}^1 est encore \mathcal{C}^1 .

Prouvons-le par exemple pour le quotient : soient f et g deux fonctions \mathcal{C}^1 sur un intervalle I où g ne s'annule pas.

Alors nous savons que $\frac{f}{g}$ est dérivable, et que sa dérivée est donnée par $\frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Mais f, f', g et g' sont continues, donc $\left(\frac{f}{g}\right)'$ est continue, de sorte que $\frac{f}{g}$ est \mathcal{C}^1 .

En revanche, il existe des fonctions qui sont dérivables sans être \mathcal{C}^1 , c'est-à-dire à dérivée non continue.

Exemple 9.5

$$\text{Soit } f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Nous allons prouver que f est dérivable sur \mathbf{R} , mais qu'elle n'y est pas \mathcal{C}^1 .

Il est clair⁵ que f est \mathcal{C}^1 sur \mathbf{R}_+^* et sur \mathbf{R}_-^* , et que sa dérivée y est donnée par

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

D'autre part, pour $x \neq 0$ on a $\frac{f(x) - f(0)}{x} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

$$\text{Or, } 0 \leq \left|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x| \text{ et donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0.$$

Ainsi, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Étant déjà dérivable sur \mathbf{R}_+^* et sur \mathbf{R}_-^* , elle est dérivable sur \mathbf{R} tout entier.

Pour la culture

C'est un théorème (très difficile) de Liouville qui garantit qu'aucune fonction obtenue à l'aide de polynômes, d'exponentielles, de logarithmes, des fonctions circulaires et de leurs réciproques à partir des opérations usuelles (somme, produit, quotient, composée) n'est une primitive de $x \mapsto e^{-x^2}$.

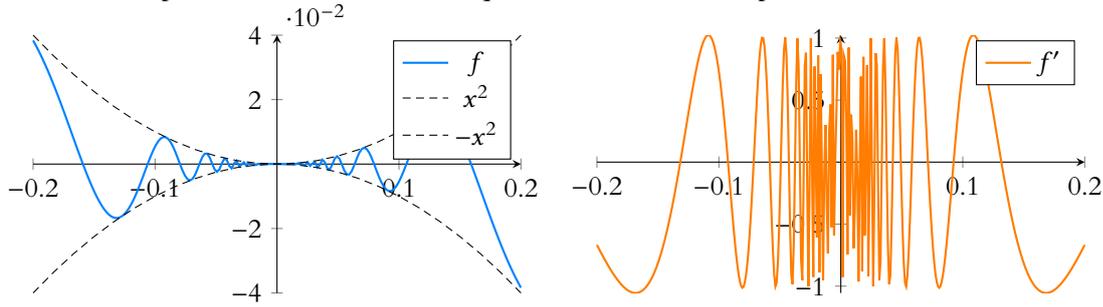
Donc si vous trouvez une expression «simple» pour une primitive de $x \mapsto e^{-x^2}$, ne cherchez pas : elle est fautive !

³ Qui rappelons-le, sont les quotients de deux polynômes.

⁴ Et nous reviendrons bientôt dessus.

⁵ Par produit et composition de fonctions \mathcal{C}^1 .

On a alors $2x \sin \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et $\cos \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0 (car \cos n'a pas de limite en $\pm\infty$). Et donc $f'(x)$ n'a pas de limite en 0, et donc ne tend pas vers $f'(0)$.
Donc f' n'est pas continue en 0, de sorte que f est dérivable mais pas \mathcal{C}^1 sur \mathbf{R} .



9.1.3 Intégrale sur un segment

La définition qui suit d'une intégrale n'est que provisoire, même s'il s'agit de celle manipulée au lycée.

Définition 9.6 – Soit f une fonction continue sur un segment I . Si F est une primitive de f , on pose, pour tout $(a, b) \in I^2$,

$$\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Cette quantité ne dépend pas de la primitive F choisie, et est appelée **intégrale de f sur le segment $[a, b]$** .

Remarque

Notons que cette définition est valable même si $a \geq b$.

Démonstration. Il faut tout de même prouver que cette quantité ne dépend pas de la primitive choisie : si F et G sont deux primitives de f , alors il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $G = F + \lambda$.
Et donc $G(b) - G(a) = F(b) + \lambda - (F(a) + \lambda) = F(b) - F(a)$. □

Remarques. ▶ La variable d'intégration (notée t dans la définition ci-dessus) est une variable muette, et vous pouvez l'appeler comme bon vous chante. Par exemple, les notations $\int_a^b f(t) dt$, $\int_a^b f(x) dx$, $\int_a^b f(\theta) d\theta$ et $\int_a^b f(\alpha) d\alpha$ désignent toutes la même quantité.
Il y a tout de même quelques restrictions⁶ :

- les bornes de l'intégrale ne peuvent pas dépendre de la variable d'intégration :

~~$\int_1^x f(x) dx$ n'a pas de sens.~~

- la variable d'intégration n'a plus de sens en dehors de l'intégrale, et on ne peut pas utiliser comme variable d'intégration une variable déjà définie ailleurs.

Ainsi, ~~$x^2 \int_0^x f(x) dx$~~ n'a pas de sens, mais $x^2 \int_0^x f(t) dt$ en a.

▶ Vous utiliserez souvent les notations dt , dx ou $d\theta$ en physique pour désigner des quantités «infinitement petites», ce qui devrait vous permettre de démystifier un peu cette notation (même si pour nous autres, matheux, il ne s'agit que d'une notation et rien d'autre).

L'idée, que nous formaliserons en fin d'année⁷, est qu'une intégrale est en quelque sorte une somme infinie d'aires de rectangles dont la longueur dt est infinitement petite. D'ailleurs, la notation \int pour l'intégrale vient de là : Leibniz, qui a introduit cette notation, notait en fait s (comme somme), mais avec le «s long» de l'époque.

▶ Nous ne nous intéresserons cette année qu'à des intégrales sur un segment, c'est-à-dire entre deux bornes finies. Vous parlerez l'an prochain d'intégrales dont une des bornes est infinie, ou encore de $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ (qui ne rentre pas dans le cadre de la définition ci-dessus car $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ n'est définie que sur $]0, 1]$, et pas sur $[0, 1]$), mais pour cette année, considérez que ces objets n'existent pas (ou du moins que vous n'avez pas le droit de les utiliser).

⁶ Essentiellement les mêmes que pour les sommes.

⁷ Lorsque nous rencontrerons ce que nous appellerons les sommes de Riemann.

S long ?

Vous savez, ces f qui ressemblent à $\text{def } f$ et qui rendent indigeste le texte écrit en vieux français.

La définition de l'intégrale que nous donnons n'utilisant que la notion de primitive, purement analytique, nous laisserons de côté pour l'instant toute interprétation de l'intégrale comme une aire. Toutefois, vous avez déjà acquis une certaine intuition sur le sujet, il ne faudra pas vous priver de l'utiliser lorsque c'est possible.

Proposition 9.7 (Propriétés de l'intégrale) : Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors, pour tout $(a, b) \in I^2$:

1. $\int_a^b (\lambda f(t) + g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$ (linéarité de l'intégrale)
2. $\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt$
3. pour tout $c \in I$, $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$ (relation de Chasles).
4. si $a \leq b$ et si $\forall t \in [a, b], f(t) \geq 0$, alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$ (positivité de l'intégrale).
5. si $a \leq b$ et si $\forall t \in [a, b], f(t) \leq g(t)$, alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$ (croissance de l'intégrale).
6. si $a \leq b$, alors $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$ (inégalité triangulaire pour les intégrales).

⚠ Attention !

Pour appliquer cette propriété, il faut bien s'assurer que les bornes «sont dans le bon sens», c'est-à-dire que $a \leq b$.

Démonstration. 1. Si F (respectivement G) est une primitive de f (resp. de g), alors $\lambda F + G$ est une primitive de $\lambda f + g$. Et donc

$$\begin{aligned} \int_a^b (\lambda f(t) + g(t)) dt &= [\lambda F(t) + G(t)]_a^b = \lambda F(b) + G(b) - (\lambda F(a) + G(a)) \\ &= \lambda(F(b) - F(a)) + (G(b) - G(a)) = \lambda \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt. \end{aligned}$$

$$2. \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = - \int_b^a f(t) dt.$$

$$3. \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt.$$

4. Soit F une primitive de f . Si $f = F'$ est positive, alors F est croissante⁸ sur I , et donc

$$F(b) \geq F(a) \Leftrightarrow F(b) - F(a) \geq 0 \Leftrightarrow \int_a^b f(t) dt \geq 0.$$

5. Si $f \leq g$, alors $g - f \geq 0$. Et par le point précédent,

$$\int_a^b (g(t) - f(t)) dt \geq 0 \Leftrightarrow \int_a^b g(t) dt - \int_a^b f(t) dt \geq 0 \Leftrightarrow \int_a^b g(t) dt \geq \int_a^b f(t) dt.$$

6. Pour tout $t \in [a, b]$, $-|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)|$.
Et donc par croissance de l'intégrale⁹

$$- \int_a^b |f(t)| dt \leq \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

$$\text{On en déduit donc que } \left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

□

⁸ Et rappelons qu'il est ici indispensable que I soit un intervalle.

⁹ Qui s'applique car $a \leq b$.

Exemple 9.8 Un équivalent de la série harmonique

Pour $n \geq 1$, on note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, et soit $f : t \mapsto \frac{1}{t}$.

Alors, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, f est décroissante sur $[k, k+1]$, de sorte que pour tout $t \in [k, k+1]$, $f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$.

Et donc par croissance de l'intégrale,

$$\int_k^{k+1} f(k+1) dt \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \int_k^{k+1} f(k) dt.$$

Mais $\int_k^{k+1} f(k+1) dt = f(k+1)(k+1-k) = f(k+1)$ et de même

$$\int_k^{k+1} f(k) dt = f(k).$$

Donc pour tout $k \geq 1$, $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \frac{1}{k}$.

En sommant ces inégalités pour $1 \leq k \leq n-1$, on arrive donc, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ à

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Mais par la relation de Chasles, le terme médian est $\int_1^n \frac{dt}{t} = [\ln t]_1^n = \ln(n)$.

Et donc on a $H_n - 1 \leq \ln(n) \leq H_n - \frac{1}{n}$.

Soit encore $\ln(n) + \frac{1}{n} \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$. Ceci prouve déjà que $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty$.

Mais de plus, on a $1 + \frac{1}{n \ln n} \leq \frac{H_n}{\ln n} \leq \frac{1}{\ln n} + 1$, et donc par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{H_n}{\ln n} = 1.$$

Interprétation

Les deux suites $(H_n)_n$ et $(\ln n)_n$ tendent vers $+\infty$ à «la même vitesse». Nous dirons bientôt qu'elles sont équivalentes.

Théorème 9.9 (Théorème fondamental de l'analyse, version 2) : Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit $a \in I$. Alors $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

Démonstration. Soit G une primitive de f . Alors pour tout $x \in I$,

$$F(x) = [G(t)]_a^x = G(x) - G(a), \text{ et donc la dérivée de } F \text{ est } x \mapsto G'(x) = f(x).$$

Donc F est une primitive de f , et on a clairement $F(a) = 0$.

Enfin, si F_1 est une autre primitive de f sur I , alors il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $F_1 = F + \lambda$.

Et si $F_1(a) = F(a) = 0$, alors $\lambda = 0$, de sorte que $F_1 = F$. Donc F est bien l'**unique** primitive de f qui s'annule en a . \square

Ce théorème, intéressant pour des considérations théoriques ne permet pas en pratique de calculer des primitives qu'on ne saurait pas déjà calculer.

Par exemple, il permet d'affirmer qu'une primitive de $x \mapsto e^{-x^2}$ est $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$, mais ne nous aide pas réellement à calculer cette intégrale.

Remarque. Ce théorème garantit qu'une fonction de la forme $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$, où f est continue est une fonction de classe \mathcal{C}^1 puisque sa dérivée est f qui est continue.

Remarque

Cette version du théorème fondamental de l'analyse est plus forte que la version 1, mais elle nécessite tout de même de savoir que la version 1 est vraie, puisqu'elle suppose l'existence de primitives de f .

Exemple 9.10

$$\text{Soit } f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}.$$

Si on note $F : x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}$, alors on a, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f(x) = \int_x^0 \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}} + \int_0^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}} = - \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}} + \int_0^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}} = -F(x) + F(x^2).$$

Puisque F est de classe \mathcal{C}^1 , par composition de fonctions de classe \mathcal{C}^1 , f est aussi de classe \mathcal{C}^1 .

Et alors, en dérivant une composée, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^3}} + \frac{2x}{\sqrt{1-x^6}}.$$

9.1.4 Primitives usuelles

Vous connaissez déjà un certain nombre de dérivées. Et par conséquent, vous connaissez déjà un certain nombre de primitives !

Le tableau suivant résume les primitives qu'il faut connaître par cœur, ainsi que les intervalles sur lesquels elles sont valables.

Fonction $x \mapsto \dots$	Primitive $x \mapsto \dots$	Intervalle	Fonction $x \mapsto \dots$	Primitive $x \mapsto \dots$	Intervalle
$x^n, n \in \mathbf{N}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	\mathbf{R}	e^x	e^x	\mathbf{R}
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	\mathbf{R}_+^* ou \mathbf{R}_-^*	$\sin(x)$	$-\cos(x)$	\mathbf{R}
$x^n, n \in \mathbf{Z}, n \leq -2$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	\mathbf{R}_+^* ou \mathbf{R}_-^*	$\cos(x)$	$\sin(x)$	\mathbf{R}
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	\mathbf{R}_+^*	$x^\alpha, \alpha \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	\mathbf{R}_+^*

Le seul point qui aurait éventuellement besoin d'être détaillé est le fait que $x \mapsto \ln(|x|)$ est une primitive de la fonction inverse sur \mathbf{R}_+^* .

En effet, pour $x < 0$, on a $\ln(|x|) = \ln(-x)$, qui se dérive en $-\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}$.

$\text{ch}(x)$	$\text{sh}(x)$	\mathbf{R}
$\text{sh}(x)$	$\text{ch}(x)$	\mathbf{R}
$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\tan(x)$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[, k \in \mathbf{Z}$
$\frac{1}{\text{ch}^2(x)} = 1 - \text{th}^2(x)$	$\text{th}(x)$	\mathbf{R}
$\frac{1}{1+x^2}$	$\text{Arctan}(x)$	\mathbf{R}
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\text{Arcsin}(x)$	$] -1, 1[$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\text{Arccos}(x)$	$] -1, 1[$

Il est plus que conseillé de les connaître sans la moindre hésitation, mais rappelons, à toutes fins utiles, qu'il est aisé de vérifier qu'une primitive est correcte : il suffit de la dériver¹⁰.

¹⁰ Ce qui suppose bien entendu que vous connaissiez vos formules de dérivation !

Nous savons également dériver certaines composées, ce qui nous donne encore d'autres formules de primitives :

Proposition 9.11 : Soit u une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I . Alors

- ▶ une primitive de $u'u^n$, $n \in \mathbf{N}$ est $\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
- ▶ une primitive de $u'e^u$ est e^u
- ▶ si u ne s'annule pas sur I , une primitive de $\frac{u'}{u}$ est $\ln(|u|)$
- ▶ si $u > 0$ sur I , et si $\alpha \neq -1$ alors une primitive de $u'u^\alpha$ est $\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}$

Exemples 9.12

- ▶ Une primitive de $x \mapsto xe^{-x^2}$ est $-\frac{1}{2}e^{-x^2}$.
- ▶ Une primitive de $x \mapsto e^{-x-e^{-x}} = e^{-x}e^{-e^{-x}}$ est $x \mapsto e^{-e^{-x}}$.
- ▶ Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$ est $x \mapsto \ln(|\ln(x)|)$.

Proposition 9.13 : Soient $(a, b) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$, soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I et soit F une primitive de f . Alors $x \mapsto \frac{1}{a}F(ax+b)$ est une primitive de $x \mapsto f(ax+b)$.

Démonstration. Il suffit de dériver. □

Exemple 9.14

Pour $(a, b) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$, une primitive de $x \mapsto \frac{1}{(ax+b)^2+1}$ est $x \mapsto \frac{1}{a} \operatorname{Arctan}(ax+b)$.
 Par exemple, une primitive de $x \mapsto \frac{1}{4x^2+4x+2} = \frac{1}{(2x+1)^2+1}$ est $x \mapsto \frac{1}{2} \operatorname{Arctan}(2x+1)$.

Toutes les formules ci-dessus proviennent en fait de la formule de dérivation d'une composée. Plus généralement, nous disposons du résultat suivant :

Proposition 9.15 : Soient u et φ deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 telles que $\varphi \circ u$ soit bien définie. Alors une primitive de $u' \times (\varphi' \circ u)$ est la fonction $\varphi \circ u$.

Démonstration. Encore une fois, il suffit de dériver. □

En pratique

Cette formule est formidable lorsqu'on reconnaît une fonction de la forme $u' \times (\varphi' \circ u)$, ce qui demande de l'intuition, et ne se produit en fait pas si souvent.

Exemple 9.16

Soit $f : \begin{cases} \mathbf{R}_+^* & \rightarrow \mathbf{R} \\ x & \mapsto \frac{1}{x+x(\ln x)^2} \end{cases}$.

Alors on a $f(x) = \frac{1}{x} \frac{1}{1 + (\ln x)^2}$.

Autrement dit, si $u : x \mapsto \ln(x)$ et $\varphi : x \mapsto \text{Arctan}(x)$, on a $f = u' \times (\varphi' \circ u)$, de sorte qu'une primitive de F est $\varphi \circ u : x \mapsto \text{Arctan}(\ln(x))$.

Enfin, ajoutons trois nouvelles primitives qu'il faudra connaître :

Proposition 9.17 :

1. Une primitive de \tan sur tout intervalle de la forme $\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$, $k \in \mathbf{Z}$ est $x \mapsto -\ln(|\cos x|)$.
2. Une primitive de th est $x \mapsto \ln(\text{ch}(x))$.
3. Une primitive de \ln sur \mathbf{R}_+^* est la fonction $x \mapsto x \ln(x) - x$.

Démonstration. Les deux premières découlent du fait que $\tan = \frac{\sin}{\cos} = -\frac{\cos'}{\cos}$, que $\text{th} = \frac{\text{sh}}{\text{ch}} = \frac{\text{ch}'}{\text{ch}}$

et qu'on sait intégrer $\frac{u'}{u}$.

Pour la troisième, il suffit de constater que la dérivée de $x \mapsto x \ln(x) - x$ est

$$x \mapsto x \frac{1}{x} + \ln(x) - 1 = \ln(x).$$

□

9.2 INTÉGRALES CLASSIQUES

9.2.1 Intégration des fractions rationnelles

Pour intégrer des fractions rationnelles, on utilise la décomposition en éléments simples. Les éléments simples de première espèce ne posent pas de vraies difficultés : une primitive

de $x \mapsto \frac{1}{(x-a)^n} = (x-a)^{-n}$, sur $] -\infty, a[$ ou sur $]a, +\infty[$ est

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{-n+1} (x-a)^{-n+1} = \frac{-1}{n-1} \frac{1}{(x-a)^{n-1}} & \text{si } n \geq 2 \\ \ln|x-a| & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

Ceci permet déjà de calculer des primitives d'un certain nombre de fractions rationnelles.

Exemple 9.18

Soit $f : x \mapsto \frac{x+1}{x^2(x^2+x-2)}$.

Alors la décomposition en éléments simples de f est

$$f(x) = -\frac{3}{4} \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{12} \frac{1}{x+2} + \frac{2}{3} \frac{1}{x-1}.$$

Et donc une primitive¹¹ de f est $x \mapsto -\frac{3}{4} \ln(|x|) + \frac{1}{2x} + \frac{1}{12} \ln(|x+2|) + \frac{2}{3} \ln(|x-1|)$.

Détails

Les racines de $x^2 + x - 2$ sont -2 et 1 .

¹¹ Valable sur chacun des intervalles du domaine de définition de f .

En revanche, l'intégration des éléments simples de deuxième espèce est un peu plus délicate. Il faudra faire appel à la mise sous forme canonique des polynômes de degré 2 et se souvenir que nous savons intégrer :

$$\blacktriangleright \frac{1}{(ax+b)^2+1} \text{ en } \frac{1}{a} \text{Arctan}(ax+b). \quad \blacktriangleright \frac{u'}{u} \text{ en } \ln(|u|)$$

Exemples 9.19

► Cherchons une primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 2x + 3}$.

On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2 + 2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{(x+1)^2}{2} + 1} = \frac{1}{2} \frac{1}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}.$$

Donc une primitive de f est $x \mapsto \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$.

► Cherchons une primitive de $f : x \mapsto \frac{x}{x^2 - x + 1}$.

On a alors, pour x réel,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{2} \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{2} \frac{1}{x^2 - x + 1} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{2} \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} + \frac{2}{3} \frac{1}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}. \end{aligned}$$

À présent, nous sommes en mesure de calculer une primitive de chacun de ces termes, et donc une primitive de f est

$$x \mapsto \frac{1}{2} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{2x - 1}{\sqrt{3}}\right).$$

Bien qu'il soit possible¹² de donner des formules générales pour une primitive de $x \mapsto \frac{1}{a^2 + bx + c}$, il est totalement inutile de les apprendre, et mieux vaut savoir refaire des raisonnements semblables à ceux ci-dessus.

Nous ne dirons rien de l'intégration des éléments simples du type $\frac{ex + f}{(ax^2 + bx + c)^n}$ pour $n \geq 2$, celle-ci sera nécessairement guidée si vous en avez besoin.

Méthode

Pour trouver des primitives des expressions de la forme $\frac{dx + e}{ax^2 + bx + c}$, on s'arrange pour écrire cette expression comme combinaison de $\frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c}$ (qui s'intègre en $\ln(|ax^2 + bx + c|)$) et de $\frac{1}{ax^2 + bx + c}$ (voir ci-dessus).

¹² Certains ouvrages disponibles dans le commerce donnent d'ailleurs ces formules, et vous avez le droit de vous apprendre si cela vous chante. Pour ma part, je m'y suis toujours refusé !

9.2.2 Intégration des polynômes trigonométriques

Pour intégrer des fonctions qui sont composées de produits de sinus et de cosinus, on commence par linéariser ces expressions (généralement en utilisant les formules d'Euler).

Exemple 9.20

Soit $f : x \mapsto \cos^3(x) + 2 \sin^2(2x) \cos(3x)$. Alors

$$\cos^3(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} (e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}) = \frac{\cos(3x)}{4} + \frac{3}{4} \cos(x).$$

De même

$$\begin{aligned} 2 \sin^2(2x) \cos(3x) &= 2 \left(\frac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2i}\right)^2 \left(\frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2}\right) = -\frac{1}{4} (e^{4ix} - 2 + e^{-4ix}) (e^{3ix} + e^{-3ix}) \\ &= -\frac{1}{4} (e^{7ix} + e^{-7ix} - 2e^{3ix} - 2e^{-3ix} + e^{ix} + e^{-ix}) \\ &= -\frac{1}{2} (\cos(7x) - 2 \cos(3x) + \cos(x)). \end{aligned}$$

Et donc une primitive de f est

$$x \mapsto \frac{5 \sin(3x)}{12} + \frac{\sin(x)}{4} - \frac{\sin(7x)}{14}.$$

9.3 INTÉGRATION PAR PARTIES ET CHANGEMENT DE VARIABLE

9.3.1 Intégration par parties

! Si la somme d'une primitive de f et d'une primitive de g est une primitive de $f + g$, il n'est absolument pas vrai que le produit de deux primitives soit une primitive de $f \times g$, tout simplement car la dérivée d'un produit n'est pas le produit des dérivées.

La formule $(uv)' = u'v + uv'$ nous permet tout de même de trouver des primitives de fonctions de la forme $u'v + uv'$, mais en pratique il est assez rare¹³ de reconnaître directement des fonctions de cette forme, et nous utiliserons plutôt le résultat suivant :

¹³ Et difficile.

Théorème 9.21 (Intégration par parties) : Soient u et v deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt.$$

Démonstration. Une primitive de $u'v + uv'$ est la fonction uv . Et donc

$$\int_a^b (u'(t)v(t) + u(t)v'(t)) dt = [u(t)v(t)]_a^b \Leftrightarrow \int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt.$$

□

Remarque. Si l'on demande aux fonctions u et v d'être de classe \mathcal{C}^1 , c'est tout simplement pour garantir que les fonctions $u'v$ et uv' soient bien continues, ce qui (nous) est indispensable pour considérer leur intégrale.

Exemples 9.22

► Calculons $I = \int_1^e t \ln(t) dt$.

Posons alors $u(t) = \ln(t)$ et $v'(t) = t$, de sorte que $v(t) = \frac{t^2}{2}$ et $u'(t) = \frac{1}{t}$.

Alors u et v sont \mathcal{C}^1 sur $[1, e]$ et donc

$$\int_1^e t \ln(t) dt = \left[\frac{t^2}{2} \ln(t) \right]_1^e - \int_1^e \frac{t}{2} dt = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{t^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}.$$

► Soit $I = \int_0^1 \text{Arctan}(t) dt$.

Alors en posant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \text{Arctan } t$, ce qui nous donne $u(t) = t$ et $v'(t) = \frac{1}{1+t^2}$, il vient

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_0^1 - \int_0^1 u(t)v'(t) dt = [t \text{Arctan}(t)]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt \\ &= \text{Arctan}(1) - \left[\frac{1}{2} \ln(1+t^2) \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}. \end{aligned}$$

► Calculons $I = \int_0^\pi e^{-2t} \cos(t) dt$.

Une première intégration par parties, avec $u(t) = e^{-2t}$ et $v'(t) = \cos(t)$ nous donne

Astuce

Lorsqu'on n'a pas directement affaire à un produit, on peut toujours en faire apparaître un en notant que $v = 1 \times v$.

alors

$$I = [e^{-2t} \sin(t)]_0^\pi + 2 \int_0^\pi e^{-2t} \sin(t) dt = 2 \int_0^\pi e^{-2t} \sin(t) dt.$$

Procédons de nouveau à une intégration par parties, en posant cette fois $u(t) = e^{-2t}$ et $v'(t) = \sin(t)$:

$$\int_0^\pi e^{-2t} \sin(t) dt = [-e^{-2t} \cos(t)]_0^\pi - 2 \int_0^\pi e^{-2t} \cos(t) dt = e^{-2\pi} + 1 - 2 \int_0^\pi e^{-2t} \cos(t) dt.$$

Et donc nous avons la relation

$$I = 2(e^{-2\pi} + 1 - 2I) \Leftrightarrow 5I = 2e^{-2\pi} + 2 \Leftrightarrow I = \frac{2e^{-2\pi} + 2}{5}.$$

► Enfin, il faut parfois ruser pour faire apparaître une intégration par parties. Par exemple,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx &= \int_0^1 \frac{x^2 + 1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} dx \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} - \int_0^1 x \frac{x}{(x^2 + 1)^2} dx \\ &= [\text{Arctan}(x)]_0^1 + \left[\frac{1}{2} \frac{x}{x^2 + 1} \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1} \\ &= \frac{1}{2} \text{Arctan}(1) + \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Il faut un peu d'intuition et d'habitude pour utiliser correctement l'intégration par parties, mais donnons quelques pistes :

1. il y a souvent plusieurs manières d'écrire une fonction comme un produit, pour faire une intégration par parties, il faut savoir dériver un des facteurs (ce qui n'est à peu près jamais un problème), mais il faut aussi savoir intégrer l'autre !
2. si jamais on sait intégrer les deux facteurs qui composent le produit, il faut aussi se demander si on saura calculer l'intégrale qui apparaîtra après l'intégration par parties (le $\int u(t)v'(t) dt$ du théorème).

Exemple 9.23

Soit $I = \int_0^1 x^3 e^{-x^2} dx$. Alors on sait intégrer x^3 et on sait dériver e^{-x^2} .

Une intégration par parties sur ce principe nous donne alors

$$I = \left[\frac{x^4}{4} e^{-x^2} \right]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 x^5 e^{-x^2} dx.$$

Malheureusement, cette seconde intégrale ne semble pas plus facile à calculer, bien au contraire. Sauf à refaire une intégration par parties sur le même principe qui va faire apparaître du $x^7 e^{-x^2}$, etc, on ne va jamais s'en sortir...

D'un autre côté, il n'est pas question de dériver x^3 , puisqu'on ne connaît pas de primitive de e^{-x^2} ...

Mais on a également $x^3 e^{-x^2} = x^2 \times x e^{-x^2}$. Et cette fois, nous savons intégrer $x e^{-x^2}$ (en $-\frac{e^{-x^2}}{2}$), et bien entendu dériver x . Alors

$$I = \left[-\frac{1}{2} x^2 e^{-x^2} \right]_0^1 + \int_0^1 x e^{-x^2} dx = -\frac{e^{-1}}{2} + \left[-\frac{e^{-x^2}}{2} \right]_0^1 = -e^{-1} + \frac{1}{2}.$$

⚠ Danger !

S'il est tout à fait possible d'utiliser plusieurs fois de suite l'intégration par parties, on prendra garde, lors de la seconde intégration par parties, de ne pas dériver la fonction qu'on avait précédemment intégrée et vice-versa, faute de quoi on revient exactement à l'intégrale de départ. Ici, on a bien dérivé deux fois le terme en e^{2t} .

Si on l'avait intégré lors de la seconde intégration par parties, on en serait arrivé à la relation $I = I$, parfaitement juste, mais souvent assez peu utile.

9.3.2 Changement de variable

Théorème 9.24 (Formule de changement de variable) : Soit I un intervalle de \mathbf{R} , soit φ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur I et soit f une fonction continue sur $\varphi(I)$. Alors pour $(a, b) \in I^2$,

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt.$$

Démonstration. Notons F une primitive de f . Alors $F \circ \varphi$ est une primitive¹⁴ de $\varphi' \times (f \circ \varphi)$, de sorte que

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = [F(\varphi(x))]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = [F(t)]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt.$$

□

La formule de changement de variable peut s'utiliser dans les deux sens : pour transformer une intégrale de la forme $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt$ en $\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x) dx$, ou le contraire.

Commençons par le premier cas.

Exemple 9.25

$$\text{Considérons } I = \int_0^2 \frac{1}{\text{ch}(x)} dx = 2 \int_0^2 \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = 2 \int_0^2 \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx.$$

Si on pose alors $f : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ et $\varphi : x \mapsto e^x$, alors f est continue sur $[1, e^{-2}]$ et φ est \mathcal{C}^1 sur $[0, 2]$, donc le théorème de changement de variable s'applique et

$$I = 2 \int_0^2 \varphi'(x)f(\varphi(x)) dx = 2 \int_1^{e^2} \frac{1}{1+t^2} dt = [2 \text{Arctan}(t)]_1^{e^2} = 2 \text{Arctan}(e^2) - \frac{\pi}{2}.$$

Notons que sur cet exemple, il était tout à fait possible de trouver directement une primitive de la fonction de départ, par exemple $x \mapsto 2 \text{Arctan}(e^x)$, mais qu'il faut une bonne dose d'intuition pour le voir directement.

Le théorème de changement de variable nous amène à cette même primitive, sans avoir besoin de la reconnaître dès le départ.

Plus généralement, ce premier cas du changement de variable est celui où l'on se donne la «nouvelle variable» (c'est-à-dire celle de l'intégrale à laquelle on souhaite aboutir) en fonction de l'«ancienne variable» (celle de l'intégrale de départ).

Pour le dire autrement, on suppose que l'intégrale que l'on cherche à calculer au départ est de la forme $\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x) dx$.

On procède alors comme suit, si x est l'«ancienne variable», et que $t = \varphi(x)$ est la nouvelle :

1. on dérive t en fonction de x : $\frac{dt}{dx} = \varphi'(x)$, ce qu'on note¹⁵ $dt = \varphi'(x) dx$;
2. si $\varphi'(x)$ n'est pas directement un facteur de l'intégrande, on le fait apparaître en multipliant par $\frac{\varphi'(x)}{\varphi'(x)}$;
3. on remplace tous les $\varphi(x)$ de l'intégrale de départ par des t et en même temps les $\varphi'(x) dx$ par dt . **Il n'est pas question d'écrire une intégrale qui mélangerait les deux variables x et t .**
4. dans le même temps, on change les bornes a et b en $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$, ce qui revient à chercher quelles valeurs prend la nouvelle variable lorsque l'ancienne prenait ses valeurs extrêmes (a et b).

Le plus pratique avec cette méthode est qu'elle ne nécessite pas d'explicitement la fonction f à laquelle on applique le changement de variable.

Notation

$\varphi(I)$ désigne l'ensemble des images par φ des éléments de I , c'est-à-dire

$$\varphi(I) = \{\varphi(x), x \in I\}.$$

Nous admettons qu'il s'agit encore d'un intervalle, ce qui est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires.

¹⁴ Il suffit de dériver pour s'en convaincre.

Remarque

Si le changement de variable fonctionnait bien ici, c'est aussi car nous avons choisi un changement de variable judicieux !

Prendre $\varphi(x) = \sin^2(2x)$ ne nous aurait pas aidé.

Donc le théorème de changement de variable dispense d'intuition... si on a l'intuition du bon changement de variable !

¹⁵ Et si l'agit là uniquement d'une notation pratique, mais sans signification mathématique précise, bien que vous ayez probablement reconnu le lien avec les notations des physiciens.

Exemple 9.26

Reprenons l'exemple précédent : $\int_0^2 \frac{dx}{\operatorname{ch}(x)}$, en posant $t = e^x$.

Alors $dt = e^x dx$ et lorsque x vaut 0, $t = 1$, et lorsque x vaut 2, $t = e^2$. Ainsi, par changement de variable, on a

$$\int_0^2 \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \int_0^2 \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} e^{-x} dx = \int_1^{e^2} \frac{1}{t} \frac{1}{t} dt = \int_1^{e^2} \frac{dt}{1+t^2} = \dots$$

La fonction f à laquelle nous avons appliqué le changement de variable n'était pas visible directement dans l'intégrale de départ, mais elle est automatiquement apparue en cours de calcul.

Notons qu'un tel changement de variable n'a d'intérêt que si dans l'intégrale de départ, on arrive à tout exprimer en fonction de $\varphi(x)$.

Par exemple essayer de réaliser le changement de variable $t = \cos x$ dans l'intégrale $\int_0^5 x^2 e^x dx$ a peu de chance d'aboutir, car on ne peut pas exprimer e^x ou x^2 en fonction de $\cos x$.

Il faut un peu d'habitude pour repérer les «bons» changements de variable.

Mais ce n'est pas là¹⁶ que réside la puissance de la formule du changement de variable, mais plutôt lorsqu'on l'utilise dans «l'autre sens», c'est-à-dire lorsque l'intégrale dont on dispose au départ est $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt$.

Exemple 9.27

Cherchons à calculer $\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt$, en à l'aide du changement de variable $t = \cos x$.

Autrement dit, en posant $\varphi(x) = \cos(x)$, pour $x \in [0, \pi]$. On a alors $-1 = \varphi(\pi)$ et $1 = \varphi(0)$.

Et donc par le théorème de changement de variable, où ici $f : t \mapsto \sqrt{1-t^2}$,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt &= \int_{\pi}^0 \sqrt{1-\cos^2 x} \underbrace{(-\sin x)}_{=\varphi'(x)} dx = \int_0^{\pi} |\sin x| \sin x dx \\ &= \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos(2x)}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[x - \frac{\sin(2x)}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Remarquons qu'il y avait plusieurs choix pour les bornes, nous avons ici choisi 0 et π , mais nous aurions pu prendre 2π et 3π , ou pourquoi pas -2π et 9π . Bien entendu, cela conduit au même résultat final.

En pratique, on a rarement besoin d'explicitier φ , et connaître par cœur la formule du changement de variable n'est que de peu d'utilité.

Concrètement, pour rédiger le changement de variable ci-dessus, nous procéderions de la manière suivante.

Posons $t = \cos x$. Alors pour $x = 0$, $t = 1$ et pour $x = \pi$, $t = -1$.

La fonction \cos est bien \mathcal{C}^1 sur $[0, \pi]$, donc le changement de variable est légitime.

De plus, $dt = -\sin x dx$. Et donc

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt = \int_{\pi}^0 \sqrt{1-\cos^2 x} (-\sin x) dx = \dots$$

¹⁶ Bien que ce soit souvent un outil précieux lorsqu'on ne «devine» pas directement la bonne primitive.

Remarque

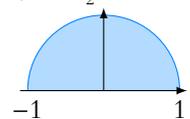
On se donne ici l'ancienne variable (t) en fonction de la nouvelle (x).

Géométriquement

Ce résultat n'a rien de surprenant, si on se rappelle que pour $y \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{1-x^2} \\ \Leftrightarrow y^2 &= 1-x^2 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 &= 1. \end{aligned}$$

Ainsi, le graphe de $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est la moitié du cercle trigonométrique située au dessus de l'axe des abscisses. Donc l'intégrale est la moitié de l'aire du cercle trigonométrique, donc $\frac{\pi}{2}$.



Exemple 9.28

Calculons $\int_0^1 \frac{du}{e^u + 1}$ à l'aide du changement de variable $y = e^u$. Autrement dit, en posant $\varphi(u) = e^u$.

Alors $\frac{dy}{du} = e^u \Leftrightarrow dy = e^u du$. Donc il vient

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{du}{e^u + 1} &= \int_0^1 \frac{e^u du}{e^u(e^u + 1)} \\ &= \int_1^e \frac{dy}{y(y+1)} \\ &= \int_1^e \frac{dy}{y} - \int_1^e \frac{dy}{y+1} \\ &= [\ln(y)]_1^e - [\ln(1+y)]_1^e = 1 + \ln(2) - \ln(e+1). \end{aligned}$$

Dans des cas comme celui-ci où le changement de variable est bijectif, il est possible de «l'inverser» avant de travailler avec les «infinitésimaux» du et dy .

Ainsi, on a $y = e^u \Leftrightarrow u = \ln(y)$. Et donc $du = \frac{dy}{y}$, de sorte qu'en «remplaçant»

directement tous les u par des $\ln(y)$ et le du par un $\frac{dy}{y}$ et en changeant correctement

les bornes, on obtient bien $\int_1^e \frac{dy}{y(e^{\ln(y)} + 1)} = \int_1^e \frac{dy}{y(y+1)}$.

Pour le dire autrement : nous avons appliqué le théorème de changement de variable aux fonctions $f : t \mapsto \frac{1}{e^t + 1}$ et $\varphi : x \mapsto \ln(x)$.

On s'arrange pour faire apparaître $e^u du$.

Explication

C'est le théorème de changement de variable appliqué avec $f : y \mapsto \frac{1}{y(y+1)}$.

De manière générale, partant de $\int_a^b g(t) dt$, si on sait qu'on souhaite réaliser le changement de variable bijectif $x = \varphi(t)$ (soit encore $t = \varphi^{-1}(x)$), comment procéderait-on pour trouver une fonction f telle que $g(t) = (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)$?

Une option serait de partir de $g = (f \circ \varphi)\varphi' \Leftrightarrow \frac{g}{\varphi'} = f \circ \varphi \Leftrightarrow f = \left(\frac{g}{\varphi'}\right) \circ \varphi^{-1} = \frac{g \circ \varphi^{-1}}{\varphi' \circ \varphi^{-1}}$.

Or, $\frac{1}{\varphi' \circ \varphi^{-1}}$ n'est rien d'autre que la dérivée¹⁷ de φ^{-1} .

Autrement dit, on a $f = (g \circ \varphi^{-1}) \times (\varphi^{-1})'$.

Essayez de vous convaincre sur l'exemple précédent que c'est exactement ce qu'on a fait en posant $u = \ln(y)$.

¹⁷ Quand elle existe...

9.3.3 Application au calcul de primitives

Si f est une fonction continue sur un intervalle I , alors nous savons que pour tout $a \in I$,

$F_a : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de f .

Et donc si on choisit un autre $b \in I$, $F_b : x \mapsto \int_b^x f(t) dt$ est une autre primitive de f .

Donc diffère de F_a d'une constante (que nous pouvons expliciter : $F_a = F_b + \int_a^b f(t) dt$).

Puisque le a choisi n'a pas vraiment d'importance lorsqu'il s'agit de déterminer une primitive de f , ne perdons pas de temps à l'écrire !

Dans la suite, si f est une fonction continue sur un intervalle I , on notera $\int^x f(t) dt$ n'importe quelle primitive de f .

Par exemple, $\int^x \cos(\theta) d\theta = \sin(x)$, $\int^x \frac{dt}{1+t^2} = \text{Arctan}(x)$, $\int^x (1-2t) dt = x - x^2$, etc

C'est assez légitime, puisque nous savons que pour tout choix de $x_0 \in I$, $x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt$ est une primitive de f sur I , et que toutes les autres en diffèrent par une constante.

Là où cette notation est parfois difficile à manipuler, c'est qu'elle ne fait pas apparaître les constantes, et qu'on a par exemple aussi

$$\int^x \cos(\theta) d\theta = \sin(x) + \pi, \quad \int^x \frac{dt}{1+t^2} = \text{Arctan}(x) - 4, \quad \int^x (1-2t) dt = \frac{\pi^2}{6} + x - x^2.$$

On a donc envie d'écrire $x - x^2 = \int^x (1-2t) dt = \frac{\pi^2}{6} + x - x^2$, ce qui est plutôt dérangentant...

il faudra donc bien comprendre que le $=$ que l'on utilise après $\int^x f(t) dt$ n'est pas vraiment un symbole d'égalité au sens usuel du terme, mais plutôt un symbole d'égalité «à une constante près». Ou encore «modulo une constante».

Cela dit, cette notation peut s'avérer très pratique pour calculer des primitives en utilisant intégration par parties et changement de variables.

Par exemple, le théorème d'intégration par parties se traduit sous la forme suivante :

Proposition 9.29 : Si u et v sont deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I , alors

$$\int^x u'(t)v(t) dt = u(x)v(x) - \int^x u(t)v'(t) dt.$$

On pourra encore noter $\int^x u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]^x - \int^x u'(t)v(t) dt$.

Démonstration. Nous savons déjà que si $x_0 \in I$ est fixé, alors pour tout $x \in I$,

$$\int_{x_0}^x u'(t)v(t) dt = u(x)v(x) - u(x_0)v(x_0) - \int_{x_0}^x u(t)v'(t) dt.$$

Donc $x \mapsto u(x)v(x) - \int_{x_0}^x u(t)v'(t) dt$ est une primitive de $u'v$. □

Exemple 9.30

$$\int^x t \cos(t) dt = x \sin(x) - \int^x \sin(t) dt = x \sin x + \cos x.$$

Si on préfère manipuler des intégrales avec des bornes, souvenons-nous que $x \mapsto \int_0^x t \cos(t) dt$, est **une** primitive de $t \mapsto t \cos(t)$.

Or, lorsqu'on réalise notre intégration par parties sur le segment $[0, x]$, x étant fixé, il vient

$$\int_0^x t \cos(t) dt = [t \sin(t)]_0^x - \int_0^x \sin(t) dt = x \sin(x) - \underbrace{0 \sin(0)}_{=\text{constante}} - \int_0^x \sin(t) dt.$$

Autrement dit, une primitive de $t \mapsto t \cos t$ (qui est ici notre $u'v$ du théorème) est égale à la primitive uv moins une primitive (ici celle qui s'annule en 0) de $t \mapsto \sin(t)$ (ici notre uv').

Remplacer 0 par n'importe quelle autre valeur, et donc n'aurait pour effet que d'ajouter une constante ou d'autre ne ferait que changer les constantes d'intégration, ce qui n'a aucune importance lorsqu'on cherche toutes les primitives et pas une¹⁸ en particulier.

¹⁸ Par exemple celle qui s'annulerait en π .

Il est également possible d'utiliser le théorème de changement de variable pour trouver des primitives.

Exemple 9.31

Cherchons des primitives de $t \mapsto \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t}$ à l'aide du changement de variable $u = \cos t$.

On a, en notant que $du = -\sin t dt$,

$$\int^x \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt = - \int^{\cos(x)} \frac{du}{1 + u^2} = -\text{Arctan}(\cos(x)).$$

Là aussi, si on souhaite utiliser des intégrales usuelles : une primitive de $t \mapsto \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t}$ est $x \mapsto \int_0^x \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt$.

Et alors le changement de variable $u = \cos t$ nous donne, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\int_0^x \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt = - \int_1^{\cos x} \frac{du}{1 + u^2} = [\text{Arctan}(u)]_{\cos(x)}^1 = -\text{Arctan}(\cos(x)) + \underbrace{\text{Arctan}(1)}_{=\text{constante}}$$

⚠ Attention !

Méfiance avec les noms de variables. Si t est «l'ancienne» variable d'intégration et u la «nouvelle», à aucun moment il ne faut avoir des intégrales dont les bornes s'appellent u ou t .

Dans le cas où l'on donne l'ancienne variable en fonction de la nouvelle, il faudra alors prendre garde d'utiliser un changement de variable bijectif afin d'exprimer l'ancienne variable en fonction de la première.

Exemple 9.32

Calculons une primitive sur $[-1, 1]$ de $t \mapsto \sqrt{1 - t^2}$ à l'aide du changement de variable $t = \cos \theta$, avec $\theta \in [0, \pi]$.

On a alors $dt = -\sin \theta d\theta$

$$\begin{aligned} \int^x \sqrt{1 - t^2} dt &= \int^{\text{Arccos}(x)} -\sqrt{1 - \cos^2 \theta} \sin \theta d\theta = - \int^{\text{Arccos}(x)} \sin^2 \theta d\theta \\ &= \int^{\text{Arccos}(x)} \frac{\cos(2\theta) - 1}{2} d\theta \\ &= \left[\frac{\sin(2\theta)}{4} - \frac{\theta}{2} \right]_{\text{Arccos}(x)}^{\text{Arccos}(x)} = \frac{\sin(2 \text{Arccos}(x))}{4} - \frac{\text{Arccos}(x)}{2} \\ &= -\frac{\text{Arccos}(x)}{2} + \frac{\cos(\text{Arccos } x) \sin(\text{Arccos } x)}{2} = -\frac{\text{Arccos}(x)}{2} + \frac{x\sqrt{1 - x^2}}{2}. \end{aligned}$$

Notons que puisque $\text{Arccos}(c) = \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}(c)$, on a également

$$\int^x \sqrt{1 - t^2} dt = \frac{1}{2} \text{Arcsin}(x) + \frac{x\sqrt{1 - x^2}}{2} + C,$$

le $\frac{\pi}{2}$ étant «caché» dans la constante d'intégration.

Encore une fois, si vous n'êtes pas à l'aise avec cette notation, utilisez une borne du bas pour l'intégrale : une primitive de $t \mapsto \sqrt{1 - t^2}$ est $x \mapsto \int_0^x \sqrt{1 - t^2} dt$. Et alors nous pouvons utiliser le théorème de changement de variable tel que nous le connaissons : pour $x \in [-1, 1]$,

$$\int_0^x \sqrt{1 - t^2} dt = \int_{\text{Arccos}(x)}^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta = \left[\frac{\sin(2\theta)}{4} - \frac{\theta}{2} \right]_{\text{Arccos}(x)}^{\pi/2} = \dots$$

La borne fixée, que nous avons choisie ici égale à 0 n'a alors aucune importance puisque changer cette borne ne fera que changer la constante d'intégration.

Signes

Notons que

$$\sqrt{1 - \cos^2 \theta} = |\sin \theta|.$$

Mais puisque l'on sait que $\theta \in [0, \pi]$, alors $\sin \theta \geq 0$.

9.4 DÉRIVATION/INTÉGRATION DES FONCTIONS À VALEURS COMPLEXES

Dans toute cette partie, I désigne un intervalle de \mathbf{R} .

Il est possible de considérer des fonctions définies sur I et à valeurs dans \mathbf{C} .
Par exemple la fonction $t \mapsto te^{(i+1)t} + (1+2i)t^2$.

Remarque

Notons qu'on ne parlera pas ici de fonctions définies sur une partie de \mathbf{C} , mais seulement des fonctions dont la variable est réelle.

Définition 9.33 – Si $f : I \rightarrow \mathbf{C}$ est une fonction à valeurs dans \mathbf{C} , on note $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sa partie réelle et sa partie imaginaire, c'est-à-dire les deux fonctions définies sur I et à valeurs dans \mathbf{R} telles que

$$\forall x \in I, f(x) = \operatorname{Re}(f)(x) + i \operatorname{Im}(f)(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(f)(x) = \operatorname{Re}(f(x)) \\ \operatorname{Im}(f)(x) = \operatorname{Im}(f(x)) \end{cases}$$

Exemple 9.34

Si $f(t) = te^{(i+1)t} + (1+2i)t^2 = te^t e^{it} + (1+2i)t^2 = te^t(\cos t + i \sin t) + t^2 + 2it^2$ et donc

$$\operatorname{Re}(f) : t \mapsto te^t \cos t + t^2 \text{ et } \operatorname{Im}(f) : t \mapsto te^t \sin t + 2t^2.$$

⚠ Attention !

Pas de i dans $\operatorname{Im}(f)$: il s'agit d'une fonction à valeurs réelles.

9.4.1 Dérivée d'une fonction à valeurs complexes

Définition 9.35 – Soit $f : I \rightarrow \mathbf{C}$. On dit que f est continue (respectivement dérivable, resp. de classe \mathcal{C}^1) si les deux fonctions¹⁹ $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont continues (resp. dérivables, resp. de classe \mathcal{C}^1).

Si f est dérivable, on note alors $f' = \operatorname{Re}(f)' + i \operatorname{Im}(f)'$.

¹⁹ À valeurs réelles.

Ainsi, si f est dérivable, on a $\operatorname{Re}(f') = [\operatorname{Re}(f)]'$ et $\operatorname{Im}(f') = [\operatorname{Im}(f)]'$.

Puisque la partie réelle (resp. imaginaire) d'une somme est la somme des parties réelles (resp. imaginaires), il est facile de se convaincre que la dérivée d'une somme est la somme des dérivées.

En revanche, il faut travailler davantage pour prouver que d'autres formules connues dans le cas réel restent valables en complexe.

Proposition 9.36 : Soient u, v deux fonctions dérivables sur I , à valeurs dans \mathbf{C} . Alors :

1. la fonction uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$
2. si v ne s'annule pas sur I , la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable, et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Démonstration. 1. Notons u_1, u_2 (resp. v_1, v_2) les parties réelles et imaginaires de u (resp. de v).

Alors $uv = (u_1 + iu_2)(v_1 + iv_2) = (u_1v_1 - u_2v_2) + i(u_1v_2 + u_2v_1)$, qui se dérive en

$$\begin{aligned} (uv)' &= u_1'v_1 + u_1v_1' - u_2'v_2 - u_2v_2' + i(u_1v_2' + u_1'v_2 + u_2v_1' + u_2'v_1) \\ &= u_1'(v_1 + iv_2) + v_1'(u_1 + iu_2) + iu_2'(v_1 + iv_2) + iv_2'(u_1 + iu_2) \\ &= (u_1' + iu_2')(v_1 + iv_2) + (u_1 + iu_2)(v_1' + iv_2') \\ &= u'v + uv'. \end{aligned}$$

2. Nous pourrions de même séparer partie réelle et partie imaginaire, mais en a-t-on vraiment envie ?

Notons plutôt que $\frac{u}{v} = \frac{u\bar{v}}{|v|^2} = u \times \bar{v} \times \frac{1}{|v|^2}$.

La fonction $\frac{1}{|v|^2}$ est alors à valeurs réelles, et elle est dérivable car v l'est²⁰.

²⁰ Et qu'on peut exprimer facilement $\frac{1}{|v|^2}$ en fonction des parties réelles et imaginaires de v .

Donc par produit, $\frac{u}{v}$ est dérivable. Mais alors $u = \left(\frac{u}{v}\right) \times v$ de sorte que

$$u' = \left(\frac{u}{v}\right)' v + \left(\frac{u}{v}\right) v' \Leftrightarrow \left(\frac{u}{v}\right)' v = \frac{u'v - uv'}{v}$$

et donc $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

□

De même, si I et J sont deux intervalles de \mathbf{R} , si $f : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow \mathbf{C}$ sont dérivables, alors $g \circ f$ est dérivable et $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$.

Il suffit pour le voir de remarquer que $\operatorname{Re}(g \circ f) = \operatorname{Re}(g) \circ f$, et que la même remarque vaut pour les parties imaginaires.

Il suffit alors de dériver des composées de fonctions réelles.

⚠ Attention !

Ici, f est une bien une fonction qui va de \mathbf{R} dans \mathbf{R} , nous ne parlons pas de dériver des composées de fonctions de \mathbf{C} dans \mathbf{C} .

9.4.2 Intégration des fonctions à valeurs complexes

Définition 9.37 – Soit $f : I \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue. On appelle primitive de f sur I toute fonction $F : I \rightarrow \mathbf{C}$, dérivable sur I et de dérivée f .

En particulier, pour trouver une primitive d'une fonction complexe, il suffit de déterminer une primitive de la partie réelle et une primitive de la partie imaginaire.

Le théorème fondamental de l'analyse appliqué à $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ garantit que toute fonction continue f possède des primitives.

Et on prouverait sans difficultés que deux primitives de f diffèrent d'une constante²¹.

²¹ Complexe.

Définition 9.38 – Soit f une fonction continue sur I , soit F une primitive de f et soit $(a, b) \in I^2$. Le nombre complexe $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive de f choisie, et on le note $\int_a^b f(t) dt$.

Si F est une primitive de f , alors $\operatorname{Re}(F)$ est une primitive de $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(F)$ est une primitive de $\operatorname{Im}(f)$, de sorte que

$$\int_a^b f(t) dt = [\operatorname{Re}(F)](b) - [\operatorname{Re}(F)](a) + i([\operatorname{Im}(F)](b) - [\operatorname{Im}(F)](a)) = \int_a^b [\operatorname{Re}(f)](t) dt + i \int_a^b [\operatorname{Im}(f)](t) dt.$$

Le fait que la formule pour la dérivée d'un produit soit la même que pour les fonctions réelles implique que l'intégration par parties reste valable pour les fonctions à valeurs complexes.

De même pour le changement de variable, du moment que celui est réel²² (à une variable réelle on associe un réel).

²² De toutes façons il est hors de question d'écrire une intégrale à bornes complexes !

9.4.3 Dérivée de e^φ

Proposition 9.39 : Soit $\varphi : I \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction dérivable à valeurs complexes. Alors e^φ est dérivable, et $(e^\varphi)' = \varphi' \times e^\varphi$.

Démonstration. Notons $f = \operatorname{Re}(\varphi)$ et $g = \operatorname{Im}(\varphi)$, de sorte que $\varphi = f + ig$.

On a alors, pour tout $x \in I$,

$$e^{\varphi(x)} = e^{f(x)+ig(x)} = e^{f(x)} (\cos(g(x)) + i \sin(g(x))).$$

Et donc il vient $\operatorname{Re}(e^\varphi) : x \mapsto e^{f(x)} \cos(g(x))$, qui est dérivable car produit de fonctions dérivables, et $\operatorname{Re}(e^\varphi)'(x) = f'(x)e^{f(x)} \cos(g(x)) - e^{f(x)} g'(x) \sin(g(x))$.

De même, on a $\operatorname{Im}(e^\varphi)'(x) = f'(x)e^{f(x)} \sin(g(x)) + g'(x)e^{f(x)} \cos(g(x))$.

Et donc e^φ est dérivable, avec

$$\begin{aligned} (e^\varphi)'(x) &= f'(x)e^{f(x)} \cos(g(x)) - e^{f(x)} g'(x) \sin(g(x)) + i(f'(x)e^{f(x)} \sin(g(x)) + g'(x)e^{f(x)} \cos(g(x))) \\ &= e^{f(x)} (f'(x) + ig'(x)) ((\cos(g(x)) + i \sin(g(x)))) = e^{f(x)} \varphi'(x) e^{ig(x)} = \varphi'(x) e^{\varphi(x)}. \end{aligned}$$

□

Corollaire 9.40 – Pour $\alpha \in \mathbb{C}^*$, une primitive de $t \mapsto e^{\alpha t}$ est $t \mapsto \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t}$.

Démonstration. Il suffit de dériver $t \mapsto e^{\alpha t}$, qui est de la forme de la proposition précédente avec $\varphi : t \mapsto \alpha t$. \square

Exemple 9.41

- ▶ Une primitive de $t \mapsto e^{(1+i)t}$ est $t \mapsto \frac{1}{1+i} e^{(1+i)t}$.
- ▶ Une primitive de $x \mapsto \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ est

$$x \mapsto \frac{1}{2} \left(\frac{1}{i} e^{ix} - \frac{1}{i} e^{-ix} \right) = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}) = \sin(x).$$

Remarque

Ceci n'est pas une preuve du fait que la dérivée de \sin est \cos , puisque ceci a été utilisé dans la preuve de la proposition précédente. Tout au plus cet exemple nous rassure quant à la cohérence de cette notation exponentielle.

Exemple 9.42 Application au calcul de primitives

Cherchons une primitive de $t \mapsto e^{2t} \sin(t)$.
Nous savons que $e^{2t} \sin(t) = \text{Im}(e^{2t} e^{it}) = \text{Im}(e^{(2+i)t})$.

Or, une primitive de $t \mapsto e^{(2+i)t}$ est $t \mapsto \frac{1}{2+i} e^{(2+i)t}$.

Sa partie imaginaire est donc une primitive de $t \mapsto e^{2t} \sin(t)$.

Mais

$$\frac{1}{2+i} e^{(2+i)t} = \frac{2-i}{5} e^{(2+i)t} = \frac{e^{2t}}{5} (2-i) (\cos t + i \sin t).$$

Sa partie imaginaire est donc

$$t \mapsto \frac{e^{2t}}{5} (2 \sin(t) - \cos(t)).$$

Ainsi, $\int e^{2t} \sin(t) dt = \frac{e^{2t}}{5} (2 \sin t - \cos t) + C$, $C \in \mathbb{R}$.