Correction du polycopié de Transition Terminale → CPGE

Neil Sherman

July 2022

Introduction

Organisation du contenu

Ce document, à mon initiative, a pour but d'apporter une tentative de correction au fameux polycopié *Mathématiques : du lycée aux CPGE scientifiques* des Lycées Louis-Le-Grand et Henri-IV. Étant moi-même futur élève en PCSI au lycée Louis-Le-Grand, le polycopié de transition m'a semblé propice pour l'entraînement au LaTeX et à la rédaction mathématique. Ce projet, dont je ne vois pas encore les tenants et aboutissants, n'a aucune prétention d'exactitude ou même de concision et acuité. À ce titre, ce document est sujet à l'erreur. De plus, il existe aussi selon toutes probabilités des formulations et résolutions mal expliquées, que ce soit dans la rédaction mathématique ou LaTeX. Il serait ainsi apprécié, si le lecteur rencontre de telles erreurs, de me le signifier à neilshrmn@gmail.com. Étant une correction du document mentionné plus haut, il est logique qu'il suive la même organisation que ledit document. Il comprend donc les mêmes chapitres, ainsi que certaines explications pour les exercices difficiles. Les corrections se veulent complètes et claires au possible, n'étant donc pas des indications mais des raisonnements aussi complets qu'il a été en mesure de réaliser.

Table des matières

1 Modes de raisonnement

1.1 Le raisonnement par récurrence (1)

EXERCICE 1 (②) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}_n$ la propriété

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Initialisation. La vérification de $\mathcal{P}_1$ est immédiate. En effet :

$$1^3 = \left(\frac{1(2)}{2}\right)^2 = 1.$$

Hérédité. Fixons n dans $\mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. On a donc :

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Alors :

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3.$$

Soit :

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right).$$

Mais :

$$\frac{n^2}{4} + n + 1 = \frac{n^2 + 4n + 4}{4} = \frac{(n+2)^2}{2^2} = \left(\frac{n+2}{2}\right)^2.$$

Et donc finalement

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = (n+1)^2\left(\frac{n+2}{2}\right)^2 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2.$$

Ce qui est exactement $\mathcal{P}_{n+1}$.

Conclusion. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

EXERCICE 2 (②) par Tristan

Montrer que, si $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier impair λ_n tel que

$$5^{2^n} = 1 + \lambda_n 2^{n+2}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, montrons par récurrence la proposition suivante :

$$\mathcal{P}_n\ : \exists \lambda_n \text{ impair tel que } 5^{2^n} = 1 + \lambda_n 2^{n+2}.$$

Initialisation. On vérifie que $\mathcal{P}_0$ est vraie :

$$\begin{aligned} 5^{2^0} &= 5^1 \\ &= 5 \\ &= 1 + 4 \\ &= 1 + 1 \cdot 2^{0+2}. \end{aligned}$$

On prend $\lambda_0 = 1$ qui est impair. Ainsi, $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie. On montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned} 5^{2^{n+1}} &= \left(1 + \lambda_n 2^{n+2}\right)^2 \\ &= 1 + \lambda_n^2 2^{2(n+2)} + \lambda_n 2^{n+3} \\ &= 1 + \lambda_n^2 2^{n+3} 2^{n+1} + \lambda_n 2^{n+3} \\ &= 1 + \left(\lambda_n^2 2^{n+1} + \lambda_n\right) 2^{n+3}. \end{aligned}$$

On pose : $\lambda_{n+1} = \lambda_n^2 2^{n+1} + \lambda_n$. On note que λ_{n+1} est impair car $\lambda_n^2 2^{n+1}$ est pair et λ_n est impair. Alors, $5^{2^{n+1}} = 1 + \lambda_{n+1} 2^{n+3}$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion. D'après l'axiome de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\lambda_n \in \mathbb{N}$ impair tel que $5^{2^n} = 1 + \lambda_n 2^{n+2}$.

EXERCICE 3 (③)

Soient a et b deux réels, $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b.$$

On se propose de calculer u_n en fonction de n et u_0.

a) Traiter le cas $a = 1$.
On suppose désormais $a \neq 1$.

b) Résoudre l'équation $x = ax+b$. O note ℓ la solution. Dans la question suivante, il est inutile (voire toxique) de remplacer ℓ par sa valeur ; seule est utile l'équation

$$\ell = a\ell + b.$$

c) On pose, pour n dans $\mathbb{N}$:

$$v_n = u_n - \ell.$$

Montrer que $(v_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique. Conclure.

d) À quelles conditions portant sur a et u_0 la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est-elle convergente ?

a) Si $a = 1$ alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + b$.
Cela correspond à une suite arithmétique, dont la formule explicite est de la forme

$$u_n = u_0 + nb, \text{ où } b \in \mathbb{R}$$

b) Si

$$x = ax + b$$

, alors

$$x - ax = b.$$

On obtient donc

$$x(1-a) = b$$

et finalement

$$x = \frac{b}{1-a} = \ell.$$

c) On souhaite montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique. Pour cela, on calcule, étant donné $n \in \mathbb{N}$, v_{n+1} à partir de v_n. Si on trouve $q \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $v_{n+1} = qv_n$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique. On a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - \ell$$

Cela donne

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \ell,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= au_n + b - \ell \\ &= au_n + b - a\ell - b \\ &= a(u_n - \ell) \\ &= av_n. \end{aligned}$$

Ainsi v_n est géométrique de raison $q = a$. En utilisant la formule explicite des suites géométriques, on obtient

$$v_n = v_0 a^n = (u_0 - \ell)a^n$$

Or

$$u_n = v_n + \ell = (u_0 - \ell)a^n + \ell$$

Ainsi, si on a une suite arithmético-géométrique de formule récurrente $u_{n+1} = au_n + b,\ (a,b) \in \mathbb{R}$ alors sa formule explicite est

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right)a^n + \frac{b}{1-a}$$

d) Nous avons deux cas de convergence soit $u_0 \in \mathbb{R}$ et $-1 < a < 1$ ou $u_0 = \dfrac{b}{1-a}$ et $a \in \mathbb{R}\backslash 1$. Dans les deux cas la suite convergera vers le réel ℓ.

EXERCICE 4 (③) La suite réelle $(t_n)_{n\geq 0}$ est définie par $t_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad t_{n+1} = \frac{\sqrt{t_n}}{e}.$$

En appliquant l'exercice précédent à la suite $(\ln(t_n)_{n\geq 0})$, exprimer t_n en fonction de n et étudier la convergence de $(t_n)_{n\geq 0}$.

Si on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad t_{n+1} = \frac{\sqrt{t_n}}{e},$$

alors

$$\ln(t_{n+1}) = \ln\left(\frac{\sqrt{t_n}}{e}\right) = \ln(\sqrt{t_n}) - 1 = \frac{1}{2}\ln(t_n) - 1.$$

Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$, $\ln(t_{n+1})$ est de la forme $a\ln(t_n) + b$, avec $a = \frac{1}{2}$ et $b = 1$. La conclusion de l'exercice précédent montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\ln(t_n) = \left(\ln(t_0) - \frac{b}{1-a}\right)a^n + \frac{b}{1-a} = \left(\ln(1) - \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2.$$

On obtient ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$t_n = \exp\ln(t_n) = \exp\left(2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\right)$$

L'exercice précédent affirme aussi que, si $u_0 \in \mathbb{R}$ et $-1 < a < 1$, alors la limite de la suite arithmético-géométrique u_n est $\frac{b}{1-a}$. Ainsi, la limite de $\ln(t_n) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2$ est -2, c'est-à-dire

$$t_n \to \exp(-2)$$

.

EXERCICE 5 (③) La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est définie par $x_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = x_0 + x_1 + \cdots + x_n$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer x_n en fonction de n.

On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+2} = x_0 + x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1} = x_{n+1} + x_{n+1} = 2x_{n+1}$. On en tire donc $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = 2x_n$. On trouve ainsi

Terme	Valeur
u_0	1
u_1	1
u_2	2
u_3	4
u_4	8
u_5	16

.

Méthode 1 :
Cela semble ressembler à la suite $u_n = 2^{n-1}$, pour tout terme sauf u_0 qui n'est pas égal à $\frac{1}{2}$ ici mais à 1. On propose la suite $x_n = \left\lfloor 2^{n-1} + \frac{1}{2} \right\rfloor$ dans $\mathbb{N}$. Soit $\mathcal{P}_n$ cette propriété. Prouvons là par récurrence.

Initialisation. $\mathcal{P}_1$ est immédiat, en effet $x_1 = \left\lfloor 2^{1-1} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2}{2} \right\rfloor = 1 = x_1$.

Hérédité. Fixons n dans $\mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vrai. Alors

$$x_n = \left\lfloor 2^{n-1} + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

Et

$$2x_n = 2\left(\left\lfloor 2^{n-1} + \frac{1}{2}\right\rfloor\right)$$

Or, comme

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2^{n-1} \in \mathbb{N}^* \text{ et } \frac{1}{2} < 1, \text{ alors } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left\lfloor 2^{n-1} + \frac{1}{2}\right\rfloor = 2^{n-1}.$$

Donc

$$2x_n = 2\left(\left\lfloor 2^{n-1} + \frac{1}{2}\right\rfloor\right) = 2(2^{n-1}) = 2^n = x_{n+1}$$

C'est exactement $\mathcal{P}_{n+1}$ car

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2^{n} \in \mathbb{N}^* \text{ et } \frac{1}{2} < 1, \text{ alors } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left\lfloor 2^{n} + \frac{1}{2}\right\rfloor = 2^{n}.$$

On a donc que $x_n = \left\lfloor 2^{n-1} + \frac{1}{2}\right\rfloor$ dans $\mathbb{N}^*$. Cependant, on remarque que $x_0 = \left\lfloor 2^{0-1} + \frac{1}{2}\right\rfloor = \left\lfloor 2(\frac{1}{2})\right\rfloor = 1 = x_0$, donc x_n est vrai pour $n = 0$ et $n \geqslant 1$, donc dans $\mathbb{N}$.

Méthode 2 :
On peut, plus simplement, poser que $x_0 = 1$, et que pour $n \geq 1$, $x_n = 2^{n-1}$. La preuve peut se faire par récurrence simple.

> Exercice 6 (④) Soit $c \in \mathbb{R}^{+*}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, soit $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+cx^2}}$. Calculer $f(f(x)), f(f(f(x)))$ et généraliser.

$$f(f(x)) = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+cx^2}}}{\sqrt{1+c\left(\frac{x}{\sqrt{1+cx^2}}\right)^2}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+cx^2}}}{\sqrt{1+\frac{cx^2}{1+cx^2}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+cx^2}}}{\frac{\sqrt{1+2cx^2}}{\sqrt{1+cx^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+2cx^2}}.$$

De la même manière, on observe que $f(f(f(x))) = \dfrac{x}{\sqrt{1+3cx^2}}$ On peut donc conjecturer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+ncx^2}} \qquad \text{(voir Remarque pour la notation } f^n(x)).$$

Soit $\mathcal{P}_n$ cette propriété. Prouvons-la par récurrence, sachant que $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$.

Initialisation. $\mathcal{P}_1$ est immédiat car

$$f^1(x) = \frac{x}{\sqrt{1+1cx^2}} = f(x)$$

Hérédité. Fixons n dans $\mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vrai, i.e. :

$$f^n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+ncx^2}}.$$

Alors

$$f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+ncx^2}}}{\sqrt{1+c\left(\frac{x}{\sqrt{1+ncx^2}}\right)^2}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+ncx^2}}}{\sqrt{1+\frac{cx^2}{1+ncx^2}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+ncx^2}}}{\frac{\sqrt{1+ncx^2+cx^2}}{\sqrt{1+cx^2}}} = \frac{\frac{x}{\cancel{\sqrt{1+cx^2}}}}{\frac{\sqrt{1+(n+1)cx^2}}{\cancel{\sqrt{1+cx^2}}}}.$$

Ce qui donne

$$f^{n+1}(x) = \frac{x}{\sqrt{1+(n+1)cx^2}}.$$

Ce qui est exactement $\mathcal{P}_{n+1}$.

Remarque. On utilisera la notation $f^n(x)$ au lieu de $\underbrace{f(f(...(x)...))}_{n \text{ fois}}$.

1.2 Le raisonnement par récurrence (2)

EXERCICE 7 (①) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par :

$$u_0 = 2, \quad u_1 = 5 \qquad et \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n.$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n + 3^n.$$

Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété telle que $u_n = 2^n + 3^n$ pour n dans $\mathbb{N}$. Prouvons là par récurrence.
Initialisation. $\mathcal{P}_1$ est immédiate car $u_0 = 2^0 + 3^0 = 2$.
$\mathcal{P}_2$ est immédiate car $u_1 = 2^1 + 3^1 = 5$.

Hérédité. Fixons n dans $\mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ soient vraies. On a alors

$$u_n = 2^n + 3^n \text{ et } u_{n+1} = 2(2^n) + 3(3^n).$$

Rappelons que

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n.$$

Cela donne

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n = 10(2^n) + 15(3^n) - 6(2^n) - 6(3^n) = 4(2^n) + 9(3^n) = 2^{n+2} + 3^{n+2}$$

: c'est exactement $\mathcal{P}_{n+2}$.

EXERCICE 8 (②) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 2 \quad et \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \frac{(u_n)^2}{u_{n-1}}.$$

"Deviner" une formule donnant u_n en fonction de n, puis la démontrer par récurrence.

On note que

Terme	Valeur
u_0	1
u_1	2
u_2	4
u_3	8
u_4	16
u_5	32

et on remarque que ce sont les premiers termes de la suite $u_n = 2^n$.

Par ailleurs, si $u_{n+1} = \frac{(u_n)^2}{u_{n-1}}$ alors $u_{n+2} = \frac{(u_{n+1})^2}{u_n}$.

Soit pour n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$: "$u_n = 2^n$".

Initialisation. On a $u_0 = 2^0 = 1$ donc $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.
Et $u_1 = 2^1 = 2$ donc $\mathcal{P}_1$ est vérifiée.

Hérédité. Fixons n dans $\mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ soient vraies. Alors

$$u_n = 2^n \; et \; u_{n+1} = 2^{n+1}.$$

Donc

$$\frac{(u_{n+1})^2}{u_n} = \frac{(2^{n+1})^2}{2^n} = 2^{2n+2-n} = 2^{n+2}$$

. Ce qui est exactement $\mathcal{P}_{n+2}$

Exercice 9 (③) proposé par Antonin D

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par :

$$u_0 = 0; \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} + u_n = n\,.$$

Exprimer u_n en fonction de n.

Regardons les premiers termes en remarquant que $u_{n+1} = n - u_n$.

Terme	Valeur
u_0	0
u_1	0
u_2	1
u_3	1
u_4	2
u_5	2
u_6	3
u_7	3

On peut alors conjecturer que $u_n = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.
Par récurrence
Initialisation : déjà faite.
Hérédité : Fixons n dans $\mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie

$$u_n = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

On va donc faire un disjonction de cas en fonction de la parité de n.

Si $n = 2k$ est pair :

$$u_{n+1} = n - u_n = n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = 2k - k = k = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor.$$

Si $n = 2k+1$:

$$u_{n+1} = n - u_n = n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = 2k + 1 - k = k + 1 = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor.$$

Cela achève la récurrence.

Remarque. Calculer les premiers termes d'une suite peut souvent éviter des calculs longs et inutiles (surtout lorsque ce sont des additions).

Exercice 10 (③) proposé par Antonin D

La suite $(F_n)_{n\geq 0}$ est celle de l'exemple 1. Pour n dans $\mathbb{N}$, on pose :

$$\Delta_n = F_n F_{n+2} - {F_{n+1}}^2\,.$$

a) Calculer Δ_n pour quelques valeurs de n. Deviner une formule donnant Δ_n et démontrer cette formule par récurrence.
b) Calculer directement Δ_n à partir de la formule obtenue dans l'exemple 1. Pour faciliter les calculs, mieux vaut ne pas remplacer tout de suite α et β par leurs expressions.

a) On calcul Δ_n sur les 5 premiers termes (rappelons que F_n est la suite de Fibonacci).

Δ_n	Valeur
u_0	$F_0F_2 - F_1^2 = -1$
u_1	$0\ F_1F_3 - F_2^2 = 1$
u_2	$F_2F_4 - F_3^2 = -1$
u_3	$F_3F_5 - F_4^2 = 1$
u_4	$F_4F_6 - F_5^2 = -1$
u_5	$F_5F_7 - F_6^2 = 1$

On conjecture directement que $\Delta_n = (-1)^{n+1}$.
Initialisation : voir tableau
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\Delta_n = (-1)^{n+1}$.

$$\begin{aligned}
F_{n+1}F_{n+3} - F_{n+2}^2 &= F_{n+1}(F_{n+2} + F_{n+1}) - F_{n+2}(F_{n+1} + F_n) \\
&= F_{n+1}F_{n+2} + F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n - F_{n+2}F_{n+1} \\
&= F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n \\
&= -\Delta_n \\
&= (-1)^{n+2}
\end{aligned}$$

: c'est le résultat voulu.

b) On commence par rappeler certaines relations dont nous nous servirons :

$$F_n = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}}.$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = -1, \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Commençons maintenant le calcul de Δ_n.

$$\Delta_n = F_nF_{n+2} - F_{n+1}^2 = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}} \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+2} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+2}}{\sqrt{5}} - \left(\frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}}{\sqrt{5}}\right)^2.$$

$$5\Delta_n = -\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

$$5\Delta_n = \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right)^n \left(-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 2\frac{1+\sqrt{5}}{2}\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

$$5\Delta_n = (-1)^n \left(-1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2} - 2\right).$$

$$5\Delta_n = (-1)^n(-5).$$

$$\Delta_n = (-1)^{n+1}.$$

EXERCICE 11 (④) Soient a et b deux nombres réels. On suppose que l'équation $x^2 = ax + b$ admet deux racines réelles distinctes λ et μ. On se propose de déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des suites réelles $(u_n)_{n\geq 0}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

a) Montrer que, pour α et β dans $\mathbb{R}$, la suite $(\alpha\lambda^n + \beta\mu^n)_{n\geq 0}$ appartient à $\mathcal{E}$.

b) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ un élément de $\mathcal{E}$. Vérifier qu'il existe deux nombres réels α et β tels que

$$\alpha + \beta = u_0 \qquad \text{et} \qquad \alpha\lambda + \beta\mu = u_1.$$

c) Avec les notations de b), montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \alpha\lambda^n + \beta\mu^n.$$

d) Retrouver le résultat de l'exercice 7.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Rappelons que $\lambda^2 = a\lambda + b$ et $\mu^2 = a\mu + b$

$$\begin{aligned}
aW_{n+1} + bW_n &= a(\alpha\lambda^{n+1} + \beta\mu^{n+1}) + b(\alpha\lambda^n + \beta\mu^n) \\
&= \alpha\lambda^n(a\lambda + b) + \beta\mu^n(a\mu + b) \\
&= \alpha\lambda^{n+2} + \beta\mu^{n+2} \\
&= W_{n+2}
\end{aligned}$$

b)

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha + \beta = u_0 \\ \\ \alpha\lambda + \beta\mu = u_1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = \frac{u_0\mu - u_1}{\mu - \lambda} \\ \\ \beta = \frac{u_1 - u_0\lambda}{\mu - \lambda} \end{array}\right.$$

On remarquera que $\lambda \neq \mu$

c) Par récurrence
Initialisation :
pour n=2,

$$au_1 + bu_0 = a(\alpha\lambda + \beta\mu) + b(\alpha + \beta) = \alpha(a\lambda + b) + \beta(a\mu + b)$$

$$au_1 + bu_0 = \frac{u_0\mu - u_1}{\mu - \lambda}\lambda^2 + \frac{u_1 - u_0\lambda}{\mu - \lambda}\mu^2$$

On a bien

$$u_2 = \frac{u_0\mu - u_1}{\mu - \lambda}\lambda^2 + \frac{u_1 - u_0\lambda}{\mu - \lambda}\mu^2$$

Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ soit vraies

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= au_{n+1} + bu_n \\
&= a(\alpha\lambda^{n+1} + \beta\mu^{n+1}) + b(\alpha\lambda^n + \beta\mu^n) \\
&= \alpha\lambda^n(a\lambda + b) + \beta\mu^n(a\mu + b) \\
&= \alpha\lambda^{n+2} + \beta\mu^{n+2}
\end{aligned}$$

le résultat voulu

d) $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ qui a pour polynôme caractéristique $x^2 = 5x - 6$ il est évident que $\lambda = 2$ et $\mu = 3$ on connaît les formules de α et β donc il suffit de remplacer les inconnues

$$u_n = 2^n + 3^n$$

le résultat voulu.

Remarque. Ce résultat sera redémontré en sup

Exercice 12 (④) Soient a et b deux nombres réels. On suppose que l'équation $x^2 = ax + b$ admet une unique racine réelle λ. On se propose de déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des suites réelles $(u_n)_{n\geq 0}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\,.$$

a) Montrer que, pour α et β dans $\mathbb{R}$, la suite $(\alpha\lambda^n + n\beta\lambda^n)_{n\geq 0}$ appartient à $\mathcal{E}$.

b) En reprenant la méthode de l'exercice précédent, montrer que, si la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est un élément de $\mathcal{E}$, il existe deux nombres réels α et β tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \alpha\lambda^n + \beta n\lambda^n\,.$$

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Rappelons que

$$\lambda^2 = a\lambda + b,\ \lambda^2 = -b \text{ et } 2\lambda = a$$

$$\begin{aligned}
aW_{n+1} + bW_n &= a(\alpha\lambda^{n+1} + \beta(n+1)\lambda^{n+1}) + b(\alpha\lambda^n + \beta n\lambda^n) \\
&= \alpha\lambda^n(a\lambda + b) + \beta\lambda^n a\lambda + n\beta\lambda^n(a\lambda + b) \\
&= \alpha\lambda^{n+2} + \beta(n+2)\lambda^{n+2}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{cases} \alpha = u_0 \\ \\ \alpha\lambda + \beta\lambda = u_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = u_0 \\ \\ \beta = \frac{u_1 - u_0\lambda}{\lambda} \end{cases}$$

Par récurrence
Initialisation : pour n=2,

$$au_1 + bu_0 = a(\alpha\lambda + \beta\lambda) + b\alpha = \alpha(a\lambda + b) + \beta a\lambda \quad (a = 2\lambda)$$

On a bien

$$u_2 = \alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda^2$$

Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ soit vraies

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= au_{n+1} + bu_n \\ &= a(\alpha\lambda^{n+1} + \beta(n+1)\lambda^{n+1}) + b(\alpha\lambda^n + \beta n\lambda^n) \\ &= \alpha\lambda^n(a\lambda + b) + \beta\lambda^n a\lambda + n\beta\lambda^n(a\lambda + b) \\ &= \alpha\lambda^{n+2} + \beta(n+2)\lambda^{n+2} \end{aligned}$$

le résultat voulu

Remarque. Ce résultat sera redémontré en sup

Exercice 13 (④) par Léo

Soit A une partie de $\mathbb{N}^*$ contenant 1 et telle que :

$$i)\ \forall n \in A,\quad 2n \in A \qquad \text{et} \qquad ii)\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\quad n+1 \in A \Rightarrow n \in A\,.$$

a) Montrer que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \qquad 2^m \in A\,.$$

b) Montrer que $A = \mathbb{N}^*$

a) On montre ce résultat par récurrence

Initialisation : Pour $m = 0$, $2^m = 1 \in A$ par définition de A

Hérédité : Soit $m \in \mathbb{N}$, supposons que $2^m \in A$, et montrons qu'alors $2^{m+1} \in A$.

$$2^m \in A \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{d'après } i)} 2^m \cdot 2 \in A \Longrightarrow 2^{m+1} \in A$$

Conclusion : On a donc bien que $\forall m \in \mathbb{N}, 2^m \in A$

b) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \in A$. En effet, ceci montre qu'on a $\mathbb{N}^* \subseteq A$, et puisque par définition on a $A \subseteq \mathbb{N}^*$ on aura donc bien $A = \mathbb{N}^*$.

D'après *ii)*, $\forall i \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}$, $2^i - k \in A$. Ceci se montre par une récurrence descendante, puisque : si $n+1 \in A$, alors $n \in A$, donc $n-1 \in A$, puis $n-2 \in A$ ... $1 \in A$.

De plus,

$$\mathbb{N}^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \left[2^i ; 2^{i+1}\right] ,$$

et donc puisque chacun de ses ensemble appartient à A, on a bien $A = \mathbb{N}^*$

Exercice 14 (④)

On se propose de montrer que tout rationnel de $]0,1[$ s'écrit comme somme d'inverses d'entiers naturels deux à deux distincts. Ce type d'écriture, utilisé par les égyptiens dans l'Antiquité, n'a pas un très grand intérêt, mais la preuve du résultat est un bon exemple de raisonnement par récurrence.

a) Soit x un rationnel de $]0,1[$. On écrit donc

$$x = \frac{m}{n}, \qquad (m,n) \in \mathbb{N}^{*2}, \qquad m < n\,.$$

On effectue la division euclidienne de n par m :

$$n = qm + r, \qquad q \in \mathbb{N}^*, \qquad r \in [\![0, m-1]\!].$$

On suppose que x n'est pas l'inverse d'un entier, i.e. que m ne divise pas n ou encore que $r \neq 0$. Montrer que $x - \dfrac{1}{q+1}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{m'}{n'}, \qquad n' \in \mathbb{N}^*, \qquad m' \in [\![1, m-1]\!]\,.$$

b) En utilisant une hypothèse de récurrence judicieuse, démontrer la propriété voulue.

c) Constater que la démonstration précédente fournit en fait un algorithme de décomposition. Appliquer cet algorithme à $x = \dfrac{5}{17}$.

a) Avec $m' = m - r$ et $n' = (q+1)\cdot(qm+r) = (q+1)\cdot n$ on retrouve bien :
$\frac{m'}{n'} = \frac{m-n+qm}{(q+1)\cdot n} = \frac{x}{(q+1)} - \frac{1}{(q+1)} + \frac{qx}{(q+1)} = x - \frac{1}{q+1}$

b) Pour m dans $\mathbb{N}$ on pose $\mathcal{P}_m$ la propriété telle que pour tout entier $n > m$, avec q le quotient de la division euclidienne de n par m, écrire $\frac{m}{n}$ comme : $\sum_{k=1}^{r}(\frac{1}{x_k})$ avec r un naturel non nul et $q \leq x_1 < ... < x_r$.
initialisation : trivial
Hypothèse de récurrence : Supposons $m \geq 2$ et $\mathcal{P}_k$ vraie pour tout $m > k > 0$ Nous pouvons montrer $\mathcal{P}_m$. Soit $n > m$ un entier, si m divise n on pose $r = 1$ et $x_1 = \frac{n}{m}$, le résultat est immédiat. Sinon : $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} + \frac{1}{q+1}$ et $\frac{n'}{m'} = \frac{(q+1)n}{m-r} > \frac{(q+1)n}{m} > q+1$ d'où : $\frac{m'}{n'} = \sum_{k=1}^{r}(\frac{1}{x_k})$ avec $q+1 < x_1 < ... < x_r$. On a donc $\mathcal{P}_m$ vraie comme $\frac{m}{n} = \frac{1}{1+q} + \sum_{k=1}^{r}(\frac{1}{x_k})$

c) $\frac{5}{17} = \frac{1}{4} + \frac{1}{23} + \frac{1}{1564}$ le développement est laissé au lecteur

Exercice 15 (⑤) par Tristan et Zinedine

La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = u_{\lfloor n/2 \rfloor} + u_{\lfloor n/3 \rfloor} + u_{\lfloor n/6 \rfloor}$$

a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \geq n+1\,.$$

b) Trouver $C > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leq C(n+1)$$

La propriété suivante est omniprésente dans la résolution de cet exercice :

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1.$$

a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_n$ la propriété

$$u_n \geq n+1$$

Démontrons $\mathcal{P}_n$ par récurrence forte.

Initialisation :

On vérifie que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n = 0$.

$u_0 = 1$ et $1 \geq 1$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité

Soit $n \geq 0$. On suppose que $\mathcal{P}_k$ est vraie pour tout k tel que $N \leq k \leq n$ avec $N \in \mathbb{N}$ et on en déduit que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Calculons :

On a, selon l'hypothèse de récurrence

$$u_{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} \geq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 1$$

$$u_{\left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor} \geq \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor + 1$$

$$u_{\left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor} \geq \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor + 1$$

Alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &\geq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor + 3 \\ &\geq \left\lfloor \frac{5\,(n+1)}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor + 2 \\ &\geq \left\lfloor \frac{6\,(n+1)}{6} \right\rfloor + 1 \\ &\geq n+2 \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion :

D'après l'axiome de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq 0$.

Étudions une deuxième approche permettant d'aboutir à ce résultat.

On procède une nouvelle fois par récurrence forte pour $n \in \mathbb{N}$ en notant $\mathcal{P}_n$

$$u_n \geq n+1$$

Initialisation :

On vérifie que P_n est vraie pour $n = 0$.

$$u_0 = 1 \text{ et } 1 \geq 1 \text{ donc } \mathcal{P}_0 \text{ est vraie.}$$

Hérédité :

Soit $n \geq 0$. On suppose que $\mathcal{P}_k$ est vraie pour tout k tel que $N \leq k \leq n$ avec $N \in \mathbb{N}$ et on en déduit que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Calculons :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= u_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} + u_{\lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor} + u_{\lfloor \frac{n+1}{6} \rfloor} \\
&\geq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor + 3 \\
&> \frac{n+1}{2} - 1 + \frac{n+1}{3} - 1 + \frac{n+1}{6} - 1 + 3 \\
&> \frac{6\,(n+1)}{6} \\
&> n+1
\end{aligned}$$

Or, u_{n+1} est un entier car défini comme somme d'entiers, ce qui nous donne finalement $u_{n+1} \geq n+2$, ce qui est exactement $\mathcal{P}_{n+1}$.

Conclusion :

D'après l'axiome de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq 0$.

b) On se propose de montrer par récurrence forte que pour tout $n \geq 6$, $u_n \leq 3n$, ce qui implique évidemment que pour tout $n \geq 6$, $u_n \leq 3\,(n+1)$.

Notons, pour $n \geq 6$, $\mathcal{P}_n$ la proposition : $u_n \leq 3n$

Initialisation :

On vérifie que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n = 6$.

$$\begin{aligned}
u_6 &= u_3 + u_2 + u_1 \\
&= 3u_1 + 6u_0 \\
&= 15u_0 \\
&= 15 \\
&\leq 18
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}_6$ est vraie.

Hérédité :

Soit $n \geq 6$. On suppose que $\mathcal{P}_k$ est vraie pour tout k tel que $N \leq k \leq n$ avec $N \in \mathbb{N}$ et on en déduit que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Calculons :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= u_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} + u_{\lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor} + u_{\lfloor \frac{n+1}{6} \rfloor} \\
&\leq 3\left(\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor \right) \\
&\leq 3\,(n+1)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}_{n+1}$ est égalememnt vraie.

Conclusion :

D'après l'axiome de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq 6$.

On en déduit évidemment que $u_n \leq 3\,(n+1)$ pour $n \geq 6$.

Ensuite, en remarque que la propriété $u_n \leq 3\,(n+1)$ s'étend aussi aux valeurs de n comprises entre 0 et 5, ce qui nous donne la propriété suivante

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq 3\,(n+1)$$

On peut donc conclure en posant $C = 3$, donc $C > 0$ qui vérifie la condition de l'énoncé

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq C\,(n+1)$$

Remarque. On peut également s'atteler à la découverte du plus petit C vérifiant la condition

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq C\,(n+1)$$

La première étape consiste à créer un programme permettant de déterminer les C les plus petits possibles pour un intervalle I de $\mathbb{N}$. Un tel programme peut être le suivant

```
C_max = 0
u = []
u.append(1)
for n in range(1, 100000) :
    u.append(u[floor(n/2)] + u[floor(n/3)] + u[floor(n/6)])
    C = u[n]/(n + 1)
    if C > C_max :
        C_max = C
        print(C_max,' pour', n)
```

On lance ce programme, ce qui nous donne la plus petite valeur de C trouvée pour les 100000 premiers termes de $(u_n)_{n\geq 0}$ soit $C = 2 + \dfrac{23}{73}$.

On montre par récurrence forte que cette valeur de C convient dans un premier temps pour tout les $n \geq 72$ et d'après le programme qui l'a déterminée, elle convient également aux $n < 72$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \left(2 + \frac{23}{73}\right)(n+1)$$

Le fait que cette valeur de C corresponde au 73$^{\text{e}}$ terme de $(u_n)_{n\geq 0}$ alors que 100000 ont été testés nous suggère déjà qu'elle est la valeur minimale de C qui convienne.

Cependant, on peut également remarquer que $u_{72} = \left(2 + \dfrac{23}{73}\right)(72+1)$ ce qui nous indique qu'une valeur plus petite de C ne vérifierait pas la condition imposée pour $n = 72$.

On peut ainsi conclure en disant que $2 + \dfrac{23}{73}$ est la plus petite valeur de C vérifiant pour tout entier naturel n l'inégalité

$$u_n \leq C\,(n+1)$$

Exercice 16 (⑤) par Octave

Soit

$$\mathcal{S} = \{2^k 3^\ell ; (k, \ell) \in \mathbb{N}^2\}.$$

Montrer que tout élément de $\mathbb{N}^*$ peut s'écrire $s_i + \cdots + s_m$ où $m \in \mathbb{N}^*$, où les s_i sont dans $\mathcal{S}$ et où, pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de $\{1, \cdots, m\}, s_i$ ne divise pas s_j.

Soit $\mathcal{P}_k$ la propriété : k peut s'écrire $s_1 + \cdots + s_m$, ou $m \in \mathbb{N}^*$ et les s_i sont dans $\mathcal{S}$ et ou, pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de $\{1, \cdots, m\}, s_i$ ne divise pas s_j. Et ou l'éventuel s_i impair a pour valeur la plus grande puissance de 3 inférieure à k. On note aussi qu'il peut y avoir qu'un seul facteur impair, étant donné que dans une paire de puissance de trois, l'une divise nécessairement l'autre. Ce facteur impair s'écrit nécessairement $s_i = 2^0(3^\ell)$ car sinon il serait pair. On procède par récurrence forte.

Initialisation. $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont immédiats car $k_1 = 2^0(3^0) = 1$, et $k_2 = 2^0(3^1) = 3$

Hérédité. Soit k dans $\mathbb{N}^*$, et n dans $[\![1; k]\!]$ tel que $\mathcal{P}_k$ soit vrai.

On procède par disjonction de cas.

Si k est impair alors $k+1$ est pair.

$$\text{Ainsi,} \quad \exists m \in [\![1; k]\!], \text{ tel que } k+1 = 2m.$$

Par hypothèse de récurrence,

$$\exists(s_1, s_2, \cdots, s_n) \in \mathcal{S}^n, \quad m = \sum_{i=1}^{n} s_i$$

Et $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2, i \neq j \implies s_i \nmid s_j$

$$\text{Ainsi } k+1 = \sum_{i=1}^{n} 2s_i.$$

Or

$$s_i \in \mathcal{S} \implies 2s_i \in \mathcal{S}$$

Et finalement $s_i \nmid s_j \implies 2s_i \nmid 2s_j$. Ainsi, $\mathcal{P}_{k+1}$ est vérifiée.

Si k est pair alors $k+1$ est impair.

On note 3^p la plus grande puissance de 3 inférieure à $k+1$.

On procède à une seconde disjonction de cas.

Si $k+1 = 3^p$, alors $\mathcal{P}_{k+1}$ est vérifiée.

Sinon, $k+1 > 3^p$

$$k+1 = k - 3^p + 1 + 3^p$$

Or

$$k - 3^p + 1 \in [\![1;k]\!] \text{ et } k - 3^p + 1 \text{ est pair.}$$

Par hypothèse de récurrence :

$$\exists(s'_1, '_2, \cdots, s'_n) \in \mathcal{S}^n, k - 3^p + 1 = \sum_{i=1}^{n} s'_i$$

Et

$$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2, i \neq j \implies s'_i \nmid s'_j$$

Par parité de $k - 3^p + 1 : \forall i \in [\![1,n]\!], \ s'_i \in 2\mathbb{N}$

Montrons que : $\forall i \in [\![1;n]\!], s_i \nmid 3^p$ et $3^p \nmid s_i$ en utilisant un raisonnement par l'absurde.

Supposons $s_i | 3^p$

Par parité de $k - 3^p + 1, 2|s_i$

Or :

$$\begin{cases} 2|s_i \\ s_i|3^p \end{cases} \iff \begin{cases} 2|3^p \end{cases}$$

Ce qui est absurde.

Supposons maintenant $3^p | s_i$

$$\Rightarrow s_i \geqslant 2(3^p)$$
$$\Rightarrow k+1 \geqslant 2(3^p) + 3^p$$
$$\Rightarrow k+1 \geqslant 3^{p+1} > 3^p$$

Ce qui est absurde puisque 3^p est la plus grande puissance de 3 inférieure à $k+1$.

On a donc :

$$\forall i \in [\![1;n]\!] \quad s'_i \nmid 3^p \text{ et } k+1 = \sum_{i=1}^{n} s'_i + 3^p$$

Finalement, $\mathcal{P}_{k+1}$ est vérifiée pour k dans $\mathbb{N}$

1.3 Le raisonnement par l'absurde

Exercice 17 (②) Soient a, b, c, d des nombres rationnels tels que

$$a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}\,.$$

Montrer que $a = c$ et $b = d$.

Si

$$a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2},$$

alors

$$a - c = \sqrt{2}(d - b).$$

Si $d \neq b$, alors si on divise par $d - b$ des deux côtés on obtient $\sqrt{2} = \frac{a-c}{d-b}$, ce qui est absurde. Or, si $d = b$, alors $a = c$.

Exercice 18 (②) Montrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel. Généraliser.

Une démonstration semblable à l'exemple pour $\sqrt{2}$ donné par le polycopié est possible, utilisant une disjonction de cas de la divisibilité de 3. Cependant, on se propose de généraliser l'irrationalité de n'importe quel n dans $\mathbb{N}$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$ et $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ on pose $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$, où $\frac{a}{b} \notin \mathbb{N}$, fraction irréductible.

S'ensuit $nb^2 = a^2$ et donc $a^2 | nb^2$. Or, comme $\frac{a}{b}$ fraction irréductible alors $\mathrm{PGCD}(a, b) = 1$ et donc $\mathrm{PGCD}(a^2, b^2) = 1$

D'après le lemme de Gauss on a donc $a^2 | n$. Or $n | a^2$ donc $|n| = |a^2|$, soit $n = a^2$.

Alors $b = 1$ et donc $\sqrt{n} = a \in \mathbb{N}$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse, et donc par l'absurde, tant que $\sqrt{n} \notin \mathbb{N}$, donc n n'étant pas un carré parfait, alors $\sqrt{n}$ est irrationnel.

Or, 3 n'est pas un carré parfait, donc $\sqrt{3}$ est irrationnel.

Exercice 19 (②) Montrer que $\dfrac{\ln(3)}{\ln(2)}$ est irrationnel.

Si on pose $\dfrac{\ln(3)}{\ln(2)} = \dfrac{p}{q}, \quad (p, q) \in \mathbb{R}^{*2}$, alors

$$\ln(3)q = \ln(2)p.$$

Et donc

$$\exp\left(\ln(3)q\right) = \exp\left(\ln(2)p\right) \iff 3^q = 2^p.$$

Ce qui est absurde car le premier membre est pair et le second impair.

Exercice 20 (②)

a) Montrer que la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est irrationnelle.
b) Montrer que le produit d'un nombre rationnel non nul et d'un nombre irrationnel est irrationnel.
c) Trouver deux nombres irrationnels dont la somme soit rationnelle, deux nombres irrationnels dont la somme soit irrationnelle. Même question avec le produit.

a) Posons a un nombre rationnel tel que $a = \frac{p}{q}, \quad (p, q) \in \mathbb{R}^*2$ et b un nombre irrationnel. Posons $a + b$ nombre rationnel et donc $a + b = \frac{p'}{q'}, \quad (p', q') \in \mathbb{R}^*2$. Alors

$$b = \frac{p'}{q'} - \frac{p}{q} = \frac{pq' - qp'}{q'q}.$$

Ce qui est absurde car b est un nombre irrationnel.

b) En utilisant les mêmes notations que l'exercice précédent on a

$$b\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}.$$

Et donc

$$b = \frac{p'q}{q'p}.$$

Ce qui est absurde car b est un nombre irrationnel.

c) On peut proposer $\log_6 3 + \log_6 2 = 1$, et $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ irrationnel. Pour les produits, $\sqrt{2}\sqrt{8} = 4$, et $\sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}$ marchent également.

EXERCICE 21 (②) Montrer que $\sqrt{6}$ est irrationnel, puis en déduire que $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ est irrationnel.

D'après la démonstration proposée à l'exercice 18, et 6 n'étant pas un carré parfait, on en déduit que $\sqrt{6}$ est irrationnel. Or

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6}.$$

Donc

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}.$$

Mais d'après l'exercice précédent, le produit d'un rationnel et d'un irrationnel est irrationnel, donc $2\sqrt{6}$ est irrationnel. Aussi d'après l'exercice précédent, la somme d'un irrationnel et d'un rationnel est irrationnelle, et donc $5 + 2\sqrt{6}$ est irrationnel. Or, la démonstration de l'exercice 18 expliquant que la racine carré d'un nombre qui n'est pas un carré parfait est irrationnelle, et un nombre irrationnel ne pouvant pas être un carré parfait, alors $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$ est irrationnel, et donc $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ aussi.
Une autre démonstration consiste à poser $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = \frac{p}{q}, \quad (p, q) \in \mathbb{R}^2$ Donc

$$5 + 2\sqrt{6} = \frac{p^2}{q^2}.$$

Soit

$$2\sqrt{6} = \frac{p^2 - 5q^2}{q^2}.$$

Et donc

$$\sqrt{6} = \frac{p^2 - 5q^2}{2q^2}.$$

Ce qui est absurde car $\sqrt{6}$ est irrationnel.

1.4 Le raisonnement par analyse-synthèse

EXERCICE 22 (③) Proposé par Antonin D
Trouver les fonctions f de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables et telles que

$$\forall (x, y) \in {\mathbb{R}^{+*}}^2, \qquad f(xy) = f(x) + f(y)\,.$$

Prenons $x = y = 1 \Rightarrow f(1) = 2f(1) \Rightarrow f(1) = 0$
De plus

$$x\frac{\partial f(xy)}{\partial x} = \frac{\partial f(y)}{\partial y}$$

On fixe $y = 1$ Ce qui donne

$$xf'(x) = f'(1) \Rightarrow f(x) = f'(1)\ln(x) \text{ (cste=0 car f(1)=0)}$$

on remarquera que la fonction nulle est aussi solution

Exercice 23 (③) Proposé par Antonin D

On se propose de déterminer les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x+y) + f(x-y) = 2\left(f(x) + f(y)\right).$$

Dans a) et b), f est une fonction solution.

a) Calculer $f(0)$. Montrer que f est paire.

b) Montrer que f'' est constante.

c) Conclure.

a) prenons $x = y = 0 \Rightarrow 2f(0) = 4f(0) \Rightarrow f(0) = 0$
Maintenant fixons $x = 0$

$$f(0+y) + f(0-y) = 2(f(0) + f(y))$$

$$f(y) + f(-y) = 2f(y)$$

$$f(-y) = f(y)$$

f est paire

b)

$$\frac{\partial^2 f(x+y)}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 f(x_y)}{\partial^2 y} = \frac{\partial^2 2f(y)}{\partial^2 y}$$

fixons $y = 0$

$$f''(x) = f''(0)$$

qui est une constante

c) Il reste à vérifier que les solutions obtenues vérifient la condition de parité de la question b) On a que $ax^2 + bx = f(x) = f(-x) = ax^2 - bx$ d'où $b = 0$. Finalement, les solutions sont donc les fonctions de la forme $x \longmapsto ax^2$ avec a un réel quelconque.

Exercice 24 (④) Proposé par Antonin D

Dans cet exercice, f est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

a) Calculer $f(0)$ et montrer que f est impaire.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, calculer $f(nx)$ en fonction de n et $f(x)$.

c) Soit $a = f(1)$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \quad f(x) = ax.$$

d) Expliquer pourquoi tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels.

e) Conclure que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax$$

a) On prend $x = y = 0 \Rightarrow f(0) = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0$
Puis on prend $y = -2x$

$$f(-x) = f(x) + 2f(-x) \Rightarrow f(-x) = -f(x)$$

b) On remarque que $f(nx) = f((n-1)x + x) = f((n-1)x) + f(x) = ... = nf(x)*$

c) Soit $a = f(1)$ *et* $x \in \mathbb{Q}, x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}$

$$f(p) = f(q \times \frac{p}{q}) = qf(\frac{p}{q}) \Rightarrow f(\frac{p}{q}) = \frac{p}{q}f(1)$$

d) tout nombre peut s'écrire $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ qui est bien un rationnel

e) Soient $x \in \mathbb{R}$ et Q_n une suite de rationnels tel que $\lim_{n\to\infty} Q_n = x$ (une telle suite existe par la question précédente) par continuité de f nous avons $\lim_{n\to\infty} f(Q_n) = f(x) = ax$. Ainsi nous avons montré que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax$

Remarque. *Une récurrence serait plus approprié

2 Calculs algébriques

2.1 Généralités et rappels

EXERCICE 25 (①) Si a, b, c, d sont des nombres réels non nuls, simplifier les fractions

$$A = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}, \quad B = \frac{\frac{a}{b}}{c}, \quad C = \frac{a}{\frac{b}{c}}$$

On a $A = \frac{ad}{bc}, \quad B = \frac{a}{bc}, \quad C = \frac{ac}{b}$

EXERCICE 26 (①)

a) Exprimer simplement $\ln(56) - \ln(7) + \ln(4)$.

b) Montrer que $\ln\left(\sqrt{216}\right) = \frac{3}{2}\ln(6)$.

c) Écrire le plus simplement possible $\ln(49) + \ln(21) - \ln(3\sqrt{7})$.

a)

$$\ln(56) - \ln(7) + \ln(4) = \ln(7(2^3)) - \ln(7) + \ln(2^2) = \ln(7) - \ln(7) + 3\ln(2) + 2\ln(2) = 5\ln(2)$$

b)

$$\ln\left(\sqrt{216}\right) = \ln\left(\sqrt{6^3}\right) = 3\ln\left(\sqrt{6}\right) = \frac{3}{2}\ln(6)$$

c)

$$\ln(49) + \ln(21) - \ln(3\sqrt{7}) = 2\ln(7) + \ln(3) - \ln(3) + \ln(7) - \frac{1}{2}\ln(7) = \frac{5}{2}\ln(7)$$

EXERCICE 27 (①) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels, $b_1, \ldots, b_n$ des nombres réels non nuls. On suppose que tous les nombres $\frac{a_i}{b_i}$, $1 \leq i \leq n$, sont égaux. Montrer que ces nombres sont également égaux à $\frac{a_1 + \cdots + a_n}{b_1 + \cdots + b_n}$.

On note la valeur commune des fractions $r \in \mathbb{R}$. Nous avons donc pour tout i :

$$\frac{a_i}{b_i} = r \Leftrightarrow \frac{a_i}{r} = b_i$$

En sommant cette égalité pour i de 1 à n, nous avons :

$$\frac{\sum a_k}{r} = \sum b_k \Leftrightarrow \frac{\sum a_k}{\sum b_k} = r$$

Comme voulu.

EXERCICE 28 (①) proposé par Antonin D

Montrer que $2\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{2} + \sqrt{6}$.

On a

$$2\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{8+4\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2} = \sqrt{2}+\sqrt{6}$$

> EXERCICE 29 (①) par Karim
>
> Soit $\mathbb{K}$ l'ensemble des nombres réels de la forme $a+b\sqrt{2}$ avec $(a,b)\in\mathbb{Q}^2$. Montrer que, si x et y sont dans $\mathbb{K}$, il en est de même de $x-y,\ xy$ et, si $x\neq 0$, de $\dfrac{1}{x}$.

Soit $x = a+b\sqrt{2}$ et $y = c+d\sqrt{2}$. Alors

$$x-y = a+b\sqrt{2}-c-d\sqrt{2} = (a-c)+(b-d)\sqrt{2}, \quad (a-c, b-d)\in\mathbb{Q}^2.$$

Ainsi, $x-y$ de la forme $A+B\sqrt{2}$, donc $x-y\in\mathbb{K}$.

$$xy = (a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2}) = ac+ad\sqrt{2}+bc\sqrt{2}+2bd = ac+2bd+\sqrt{2}(ad+bc), \quad (ac+2bd, ad+bc)\in\mathbb{Q}^2.$$

Ce qui est aussi de la forme $A+B\sqrt{2}$, donc $xy\in\mathbb{K}$.

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a+b\sqrt{2}} = \frac{a-b\sqrt{2}}{(a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})} = \frac{a-b\sqrt{2}}{a^2-2b^2}.$$

Ce qui est égal, en utilisant la quantité conjuguée, à

$$\frac{a}{a^2-2b^2} - \frac{b}{a^2-2b^2}\sqrt{2}, \quad \left(\frac{a}{a^2-2b^2}, \frac{b}{a^2-2b^2}\right)\in\mathbb{Q}^2.$$

Ce qui est aussi de la forme $A+B\sqrt{2}$, donc $\dfrac{1}{x}\in\mathbb{K}$.

> EXERCICE 30 (①) par Tomás
>
> Soient x, y, z trois nombres réels, Vérifier que
>
> $$(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3) = 3(x+y)(y+z)(z+x)$$

D'une part,

$$\begin{aligned}(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3) &= (x+y+z)(x+y+z)(x+y+z)-x^3-y^3-z^3\\ &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz)-x^3-y^3-z^3\\ &= (x^3+y^3+6xyz+3xy^2+3yx^2+3xz^2+3zx^2+3yz^2+3zy^2)-x^3-y^3-z^3\\ &= 6xyz+3xy^2+3yx^2+3xz^2+3zx^2+3yz^2+3zy^2\end{aligned}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}3(x+y)(y+z)(z+x) &= 3(xy+xz+y^2+yz)(z+x)\\ &= 3(2xyz+yx^2+xz^2+zx^2+zy^2+xy^2+yz^2)\\ &= 6xyz+3xy^2+3yx^2+3xz^2+3zx^2+3yz^2+3zy^2\end{aligned}.$$

Donc, par transitivité, $(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3) = 3(x+y)(y+z)(z+x)$.

> EXERCICE 31 (②) Soit n le produit de quatre éléments de $\mathbb{N}^*$ consécutifs. Montrer que $n+1$ est le carré d'un entier.

On pose les entiers consécutifs tel que $n = abcd$, et où $a = k,\ b = k+1,\ c = k+2,\ d = k+3, \quad k\in\mathbb{N}^*$. On a donc

$$n+1 = k(k+1)(k+2)(k+3) = (k^2+k)(k^2+5k+6)+1.$$

En finissant de développer, on obtient

$$n + 1 = k^4 + 6k^3 + 11k^2 + 6k + 1.$$

On remarque que $(k^2)^2 = k^4$ et $1^2 = 1$, et que donc on pourrait factoriser $n + 1$ comme ceci :

$$(k^2 + a + 1)^2 = n + 1.$$

Ce qui donne

$$n + 1 = k^4 + 2ak^2 + 2k^2 + a^2 + 2a + 1.$$

Par identification, on a

$$\begin{cases} 2a = 6k \\ 2ak^2 = 6k^3 \\ 2k^2 + a^2 = 11k^2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 3k \\ a = \dfrac{6k^3}{2k^2} \\ a = \sqrt{11k^2 - 2k^2} \end{cases} \iff \begin{cases} a = 3k \\ a = \dfrac{6k^3}{2k^2} = 3k \\ a = \sqrt{11k^2 - 2k^2} = 3k \end{cases}$$

Donc,

$$n + 1 = (k^2 + 3k + 1)^2.$$

Exercice 32 (②) par Tomás

Soient x et y deux nombres réels. En complétant un carré, donner une factorisation de x^4+4y^4.

Pour touts réels x et y, on a

$$\begin{aligned} x^4 + 4y^4 &= x^4 + 4y^4 + 4x^2y^2 - 4x^2y^2 \\ &= (x^2 + 2y^2)^2 - 4x^2y^2 \\ &= (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 \\ &= (x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy)\,. \end{aligned}$$

Exercice 33 (③) par François

Soit

$$a = \sqrt[3]{1 + \sqrt{\frac{152}{27}}} - \sqrt[3]{-1 + \sqrt{\frac{152}{27}}}\,.$$

Montrer que $a^3 + 5a$ est un nombre entier.

On pose $X = \sqrt{\dfrac{152}{27}}$. On a donc

$$a = \sqrt[3]{1 + X} - \sqrt[3]{-1 + X}.$$

Ainsi

$a^3 = (\sqrt[3]{1 + X} - \sqrt[3]{-1 + X})^3 = 1-(-1)+X-X+(-3)\sqrt[3]{1 + X}\sqrt[3]{1 + X}\sqrt[3]{-1 + X}+3\sqrt[3]{-1 + X}\sqrt[3]{-1 + X}\sqrt[3]{1 + X}.$

En mettant sous la même racine et en factorisant par identité remarquable, on obtient :

$a^3 = 2 - 3(\sqrt[3]{(X^2 - 1)(X + 1)}) + 3(\sqrt[3]{(X^2 - 1)(X - 1)}) = 2 + 3\sqrt[3]{X^2 - 1}(-\sqrt[3]{1 + X} + \sqrt[3]{-1 + X}).$

Or, $a = \sqrt[3]{1 + X} - \sqrt[3]{-1 + X}$, donc

$$a^3 = 2 - 3\sqrt[3]{X^2 - 1}(\sqrt[3]{1 + X} - \sqrt[3]{-1 + X}) = 2 - 3\sqrt[3]{X^2 - 1}(a).$$

Or $5a = 5(\sqrt[3]{1 + X} - \sqrt[3]{-1 + X})$, donc

$$a^3 + 5a = 2 - 3\sqrt[3]{X^2 - 1}(a) + 5(\sqrt[3]{1 + X} - \sqrt[3]{-1 + X}) = 2 - (3\sqrt[3]{X^2 - 1} - 5)a.$$

Or, $X = \sqrt{\frac{152}{27}}$. Donc, en remplaçant X par sa valeur,

$$a^3 + 5a = 2 - (3\sqrt[3]{\frac{152}{27} - 1} - 5)a = 2 - (3\sqrt[3]{\frac{125}{27}} - 5)a = 2 - (3\sqrt[3]{\frac{5^3}{3^3}} - 5)a = 2 - (3(\frac{5}{3} - 5)a = 2.$$

Ainsi,

$$a^3 + 5a = 2, \quad 2 \in \mathbb{N}$$

> Exercice 34 (③) par François
>
> Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, soit
>
> $$E = x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 .$$
>
> Factoriser E en un produit de quatre facteurs.

On remarque que $(x^2 + y^2 - z^2)^2 = x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2z^2y^2$, ce qui est presque E. On a donc

$$E = x^4+y^4+z^4+2x^2y^2-2x^2z^2-2z^2y^2-4x^2y^2 = (x^2+y^2-z^2)^2-4x^2y^2 = (x^2+y^2-z^2)^2-(2xy)^2.$$

Or, ceci est une identité remarquable de la forme $a^2 - b^2$ donc

$$E = (x^2+y^2-z^2)^2-(2xy)^2 = (x^2+y^2+2xy-z^2)(x^2+y^2-2xy-z^2) = ((x+y)^2-z^2)((x-y)^2-z^2).$$

En utilisant la même identité remarquable que précédemment, on obtient

$$E = (x + y + z)(x + y - z)(x - y - z)(x - y + z)$$

> Exercice 35 (④) par Octave
>
> a) Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $(x + 3)^2 + x^2 - (x + 1)^2 - (x + 2)^2$.
>
> b) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m) \in \{-1, 1\}^m$ tel que
>
> $$x = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i i^2 .$$

a) Soit $P : x \in \mathbb{R} \longmapsto (x+3)^2+x^2-(x+1)^2-(x+2)^2$. En développant et simplifiant, on constate que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = 4$.

b) On procède par disjonction de cas sous l'idée d'un tableau de congruences modulo 4. On note k le quotient de la division euclidienne de x par 4.

$x \equiv \quad [4]$	0	1	2	3
$x =$	$\sum_{i=1}^{k} P(i)$	$1^2 + \sum_{i=2}^{k+1} P(i)$	$-1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 + \sum_{i=5}^{k} P(i)$	$-1^2 + 2^2 + \sum_{i=3}^{k+2} P(i)$

2.2 le symbole $\sum$

> Exercice 36 (①) par Tomás
>
> Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Donner une expression simple de la somme $\sum_{k=1}^{n}(2k - 1)$ des n premiers entiers impairs.

On utilise la linéarité de la somme pour simplifier l'expression :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(2k-1) &= 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= \frac{2n(n+1)}{2} - n \\ &= n^2 + n - n \\ &= n^2\,.\end{aligned}$$

> EXERCICE 37 (②) par Tomás
>
> Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle. On suppose que
>
> $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{n^2+n}{3}\,.$$
>
> Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer u_n.

- Si $n \in \mathbb{N}^*$, alors

  $$\begin{aligned}\frac{n^2+n}{3} &= \sum_{k=0}^{n} u_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} u_k + u_n \\ &= \frac{(n-1)^2+(n-1)}{3} + u_n\end{aligned}.$$

  Donc, $u_n = \dfrac{n^2+n-(n-1)^2-(n-1)}{3} = \dfrac{2n}{3}$

- Si $n = 0$, la supposition devient $u_0 = 0$, et on constate que $\dfrac{2n}{3} = 0$.

Donc, pour $n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{2n}{3}$

> EXERCICE 38 (③) par Léo
>
> Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On trace la table de multiplication des entiers entre 1 et n. On obtient donc un tableau carré comportant n^2 entiers naturels. Quelle est la moyenne de ces entiers ?

On représente les tables de multiplication de la façon suivante :

Tables de multiplication					Somme de la ligne
Table de 1	1	2	...	n	$\dfrac{n(n+1)}{2}$
Table de 2	2	4	...	$2n$	$\sum_{i=1}^{n}(2i) = 2\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}$
...	...	...	...	...	...
Table de n	n	$2n$	...	n^2	$\sum_{i=1}^{n}(n\cdot i) = n\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}$
Somme totale S_n					$\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\cdot\dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

Il ne nous reste plus qu'à calculer la moyenne M_n :
Puisqu'il y a exactement n^2 termes, on a :

$$M_n = \frac{S_n}{n^2} = \frac{(n+1)^2}{4}$$

EXERCICE 39 (①) par Léo

Soit $x \in]-1, 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k$. Montrer que

$$S_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-x}\,.$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

Or, $x \in]-1, 1[$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} x^n = 0$, et par suite,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x^{n+1}-1}{x-1} = \frac{-1}{x-1} = \frac{1}{1-x}$$

EXERCICE 40 (③) par Tomás

a) En utilisant la formule de la progression géométrique et la dérivation, calculer, pour x réel et n dans $\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n} kx^k\,.$$

On distinguera le cas $x = 1$.

b) Si $x \in]-1, 1[$, déterminer la limite de la somme précédente lorsque n tend vers $+\infty$.

a) • Si $x = 1$, alors

$$\sum_{k=0}^{n} kx^k = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

• Si $x \neq 1$, alors, en notant f_k les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f_k(x) = x^k$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} kx^k &= x \sum_{k=0}^{n} kx^{k-1} \\ &= x \sum_{k=0}^{n} f_k'(x)\,.\end{aligned}$$

Or, la dérivée est une application linéaire. C'est-à-dire que la somme des dérivées est la dérivée de la somme. Donc :

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} kx^k &= x\sum_{k=0}^{n} f_k'(x) \\
&= x\left(\sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right)' \\
&= x\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)' \\
&= x\left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)' \\
&= x\left[\frac{(n+1)x^n(x-1)-x^{n+1}-1}{(x-1)^2}\right] \\
&= x\left[\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}\right] \\
&= \frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(x-1)^2}.
\end{aligned}
$$

EXERCICE 41 (②) par Léo

On pose, pour n dans $\mathbb{N}^*$: $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$. Simplifier $u_{n+1} - u_n$ et en déduire la monotonie de $(u_n)_{n\geq 1}$.

$$
\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=n+1}^{2(n+1)} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \\
&= \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \left(\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

Or, $\dfrac{1}{2n+2} + \dfrac{1}{2n+1} \leqslant 2 \cdot \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{n}$, et par suite, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, la suite est donc décroissante.

EXERCICE 42 (②) par Leo

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer en fonction de n la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$.

Soit $a \in [|1, n-1|]$. Résolvons l'équation d'inconnue k : $\left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor = a$

$$
\left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor = a \underbrace{\iff}_{\text{par définition de la partie entière}} a^2 \leqslant k < (a+1)^2 \iff k \in [|a^2; (a+1)^2-1|] \iff k \in [|a^2; a^2+2a|]
$$

Or, $Card\left([|a^2;a^2+2a|]\right)=2a+1$, donc :

$$\begin{aligned}
S_n &= n+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)\cdot k\\
&= 2\cdot\sum_{k=1}^{n-1}k^2+\sum_{k=1}^{n-1}k+n\\
&= 2\cdot\frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6}+\frac{(n-1)\cdot n}{2}+n
\end{aligned}$$

Exercice 43 (3) par Léo

On note H_n le n-ième nombre harmonique, introduit dans l'exemple 5 ci-dessus. Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} H_k = nH_n - n\,.$$

Montrons par récurrence $\forall n \geqslant 2, \mathcal{P}_n$: " $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} H_k = nH_n - n$"

Initialisation : Pour $n=2$:

$$H_1 = 1 = 2\cdot H_2 - 2$$

Hérédité : Soit $n \geqslant 2$, supposons que $\mathcal{P}_n$ soit vraie et montrons qu'alors $\mathcal{P}_{n+1}$ est également vraie.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} H_k &= \sum_{k=1}^{n-1} H_k + H_n\\
&\underbrace{=}_{\text{par HR}} nH_n - n + H_n\\
&= H_n(n+1) - n\\
&= \left(H_{n+1}-\frac{1}{n+1}\right)\cdot(n+1)\\
&= H_{n+1}\cdot(n+1)-(n+1)
\end{aligned}$$

Conclusion La propriété est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie $\forall n \geqslant 2$

Exercice 44 (4) par François

Trouver les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels strictement positifs telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \sum_{k=1}^{n} {u_k}^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)^2.$$

On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$, à savoir $u_n \neq 0$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n+1} (u_k)^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} u_k\right)^2 \implies \sum_{k=1}^{n} u_k^3 + u_{n+1}^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k + u_{n+1}\right)^2$$
$$\implies \sum_{k=1}^{n} u_k^3 + u_{n+1}^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)^2 + 2u_{n+1}\sum_{k=1}^{n} u_k + (u_{n+1})^2$$
$$\implies u_{n+1}^3 = 2u_{n+1}\sum_{k=1}^{n} u_k + (u_{n+1})^2$$
$$\implies u_{n+1}^3 = u_{n+1}\left(2\sum_{k=1}^{n} u_k + u_{n+1}\right)$$
$$\implies u_{n+1}^2 = 2\sum_{k=1}^{n} u_k + u_{n+1} \quad \text{car } u_{n+1} \neq 0$$
$$\implies \frac{u_{n+1}\left(u_{n+1}-1\right)}{2} = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

Remarquons ici que $\frac{N'(N'-1)}{2} = \sum_{k=1}^{n} u_k$ avec $N' = u_{n+1}$ ressemble fortement à la formule bien connue :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

En effectuant un changement d'indice, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_n\left(u_n-1\right)}{2} = \sum_{k=1}^{n-1} u_k$

Or, $\sum_{k=1}^{n-1} u_k + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ donc :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{u_{n+1}\left(u_{n+1}-1\right)}{2} = \sum_{k=1}^{n} u_k \\ \frac{u_n\left(u_n-1\right)}{2} + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \end{array}\right. \iff u_{n+1}\left(u_{n+1}-1\right) = u_n\left(u_n-1\right)+2u_n \iff u_{n+1}\left(u_{n+1}-1\right) = u_n\left(u_n+1\right)$$

Ainsi, on a bien : $\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{u_n\left(u_n-1\right)}{2}$.
On a donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} & u_{n+1}\left(u_{n+1}-1\right) = u_n\left(u_n+1\right) \\ \implies & u_{n+1}^2 - u_{n+1} = u_n^2 + u_n \\ \implies & u_{n+1}^2 - u_n^2 = u_{n+1} + u_n \\ \implies & (u_{n+1}-u_n)(u_{n+1}+u_n) = u_n + u_{n+1} \\ \implies & u_{n-1} - u_n = 1 \end{aligned}$$

(u_n) est donc une suite arithmétique de raison 1 et se note $u_n = u_1 + (n-1)$ avec u_1 le terme au rang 1.
Ici, on a nécéssairement $u_1^3 = u_2^2$ soit $u_1 = 1$ ou $u_1 = 0$
Or, on a vu que $u_n \neq 0$, donc nécessairement $u_1 = 1$, et

$$u_n = 1 + (n-1) = n$$

On vérifie réciproquement que cette suite convient (cf. exercice 1), afin de conclure que la seule suite respectant les conditions de l'énoncé est la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n$$

2.3 Complément : sommes télescopiques

Exercice 45 (③) par Tomás

a) Si a est dans $\mathbb{N}^*$, simplifier la somme

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right).$$

Quelle est la limite de cette expression lorsque n tend vers $+\infty$?

b) Si n est un entier ≥ 2, simplifier la somme

$$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right).$$

Quelle est la limite de cette expression lorsque n tend vers $+\infty$?

a)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1)-\ln(k)\\ &= \ln(n+1)-\ln(1)\\ &= \ln(n+1)\end{aligned}.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = +\infty$

b)

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) &= \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)\\ &= \sum_{k=2}^{n} \ln(k^2-1)-\ln(k^2)\\ &= \sum_{k=2}^{n} \ln(k+1)+\ln(k-1)-2\ln(k)\\ &= \sum_{k=2}^{n} \ln(k+1)-\ln(k) - \sum_{k=2}^{n} \ln(k)-\ln(k-1)\\ &= \ln(n+1)-\ln(2)-(\ln(n)-\ln(1))\\ &= \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right)\\ &= \ln\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{2}\right)\end{aligned}.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = -\ln(2)$

Exercice 46 (④) par Antonin D

Déterminer trois réels a, b, c tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0,-1,-2\}, \qquad \frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x+2}.$$

En déduire, pour n dans $\mathbb{N}^*$ une expression simple de

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

Quelle est la limite de $(U_n)_{n\geq 1}$ lorsque n tend vers $+\infty$?

On procède à une décomposition en élément simple $a = \frac{1}{2}, b = -1, c = \frac{1}{2}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1/2}{k} + \frac{-1}{k+1} + \frac{1/2}{k+2} = \frac{1}{4} + \frac{1/2}{n+2} \to \frac{1}{4}$$

Remarque. La décomposition en élément simple sera introduit en sup.

EXERCICE 47 (③) par Tomás

a) Trouver trois réels a, b, c tels que, si :

$$P : x \in \mathbb{R} \longmapsto ax^3 + bx^2 + cx$$

on ait

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) - P(x-1) = x^2.$$

En déduire une expression simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$

b) Adapter cette méthode pour calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$

a) Pour tout réel x, on a

$$\begin{aligned}
P(x) - P(x-1) &= ax^3 + bx^2 + cx - a(x-1)^3 - b(x-1)^2 - c(x-1) \\
&= ax^3 + bx^2 + cx - a(x^3 - 3x^2 + 3x + -1) - b(x^2 - 2x + 1) - cx + c \\
&= 3ax^2 + (-3a + 2b)x + (a - b + c).
\end{aligned}$$

Par identification, pour que $P(x) - P(x-1) = x^2$, il est nécessaire est suffisant que

$$\begin{cases} 3a & = 1 \\ -3a + 2b & = 0 \\ a - b + c & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a & = \frac{1}{3} \\ 2b - 1 & = 0 \\ \frac{1}{3} - b + c & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{6} \end{cases}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} P(k) - P(k-1) \\
&= P(n) - P(0) \\
&= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
\end{aligned}$$

b) Soit $Q : x \in \mathbb{R} \longmapsto ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$ pour quatre réels a, b, c, d.

Pour tout réel x, on a

$$\begin{aligned}Q(x)-Q(x-1) &= ax^4+bx^3+cx^2+dx-a(x-1)^4-b(x-1)^3-c(x-1)^2-d(x-1)\\ &= ax^4+bx^3+cx^2+dx-a(x^4-4x^3+6x^2-4x+1)\\ &- b(x^3-3x^2+3x-1)-c(x^2-2x+1)-dx+d\\ &= 4ax^3+3(-2a+b)x^2+(4a-3b+2c)x+(-a+b-c+d).\end{aligned}$$

Par identification, pour que $Q(x)-Q(x-1)=x^3$, il est nécessaire est suffisant que

$$\begin{cases}4a &=1\\ -2a+b &=0\\ 4a-3b+2c &=0\\ -a+b-c+d &=0\end{cases} \iff \begin{cases}a &=\frac14\\ -\frac12+b &=0\\ 1-3b+2c &=0\\ -\frac14+b-c+d &=0\end{cases} \iff \begin{cases}a=\frac14\\ b=\frac12\\ 1-\frac32+2c=0\\ -\frac14+\frac12-c+d=0\end{cases} \iff \begin{cases}a=\frac14\\ b=\frac12\\ c=\frac14\\ d=0\end{cases}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} Q(k)-Q(k-1)\\ &= Q(n)-Q(0)\\ &= \frac14 n^4+\frac12 n^3+\frac14 n^2\\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2\end{aligned}$$

EXERCICE 48 (③) par Tomás

Soient $(v_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle, a un réel différent de 0 et de 1, $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite telle que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=au_n+v_n.$$

On pose

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u'_n=\frac{u_n}{a^n}.$$

a) Si $n\in\mathbb{N}$, simplifier $u'_{n+1}-u'_n$

b) En déduire une expression sommatoire de u'_n, puis de u_n.

a) Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned}u'_{n+1}-u'_n &= \frac{u_{n+1}}{a^{n+1}}-\frac{u_n}{a_n}\\ &= \frac{(au_n+v_n)-au_n}{a^{n+1}}\\ &= \frac{v_n}{a^{n+1}}.\end{aligned}$$

b) D'une part

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n-1} u'_{k+1}-u'_k = u'_n-u'_0\\ \Longrightarrow\ & u'_n=\sum_{k=0}^{n-1}\left(u'_{k+1}-u'_k\right)+u'_0.\end{aligned}$$

D'une autre part,

$$\sum_{k=0}^{n-1} u'_{k+1}-u'_k=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{v_k}{a^{k+1}}.$$

Donc

$$u'_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{v_k}{a^{k+1}} + u'_0 \,.$$

Et, en remarquant que $u'_0 = \dfrac{u_0}{a^0} = u_0$,

$$\begin{aligned} u_n &= a^n u'_n \\ &= a^n u'_0 + a^n \sum_{k=0}^{n-1} v_k a^{-k-1} \\ &= a^n u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} v_k a^{n-k-1}. \end{aligned}$$

Exercice 49 (②) par Antonin D

Donner une forme simple de

$$\sum_{k=1}^{n} (k \times k!)$$

$$\sum_{k=1}^{n} (k \times k!) = \sum_{k=1}^{n} (k+1)! - k! = (n+1)! - 1$$

Exercice 50 (②) par Antonin D

Par une méthode analogue à celle de l'exercice précédent, donner une formule simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$.

On remarque que

$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$$

On a alors une somme télescopique

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)}$$

Exercice 51 (③) par Tomás

Pour j dans $\mathbb{N}^*$ et x dans $\mathbb{R}$, on pose :

$$H_j(x) = x(x+1)\dots(x+j-1)\,.$$

a) pour j dans $\mathbb{N}^*$ et x dans $\mathbb{R}$, calculer $H_{j+1}(x) - H_{j+1}(x-1)\,.$

b) En déduire, pour j et n dans $\mathbb{N}^*$, la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} H_j(x)$.

c) Retrouver les sommes $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$ à l'aide de la question b).

a) Soient $k \in [\![0, j]\!]$ et $p = k - 1$,

$$\begin{aligned}
H_{j+1}(x) - H_{j+1}(x-1) &= \prod_{k=0}^{j}(x+k) - \prod_{k=0}^{j}(x-1+k) \\
&= \prod_{k=0}^{j}(x+k) - \prod_{p=-1}^{j-1}(x+p) \\
&= (x+j)\prod_{k=0}^{j-1}(x+k) - (x-1)\prod_{p=0}^{j-1}(x+p) \\
&= \prod_{k=0}^{j-1}(x+k)\left((x+j)-(x-1)\right) \\
&= H_j(x)(j+1)\,.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} H_j(k) &= \frac{1}{j+1}\sum_{k=1}^{n} H_{j+1}(k) - H_{j+1}(k-1) \\
&= \frac{1}{j+1}\left(H_{j+1}(n) - H_{j+1}(0)\right) \\
&= \frac{1}{j+1}H_{j+1}(n)\,.
\end{aligned}$$

c)
- En constatant que $H_2(k) - k = k(k+1) - k = k^2$, on trouve que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} H_2(k) - k \\
&= \frac{1}{3}H_3(n) - \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,.
\end{aligned}$$

- De même,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} H_3(k) - 3k^2 - 2k \\
&= \frac{1}{4}H_4(n) - \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} - n(n+1) \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} - n(n+1) \\
&= \frac{n(n+1)}{4}\left((n+2)(n+3) - 2(2n+1) - 4\right) \\
&= \frac{n(n+1)}{4}(n^2+n) \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.
\end{aligned}$$

Exercice 52 (④) par François

Soient n et r deux entiers naturels tels que $r \leq n$,

$$S_{k,n} = \sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r}.$$

a) En utilisant la relation de Pascal :

$$\binom{k+1}{r+1} = \binom{k}{r} + \binom{k}{r+1},$$

valable pour k et n dans $\mathbb{N}$ avec $r+1 \leq k$, exprimer $S_{k,n}$ comme un coefficient binomial.

b) Retrouver le résultat obtenu en employant un raisonnement combinatoire.

a) Nous savons que pour k et n dans $\mathbb{N}$, avec $r+1 \leqslant k$,

$$\binom{k}{r} = \binom{k+1}{r+1} - \binom{k}{r+1}.$$

Ainsi, avec $r \geqslant 0$,

$$\sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} = \sum_{k=r}^{n} \binom{k+1}{r+1} - \sum_{k=r-1}^{n-1} \binom{k+1}{r+1}.$$

Ce qui donne

$$\sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} = \sum_{k=r}^{n-1} \binom{k+1}{r+1} + \binom{n+1}{r+1} - \sum_{k=r}^{n-1} \binom{k+1}{r+1} - \binom{r-1+1}{r+1}.$$

Ce qui est égal à

$$\binom{n+1}{r+1} - \binom{r}{r+1}.$$

De plus, $\forall r \in \mathbb{N}, \binom{r}{r+1} = 0$. On en conclu que

$$S_{k,n} = \sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

b) Notons E_k la partie de $\mathcal{P}_{p+1}(\llbracket 1, n+1 \rrbracket)$ constituée des parties de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ de cardinal $p+1$ et dont le plus grand élément est k, de sorte que

$$\mathcal{P}_{p+1}(\llbracket 1, n+1 \rrbracket) = \bigcup_{k=p}^{n} E_{k+1}.$$

Cette union est évidemment disjointe. Par conséquent :

$$\text{Card } (\mathcal{P}_{p+1}(\llbracket 1, n+1 \rrbracket)) = \sum_{k=p}^{n} \text{Card } (E_{k+1}).$$

Or, pour chaque $k \in \llbracket p, n \rrbracket$, les éléments de E_{k+1} sont les

$$k+1 \cup X,$$

avec X parcourant $\mathcal{P}_p(\llbracket 1, k \rrbracket)$. De ce fait :

$$\forall k \in \llbracket p, n \rrbracket, \text{Card } ((E_{k+1}) = \binom{k}{p}.$$

On retrouve ainsi la formule :

$$\binom{n+1}{p+1} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}.$$

2.4 Le symbole $\prod$

Exercice 53 (①)

a) Pour n dans $\mathbb{N}^*$, simplifier le produit

$$A_n = \prod_{k=1}^{n} 4^{k^2+1}.$$

b) Pour n dans $\mathbb{N}^*$, simplifier le produit

$$B_n = \prod_{k=0}^{n} \frac{k+4}{k+3}.$$

a)

$$\prod_{k=1}^{n} 4^{k^2+1} = 4^{\sum\limits_{k=1}^{n} k^2+1} = 4^{\frac{6n+n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

b)

$$\prod_{k=0}^{n} \frac{k+4}{k+3} = \frac{n+4}{3}$$

Exercice 54 (②) par Léo

Quel est le produit des n^2 entiers apparaissant dans la table de multiplication des entiers entre 1 et n ?

On représente les tables de multiplication de la façon suivante :

Tables de multiplication					Produit de la ligne
Table de 1	1	2	...	n	$n!$
Table de 2	2	4	...	$2n$	$\prod_{i=1}^{n}(2i) = 2^n \cdot n!$
...	...	...	...	...	...
Table de n	n	$2n$	...	n^2	$\prod_{i=1}^{n}(n \cdot i) = n^n \cdot n!$
Produit total $(*)$					$(n!)^{2n}$

Démonstration de $(*)$: Soit P_n le produit total. Il suffit de constater que

$$P_n = \prod_{i=1}^{n}(i^n \cdot n!) = (n!)^n \cdot \prod_{i=1}^{n} i^n = (n!)^n \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} i\right)^n = (n!)^n \cdot (n!)^n = (n!)^{2n}$$

Exercice 55 (③) par Tomás

Pour $n \geq 2$, donner une expression simple de

$$C_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

et trouver la limite de $(C_n)_{n\geq 2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Pour $n \geq 2$, on a

$$\begin{aligned}
\ln(C_n) &= \ln\left(\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\right)\\
&= \sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\\
&= \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right). \qquad \text{(cf. Exercice 45)}
\end{aligned}$$

Donc, finalement, $C_n = \dfrac{n+1}{2n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} C_n = \dfrac{1}{2}$.

3 Inégalités, inéquations, trinôme du second degré réel

3.1 Inégalités, encadrements, inéquations du premier degré

EXERCICE 56 (①) par Tristan

Soient a, b deux nombres réels, a', b', m, n quatre nombres réels strictement positifs tels que $\dfrac{a}{a'} > \dfrac{b}{b'}$. Montrer que

$$\frac{b}{b'} < \frac{ma+nb}{ma'+nb'} < \frac{a}{a'}\,.$$

Commençons par établir que si $\dfrac{a}{a'} > \dfrac{b}{b'}$ alors $ab' > a'b \quad (i)$.

On a alors d'une part :

$$\frac{a}{a'} - \frac{ma+nb}{ma'+nb'} = \frac{n\,(ab'-a'b)}{a'\,(ma'+nb')} > 0 \quad \text{d'après } (i)$$

Et d'autre :

$$\frac{b}{b'} - \frac{ma+nb}{ma'+nb'} = \frac{n\,(a'b-ab')}{b'\,(ma'+nb')} < 0 \quad \text{d'après } (i)$$

Alors $\dfrac{a}{a'} > \dfrac{ma+nb}{ma'+nb'}$ et $\dfrac{b}{b'} < \dfrac{ma+nb}{ma'+nb'}$.

On retrouve ainsi l'inégalité de l'énoncé :

$$\frac{b}{b'} < \frac{ma+nb}{ma'+nb'} < \frac{a}{a'}$$

EXERCICE 57 (②) par Léo

Soient a, b, c des éléments de $]0,1]$.

a) Montrer que $(ab-1)(bc-1)(ca-1) \leq 0$.

b) En déduire que

$$a+b+c+\frac{1}{abc} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+abc\,.$$

a) On a ab, ac et $bc \leqslant 1$, donc $(ab-1) \leqslant 0, (ac-1) \leqslant 0$ et $(bc-1) \leqslant 0$. Puisque le produit de 3 nombres négatifs est toujours négatif, on a bien $(ab-1)(bc-1)(ca-1) \leqslant 0$

b) On développe :

$$\begin{aligned}
(ab-1)(bc-1)(ca-1) \leqslant 0 &\iff a^2b^2c^2 - ab^2c - a^2bc - abc^2 - 1 + ab + bc + ac \leqslant 0\\
&\iff (abc)^2 + ab + ac + bc \leqslant a^2bc + ab^2c + abc^2 + 1
\end{aligned}$$

Et comme $abc > 0$, on peut diviser par abc $\iff a+b+c+\dfrac{1}{abc} \geqslant \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+abc$

Exercice 58 (②) Par Lancelot

Soient x et y deux éléments de $]-1,1[$. Montrer que le nombre réel $z = \dfrac{x+y}{1+xy}$ appartient à $]-1,1[$.

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des couples $(x,y) \in]-1;1[^2$ solutions de l'inéquation à démontrer. Remarquons que $\mathcal{S}$ est non vide car $(0,0)$ est solution. On raisonne par équivalence pour simplifier l'inégalité à montrer. Soit $(x,y) \in \mathcal{S}$ On a :

$$\begin{aligned} -1 < \frac{x+y}{1+xy} < 1 &\iff \left|\frac{x+y}{1+xy}\right| < 1 \\ &\iff (x+y)^2 < (1+xy)^2 \\ &\iff 0 < (1+xy)^2 - (x+y)^2. \end{aligned}$$

Mais, $(1+xy)^2-(x+y)^2 = 1+2xy+(xy)^2-x^2-2xy-y^2 = 1+(xy)^2-x^2-y^2 = (x-1)(y-1)$. Il faut donc montrer que :

$$0 < (x-1)(y-1),$$

ce qui est naturelle car x et y sont des éléments de $]-1;1[$. D'où $\mathcal{S} =]-1;1[$, ce qu'il fallait obtenir.

Remarque. En utilisant un raisonnement identique, on peut montrer que pour $c \in \mathbb{R}_+^*$

$$\forall (x,y) \in]-c;c[, \quad -c < \frac{x+y}{1+xy/c^2} < c,$$

qui s'interprète, pour les plus physiciens des lecteurs, comme la loi de composition des vitesses en relativité restreinte.

Exercice 59 (②) par Jean

a) Quels ensembles décrivent respectivement x^2 et x^3 lorsque x décrit l'intervalle $[-2,+\infty[$?

b) Quel ensemble décrit $\dfrac{1}{x}$ lorsque x décrit $]-4,5] \setminus \{0\}$?

a)
- $\forall x \in [-2,+\infty[$, $x \mapsto x^2$ est croissante et positive et tend vers $+\infty$ donc, d'après le TVI, x^2 décrit $[0,+\infty[$.
- Soit f la fonction dérivable et définie sur $[-2,+\infty[$ par $x \mapsto x^3$.

$$\forall x \in [-2,+\infty[, \qquad f'(x) = 3x^2 \geq 0$$

donc f est strictement croissante sur $[-2,+\infty[$. Or, f est continue sur $\mathbb{R}$ donc, d'après le TVI, x^3 décrit $[-8,+\infty[$

b) $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est définie et continue et strictement décroissante sur $]-4,0[\cup]0,5]$. On a donc :
- $-4 < x < 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x} < -\dfrac{1}{4}$.
- $0 < x \leq 5 \Rightarrow \dfrac{1}{x} \geq \dfrac{1}{5}$.

Donc, quand x décrit $]-4,5] \setminus \{0\}$, $\dfrac{1}{x}$ décrit $\mathbb{R} \setminus \left[-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}\right[$.

Exercice 60 (②) par Jean

a) Quels ensembles décrivent respectivement $x+y, xy, \dfrac{x}{y}$ lorsque x décrit $[-2,+\infty[$ et y décrit $[2,+\infty[$?

b) Même question lorsque x décrit $[-1,+\infty[$ et y décrit $]-\infty,3]$.

a) On a donc d'une part $+\infty > x \geq -2$ et d'autre part $+\infty > y \geq 2$. Donc

$$+\infty > x+y \geq 0$$

Et $x+y$ décrit $[0,+\infty[$

- pour $x=1$, xy décrit $[2,+\infty[$, pour $y=2$ (car y décrit $[2;+\infty[$) et $x=\frac{k}{2}$, où $k\in[-2,2]$, xy décrit $]-2,2[$.
pour $x=-1$, xy décrit $]-\infty,-2]$, donc lorsque x décrit $[-2,+\infty[$ et y décrit $[2,+\infty[$, xy décrit $]-\infty,+\infty[$.
-pour $y=2$ et $x\geq 0$, $\frac{x}{y}$ décrit $[0,+\infty[$, pour $x\leq 0$, on a $\frac{1}{y}\leq\frac{1}{2}$ donc $\frac{x}{y}\geq\frac{x}{2}\geq -1$. Donc xy décrit $[-1,+\infty[$.

b) De manière analogue,
-$x+y$ décrit $]-\infty,+\infty[$.
-xy décrit $]-\infty,+\infty[$ (on fixe tour à tour $x=1$ et $y=1$).
-$\frac{x}{y}$ décrit $]-\infty,+\infty[$ (on fixe tour à tour $y=1$ et $y=-1$).

EXERCICE 61 (②) par Tomás

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Montrer que

$$|x+y|\leq|x|+|y|\,,$$

et que cette inégalité est une égalité si et seulement si x et y ont même signe (au sens large).

Cas 1 : Si x et y sont de même signe, alors $xy\geq 0$. Donc :

$$\begin{aligned}(|x|+|y|)^2 &= \left(\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}\right)^2 \\ &= x^2+y^2+2\sqrt{(xy)^2} \\ &= x^2+y^2+2xy\end{aligned} \qquad \begin{aligned}|x+y|^2 &= \left(\sqrt{(x+y)^2}\right)^2 \\ &= x^2+y^2+2xy\end{aligned}$$

Donc $(|x|+|y|)^2=|x+y|^2$, or $|x+y|$ et $|x|+|y|$ sont tous les deux positifs, donc $|x+y|=|x|+|y|$.

Cas 2 : Si x et y sont de différent signe (on pose $y<0<x$) :
- Soit $|y|\geq|x|$, dans ce cas $y<x+y<0\Rightarrow|x+y|<|y|<|x|+|y|$.
- Soit $|y|\leq|x|$, dans ce cas $0<x+y<x\Rightarrow|x+y|<|x|<|x|+|y|$.

EXERCICE 62 (②) par Tomás

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\sqrt{x^2}+\sqrt{(x-1)^2}=1\,.$$

L'équation est traduite par $|x|+|x-1|=1$. On constate et distingue 3 cas :
- Si $x\geq 1$, alors $|x|=x$ et $|x-1|=x-1$, ce qui donne $(x)+(x-1)=1\Rightarrow x=1$.
- Si $x\leq 0$, alors $|x|=-x$ et $|x-1|=-(x-1)$, ce qui donne $(-x)+(1-x)=1\Rightarrow x=0$.
- Si $x\in]0,1[$, alors $|x|=x$ et $|x-1|=-(x-1)$, ce qui donne $x-x+1=1\Rightarrow 1=1$ donc $\forall x\in]0,1[$, x est solution.

Donc, l'ensemble solution est $]0,1[\cup\{0\}\cup\{1\}=[0,1]$.

EXERCICE 63 (②) par Tomás

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\geq\frac{1}{2}$$

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$.

Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition "$u_n \geq \frac{1}{2}$". On constate que $u_1 = \displaystyle\sum_{k=2}^{2} \frac{1}{k} = \frac{1}{2}$, donc $\mathcal{P}_1$ est confirmée.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_n$ est confirmée, alors :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k} \\
&= \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{n+n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \\
&= u_n - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \\
&= u_n + \frac{-(2n+1)(2n+2) + (n+1)(2n+2) + (n+1)(2n+1)}{(n+1)(2n+1)(2n+2)} \\
&= u_n + \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \\
&\geq \frac{1}{2} + \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \\
&\geq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est confirmée.

Autre démonstration :

$$u_n = \underbrace{\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}}_{\forall k\in[\![n+1;2n]\!],\, \frac{1}{k}\geq\frac{1}{2n}} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

Exercice 64 (②) par Tomás et Benoit

Soient n dans $\mathbb{N}^*$, a dans $]1;+\infty[$. Montrer que

$$\frac{a^n - 1}{a - 1} \leq n a^{n-1}$$

Méthode 1 : Théorème des accroissements finis.

Soient $f_n : \mathbb{R}^+ \longmapsto \mathbb{R}^+$ les monômes de degré n tels que $f_n(x) = x^n$.

On constate que $f_n''(x) = n(n-1)x^{n-2} \geq 0$, et donc f_n' est croissante sur $\mathbb{R}^+$. De plus, f_n est continue sur $[1;a]$ et dérivable sur $]1;a[$ donc, d'après le théorème des accroissements finis,

$\exists c \in \,]1; a[$ tel que $f_n'(c) = \dfrac{f_n(a) - f_n(1)}{a-1}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
& c \leq a \\
\Rightarrow\ & f_n'(c) \leq f_n'(a) \\
\Rightarrow\ & \frac{f_n(a) - f_n(1)}{a-1} \leq na^{n-1} \\
\Rightarrow\ & \frac{a^n - 1}{a-1} \leq na^{n-1}\,.
\end{aligned}$$

Méthode 2 : Sommes géométriques

On reconnaît ici la somme des termes d'une progression géométrique :

$$\frac{a^n - 1}{a-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k\,.$$

On sait de plus que $a^n > a^{n-1}$ étant donné que $a > 1$. Nécessairement, la somme énoncée voit ses n termes être inférieurs ou égaux à a^{n-1} (i.e. $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ a^k \leq a^{n-1}$). Ainsi,

$$\frac{a^n - 1}{a-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k \leq na^{n-1}\,.$$

Exercice 65 (②) par Tomás

Soient a et b deux éléments de $\mathbb{R}^+$. Montrer que

$$\left|\sqrt{a} - \sqrt{b}\right| \leq \sqrt{|a-b|}$$

Cas 1 : $0 \leq b \leq a$

$$\begin{aligned}
& b \leq a \\
\Rightarrow\ & b^2 \leq ab \\
\Rightarrow\ & 2b \leq 2\sqrt{ab} \\
\Rightarrow\ & a - 2\sqrt{ab} + b \leq a - b \\
\Rightarrow\ & \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \leq a - b = |a-b| \\
\Rightarrow\ & \left|\sqrt{a} - \sqrt{b}\right| \leq \sqrt{|a-b|}
\end{aligned}$$

Cas 2 : $0 \leq a \leq b$

$$\begin{aligned}
& a \leq b \\
\Rightarrow\ & a^2 \leq ab \\
\Rightarrow\ & 2a \leq 2\sqrt{ab} \\
\Rightarrow\ & a - 2\sqrt{ab} + b \leq b - a \\
\Rightarrow\ & \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \leq b - a = |a-b| \\
\Rightarrow\ & \left|\sqrt{a} - \sqrt{b}\right| \leq \sqrt{|a-b|}
\end{aligned}$$

Exercice 66 (③) par Tomás

Déterminer le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} \geq 2022$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} \geq 2022 \\
\Longrightarrow &\sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)}{\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)} \geq 2022 \\
\Longrightarrow &\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k+1}-\sqrt{k} \geq 2022 \\
\Longrightarrow &\sqrt{n+1}-1 \geq 2022 \\
\Longrightarrow &n \geq 2023^2-1
\end{aligned}$$

Exercice 67 (③) par Teiki

Déterminer les triplets $(x,y,z) \in \mathbb{N}^{*3}$, $x \leq y \leq z$ tels que : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$

Montrons tout d'abord que $x \leq 3$. Pour cela, supposons par l'absurde $x \geq 4$.
On a alors $4 \leq x \leq y \leq z$, donc $\frac{1}{z} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{4}$, donc $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} < 1$.

1. Supposons tout d'abord x = 1 : Il faudrait alors $\frac{1}{y}=\frac{1}{z}=0$: c'est impossible.
2. Si x = 2 : On se ramène à $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$. De même que précedemment, puisque $y \leq z$, on trouve $y \leq 4$.
   (a) Si y = 2, il faudrait $\frac{1}{z}=0$: c'est impossible
   (b) Si y = 3 : on a alors $\frac{1}{z}=\frac{1}{6}$, donc $z=6$
   (c) Si y = 4 : On a alors $\frac{1}{z}=\frac{1}{4}$, donc $z=4$
3. Si x = 3 : On se ramène à $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{3}$. On montre comme précedemment que $y \leq 3$, donc $y=3$ (puisque $y \geq x=3$). Ainsi, $\frac{1}{z}=\frac{1}{3}$, donc $z=3$

Finalement, l'ensemble des solutions est :

$$\{(2,3,6),(2,4,4),(3,3,3)\}$$

Exercice 68 (③) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

a) Pour $0 \leq m \leq n-1$, comparer le quotient $\dfrac{\binom{n}{m+1}}{\binom{n}{m}}$ à 1

b) En déduire que

$$\binom{n}{0} \leq \binom{n}{1} \leq \cdots \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

c) En considérant la somme $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$, montrer que

$$\frac{2^n}{n+1} \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \leq 2^n$$

Exercice 69 (④) par Alexandre

Soit, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{k=1}^{2022} |x-k|$.

a) Étudier les variations de f. On remarquera que f est affine par morceaux, donc strictement croissante (resp. strictement décroissante, resp. constante) sur tout intervalle où sa pente est strictement positive (resp. strictement négative, resp. nulle).

b) Quel est le minimum de f sur $\mathbb{R}$?

a)

- $\forall x \geq 2022$, on a, $\forall k \in [\![1, 2022]\!], x-k \geq 0 \implies |x-k| = x-k$
  On a alors $f(x) = \sum_{k=1}^{2022}(x-k) = 2022x - \sum_{k=1}^{2022} k$
  On trouve alors $\forall x \geq 2022, f'(x) = 2022$
- $\forall x \leq 1$, on a, $\forall k \in [\![1, 2022]\!], x-k \leq 0 \implies |x-k| = -(x-k) = -x+k$
  On a alors $f(x) = \sum_{k=1}^{2022}(-x+k) = -2022x + \sum_{k=1}^{2022} k$
  On trouve alors $\forall x \leq 1, f'(x) = -2022$
- $\forall x \in]1, 2022[$, on pose $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $k_0 \leq x < k_0+1$
  On a alors $\forall k \leq k_0, x-k \geq 0$, et réciproquement, $\forall k \geq k_0+1, x-k \leq 0$.
  On a alors $f(x) = \sum_{k=1}^{k_0}(x-k) + \sum_{k=k_0+1}^{2022}(-x+k)$
  $= k_0 x - \sum_{k=1}^{k_0} k + \sum_{k=k_0+1}^{2022} k - x(2022-k_0)$
  $x(2k_0 - 2022) - \sum_{k=1}^{k_0} k + \sum_{k=k_0+1}^{2022} k$
  On trouve alors $\forall x \in]1, 2022[, f'(x) = 2k_0 - 2022$, avec $k_0 = \lfloor x \rfloor$
  On en déduit donc que f est strictement décroissante sur $]-\infty; 1011[$, constante sur $[1011; 1012[$, et strictement croissante sur $[1012; +\infty[$

b) On sait que f atteint son minimum en 1011.
$f(1011) = \sum_{k=1}^{1011}(1011-k) + \sum_{k=1012}^{2022}(k-1011)$
$= \sum_{k=1}^{1011} 1011 - \sum_{k=1}^{1011} k + \sum_{k=1012}^{2022} k - \sum_{k=1012}^{2022} 1011$
En posant le changement de variable $l = k - 1011$, $f(1011) = -\sum_{k=1}^{1011} k + \sum_{l=1}^{1011}(l+1011)$
$= \sum_{l=1}^{1011} 1011 = 1011^2$
Le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est 1011^2.

Partie entière

Exercice 70 (①) par François

Montrer que, si $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, x peut se noter de la forme $x = q + r$ avec $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in [0; 1[$. Ainsi $2x = 2q + 2r$ donc :

$$\lfloor 2x \rfloor = \lfloor 2q + 2r \rfloor = \lfloor 2q \rfloor + \lfloor 2r \rfloor, \text{car } q \in Z.$$

Or, ici, on distingue deux cas. Si $\frac{1}{2} \leq r < 1$, alors $1 \leq r < 2$. Ainsi $\lfloor 2q + 2r \rfloor$ devient :

$$\lfloor 2q \rfloor + \lfloor 2r \rfloor = \lfloor 2q \rfloor + 1.$$

Or $q \in Z$, donc $2q \in \mathbb{Z}$, donc $\lfloor 2q \rfloor = 2q$, ainsi :

$$\lfloor 2x \rfloor = 2q + 1.$$

De plus, $x = q + r$ donc $\lfloor x \rfloor = \lfloor q + r \rfloor = \lfloor q \rfloor + \lfloor r \rfloor$. Comme $q \in \mathbb{Z}$ et $r < 1$, on a $\lfloor x \rfloor = q$ donc $2\lfloor x \rfloor = 2q$. Ainsi :

$$\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor = \cancel{2q} - 1 - \cancel{2q} = 1.$$

Donc, si $x = q + r$ avec $q \in \mathbb{Z}$ et $\frac{1}{2} \leq r < 1$, alors $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor = 1$.

Prenons le seul autre cas possible : $x = q + r$ avec $q \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq r < \frac{1}{2}$, ainsi $0 \leq 2r < 1$. Comme $2r < 1$ et $q \in \mathbb{Z}$,

$$\lfloor 2x \rfloor = 2q.$$

De même :

$$x = q + r \Rightarrow \lfloor x \rfloor = \lfloor q + r \rfloor = \lfloor q \rfloor + \lfloor r \rfloor = q.$$

Donc $2\lfloor x \rfloor = 2q$, ainsi, si $0 \leq r < \frac{1}{2}$,

$$\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor = 2q - 2q = 0.$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \in [\![0, 1]\!]$.

Exercice 71 (②) par Gildas

Si $n \in \mathbb{N}$, donner une expression simple de $\left\lfloor (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^2 \right\rfloor$.

$\lfloor (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^2 \rfloor = \lfloor 2n + 1 + 2\sqrt{n+1}\sqrt{n} \rfloor = 2n + 1 + \lfloor 2\sqrt{n+1}\sqrt{n} \rfloor$

On peut minorer $2\sqrt{n+1}\sqrt{n}$ par $2n$.

De plus :

$$\begin{aligned} n^2 + n &< n^2 + n + \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow n(n+1) &< \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow \sqrt{n+1}\sqrt{n} &< n + \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{n+1}\sqrt{n} &< 2n + 1 \end{aligned}$$

Donc par définition, on obtient que $\lfloor 2\sqrt{n+1}\sqrt{n} \rfloor = 2n$.

Ce qui permet de conclure que $\lfloor (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^2 \rfloor = 4n + 1$.

Exercice 72 (③) par Tristan

Montrer que, si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor - \lfloor x + y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \in \{0, 1\}$$

On procède par disjonction des cas selon les valeurs de $\{x\}$ et $\{y\}$ ($\{x\}$ (resp. $\{y\}$) est la partie décimale de x (resp. y))

Premier cas : $\{x\} < \frac{1}{2}$ et $\{y\} < \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor - \lfloor x + y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor &\Leftrightarrow 2\lfloor x \rfloor + 2\lfloor y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \\ &\Leftrightarrow 2\left(\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor\right) \\ &\Leftrightarrow 0 \end{aligned}$$

Deuxième cas : $\{x\} \geq \frac{1}{2}$ et $\{y\} \geq \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\lfloor 2x\rfloor + \lfloor 2y\rfloor - \lfloor x+y\rfloor - \lfloor x\rfloor - \lfloor y\rfloor &\Leftrightarrow 2\lfloor x\rfloor + 1 + 2\lfloor y\rfloor + 1 - \lfloor x\rfloor - \lfloor y\rfloor - 1 - \lfloor x\rfloor - \lfloor y\rfloor\\ &\Leftrightarrow 2\left(\lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor - \lfloor x\rfloor - \lfloor y\rfloor\right) + 1\\ &\Leftrightarrow 1\end{aligned}$$

Troisième cas : $\{x\} < \frac{1}{2}$, $\{y\} \geq \frac{1}{2}$ et $\{x\} + \{y\} < 1$ ou $\{x\} \geq \frac{1}{2}$, $\{y\} < \frac{1}{2}$ et $\{x\} + \{y\} < 1$

$$\begin{aligned}\lfloor 2x\rfloor + \lfloor 2y\rfloor - \lfloor x+y\rfloor - \lfloor x\rfloor - \lfloor y\rfloor &\Leftrightarrow 2\lfloor x\rfloor + 2\lfloor y\rfloor + 1 - \lfloor x\rfloor - \lfloor y\rfloor - \lfloor x\rfloor - \lfloor y\rfloor\\ &\Leftrightarrow 2\left(\lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor - \lfloor x\rfloor - \lfloor y\rfloor\right) + 1\\ &\Leftrightarrow 1\end{aligned}$$

Quatrième cas : $\{x\} < \frac{1}{2}$, $\{y\} \geq \frac{1}{2}$ et $\{x\} + \{y\} \geq 1$ ou $\{x\} \geq \frac{1}{2}$, $\{y\} < \frac{1}{2}$ et $\{x\} + \{y\} \geq 1$

$$\begin{aligned}\lfloor 2x\rfloor + \lfloor 2y\rfloor - \lfloor x+y\rfloor - \lfloor x\rfloor - \lfloor y\rfloor &\Leftrightarrow 2\lfloor x\rfloor + 2\lfloor y\rfloor + 1 - \lfloor x\rfloor - \lfloor y\rfloor - 1 - \lfloor x\rfloor - \lfloor y\rfloor\\ &\Leftrightarrow 2\left(\lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor - \lfloor x\rfloor - \lfloor y\rfloor\right)\\ &\Leftrightarrow 0\end{aligned}$$

Inéquations se ramenant au premier degré

EXERCICE 73 (①) par Jean

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|x+3| \geq 4$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x+3| \geq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \geq 4 \\ \text{ou} \\ -(x+3) \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \text{ou} \\ x \leq -7 \end{cases}$$

Ainsi,

$$S = \mathbb{R} \backslash]-7, 1[$$

.

EXERCICE 74 (②) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|2x-4| \leq |x-1|$-

• Soit $x \in [-\infty; 1]$, alors :

$$|2x-4| \leq |x-1| \Leftrightarrow -(2x-4) \leq -(x-1) \Leftrightarrow x \geq 3$$

Pas de solutions.
• Soit $x \in [1; 2]$, alors :

$$|2x-4| \leq |x-1| \Leftrightarrow -(2x-4) \leq x-1 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{3}$$

Donc un premier intervalle solution est $x \in [\frac{5}{3}; 2]$.
• Soit $x \in [2; +\infty]$, alors :

$$|2x-4| \leq |x-1| \Leftrightarrow 2x-4 \leq x-1 \Leftrightarrow x \leq 3$$

Donc $x \in [2; 3]$.
Finalement :

$$\mathcal{S} = \left[\frac{5}{3}; 3\right]$$

Exercice 75 (①) par Jean

Quels sont les réels x tels que

$$(x^2-3)(1-\sqrt{x})(|x|-6)|4x+3| \in \mathbb{R}^{+*}\ ?$$

Tout d'abord la présence de la fonction racine carrée implique $x \geq 0$.

Ensuite, pour tout x de $\mathbb{R}$, $|4x+3| \geq 0$.

Ainsi il s'agit de déterminer les réels positifs tels que $(x^2-3)(1-\sqrt{x})(|x|-6) > 0$.

x	0		1		$\sqrt{3}$		6		$+\infty$
x^2-3		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-\sqrt{x}$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$\lvert x\rvert-6$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x^2-3)(1-\sqrt{x})(\lvert x\rvert-6)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $S = [0;1[\cup]\sqrt{3};6[$

Exercice 76 (②) Quels sont les entiers naturels n tels que $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \leq \dfrac{1}{10}$?

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N},\ \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \leq \frac{1}{10} &\iff \sqrt{n+1} \leq \frac{1}{10}+\sqrt{n}\\
&\iff n+1 \leq \frac{1}{100}+\frac{1}{5}\sqrt{n}+n\\
&\iff \frac{1}{5}\sqrt{n} \geq \frac{99}{100}\\
&\iff \sqrt{n} \geq \frac{99}{20}\\
&\iff n \geq \left(\frac{99}{20}\right)^2
\end{aligned}$$

D'où $S = [\![25;+\infty]\!]$.

Exercice 77 (②) Selon la valeur de x, déterminer le signe de :

a) $f(x) = \sqrt{x-1}-\sqrt{2x-3}$,

b) $g(x) = \sqrt{|x-1|}-\sqrt{|2x-3|}$,

c) $h(x) = \ln(x+3)+\ln(x+2)-2\ln(x+11)$.

3.2 Complément : inégalité arithmético-géométrique pour deux réels

Exercice 78 (③) par Tristan

Soient a,b,c des éléments de $\mathbb{R}^+$.

a) Montrer que

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

b) Montrer que

$$9abc \leq (a+b+c)(ab+bc+ca)$$

a) Développons l'expression.

$$\begin{aligned}
&(a+b)(b+c)(c+a)\\
&\Leftrightarrow \left(ab+ac+b^2+bc\right)(c+a)\\
&\Leftrightarrow abc+a^2b+ac^2+a^2c+b^2c+b^2a+bc^2+abc\\
&\Leftrightarrow 2abc+a\left(b^2+c^2\right)+b\left(c^2+a^2\right)+c\left(a^2+b^2\right)
\end{aligned}$$

Or, on sait que $\begin{cases} b^2+c^2 \geq 2bc \\ c^2+a^2 \geq 2ca \\ a^2+b^2 \geq 2ab \end{cases}$ et on en déduit que

$$\begin{aligned}
(a+b)(b+c)(c+a) &\geq 2abc+2abc+2abc+2abc\\
&\geq 8abc
\end{aligned}$$

Ce qui est exactement l'inégalité voulue.

b) Développons maintenant $(a+b+c)(ab+bc+ca)$.

$$\begin{aligned}
&(a+b+c)(ab+bc+ca)\\
&\Leftrightarrow a^2b+abc+a^2c+ab^2+b^2c+abc+abc+bc^2+c^2a\\
&\Leftrightarrow 3abc+a\left(b^2+c^2\right)+b\left(a^2+c^2\right)+c\left(a^2+b^2\right)
\end{aligned}$$

En faisant alors la même remarque que dans la question précédente, on trouve

$$\begin{aligned}
(a+b+c)(ab+bc+ca) &\geq 3abc+2abc+2abc+2abc\\
&\geq 9abc
\end{aligned}$$

Ce qui est à nouveau l'inégalité recherchée.

EXERCICE 79 (①) par Tristan

On se donne un rectangle de demi-périmètre p, Montrer que son aire est majorée par $\frac{p^2}{4}$. Pour quels rectangles y a-t-il égalité ?

D'après le théorème 1, le produit de deux réels positifs x et y de somme donnée S est maximal lorsque $x=y=\frac{S}{2}$.

Ainsi, si l'on nomme x la largeur du rectangle et y sa longueur, son aire, donnée par $x \times y$ est maximale pour $x=y=\frac{x+y}{2}=\frac{p}{2}$.

On a alors $\mathcal{A} \leq \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4}$.

Comme le cas d'égalité se présente quand $x=y$, c'est pour les carrés qu'il y a égalité et donc que l'aire est maximale.

EXERCICE 80 (③) Si x et y sont deux éléments de $\mathbb{R}^{+*}$, leur moyenne arithmétique est $m=\frac{x+y}{2}$, leur moyenne géométrique $g=\sqrt{xy}$, leur moyenne harmonique $h=\frac{2xy}{x+y}$. Montrer que

$$h \leq g \leq m\,.$$

Étudier les cas d'égalité..

On montre $m \geqslant g$.

$$m \geqslant g \iff x^2+2xy+y^2 \geqslant 3xy \iff x^2+y^2 \geqslant 2xy \iff (x-y)^2 \geqslant 0$$

Cette dernière égalité étant toujours vraie, par équivalences on a montré que la première l'était aussi. De plus, il y a égalité lorsque $(x-y)^2=0$, à savoir $x=y$.

On montre $g \geqslant h$

$$\begin{aligned}
\frac{2xy}{x+y} \leqslant \sqrt{xy} &\iff 4(xy)^2 \leqslant (x+y)^2 \cdot xy \\
&\iff 4(xy)^2 \leqslant 2(xy)^2 + x^3y + xy^3 \\
&\iff x^3y + xy^3 - 2(xy)^2 \geqslant 0 \\
&\iff \left(\sqrt{x^3y} - \sqrt{xy^3}\right)^2 \geqslant 0
\end{aligned}$$

Un carré étant toujours positif, on a bien montré l'inégalité voulue. Le cas d'égalité est obtenu pour $\sqrt{x^3y} = \sqrt{xy^3}$, à savoir $x^2=y^2$, à savoir $|x|=|y|$

Exercice 81 (③) par Matilde

On se donne deux nombres réels strictement positifs a et b et on considère les suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ définies par $a_0=a,\ b_0=b$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n+b_n), \quad b_{n+1} = \sqrt{a_nb_n}\,.$$

a) Pour $n \geq 1$, comparer a_n et b_n. En déduire la monotonie des suites $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$.

b) Montrer que les deux suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ convergent et ont même limite.

a) On montre que a et b sont des réels positifs ou nuls par récurrence simple. Pour n dans $\mathbb{N}^{+*}$, soit $\mathcal{P}_n$ la propriété telle que a est un réel positif ou nul.
Initialisation. $b_0=b, \quad b \in \mathbb{R}^{+*}$ donc $\mathcal{P}_1$ est vrai.
Hérédité. Fixons n dans $\mathbb{N}^{+*}$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vrai.

$$b_{n+1} = \sqrt{a_nb_n} \geq 0.$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifié, $b_n \geq 0$.
Pour n dans $\mathbb{N}^{+*}$, soit $\mathcal{B}_n$ la propriété telle que a est un réel positif ou nul.
Initialisation. $a_0=a, \quad a \in \mathbb{R}^{+*}$ donc $\mathcal{B}_1$ est vrai.
Hérédité. Fixons n dans $\mathbb{N}^{+*}$ tel que $\mathcal{B}_n$ soit vrai. $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n+b_n)$. D'après l'hypothèse de récurrence, a_n est positif pour n dans $\mathbb{N}^{+*}$, et on a démontré que $b_n \geq 0$ pour n dans $\mathbb{N}^{+*}$. De plus, $\frac{1}{2} > 0$, donc a_{n+1} est un réel positif car construit à partir de sommes et produits de nombres réels positifs.
Pour comparer a_n et b_n, on utilisera l'inégalité arithmético-géométrique telle que :

$$2\sqrt{a_nb_n} \leq a_n+b_n \Leftrightarrow \sqrt{a_nb_n} \leq \frac{1}{2}(a_n+b_n) \Leftrightarrow a_{n+1} \geq b_{n+1} \Leftrightarrow a_n \geq b_n.$$

Pour la monotonie de a_n et b_n, on utilise a_{n+2} et b_{n+2}. Ainsi,

$$a_{n+2} = \frac{1}{2}(a_{n+1}+b_{n+1}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(a_n+b_n) + \sqrt{a_nb_n}\right).$$

Or

$$2\sqrt{a_nb_n} + (a_n+b_n) \leq 2(a_n+b_n) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{a_nb_n} + \frac{1}{4}(a_n+b_n) \leq \frac{1}{2}(a_n+b_n).$$

Donc

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(a_n+b_n) + \sqrt{a_nb_n}\right) \leq \frac{1}{2}(a_n+b_n) \Leftrightarrow a_{n+2} \leq a_{n+1}.$$

La suite a_n est décroissante.

$$b_{n+2} = \sqrt{a_{n+1}b_{n+1}} = \sqrt{\frac{1}{2}(a_n+b_n) + \sqrt{a_n b_n}}.$$

On sait que

$$\sqrt{a_nb_n} \leq \frac{1}{2}(a_n+b_n) \Leftrightarrow a_nb_n \leq \frac{1}{2}(a_n+b_n)\sqrt{a_nb_n} \Leftrightarrow \sqrt{a_nb_n} \leq \sqrt{\frac{1}{2}(a_n+b_n)\sqrt{a_nb_n}} \Leftrightarrow b_{n+1} \leq b_{n+2}.$$

La suite b_n est croissante.

b) Sachant que a_n est décroissante et minorée par b_n, alors a_n est convergente. De même, b_n est croissante et majorée par a_n, donc convergente.
Quand n dans vers l'infini alors

$$a_n = a_{n+1} \Leftrightarrow a_n = \frac{1}{2}(a_n+b_n) \Leftrightarrow \frac{1}{2}a_n = \frac{1}{2}b_n \Leftrightarrow a_n = b_n.$$

Ainsi, quand n tend vers l'infini, alors a_n et b_n sont égaux, et les deux suites convergent vers la même limite.

Exercice 82 (③) par Gildas

Soient a, b, c trois éléments de $[0, 1]$. Montrer que l'un au moins des trois nombres réels $a' = a(1-b)$, $b' = b(1-c)$, $c' = c(1-a)$ est inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$. On pourra considérer le produit $a'b'c'$.

Etudions la fonction $f : x \mapsto x(1-x)$ définie sur $[0, 1]$.

$f(x) = -x^2 + x = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$ donc f est majorée par $\frac{1}{4}$.

Ainsi $a'b'c' = a(1-b)b(1-c)c(1-a) = f(a)f(b)f(c) \leq \frac{1}{4^3}$.

Maintenant supposons que $a', b', c' > \frac{1}{4}$ ce qui implique $a'b'c' > \frac{1}{4^3}$. Absurde. Donc au moins un des trois nombres réels $a' = a(1-b), b' = b(1-c), c' = c(1-a)$ est inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$.

3.3 Le trinôme du second degré réel

Racines du trinôme et factorisation

Exercice 83 (①) par Maxime

Pour m dans $\mathbb{R}$, soir p_m le trinôme du second degré :

$$p_m : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2 + mx + 1\,.$$

Déterminer, selon la valeur de m, le nombre de racines réelles de p_m.

On a donc $\Delta = m^2 - 4$.

Si $\Delta < 0$, p_m n'a aucune racine réelle. Dans ce cas,

$$m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow m^2 < 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\sqrt{4} = -2 \\ m < \sqrt{4} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \in]-2; 2[$$

Si $m = 2$ ou $m = -2$, $\quad \Delta = 0$, et p_m a une unique racine réelle.

Si $\Delta > 0$, p_m a deux racines réelles. Dans ce cas,

$$m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow m^2 > 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\sqrt{4} = -2 \\ m > \sqrt{4} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \in]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[.$$

Exercice 84 (②) par Maxime

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations

$$\ln(x+1)+\ln(x+5)=\ln(96) \quad \text{et} \quad \ln(|x+1|)+\ln(|x+5|)=\ln(96)\,.$$

On a donc

$$\ln\left((x+1)(x+5)\right)=\ln\left(x^2+6x+5\right)=\ln\left(96\right).$$

Or il faut que $(x+1)(x+5)>0$ donc soit :

$$\begin{cases} x+1>0 \\ x+5>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x>-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in]-1,+\infty[\end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} x+1<0 \\ x+5<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-1 \\ x<-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in]-\infty,-5[\end{cases}$$

On a donc comme condition

$$x\in]-\infty;-5[\,\cup\,]-1;+\infty[.$$

On a ainsi l'équation $x^2+6x-92=0$. On calcule $\Delta=400, \quad \sqrt{\Delta}=20$. On a donc

$$x_1=\frac{-6-20}{2}=-13, \quad x_2=\frac{-6+20}{2}=7.$$

Or, $(-13;7)\in]-\infty;-5[\,\cup\,]-1;+\infty[$ donc solutions de l'équation $\ln\left((x+1)(x+5)\right)=\ln\left(96\right)$. À noter que pour l'équation demandée $\ln\left(x+1\right)+\ln\left(x+5\right)=\ln\left(96\right)$, on a comme condition $x\in]-1;+\infty[$, donc -13 est exclu. Les deux étant égales, une réécriture permet les deux solutions.

Pour l'équation $\ln(|x+1|)+\ln(|x+5|)=\ln(96), \quad \forall x\in\mathbb{R}, |x+1>0, |x+5|>0$. Donc les solutions sont -13 et 7.

Exercice 85 (②) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite géométrique de raison q positive telle que

$$u_0+u_1=\frac{13}{2} \quad \text{et} \quad u_0u_2=\frac{25}{4}\,.$$

Déterminer u_0 et q.

La suite est géométrique, donc de la forme : $\forall n\in\mathbb{N}, \; u_n=u_0\,q^n$.
Ainsi,

$$u_0*u_2=u_o^2*q^2=u_1^2=\frac{25}{4}$$

Donc $u_1=\frac{5}{2}$ *ou* $u_1=-\frac{5}{2}$.
Alors $u_0+u_1=\frac{13}{2}\Longleftrightarrow u_0=4$ *ou* $u_0=9$.
Or, $q\geq 0$ et dans les deux cas, $u_0\geq 0$, donc u_1 est également positif. Ainsi,

$$u_1=\frac{5}{2}\Longrightarrow u_0=4\Longrightarrow q=\frac{u_1}{u_0}=\frac{5}{8}$$

Exercice 86 (③) par Antoine

Soit a dans $\mathbb{R}$. Déterminer le nombre de nombres réels x tels que :

$$x^3-x=a^3-a\,.$$

On cherche : $x^3 - x - a^3 - a = 0$. On remarque que a est racine, donc l'expression se ré-écrit : $(x-a)(q_1x^2 + q_2x + q_3)$.
Ceci est équivalent à :

$$q_1x^3 + q_2x^2 + q_3x - q_1x^2a - q_2xa - q_3a = x^3 - x - a^3 - a$$

.
On doit donc résoudre le système suivant (par identification) :

$$\begin{cases} q_1 = 1 \\ q_2 - q_1a = 0 \\ q_3a = a^3 - a \end{cases} \iff \begin{cases} q_1 = 1 \\ q_2 = a \\ q_3 = a^2 - 1 \end{cases}$$

Finalement, on veut résoudre : $(x-a)(x^2 + ax + a^2 - 1) = 0$. Il nous reste à trouver le nombre de solutions de l'équation du second degré $x^2 + ax + a^2 - 1$.
On calcule le discriminant : $\Delta = a^2 - 4(a^2 - 1) = -3a^2 + 4$.

- Si $4 \leqslant 3a^2 \implies a^2 \geqslant \dfrac{4}{3} \iff x \in]-\infty, -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}[\cup]\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty[$, alors $\Delta < 0$, donc aucune solution réelle. *In fine*, l'équation de départ n'admet qu'une solution réelle.

- Si $a^2 = \dfrac{4}{3} \implies a = \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, alors $\Delta = 0$, donc l'équation du second admet une racine double, à savoir, l'équation de base admet deux solutions réelles.

- Finalement, si $a \in]-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, \dfrac{2\sqrt{3}}{3}[$, alors l'équation du second degré admet deux solutions réelles distinctes, et donc l'équation de base en admet 3.

Signe du trinôme pour les valeurs réelles de la variable

EXERCICE 87 (①) par Martin

Pour m dans $\mathbb{R}$, soit p_m le trinôme du second degré :

$$p_m : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2 + mx + 1\,.$$

Déterminer, selon les valeurs des réels m et x, le signe de $p_m(x)$.

p_m étant un trinôme du second degré, étudions le signe de son discriminant Δ défini par :

$$\Delta = m^2 - 4(1)(1) = m^2 - 4$$

Raisonnons alors par disjonction de cas suivant les valeurs de m et donc suivant le signe de Δ.

- Si $|m| > 2$ c'est-à-dire si $m < 2$ ou $m > 2$, on a $\Delta > 0$. Ainsi, p_m admet deux racines réelles x_1 et x_2 définies par $x_1 = \frac{-m-\sqrt{\Delta}}{2}$ et $x_2 = \frac{-m+\sqrt{\Delta}}{2}$. Le coefficient dominant de p_m étant strictement positif, on en déduit le tableau de signes de p_m ci-dessous.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$p_m(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- Si $|m| = 2$ c'est-à-dire si $m = 2$ ou $m = -2$, on a $\Delta = 0$. Ainsi, p_m admet une unique racine réelle x_0 définie par $x_0 = -\frac{m}{2}$. Le coefficient dominant de p_m étant strictement positif, on en déduit le tableau de signes de p_m ci-dessous.

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$p_m(x)$		$+$	0	$+$	

- Si $|m| < 2$ c'est-à-dire si $-2 < m < 2$, on a $\Delta < 0$. Ainsi, p_m n'admet aucune racine réelle. Le coefficient dominant de p_m étant strictement positif, on en déduit le tableau de signes de p_m ci-dessous.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$p_m(x)$	$+$

EXERCICE 88 (②) par Maxime Résoudre les inéquations :

$$x + 1 < \sqrt{x+4} \quad \text{et} \quad \sqrt{x^2 + 5x + 4} \leq 2x - 1\,.$$

Pour la première :
$x + 1 < \sqrt{x+4}$ n'a de sens que si $x \geqslant -4$.
Sur l'intervalle $[-4, -1[$, $x + 1 < 0 \leqslant \sqrt{x+4}$, donc c'est bon.
Sur l'intervalle $[-1, +\infty[$, les deux termes sont positifs, on a donc :

$$\begin{aligned} x + 1 < \sqrt{x+4} &\iff x^2 + 2x + 1 < x + 4 \\ &\iff x^2 + x - 3 < 0 \end{aligned}$$

On résout $x^2 + x - 3 = 0$. $\Delta = 13 \implies \begin{cases} x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{13}}{2} < 1 & \text{donc non valable} \\ x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{13}}{2} \simeq 1,3 & \end{cases}$

Le polynôme est strictement négatif entre ses racines, et donc sur l'intervalle $[-1, +\infty[$, $x^2+x-3 < 0 \iff x \in \left[-1, \dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}\right[$.

Finalement, l'intervalle solution est : $\left[-4, \dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}\right[$

Pour la deuxième inégalité :
Notons tout d'abord que $x^2 + 5x + 4 = (x + 1)(x + 4)$. Par conséquent, pour que notre inégalité soit bien définie, il faut $x^2 + 5x + 4 \geqslant 0 \iff x \in]-\infty, -4] \cup [-1, +\infty[$.

$2x - 1 < 0 \iff x < \dfrac{1}{2}$, donc l'inégalité n'est pas vérifiée pour $x \in]-\infty, -4] \cup [-1, -1/2[$
Si $x \geqslant \dfrac{1}{2}$, les deux termes sont positifs donc on peu élever au carré :

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 5x + 4} \leqslant 2x - 1 &\iff x^2 + 5x + 4 \leqslant 4x^2 - 4x + 1 \\ &\iff -3x^2 + 9x + 3 \leqslant 0 \\ &\iff -x^2 + 3x + 1 \leqslant 0 \end{aligned}$$

On résout : $-x^2 + 3x + 1 = 0$: $\Delta = 13$ donc

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{3+\sqrt{13}}{2} \geqslant \frac{1}{2} \\ x_2 &= \frac{-\sqrt{13}+3}{2} < \frac{1}{2} \quad \text{non valable} \end{aligned}$$

Le coefficient dominant de ce polynôme étant négatif, il est négatif à l'extérieur de ses racines, à savoir sur $\left[\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}, +\infty\right[$ qui est notre intervalle solution puisqu'il n'existe aucune autre valeur de x vérifiant l'inégalité de l'énoncé !

EXERCICE 89 (②) par Martin

Résoudre les inéquations

$$\left|x^2 - 5x + 6\right| \leq x^2 - 4x + 3 \quad \text{et} \quad x^2 - 5x + 6 \leq \left|x^2 - 4x + 3\right|.$$

Commençons par la première inéquation. Notons d'abord que $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$. Par conséquent, $(x-2)(x-3)$ est positif si et seulement si x appartient à l'intervalle $]-\infty, 2] \cup [3, +\infty[$. Raisonnons alors par disjonction de cas suivant les valeurs de x.

- Si $x \in]-\infty, 2] \cup [3, +\infty[$,
$\left|x^2 - 5x + 6\right| \leq x^2 - 4x + 3 \iff x^2 - 5x + 6 \leq x^2 - 4x + 3 \iff -x + 3 \leq 0 \iff x \geq 3$

- Si $x \in]2, 3[$,
$\left|x^2 - 5x + 6\right| \leq x^2 - 4x + 3 \iff -(x^2 - 5x + 6) \leq x^2 - 4x + 3 \iff -2x^2 + 9x - 9 \leq 0 \iff -2(x-3)(x-\frac{3}{2}) \leq 0 \iff x \in]-\infty, \frac{3}{2}] \cup [3, +\infty[$.

Or, $(]-\infty, \frac{3}{2}] \ \cup \ [3, +\infty[) \cap]2, 3[= \varnothing$. Ainsi donc, $\left|x^2 - 5x + 6\right| \leq x^2 - 4x + 3 \iff x \geq 3$

Poursuivons par la seconde inéquation. Notons que $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$. Par conséquent, $(x-1)(x-3)$ est positif si et seulement si x appartient à l'intervalle $]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$. Raisonnons alors par disjonction de cas suivant les valeurs de x.

- Si $x \in]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$,
$x^2 - 5x + 6 \leq \left|x^2 - 4x + 3\right| \iff x^2 - 5x + 6 \leq x^2 - 4x + 3 \iff -x + 3 \leq 0 \iff x \geq 3$

- Si $x \in]1, 3[$,
$x^2 - 5x + 6 \leq \left|x^2 - 4x + 3\right| \iff x^2 - 5x + 6 \leq -(x^2 - 4x + 3) \iff 2x^2 - 9x + 9 \leq 0 \iff 2(x-3)(x-\frac{3}{2}) \leq 0 \iff x \in [\frac{3}{2}, 3]$

Or, $[\frac{3}{2}, 3] \cap]1, 3[= [\frac{3}{2}, 3[$. Ainsi donc, $x^2 - 5x + 6 \leq \left|x^2 - 4x + 3\right| \iff x \geq \frac{3}{2}$

Exercice 90 (③) par Martin

Déterminer les nombres réels m tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3m + 6 \leq 0.$$

Pour étudier le signe de ce trinôme du second degré, étudions le signe de son discriminant Δ.
$\Delta = (-2(m-1))^2 - 4(m+1)(3m+6) = 4(m-1)^2 - 4(3m^2 + 9m + 6) = 4(-2m^2 - 11m - 5)$

Ainsi, Δ est du signe de $-2m^2 - 11m - 5$. On cherche m tel que Δ est négatif ou nul puisque Δ positif impliquerait l'existence de deux racines réelles au trinôme du second degré et donc l'existence d'un changement de signe. Etudions donc le signe de Δ.

$\Delta < 0 \iff -2m^2 - 11m - 5 < 0 \iff -2(m^2 + \frac{11}{2}m + \frac{5}{2}) < 0 \iff -2(m + \frac{1}{2})(m+5) < 0 \iff x \in]-\infty, -5[\cup]-\frac{1}{2}, +\infty[$.

$\Delta = 0 \iff -2(m + \frac{1}{2})(m+5) = 0 \iff x = -\frac{1}{2}$ ou $x = -5$

Or, le coefficient dominant $m+1$ du trinôme du second degré est strictement négatif si et seulement si $m < -1$. Par conséquent, l'ensemble solution est :

$$(]-\infty, -5] \ \cup \ [-\frac{1}{2}, +\infty[) \cap]-\infty, -1[=]-\infty, -5]$$

Somme et produit des racines

Exercice 91 (①) par Maxime Soient x_1 et x_2 les deux racines (éventuellement confondues) du trinôme

$$p : x \longmapsto ax^2 + bx + c.$$

Calculer ${x_1}^2 + {x_2}^2$ et $(x_1 - x_2)^2$ en fonction de a, b, c

On a : $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x_1^2 = \left(\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2 = \dfrac{b^2+b^2-4ac+2b\sqrt{b^2-4ac}}{4a^2}$

$x_2^2 = \left(\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2 = \dfrac{b^2+b^2-4ac-2b\sqrt{b^2-4ac}}{4a^2}$

D'où : $x_1^2 + x_2^2 = \dfrac{4b^2-8ac}{4a^2} = \dfrac{b^2-2ac}{a^2}$

$x_1 - x_2 = \dfrac{\cancel{-b}+\sqrt{b^2-4ac}\cancel{+b}+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}$

Finalement, $(x_1-x_2)^2 = \dfrac{b^2-4ac}{a^2}$

> EXERCICE 92 (4) par Gildas
>
> Soient Γ le cercle de centre O et de rayon R du plan, A un point du plan. On mène par A une droite Δ coupant Γ en deux points M_1 et M_2.
>
> **a)** Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de norme 1. Montrer que la relation
>
> $$||\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{u}||^2 = R^2$$
>
> définit une équation du second degré en t dont on déterminera les coefficients.
>
> **b)** En déduire que le produit scalaire $\overrightarrow{AM_1} \cdot \overrightarrow{AM_2}$ est indépendant de Δ.

a) Petit rappel : $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 = ||\overrightarrow{u}||^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + ||\overrightarrow{v}||^2$.

$$\begin{aligned}
&||\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{u}||^2 = R^2 \\
\Leftrightarrow\ &||\overrightarrow{OA}||^2 + 2\overrightarrow{OA} \cdot (t\overrightarrow{u}) + ||t\overrightarrow{u}||^2 = R^2 \\
\Leftrightarrow\ &||\overrightarrow{OA}||^2 + 2t||\overrightarrow{OA}||\cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{u}) + t^2 = R^2 \\
\Leftrightarrow\ &t^2 + 2t||\overrightarrow{OA}||\cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{u}) + ||\overrightarrow{OA}||^2 - R^2 = 0
\end{aligned}$$

Ce qui est exactement une équation du second degré qui s'écrit $at^2+bt+c=0$ avec $\begin{cases} a &= 1 \\ b &= 2||\overrightarrow{OA}||\cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{u}) \\ c &= ||\overrightarrow{OA}||^2 - R^2 \end{cases}$

Concrètement, $||\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{u}||^2 = R^2$ signifie que l'image de O par le vecteur $\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{u}$ appartient au cercle Γ. Puisque c'est une équation du second degré en t, on peut déterminer t_1 et t_2 tels que $\overrightarrow{OA} + t_1\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OA} + t_2\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM_2}$ respectivement (en interprétant $\overrightarrow{u}$ comme un vecteur directeur de Δ).

b) $\overrightarrow{AM_1} \cdot \overrightarrow{AM_2} = (t_1\overrightarrow{u}) \cdot (t_2\overrightarrow{u}) = t_1t_2$ qui est le produit des deux racines de l'équation définie en question a). Donc $t_1t_2 = \dfrac{c}{a} = ||\overrightarrow{OA}||^2 - R^2$ qui est indépendant de Δ.

> EXERCICE 93 (3) par Gildas
>
> Soient u et v deux nombres réels. A quelles conditions l'équation $x^4 + ux^2 + v = 0$ admet-elle quatre racines réelles distinctes ?

Remarque. Le cours précédant l'exercice comporte une coquille. En effet la somme des racines de l'équation (3) vaut $-\dfrac{b}{a}$ et non pas $\dfrac{b}{a}$.

On pose $X = x^2$, dès lors l'équation devient $X^2 + uX + v = 0$.

On trouvera donc 4 racines réelles distinctes si il existe deux solutions distinctes strictement positives pour X (en effet si $X < 0$ alors x n'est pas réel).

Or d'après le cours, $X^2 + uX + v$ admet deux racines strictement positives si $v > 0$ et $-u > 0 \Leftrightarrow u < 0$. Pour terminer, on s'assure qu'elles sont distinctes en vérifiant que $\Delta = u^2 - 4v \neq 0$.

3.4 Complément : inégalité de Cauchy-Schwartz pour les sommes

Exercice 94 (②) par Gildas

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer, en utilisant le théorème 2, que si $x_1, \ldots, x_n$ sont des nombres réels tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$, alors $\displaystyle\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sqrt{n}$. Caractériser le cas d'égalité.

D'après Cauchy-Schwarz :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} 1 \cdot x_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{n} \cdot \sqrt{1} = \sqrt{n} \quad \text{par hypothèse.}$$

On s'intéresse ensuite au cas d'égalité, qui se produit lorsque $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad x_i = -\mu$ d'après le théorème 2. Ce qui implique

$$x_i^2 = \mu^2$$

Puis en utilisant la condition sur la somme des x_i^2 :

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1 = n\mu^2$$

$$\Leftrightarrow \mu = \pm\sqrt{\frac{1}{n}}$$

Finalement on vérifie aisément qu'il y a égalité si $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad x_i = -\sqrt{\dfrac{1}{n}}$ ou $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad x_i = \sqrt{\dfrac{1}{n}}$.

4 Trigonométrie

4.1 Les formules d'addition et de duplication

Exercice 95 (①) par Tomás

Vérifier l'égalité :

$$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$$

En déduire les valeurs du cosinus et du sinus de $\frac{\pi}{12}$

On a bien $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi - 3\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$, donc

$$\begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Exercice 96 (①) par Tomás

Calculer $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ en utilisant la formule de duplication pour le cosinus.

$$\begin{aligned}
\cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right) &= 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)-1\\
\implies \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) &= \sqrt{\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+1}{2}}\\
&= \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}
\end{aligned}$$

EXERCICE 97 (②) par Tomás

Déterminer sans calcul le maximum et le minimum sur $\mathbb{R}$ de :

$$x \mapsto \sin(x)\cos(x)$$

Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ la fonction telle que $f(x) = \sin(x)\cos(x)$. On constate que pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{\sin(2x)}{2}$, donc f a pour maximum et minimum $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$ respectivement.

EXERCICE 98 (②) par Jean

Déterminer le maximum et le minimum sue $\mathbb{R}$ de :

$$x \mapsto \cos(x) - \cos(x)^2\,.$$

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, caractérisée par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \cos(x) - \cos^2(x) = \cos(x)(1-\cos(x))$
f est 2π- périodique, nous l'étudierons donc sur $[0, 2\pi[$.
$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\sin(x)(1-\cos(x)) + \cos(x)\sin(x) = \sin(x)(2\cos(x)-1)$

$f'(x) = 0 \iff \sin(x) = 0 \quad \text{ou} \quad 2\cos(x)-1 = 0 \iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \pi \quad \text{ou} \quad x = \dfrac{\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = \dfrac{5\pi}{3}$

De plus : $\sin(x) > 0 \iff x \in]0;\pi[$ et $2\cos(x)-1 > 0 \iff x \in \left]0;\dfrac{\pi}{3}\right[\cup \left]\dfrac{5\pi}{3}, 2\pi\right[$
On obtient donc le tableau de signe suivant :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π		$\frac{5\pi}{3}$		2π
$\sin(x)$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	‖
$2\cos(x)-1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	‖
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	‖
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	‖

EXERCICE 99 (③) par Jean

Soit Γ un cercle de rayon $R > 0$. On considère des points $A_0, \ldots, A_6$ de Γ, rangés dans cet ordre pour le sens trigonométrique, tels que, pour tout $i \in [\![0,5]\!]$, $A_iAi+1 = R$. Montrer que $A_6 = A_0$.

Soit O le centre du cercle. Les triangles $A_iA_{i+1}O$ sont équilatéraux, car $A_iO = A_{i+1}O = A_iA_{i+1} = R$.
Ainsi, il y a 6 triangles équilatéraux de côté R inscrits dans de cercle Γ qui partagent le sommet O de sorte que les angles $\widehat{A_iOA_{i+1}} = 60^{\circ}$

Or, $\widehat{A_0OA_6} = \sum_{i=0}^{6} \widehat{A_iOA_{i+1}} = 6 \times 60^{\circ} = 360^{\circ}$
Par conséquent, on a bien $A_0 = A_6$.

Exercice 100 (②) par Tomás

Pour x dans $\mathbb{R}$, exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$

$$\begin{aligned}
\cos(3x) &= \cos(2x + x)\\
&= \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x)\\
&= (2\cos^2(x) - 1)\cos(x) - (2\sin(x)\cos(x))\sin(x)\\
&= 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2(1 - \cos^2(x))\cos(x)\\
&= 4\cos^3(x) - 3\cos(x)
\end{aligned}$$

Exercice 101 (③) par Jean

Pour x dans $\mathbb{R}$, montrer que
$$2\cos(2x) + 4\cos(x) + 3 \geq 0$$
et déterminer le cas d'égalité.

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ 2\cos(2x) + 4\cos(x) + 3 &= 4\cos^2(x) + 4\cos(x) + 1\\
&= (2\cos(x) + 1)^2 \geqslant 0
\end{aligned}$$

Le cas d'égalité :

$$\begin{aligned}
(2\cos(x) + 1)^2 = 0 &\iff 2\cos(x) + 1 = 0\\
&\iff \cos(x) = -\frac{1}{2}\\
&\iff \begin{cases} x = \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi] & \text{ou}\\ x = -\dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}
\end{aligned}$$

Exercice 102 (③) Soit α l'unique élément de $[0, \pi]$ tel que $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

a) Calculer $\cos(2\alpha)$, puis $\cos(4\alpha)$.
b) En déduire que 4α est congru à α ou à $-\alpha$ modulo 2π.
c) Conclure que $\alpha = \frac{2\pi}{5}$.

a) Par la formule de duplication nous avons :

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1 \Rightarrow \cos(2\alpha) = \frac{2(\sqrt{5}-1)^2}{16} - 1 = -\frac{\sqrt{5}+5}{4}$$

De la même manière on obtient :

$$\cos(4\alpha) = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos(\alpha)$$

b) Donc soit $4\alpha = \alpha[2\pi]$ ou $4\alpha = -\alpha[2\pi]$, i.e :

$$\alpha = \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } \frac{2k\pi}{5}\ ,\ k \in \mathbb{Z}$$

c) Remarquons que $\cos(\alpha) > 0$, ainsi $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ or pour tout k, $\dfrac{2k\pi}{3}$ n'est pas dans cet intervalle car $\dfrac{2\pi}{3} > \dfrac{\pi}{2}$. Par le même raisonnement, on à $\alpha = \dfrac{2\pi}{5}$.

EXERCICE 103 (①) par Matilde Déterminer les réels x de $[0, 2\pi]$ tels que :

$$\cos(x) \geq \sin(x)\,.$$

Quadrant Nord-Est du cercle trigonométrique :

$$\cos(x) = \sin(x) \textit{ pour } x = \frac{\pi}{4}$$

$$x \in [0, \frac{\pi}{4}], \cos(x) \in [1, \frac{\sqrt{2}}{2}], \sin(x) \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$$

$$x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}], \cos(x) \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}], \sin(x) \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$$

Quadrant Nord-Ouest :

$$\cos(x) < 0$$

$$\sin(x) > 0$$

Quadrant Sud-Ouest :

$$\cos(x) = \sin(x) \textit{ pour } x = \frac{5\pi}{4}$$

$$x \in [\pi, \frac{5\pi}{4}], \cos(x) \in [-1, \frac{-\sqrt{2}}{2}], \sin(x) \in [0, -\frac{\sqrt{2}}{2}]$$

$$x \in [\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}], \cos(x) \in [-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0], \sin(x) \in [-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}]$$

Quadrant Sud-Est :

$$\cos(x) > 0$$

$$\sin(x) < 0$$

Donc, $\cos(x) \geq \sin(x)$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{4}] \bigcup [\frac{5\pi}{4}, 2\pi]$

EXERCICE 104 (④) par Matilde

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos(\sin(x)) > \sin(\cos(x))\,.$$

(Ici, beaucoup de valeurs approximatives ont été utilisées pour faciliter les notations)

Nous voulons étudier les variations de $f(x) = \cos(\sin(x))$ et de $g(x) = \sin(\cos(x))$. Pour cela il nous faut calculer les dérivées de ces deux fonctions :

$$f'(x) = -\sin(\sin(x))\dot{c}os(x)$$

$$g'(x) = \cos(\cos(x))\dot{(} - \sin(x))$$

Puis, il nous faut étudier leurs signes :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
- $\sin(\sin(x))$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x)$	1 $\searrow$	$\cos(1)$ $\nearrow$	1 $\searrow$	$\cos(1)$ $\nearrow$	1

x	0		π		2π
$-\sin(x)$		$-$	0	$+$	
$\cos(\cos(x))$		$+$		$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

x	0	π	2π
$g(x)$	$\sin(1)$ $\searrow$	$\sin(-1)$ $\nearrow$	$\sin(1)$

On observe qu'il existe deux moments où la fonction f prend des valeurs inférieures à $\sin(1) \approx 0,84$.

$$\begin{aligned}
&\cos(\sin(x)) = \sin(1) \\
&\Leftrightarrow x = \sin^{-1}(\cos^{-1}(\sin(1))) \\
&ou\ x = \sin^{-1}(\cos^{-1}(\sin(1))) + \frac{\pi}{2} \\
&ou\ x = \sin^{-1}(\cos^{-1}(\sin(1))) + \pi \\
&ou\ x = \sin^{-1}(\cos^{-1}(\sin(1))) + \frac{3\pi}{2} \\
&\Leftrightarrow x \approx 0,61 \\
&ou\ x \approx 2,18 \\
&ou\ x \approx 3,75 \\
&ou\ x \approx 5,32
\end{aligned}$$

(Puisque $\cos(\sin(x)) = \cos(\sin(x + \frac{\pi}{2} = \cos(\sin(x + \pi)) = \cos(\sin(x + \frac{3\pi}{2}))$)

Pour $x \in [0,61; 2,18] \bigcup [3,75; 5,32]$ $f < \sin(1)$.

On observe également que g prend des valeurs inférieures à $\cos(1) \approx 0,54$

$$\begin{aligned}
&\sin(\cos(x)) = \cos(1)\\
&\Leftrightarrow x = \cos^{-1}(\sin^{-1}(\cos(1)))\\
&ou\ x = -(\sin^{-1}(\cos^{-1}(\sin(1)))) + 2\pi\\
&\Leftrightarrow x \approx 0,96\\
&ou\ x \approx 5,32
\end{aligned}$$

(Puisque $\sin(\cos(x)) = -(\sin(\cos(x+\pi))) + 2\pi$)

Pour $x \in [0,96; 5,32]$ $g < \cos(1)$. Sur cet intervalle g est inférieure au minimum de f et sur $[0; 0,61] \bigcup [2,18; 3,75] \bigcup [5,32; 6,28]$, f est supérieure au maximum de g. Donc, sur $[0; 2\pi] \backslash [0,61; 0,96]$, f est supérieure à g.

L'intervalle qui nous pose problème est donc $[0,61; 0,96]$.

Cet intervalle à pour image $[0,68; 0,84]$ par la fonction f et $[0,54; 0,73]$ par la fonction g :

$$\begin{aligned}
&\cos(\sin(x)) = \sin(\cos(\cos^{-1}(\sin^{-1}(\cos(1)))))\\
&\Leftrightarrow \cos(\sin(x)) \approx \sin(\cos(0,96)\\
&\Leftrightarrow \cos(\sin(x)) \approx 0,73\\
&\Leftrightarrow x = \sin^{-1}(\cos^{-1}(\sin(\cos(\cos^{-1}(\sin^{-1}(\cos(1)))))))\\
&\Leftrightarrow x \approx \sin^{-1}(\cos^{-1}(0,73))\\
&\Leftrightarrow x \approx 0,85
\end{aligned}$$

On a donc l'intervalle $[0,61; 0,85]$ qui a pour image $[0,73; 0,84]$ par la fonction f et $[0,61; 0,73]$ par la fonction g et l'intervalle $[0,85; 0,96]$ qui a pour image $[0,68; 0,73]$ par la fonction f et $[0,54; 0,61]$ par la fonction g. Les deux fonctions étant décroissantes sur $[0,61; 0,85]$, $f > g$ sur cet intervalle.

On peut donc affirmer que $f(x) > g(x)$ sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.

EXERCICE 105 (②) par Léo

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, soit :

$$u_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{2}}}}$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$$

On montre le résultat par récurrence :

Initialisation : Pour $n = 1$, on a bien : $u_1 = \sqrt{2}$, et $2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que la propriété soit vraie au rang n et montrons qu'alors la propriété est également vraie au rang $n+1$

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \\
&= 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}\cdot\frac{1}{2}}\right) \\
&= 2\sqrt{\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)+1}{2}} && \text{en utilisant la formule de duplication} \\
&= \sqrt{2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)+2} \\
&= \sqrt{\underbrace{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}_{n+1 \text{ itérations}}} && \text{par hypothèse de récurrence}
\end{aligned}$$

Conclusion La propriété est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \geqslant 1$

EXERCICE 106 (③) par Tristan

Soit x un nombre réel non multiple entier de π. En utilisant la formule de duplication de sin, simplifier, pour n dans $\mathbb{N}^*$, le produit :

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

On commence par rappeler la formule de duplication de sin et en tirer une expression de $\cos(x)$.

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}, \quad \sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x) \Leftrightarrow \cos(x) = \frac{\sin(2x)}{2\sin(x)}$$

On peut alors réécrire $P_n(x)$:

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2^k}\right)} \\
&= \frac{1}{2^n}\prod_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2^k}\right)} \\
&= \frac{1}{2^n} \times \frac{\sin(x)}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} && \text{par télescopage} \\
&= \frac{\sin(x)}{2^n\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}
\end{aligned}$$

EXERCICE 107 (④) par Tristan

a) Soit $y \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$. Exprimer $\dfrac{\sin(3y)}{\sin(y)}$ en fonction de $\cos(2y)$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier ; pour $n \in \mathbb{N}^*$, le produit :

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1+2\cos\left(\frac{2x}{3^k}\right)}{3}$$

a) Commençons par développer $\sin(3y)$ pour $y \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$:

On a : $\sin(3y) = \sin(2y)\cos(y) + \sin(y)\cos(2y)$
$$= (\sin(y)\cos(y) + \sin(y)\cos(y))\cos(y) + \sin(y)\cos(2y)$$
$$= \sin(y)\left(2\cos(y)^2 + \cos(2y)\right)$$

Ainsi, $\dfrac{\sin(3y)}{\sin(y)} = 2\cos(y)^2 + \cos(2y)$
$$= \cos(2y) + 1 + \cos(2y)$$
$$= 1 + 2\cos(2y)$$

b) On remarque qu'en posant $y = \dfrac{x}{3^k}$, on obtient l'égalité $1 + 2\cos\left(\dfrac{2x}{3^k}\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{x}{3^{k-1}}\right)}{\sin\left(\frac{x}{3^k}\right)}$ pour tout $k \in \{1; \dots; n\}$.

Alors :
$$P_n(x) = \frac{1}{3^n}\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin\left(\frac{x}{3^{k-1}}\right)}{\sin\left(\frac{x}{3^k}\right)}$$

Ce qui donne par télescopage :
$$P_n(x) = \frac{\sin(x)}{3^n\sin\left(\frac{x}{3^n}\right)}$$

EXERCICE 108 (③) par Gildas

Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(nx)| \leq n|\sin(x)|$$

On commence par fixer un réel x.

Soit la propriété P_n : $|\sin(nx)| \leq n|\sin(x)| \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. Le membre de gauche vaut $|\sin(0 \cdot x)| = |\sin(0)| = 0$.

Le membre de droite vaut $0 \cdot |\sin(x)| = 0$, donc P_0 est vérifié.

Hérédité. On suppose P_n vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors on remarque que :

$|\sin((n+1)x)| = |\sin(nx + x)| = |\sin(nx)\cos(x) + \cos(nx)\sin(x)|$.

Donc par l'inégalité triangulaire (cf. exercice 61) on obtient :

$$\begin{aligned}|\sin((n+1)x)| &\leq |\sin(nx)\cos(x)| + |\cos(nx)\sin(x)| \\ &\leq |\sin(nx)| \cdot |\cos(x)| + |\cos(nx)| \cdot |\sin(x)| \\ &\leq n|\sin(x)| \cdot |\cos(x)| + |\cos(nx)| \cdot |\sin(x)| \quad \text{(HDR)} \\ &\leq (n|\cos(x)| + |\cos(nx)|) \cdot |\sin(x)| \\ &\leq (n+1)|\sin(x)| \quad \text{Soit } \mathcal{P}_{n+1}.\end{aligned}$$

Par le principe de récurrence, l'inégalité est vérifiée.

4.2 Congruences modulo un nombre réel

EXERCICE 109 (①) par Karim

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$ et $\sin(2x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\cos(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi} \text{ ou } x \equiv -\frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$$

Posons $\forall x \in \mathbb{R}, X = 2x$

$$\sin(X) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow X \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi} \text{ ou } X \equiv \frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi}$$

Or $x = \dfrac{X}{2}$
Donc

$$\sin(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{8} \pmod{2\pi} \text{ ou } x \equiv \frac{3\pi}{8} \pmod{2\pi}$$

EXERCICE 110 (①) par Alexandre
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|\sin(nx)| = 1$.

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \sin(nx) = 1 \text{ ou } \sin(nx) = -1\\
&\Longrightarrow nx = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\\
&\Longrightarrow x = \frac{\pi + 2k\pi}{2n}, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

EXERCICE 111 (①) par Léo
Résoudre l'inéquation $|\sin(x)| \leq \dfrac{1}{2}$ dans $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, puis dans $[-\pi, \pi]$.

On se sert du cercle trigonométrique (qu'il faut absolument apprendre).
Sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $|\sin(x)| \leqslant \dfrac{1}{2} \iff \sin(x) \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right] \iff x \in \left[-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right]$
Sur $[-\pi, \pi]$, $|\sin(x)| \leqslant \dfrac{1}{2} \iff \sin(x) \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right] \iff x \in \left[-\pi, -\dfrac{5\pi}{6}\right] \cup \left[-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{5\pi}{6}, \pi\right]$

EXERCICE 112 (②) par Léo
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos(x) = \cos\left(3x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

On va se servir de la propriété : $\cos(a) = \cos(b) \iff a = b + 2k\pi$ ou $a = -b + 2k'\pi$

$$\begin{aligned}
\cos(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) &\iff 3x + \frac{\pi}{3} = x + 2k\pi \text{ ou } 3x + \frac{\pi}{3} = -x + 2k'\pi\\
&\iff 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } 4x = -\frac{\pi}{3} + 2k'\pi\\
&\iff x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{12} + k'\frac{\pi}{2}\\
&\iff x = -\frac{\pi}{6} \pmod{\pi} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{12} \pmod{\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}$$

EXERCICE 113 (③) par François
Soit α un nombre irrationnel. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \cos(x) + \cos(\alpha x)\,.$$

a) Montrer que le seul nombre réel x tel que $f(x) = 2$ est $x = 0$.
b) La fonction f est-elle périodique ?

a)

Soit :

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$h : x \longrightarrow \cos(x) + \cos(\alpha x) - 2$$
$$h(x) = \cos(x) + \cos(\alpha x) - 2$$
$$h(x) = \cos(x) - \cos(0) + \cos(\alpha x) - \cos(\alpha \cdot 0)$$
$$h(x) = -2\sin(\frac{x+0}{2})\sin(\frac{x-0}{2}) - 2\sin(\frac{\alpha \cdot x + \alpha \cdot 0}{2})\sin(\frac{\alpha \cdot x - \alpha \cdot 0}{2})$$
$$h(x) = -2\sin^2(\frac{x}{2}) - 2\sin^2(\frac{\alpha \cdot x}{2})$$

Cherchons x réel, tel que h(x) $=$ 0 :

$$h(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \sin^2(\frac{x}{2}) = -\sin^2(\frac{\alpha \cdot x}{2})$$

Comme pour tout x réel on a :

$$\sin^2(\frac{x}{2}) \geq 0 \;\; et \;\; -\sin^2(\frac{\alpha \cdot x}{2}) \leq 0$$

Alors il faut chercher :

$$\sin^2(\frac{x}{2}) = -\sin^2(\frac{\alpha \cdot x}{2}) = 0$$
$$\sin(\frac{x}{2}) = -\sin(\frac{\alpha \cdot x}{2}) = 0$$

Ainsi :

$$\begin{cases} \frac{\alpha \cdot x}{2} & = & 0\,[\pi] \\ \frac{x}{2} & = & 0\,[\pi] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha \cdot x & = & 0\,[2\pi] \\ x & = & 0\,[2\pi] \end{cases}$$

Il existe donc deux entiers relatifs a et b tel que :

$$\alpha \cdot x = 2\pi a$$
$$x = 2\pi b$$

Ce qui donne :

$$\alpha = \frac{2\pi a}{2\pi b} = \frac{a}{b}\;(\in \mathbb{Q})\; si\; b \neq 0$$

Donc :

$$b \neq 0 \;\; et \;\; x = 0$$

b)

On procède par l'absurde en supposant que f est périodique. Il existe donc T réel non nul, tel que $f(x+T) = f(x)$ pour tout x réel. De cette manière, on trouve que $X = 0+T = T$ est aussi solution de $f(x) = 2$ autre que $x = 0$. Cela est impossible (question a)). **Donc f n'est pas périodique**.

EXERCICE 114 (③) par Noam

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, T et T' deux nombres réels strictement positifs. On suppose que f est T-périodique, que g est T'-périodique, et que $\frac{T'}{T}$ est rationnel. Montrer que $f+g$ est périodique-

Puisque f est T-périodique : $f(a) = f(a+T)$
Puisque g est T'-périodique : $g(a) = g(a+T)$
$\frac{T'}{T} \in \mathbb{Q} \implies \exists (q,p) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tel que $\frac{T'}{T} = \frac{q}{p} \iff T'p = Tq.$
Or $f(a) = f(a+Tq)$ et $g(a) = g(a+T'p) = g(a+Tq)$, donc $f(a)+g(a) = f(a+Tq)+g(a+Tq)$.
La fonction $f+g$ est donc bien périodique.

EXERCICE 115 (④) par Matilde

a) Résoudre l'équation $\cos(3x) = \sin(2x)$.

b) En déduire la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

a)

$$\begin{aligned}
&\cos(3x) = \sin(2x)\\
&\Leftrightarrow \cos(2x+x) = \sin(2x)\\
&\Leftrightarrow \cos(x)\cos(2x) - \sin(x)\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)\\
&\Leftrightarrow \cos(x)[2\cos^2(x)-1] - 2\sin^2(x)\cos(x) = 2\sin(x)\cos(x)\\
&\Leftrightarrow \cos(x)[2\cos^2(x)-1] - 2[1-\cos^2(x)]\cos(x) = 2\sin(x)\cos(x)\\
&\Leftrightarrow 4\cos^3(x) - 3\cos(x) = 2\sin(x)\cos(x)\\
&\Leftrightarrow 4\cos^2(x) - 3 = 2\sin(x)\\
&\Leftrightarrow 4[1-\sin^2(x)] - 3 = 2\sin(x)\\
&\Leftrightarrow 1 - 4\sin^2(x) - 2\sin(x) = 0\\
&\Leftrightarrow 2\sin^2(x) + 1\sin(x) - 0,5 = 0\\
&\Leftrightarrow 2X^2 + 1X - 0,5 = 0 \ \ avec\ \ X = \sin(x)
\end{aligned}$$

$$\delta = b^2 - 4ac = 1 - 4\times 2\times 0,5 = \sqrt{5}$$

$$X_1 = \frac{-b-\sqrt{\delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \qquad X_2 = \frac{-b+\sqrt{\delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

$$sin(x) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \ \ ou\ \ sin(x) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

$$x = sin^{-1}(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}) \ \ ou \ \ : x = sin^{-1}(\frac{-1+\sqrt{5}}{4})$$

$$x = \frac{13\pi}{10} \ \ ou\ \ x = \frac{17\pi}{10} \ \ ou\ \ x = \frac{\pi}{10} \ \ ou\ \ x = \frac{9\pi}{10}$$

b)

$$\sin(\frac{\pi}{10}) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

4.3 Complément : transformation $a\cos x + b\sin x$

EXERCICE 116 (①) par Léo

Quelle est l'amplitude de

$$x \longmapsto 3\cos(x) + 4\cos(x)?$$

Soit $f(x) = 3\cos(x) + 4\cos(x)$, alors $f(x) = 7\cos(x)$, et donc l'amplitude de f est 7.

Exercice 117 (③) par Matilde

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

b) Résoudre l'inéquation d'inconnue $x \in [-\pi, \pi]$: $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) \leq 1$.

a)

$$
\begin{aligned}
&\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} \\
&\Longleftrightarrow \cos^2(x) + 2\cos(x)\sin(x) + \sin^2(x) = \frac{3}{2} \\
&\Longleftrightarrow 1 - \sin^2(x) + \sin(2x) + \sin^2(x) = \frac{3}{2} \\
&\Longleftrightarrow \sin(2x) = \frac{1}{2} \\
&\Longleftrightarrow 2x = \sin^{-1}(\frac{1}{2}) \\
&\Longleftrightarrow x = \frac{\sin^{-1}(\frac{1}{2})}{2} \\
&\Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \ \ ou\ \ x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi\ avec\, k\ \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

b)

Soit une fonction f tel que $f(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$, cette fonction peut s'écrire $f(x) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x)\cos(\phi) + \sin(x)\sin(\phi) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\phi)$.

Ici, on a $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x)$, donc :

$$
\begin{aligned}
\cos(\phi) &= \frac{1}{2} \\
\sin(\phi) &= \frac{-\sqrt{3}}{2} \\
\phi &= -\frac{\pi}{3}
\end{aligned}
$$

Ainsi :

$$\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = 2\cos(x + \frac{\pi}{3})$$

Il nous reste à résoudre l'équation :

$$
\begin{aligned}
2\cos(x + \frac{\pi}{3}) &\leq 1 \\
\cos(x + \frac{\pi}{3}) &\leq \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$$x \in [-\pi; -\frac{2\pi}{3}] \bigcup [0; 2\pi]$$

Exercice 118 (③) par Jean

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = a\cos(x) + b\sin(x)\,.$$

Montrer que, si $x_0 \in \mathbb{R}$, la fonction f s'annule exactement une fois sur $[x_0, x_0 + \pi[$.

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi)$ où $\varphi = \arg(a+ib)$
f s'annule donc pour $\cos(x-\varphi) = 0$, à savoir $x - \varphi \equiv \frac{\pi}{2}, [\pi]$
Supposons par l'absurde que, pour $x_0 \in \mathbb{R}$, il existe deux solutions y_1 et y_2 sur $[x_0, x_0+\pi[$
On a donc :

$$\begin{aligned} & y_1 - \varphi \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \quad \text{et} \quad y_2 - \varphi \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \\ \Longrightarrow\ & y_1 - \varphi \equiv y_2 - \varphi[\pi] \\ \Longrightarrow\ & y_1 \equiv y_2[\pi] \\ \Longrightarrow\ & \exists k \in \mathbb{Z} | y_1 = y_2 + \pi \end{aligned}$$

Ceci est évidemment absurde puisqu'on aurait alors $y_1 - y_2 = \pi$, or l'intervalle étudié est d'amplitude $< \pi$, ce qui conclut.

4.4 Complément : la fonction tangente

Exercice 119 (①) par Léo
Sous des hypothèses convenables, exprimer $\tan(x+y)$ en fonction de $\tan(x)$ et de $\tan(y)$.

$$\begin{aligned} \tan(x+y) &= \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} \\ &= \frac{\sin(x)\cos(y)+\sin(y)\cos(x)}{\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)} \\ &= \frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{\sin(y)}{\cos(y)}}{1 - \frac{\sin(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y)}} && \text{en divisant par } \cos(x)\cos(y) \\ &= \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)} \end{aligned}$$

Ceci est défini seulement pour $\tan(x)\tan(y) \neq 1$, c'est à dire pour x, y et $x+y$ non congrus à $\frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$

Exercice 120 (③) par Daniel
Soient x dans $\mathbb{R}$ non congru à π modulo 2π, $t = \tan\frac{x}{2}$. Vérifier que

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$

On remarque que

$$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{1-t^2}{1+t^2} &= (1-t^2)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \cos(x). \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \frac{2t}{1+t^2} &= 2t\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \sin(x). \end{aligned}$$

EXERCICE 121 (③) À l'aide de l'exercice précédent, montrer que les points du cercle trigonométrique dont les deux coordonnées sont rationnelles sont (-1,0) et les $\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$ avec $t \in \mathbb{Q}$.

5 Calcul des limites

5.1 Premiers exemples

EXERCICE 122 (①) par Leo

Trouver la limite en $+\infty$ des fonctions :

— $a : x \mapsto e^{-\sqrt{x}}$,

— $b : x \mapsto \frac{x+7}{4x+3}$,

— $c : x \mapsto \frac{x^2+5}{x^3-1}$,

— $d : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$,

— $e : x \mapsto \cos\left(x^2\right)e^{-x}$,

— $f : x \mapsto \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}$,

— $g : x \mapsto (2+\sin(x))x$.

Les limites devant toutes être calculées en $+\infty$, on écrira par exemple $3x \to +\infty$ au lieu de $3x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

— a : $-\sqrt{x} \longrightarrow -\infty$, donc $e^{-\sqrt{x}} \longrightarrow 0$ par composition des limites

— b : On met en facteur le terme prépondérant : puisque $\frac{x}{4x} \longrightarrow \frac{1}{4}$, $\frac{x+7}{4x+3} \longrightarrow \frac{1}{4}$

— c : À nouveau, on met en facteur les termes prépondérants : puisque $\frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x} \longrightarrow 0$, alors $\frac{x^2+5}{x^3-1} \longrightarrow 0$

— d : On a l'encadrement $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$, donc en divisant par $x > 0$, $\underbrace{-\frac{1}{x}}_{\to 0} \leqslant \frac{\sin(x)}{x} \leqslant \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}$.

Finalement, d'après le théorème des gendarmes, on a : $\frac{\sin(x)}{x} \longrightarrow 0$

— e : En utilisant le même encadrement que précédemment, on obtient : $\underbrace{-e^{-x}}_{\to 0} \leqslant \cos(x^2)e^{-x} \leqslant \underbrace{e^{-x}}_{\to 0}$, donc $\cos(x^2)e^{-x} \longrightarrow 0$

— f : On pose $X = \ln(x)$. On a alors $\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)} = \frac{\ln(X)}{X}$. Or, $X \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc par composition des limites :
$\frac{\ln(X)}{X} \longrightarrow 0 \implies \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)} \to 0$

— g : $2+\sin(x) \geqslant 1$, donc, $(2+\sin(x))x \longrightarrow +\infty$

EXERCICE 123 (①) Trouver la limite en 0 des fonctions :

$$a : x \mapsto \frac{\cos(e^x)}{2+\ln(x)}, \quad b : x \mapsto \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}, \quad c : x \mapsto x\ln(x), \quad d : x \mapsto \sqrt{x}\ln(x).$$

EXERCICE 124 (②) Trouver la limite en $+\infty$ des fonctions :

$$a : x \mapsto \frac{\lfloor x \rfloor}{x}, \quad b : x \mapsto x - \sqrt{x^2-x-1}.$$

a. On a l'encadrement : $x \leqslant \lfloor x \rfloor < x+1$, donc

$$1 \leqslant \frac{\lfloor x \rfloor}{x} < \underbrace{\frac{x+1}{x}}_{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1} \implies \lim_{x\to+\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x} = 1$$

b.

$$\begin{aligned} x - \sqrt{x^2-x-1} &= \frac{\left(x-\sqrt{x^2-x-1}\right)\left(x+\sqrt{x^2-x-1}\right)}{x+\sqrt{x^2-x-1}} \\ &= \frac{1+x}{x+x\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}} \\ &= \frac{1+x}{x\left(\sqrt{(1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)} \quad \text{car on prend } x>0 \\ &= \frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}} + \frac{1}{x\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)} \end{aligned}$$

Le premier quotient tendant vers $\dfrac{1}{2}$ et le second vers 0 quand $x \to +\infty$, par somme, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} x - \sqrt{x^2-x-1} = \frac{1}{2}$$

EXERCICE 125 (②) Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, soit :

$$f(x) = \sin(1/x).$$

a) Tracer sommairement le graphe de f. Quelle est la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?
b) La fonction f a-t-elle une limite en 0 ?
c) Quelle est la limite de $xf(x)$ lorsque x tend vers 0 ?

EXERCICE 126 (②) Trouver la limite (finie ou infinie) des suites définies par les formules ci-après :

$a_n = \dfrac{2n+5}{6n+7}$, $b_n = \dfrac{n^2-5n+6}{n\sqrt{n}}$, $c_n = \dfrac{5+3\sin^2(n)}{\sqrt{n+2}+3}$,

$d_n = \sqrt{n+\cos(n)} - \sqrt{n}$, $e_n = -2n^2 + (-1)^n$, $f_n = \sqrt{n} - \sin(2n)^2 - 7$,

$g_n = \dfrac{1+5\sin^3(n)}{3n-7\sqrt{n}+\cos(n)}$.

5.2 Utilisation des taux d'accroissement

EXERCICE 127 (②) par François et Salmo En utilisant éventuellement des taux d'accroissement, trouver les limites suivantes :
— $\dfrac{\cos x - 1}{x}$, $\dfrac{\sin(5x)}{x}$, $\dfrac{\ln(1+2x)}{\sin(4x)}$ lorsque x tend vers 0,
— $\dfrac{\ln x}{x-1}$ lorsque x tend vers 1,
— $x\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

1) Étudions la limite en 0 :

On a
$$\frac{\cos(x)-1}{x}=\frac{\cos(x)-\cos(0)}{x-0}$$

Donc d'après le taux d'accroissement :
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-\cos(0)}{x-0}=-\sin(0)=0$$

2) On procède par changement de variable : On remarque que
$$\frac{\sin(5x)}{x}=\frac{\sin(5x)}{\frac{5x}{5}}$$

En posant $X=5x$, on a alors $\lim\limits_{x\to 0}5x=\lim\limits_{x\to 0}X=0$.
Donc
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{x}=\lim_{X\to 0}5\times\frac{\sin(X)}{X}$$
Or d'après la formule du taux d'accroissement on a :
$$\lim_{X\to 0}\frac{\sin(X)}{X}=\lim_{X\to 0}\frac{\sin(X)-\sin(0)}{X-0}=\cos(0)=1$$

Ainsi on obtient le résultat voulu,
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{x}=\lim_{X\to 0}5\times\frac{\sin(X)}{X}=5$$

3) Étudions la limite de $\dfrac{\ln(1+2x)}{\sin(4x)}$ en 0.

On a,
$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+2x)}{\sin(4x)}&=\frac{1}{2}\times\frac{\ln(1+2x)}{2x}\times\frac{4x}{\sin(4x)}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{\ln(1+2x)-ln(1)}{2x-0}\times\frac{4x-0}{\sin(4x)-\sin(0)}\quad\text{(taux d'accroissement)}\end{aligned}$$

De plus $\dfrac{\ln(1+2x)-ln(1)}{2x-0}\xrightarrow[x\to 0]{}1$ et $\dfrac{4x-0}{\sin(4x)-\sin(0)}\xrightarrow[x\to 0]{}1$.

Donc
$$\frac{\ln(1+2x)}{\sin(4x)}\xrightarrow[x\to 0]{}\frac{1}{2}.$$

4) Étudions la limite de $\dfrac{\ln(x)}{x-1}$ en 1.

On a, $\dfrac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1}=\dfrac{\ln(x)}{x-1}$, donc à l'aide du taux d'accroissement on a, $\dfrac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1}\xrightarrow[x\to 1]{}1$.

Ainsi,
$$\frac{\ln(x)}{x-1}\xrightarrow[x\to 1]{}1.$$

5) **Remarque** :

On remarque que
$$x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\ln\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)$$

Or on sait que
$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=e^a$$

On évalue donc notre limite pour $a = 2$, on a donc

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\left(1+\frac{2}{x}\right)^x\right) = \ln(e^2) = 2$$

Ce qui termine le calcul

EXERCICE 128 (③) Par Lancelot

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right).$$

a) En utilisant l'exercice 106 de **4.1**, déterminer la limite de la suite $(P_n(x))_{n\geq 0}$.

b) Pour n dans $\mathbb{N}^*$, soit :

$$u_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}} \text{ (n radicaux).}$$

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on pose :

$$v_n = \prod_{k=1}^{n} u_k.$$

En utilisant la question précédente et l'exercice 105 de **4.1**, montrer que

$$\frac{v_n}{2^n} \to \frac{2}{\pi}.$$

Cette formule a été découverte par Viète (1593). On trouvera en ***8.6*** *une autre expression de π comme «produit infini», due à Wallis.*

1. D'après l'exercice 106 de **4.1**, on a que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n}\frac{\sin(x)}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}.$$

Observons que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x}{2^n} = 0,$$

et puisque $\sin(u)/u$ tend vers 1 quand u tend vers 0, on déduit que :

$$\frac{1}{x}\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{x},$$

d'où :

$$P_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\sin(x)}{x}.$$

2. D'après l'exercice 105 de **4.1**,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right),$$

ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \prod_{k=1}^{n} 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right) = 2^n \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{1}{2^k}\frac{\pi}{2}\right) = 2^n P_n\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{v_n}{2^n} = P_n\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

avec la question précédente :

$$P_n\left(\frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{\pi}$$

EXERCICE 129 (③)

1. Déterminer la limite de $f(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{x}$ en 0.
2. En utilisant la formule de duplication pour cos, déterminer la limite de f en 0.

5.3 Mise en facteur du terme prépondérant

EXERCICE 130 (③) par Gildas

Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{\binom{n}{k}}{n^k}$$

On pourra commencer par les cas $k = 0, 1, 2$. Dans le cas général, observer que $n \mapsto \binom{n}{k}$ est une application polynomiale de degré k, dont on précisera le coefficient dominant.

On fixe k, soit $f : \begin{cases} [\![k, +\infty[\![\longrightarrow \mathbb{N}^* \\ n \mapsto \binom{n}{k} \end{cases}$.

Donc $f(n) = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{1}{k!} \cdot \underbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}_{\text{k facteurs}}$ ce qui est exactement un polynôme sous sa forme factorisée. C'est bien une application polynomiale de degré k puisqu'il y a k facteurs, et le coefficient dominant est $\dfrac{1}{k!}$.

Le dénominateur de (u_n) est aussi un polynôme de degré k et de coefficient dominant 1.

Puisque (u_n) est un quotient de polynômes de même degré on obtient :

$$u_n \longrightarrow \frac{\frac{1}{k!}}{1} = \frac{1}{k!}$$

EXERCICE 131 (③) par Tristan

Trouver la limite en $+\infty$ de

$f(x) = \dfrac{50x + x\ln(x)}{x\ln(x) + 3}$ $\qquad$ $g(x) = \dfrac{e^{-x} + \sqrt{x} + e^x + \cos x}{x^{20} + 2x^{2021}}$

$h(x) = \dfrac{e^x - 1}{x^6 + 2e^x + e^{\frac{x}{2}}}$ $\qquad$ $i(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(x)}$

$j(x) = \exp\left(-3\sqrt{x} + x - \ln\left(\left(x^2+1\right) + \cos(x)\right)\right)$ $\qquad$ $k(x) = \sqrt{x}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)$

Limite de $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x(50 + \ln(x))}{x\ln(x) + 3} \\ &= \frac{x(50 + \ln(x))}{x\ln(x)} \times \frac{1}{1 + \frac{3}{x\ln(x)}} \\ &= \left(\frac{50}{\ln(x)} + 1\right)\left(\frac{1}{1 + \frac{3}{x\ln(x)}}\right) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x)) = 1$$

Limite de $g(x)$:

$$g(x) = \frac{e^{-x} + \sqrt{x} + e^{x} + \cos(x)}{x^{20} + 2x^{2021}}$$
$$= \frac{e^{x}}{2x^{2021}} \times \frac{\frac{1}{e^{2x}} + \frac{\sqrt{x}}{e^{x}} + 1 + \frac{\cos(x)}{e^{x}}}{\frac{1}{2x^{2001}} + 1}$$

Par croissance comparée, $\dfrac{e^{x}}{2x^{2021}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

Et ainsi,

$$\lim_{x \to +\infty} (g(x)) = +\infty$$

Limite de $h(x)$:

$$h(x) = \frac{e^{x} - 1}{x^{6} + 2e^{x} + e^{\frac{x}{2}}}$$
$$= \frac{e^{x}}{2e^{x}} \left(\frac{1 - \frac{1}{e^{x}}}{\frac{x^{6}}{2e^{x}} + 1 + \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2e^{x}}} \right)$$
$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{\frac{x^{6}}{2e^{x}} + 1 + \frac{1}{2e^{\frac{x}{2}}}} \right)$$

Par croissance comparée, $\left(\dfrac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{\frac{x^{6}}{2e^{x}} + 1 + \frac{1}{2e^{\frac{x}{2}}}} \right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$

Ainsi,

$$\lim_{x \to +\infty} (h(x)) = \frac{1}{2}$$

Limite de $i(x)$:

$$i(x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}$$
$$= \frac{\ln\left(x\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)}{\ln(x)}$$
$$= \frac{\ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}$$

Ainsi,

$$\lim_{x \to +\infty} (i(x)) = 1$$

Limite de $j(x)$:

$$j(x) = \exp\left(-3\sqrt{x} + x - \ln(\left(x^{2}+1\right) + \cos(x)\right)$$
$$= \exp\left(x \left(\frac{-3}{\sqrt{x}} + 1 - \frac{\ln\left(x^{2}+1\right)}{x} + \frac{\cos(x)}{x} \right) \right)$$

Comme $\left(\frac{-3}{\sqrt{x}} + 1 - \frac{\ln\left(x^{2}+1\right)}{x} + \frac{\cos(x)}{x} \right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$, on a finalement

$$\lim_{x \to +\infty} (j(x)) = +\infty$$

Limite de $k(x)$:

$$k(x) = \sqrt{x}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)$$
$$= \sqrt{x}\sqrt{x+1} - x$$

Or, $\sqrt{x} \underset{x \to +\infty}{\sim} \sqrt{x+1}$ d'où

$$k(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} (k(x)) = 0$$

5.4 Utilisation de la forme exponentielle

Exercice 132 (③) par Daniel

Déterminer les limites des suites définies par les formules

$$a_n = \frac{n^n}{2^{n^2}}, \quad b_n = \frac{(\ln(n))^{n^2}}{\sqrt{n}^n}, \quad c_n = \frac{a^{b^n}}{b^{a^n}} \qquad \text{ou } (a,b) \in \mathbb{N}^{*2} \text{ et } a < b.$$

- Premièrement,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n^n}{2^{n^2}} \\ &= \exp\left(n\ln(n) - n^2\ln(2)\right) \\ &= \exp\left[n^2\left(\frac{\ln(n)}{n} - \ln(2)\right)\right] \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$

- Deuxièmement,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{(\ln(n))^{n^2}}{\sqrt{n}^n} \\ &= \exp\left(n^2\ln(\ln(n)) - n\ln(\sqrt{n})\right) \\ &= \exp\left(n^2\ln(\ln(n)) - \frac{1}{2}n\ln(n)\right) \\ &= \exp\left[n^2\left(\ln(\ln(n)) - \frac{\ln(n)}{2n}\right)\right] \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$

- Finalement, soit $(a,b) \in \mathbb{N}^{*2}$ et $a < b$:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{a^{b^n}}{b^{a^n}} \\ &= \exp\left(b^n\ln(a) - a^n\ln(b)\right) \\ &= \exp\left[b^n\left(\ln(a) - \left(\frac{a}{b}\right)^n\ln(b)\right)\right] \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = +\infty$

5.5 Complément : croissance comparée des suites $(a^n)_{n\geq 0}$ et $(n!)_{n\geq 0}$

5.6 Quelques études de suites

Exercice 133 (②) par Tristan

La suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ est définie par ses deux premiers termes u_0 et u_1 et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1})$$

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{n+1} - u_n$$

a) Montrer que $(v_n)_{n\geq 0}$ est géométrique. Exprimer v_n en fonction de v_0 et n.

b) Exprimer u_n en fonction de u_0, u_1 et n. En déduire que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers une limite que l'on explicitera.

c) Reprendre cet exercice à l'aide de l'exercice 11 de **1.3**

a) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculons v_{n+1}.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+2} - u_{n+1} \\ &= \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1}) - u_{n+1} \\ &= \frac{1}{2}(u_n - u_{n+1}) \\ &= -\frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n) \\ &= -\frac{1}{2} v_n \end{aligned}$$

Ainsi, $(v_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison $q = -\dfrac{1}{2}$ et de premier terme v_0. On a par définition

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_0 \left(-\frac{1}{2}\right)^n = (u_1 - u_0)\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

b) On remarque que $u_n = v_{n-1} + u_{n-1} = v_{n-1} + v_{n-2} + u_{n-2} = \cdots = v_{n-1} + \cdots + v_0 + u_0$
Alors pour tout n de $\mathbb{N}$ on a la relation suivante :

$$u_n = (u_1 - u_0) \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k + u_0$$

$$u_n = 2(u_1 - u_0) \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{3} + u_0$$

D'après cette expression de $(u_n)_{n \geq 0}$ et comme pour $k \in]-1, 1[$, $\lim_{n \to +\infty} (k^n) = 0$:

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n) = \frac{2}{3} u_1 + \frac{1}{3} u_0$$

c) u_{n+2} peut s'écrire sous la forme $au_{n+1} + bu_n$ avec $(a, b) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$. D'après l'exercice 11 de **1.3**, on peut alors poser l'équation

$$x^2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

Dont les solutions sur $\mathbb{R}$ sont

$$\begin{cases} \lambda &= -\frac{1}{2} \\ \mu &= 1 \end{cases}$$

Et ainsi établir qu'il existe des réels α et β tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = \alpha\lambda^n + \beta\mu^n$$

$$\alpha + \beta = u_0$$

$$\alpha\lambda + \beta\mu = u_1$$

On a donc le système suivant

$$\begin{cases} \alpha + \beta &= u_0 \\ -\frac{1}{2}\alpha + \beta &= u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta &= u_0 - \alpha \\ -\frac{3}{2}\alpha + u_0 &= u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta &= \frac{1}{3}u_0 + \frac{2}{3}u_1 \\ \alpha &= -\frac{2}{3}(u_1 - u_0) \end{cases}$$

Et finalement,

$$u_n = -\frac{2}{3}(u_1 - u_0) \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \beta \xrightarrow[n \to +\infty]{} \beta = \frac{2}{3}u_1 + \frac{1}{3}u_0$$

Exercice 134 (②) par Tristan

La suite réelle $(u_n)_{n \geq 0}$ est définie par ses deux premiers termes u_0 et u_1, tous deux strictement positifs, et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}}$$

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \ln(u_n)$$

Justifier la définition de $(v_n)_{n\geq 0}$. En utilisant $(u_n)_{n\geq 0}$ et en utilisant l'exercice précédent, montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers une limite que l'on explicitera.

$(v_n)_{n\geq 0}$ existe si et seulement si pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n > 0$.

Comme u_0 et u_1 sont strictement positifs et que $u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}}$, cette relation est vraie ce qui justifie l'existence de $(v_n)_{n\geq 0}$.

On commence par trouver une expression de v_{n+2} en fonction de v_n et v_{n+1}. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+2} = \ln(u_{n+2})$$

$$v_{n+2} = \frac{1}{2}\left(\ln(u_n) + \ln(u_{n+1})\right)$$

$$v_{n+2} = \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{2}v_{n+1}$$

D'après l'exercice précédent, il est évident qu'une expression de v_n en fonction de n, v_0 et v_1 est

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 2(v_1 - v_0)\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{3} + v_0$$

Et donc

$$\lim_{n\to+\infty}(v_n) = \frac{2}{3}v_1 + \frac{1}{3}v_0$$

Or, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = e^{v_n}$ ce qui entraîne

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n) = \exp\left(\frac{2}{3}v_1\right) \times \exp\left(\frac{1}{3}v_0\right)$$

Exercice 135 (②) par Tristan

La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est définie par $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \sqrt{n+1} + \sin(u_n)$$

a) Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

b) Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

a) On commence par déterminer la variation de $(u_n)_{n\geq 0}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = \sqrt{n+1} + \sin(u_n)$$

Or,

$$-1 \leq \sin(u_n) \leq 1$$

$$-1 + \sqrt{n+1} \leq u_{n+1} - u_n \leq 1 + \sqrt{n+1}$$

Comme $n \geq 0$, $\sqrt{n+1} \geq 1$ et $0 \leq u_{n+1} - u_n \leq 1 + \sqrt{n+1}$.

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante et puisque $u_0 \in \mathbb{R}^+$, $(u_n)_{n\geq 0}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

b) D'après la question précédente et selon le théorème de minoration,

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n - u_{n-1}) = +\infty$$

Comme $(u_n)_{n\geq 0}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - u_{n-1} \leq u_n$.

En posant alors la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = u_n - u_{n-1}$$

On obtient alors l'inégalité suivante pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n \leq u_n$$

Et comme $\lim_{n\to+\infty}(v_n) = +\infty$, on a d'après le théorème de minoration

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n) = +\infty$$

Exercice 136 (③) par Tristan

La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \cos(nu_n) + 2$$

Minorer u_n en fonction de n et u_0 afin de montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Commençons par déterminer un encadrement de $(u_n)_{n\geq 0}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$-1 \leq \cos(u_{n-1}) \leq 1$$
$$1 \leq \cos((n-1)\,u_{n-1}) + 2 \leq 3$$
$$u_{n-1} + 1 \leq u_n \leq u_{n-1} + 3$$

Posons alors la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = u_{n-1} + 1 \Longrightarrow v_n \leq u_n$$

En considérant alors l'inégalité $u_{n-1} + 1 \leq u_n$, on peut déterminer une minoration de $(v_n)_{n\geq 1}$ en fonction de u_0 et n :

$$\begin{aligned} v_n &= u_{n-1} + 1 \\ &\geq u_{n-2} + 1 + 1 \\ &\geq u_{n-3} + 1 + 1 + 1 \\ &\dots \\ &\geq u_{n-n} + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ fois}} \\ &\geq u_0 + n \end{aligned}$$

On se retrouve alors avec l'inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_0 + n \leq u_n$$

Or, $u_0 \in \mathbb{R}$ donc $u_0 + n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et d'après le théorème de minoration, on a finalement

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n) = +\infty$$

Exercice 137 (③) par Tristan

Déterminer, en utilisant un encadrement, la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left\lfloor \frac{k^2}{n} \right\rfloor$$

On commence par établir l'encadrement de $(u_n)_{n\geq 1}$ grâce à la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x - 1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x$$

En prenant $x = \dfrac{k^2}{n}$ on obtient l'encadrement suivant pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2}{n}-1\right) \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n}$$

$$\frac{1}{n^3} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n^3} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$\frac{n(n+1)(2n+1)-6n^2}{6n^3} \leq u_n \leq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$
$$\frac{2n^3-3n^2+n}{6n^3} \leq u_n \leq \frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}$$

Or, $\dfrac{2n^3-3n^2+n}{6n^3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{2n^3+3n^2+n}{6n^3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{3}$. D'après le théorème des gendarmes on a par conséquent la limite suivante pour $(u_n)_{n\geq 1}$:

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n) = \frac{1}{3}$$

Exercice 138 (③) par Tristan

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note N_n le nombre de chiffres de l'écriture décimale de n : N_n vaut 1 si $1 \leq n \leq 9$, 2 si $10 \leq n \leq 99$... Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{N_n}{\ln(n)}$$

On exprimera N_n à l'aide des fonctions partie entière et logarithme décimal.

On commence par établir l'expression de N_n ci-dessous :

$$\text{Pour } n \in \mathbb{N}^*, \quad N_n = \lfloor \log(n) \rfloor + 1$$

Ainsi, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{\lfloor \log(n) \rfloor + 1}{\ln(n)}$

On va déterminer la limite de $(u_n)_{n\geq 1}$ par encadrement.

$$\log(n) - 1 \leq \lfloor \log(n) \rfloor \leq \log(n)$$

$$\log(n) \leq \lfloor \log(n) \rfloor + 1 \leq \log(n) + 1$$
$$\frac{\log(n)}{\ln(n)} \leq u_n \leq \frac{\log(n)+1}{\ln(n)}$$

Or, on a la relation suivante pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\log(n) = \frac{\ln(n)}{\ln(10)}$$

En remplaçant alors dans notre encadrement, on obtient

$$\frac{1}{\ln(10)} \leq u_n \leq \frac{1}{\ln(10)} + \frac{1}{\ln(n)}$$

Puisque $\dfrac{1}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a finalement d'après le théorème des gendarmes

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n) = \frac{1}{\ln(10)}$$

Exercice 139 (③)

Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{k}}.$$

Essayons de majorer et minorer $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{k}}$ pour obtenir sa limite. On remarque que pour tout k dans $[\![1;n]\!]$, $\frac{1}{n+\sqrt{k}} \geqslant \frac{1}{n+\sqrt{n}}$. Donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{k}} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{n}}.$$

Or,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{n}} = \frac{n}{n+\sqrt{n}} = \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}.$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{k}} \geqslant \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}.$$

On remarque aussi que pour tout k dans $[\![1;n]\!]$, $\frac{1}{n+\sqrt{k}} \leqslant \frac{1}{n+1}$.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{k}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1}.$$

Or,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}.$$

On obtient ainsi

$$\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{k}} \leqslant \frac{1}{1+\frac{1}{n}}.$$

Sachant que

$$\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1,$$

on conclue par le théorème des gendarmes que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{k}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Exercice 140 (④) par Tristan

On construit une suite $(F_n)_{n\geq 1}$ de polygones de la manière suivante. On prend pour F_1 un triangle équilatéral dont les côtés ont pour longueur 1. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on passe de F_n à F_{n+1} en partageant chaque segment du pourtour de F_n en trois segments égaux, puis en substituant au segment central une réunion de deux segments égaux formant avec le segment supprimé un triangle équilatéral dirigé vers l'extérieur. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ soient c_n, ℓ_n, p_n et a_n le nombre de côtés, la longueur d'un côté, le périmètre et l'aire de F_n.

a) Dessiner sommairement F_1, F_2, F_3

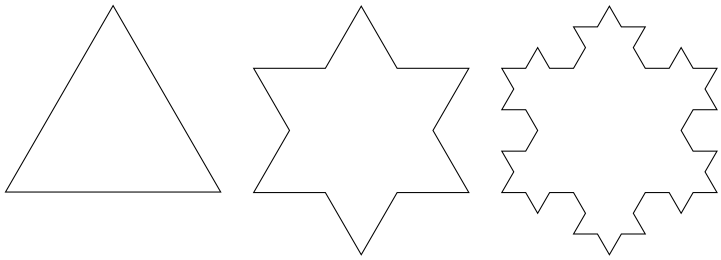
b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer c_n, ℓ_n et p_n en fonction de n. Déterminer la limite de $(p_n)_{n\geq 1}$.

c) Calculer a_1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{3\sqrt{3}}{16}\left(\frac{4}{9}\right)^n$$

Montrer que $(a_n)_{n\geq 1}$ converge vers une limite finie que l'on calculera.

a) On trace F_1, F_2 et F_3 en suivant les indications de l'énoncé, ce qui donne (sans respecter la condition initiale sur la longueur des côtés de F_1) :



b) On remarque que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on multiplie par 4 le nombre de côté en passant de F_n à F_{n+1}. Alors on établit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad c_{n+1} = 4c_n \Leftrightarrow c_n = 3 \times 4^{n-1}$$

On remarque ensuite que la longueur des côtés est quant à elle divisée par 3 à chaque itération et on en déduit l'expression de ℓ_{n+1} en fonction de ℓ_n puis de ℓ_n en fonction de n.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ell_{n+1} = \frac{\ell_n}{3} \Leftrightarrow \ell_n = \frac{1}{3^{n-1}}$$

Enfin, le périmètre de F_n correspond au nombre de côtés de F_n multiplié par la longueur des côtés de F_n. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = c_n \times \ell_n \Leftrightarrow p_n = \frac{4^{n-1}}{3^{n-2}}$$

Déterminons maintenant la limite de $(p_n)_{n\geq 1}$.

$$\begin{aligned} p_n &= e^{\ln(p_n)} \\ &= e^{(n-1)\ln(4)-(n-2)\ln(3)} \\ &= e^{n\ln\left(\frac{4}{3}\right)+\ln\left(\frac{9}{4}\right)} \end{aligned}$$

Or, $\ln\left(\dfrac{4}{3}\right) > 0$ donc $n\ln\left(\dfrac{4}{3}\right) + \ln\left(\dfrac{9}{4}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ ce qui entraîne $p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty}(p_n) = +\infty$$

c) On commence par calculer a_1. On retrouve donc la hauteur du triangle formé par F_1 grâce à la formule de la tangente dans le triangle rectangle :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}, \ \tan(\alpha) = \frac{\text{Longueur du côté opposé à } \alpha}{\text{Longueur du côté adjacent à } \alpha}$$

Dans un triangle équilatéral, $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$, ce qui permet de retrouver la hauteur h du triangle formé par F_1 : $h = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Ainsi,

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

On cherche maintenant à établir une expression de a_{n+1} en fonction de a_n.

En passant de F_n à F_{n+1}, on prend l'aire de F_n et on lui rajoute c_n fois l'aire de triangles équilatéraux de côté ℓ_{n+1}.

Or, l'aire d'un triangle équilatéral de côté ℓ_{n+1} est donnée par $A = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times \ell_{n+1}^2$

On a ainsi : $\begin{aligned}[t] a_{n+1} &= a_n + c_n \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \times \ell_{n+1}^2 \right) \\ &= a_n + \frac{\sqrt{3} c_n \ell_{n+1}^2}{4} \\ &= a_n + \frac{\sqrt{3} \times 3 \times 4^{n-1} \times \frac{1}{3^{2n}}}{4} \\ &= a_n + 3\sqrt{3} \times \frac{4^{n-1}}{4 \times 9^n} \\ &= a_n + \frac{3\sqrt{3}}{16} \left(\frac{4}{9} \right)^n \end{aligned}$

On retombe bien sur la formule donnée :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{3\sqrt{3}}{16} \left(\frac{4}{9} \right)^n$$

Déterminons maintenant la limite finie de $(a_n)_{n \geq 1}$ si elle existe.

Pour cela, on remarque que :

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + \frac{3\sqrt{3}}{16} \left(\frac{4}{9} \right)^{n-1} \\ &= a_{n-2} + \frac{3\sqrt{3}}{16} \left(\left(\frac{4}{9} \right)^{n-2} + \left(\frac{4}{9} \right)^{n-1} \right) \\ &\dots \\ &= a_1 + \frac{3\sqrt{3}}{16} \left(\left(\frac{4}{9} \right)^{1} + \dots + \left(\frac{4}{9} \right)^{n-1} \right) \end{aligned}$$

Ainsi, on a l'expression suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = a_1 + \frac{3\sqrt{3}}{16} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{4}{9} \right)^k$$

Et finalement :

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \frac{3\sqrt{3}}{16} \times \frac{1 - \left(\frac{4}{9} \right)^n}{\frac{5}{9}} - \frac{3\sqrt{3}}{16} \\ &= a_1 + \frac{3\sqrt{3}}{16} \left(\frac{1 - \left(\frac{4}{9} \right)^n}{\frac{5}{9}} - 1 \right) \end{aligned}$$

Or, $\dfrac{1 - \left(\frac{4}{9} \right)^n}{\frac{5}{9}} - 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} \dfrac{9}{5} - 1$ donc, $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{3\sqrt{3}}{16} \times \dfrac{4}{5} = \dfrac{2\sqrt{3}}{5}$

Ainsi, $(a_n)_{n \geq 1}$ converge vers une limite finie dont la valeur est $\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$.

EXERCICE 141 (④) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \cos(n\alpha)$, $v_n = \sin(n\alpha)$. Dans les questions a) et b), on suppose que $\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$.

a) On suppose que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer v_n en fonction de u_{n+1} et u_n. En déduire que $(v_n)_{n\geq 0}$ converge.

b) On note ℓ et ℓ' les limites respectives de $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$. En considérant les suites $(u_{n+1})_{n\geq 0}$ et $(v_{n+1})_{n\geq 0}$, donner deux relations entre ℓ et ℓ'.

c) Conclure que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge si et seulement si $\alpha \in 2\pi\mathbb{Z}$ et que $(v_n)_{n\geq 0}$ converge si et seulement si $\alpha \in \pi\mathbb{Z}$.

EXERCICE 142 (④) par Tristan

a) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe exactement un entier naturel k tel que l'écriture décimale de 2^k comporte m chiffres et commence par 1.

b) Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, N_n le nombre de $k \in \{0, \dots, n-1\}$ tels que l'écriture décimale de 2^k commence par 1. Déterminer la limite de la suite $\left(\dfrac{N_n}{n}\right)_{n\geq 1}$.

a) On se propose de démontrer la proposition $\mathcal{P}_m$ pour $m \in \mathbb{N}^*$ par récurrence

$$\mathcal{P}_m \ : \ \exists! k \in \mathbb{N}^* \ tq \ 2^k = 1 \times 10^{m-1} + a_2 \times 10^{m-2} + \cdots + a_m \times 10^{m-m}$$

$$\text{où } (a_2, \dots, a_m) \in [\![1;9]\!]$$

Initialisation :

On vérifie que $\mathcal{P}_m$ est vraie pour $m = 1$:

$2^k = 1$ si et seulement si $k = 0$ donc 0 est l'unique entier naturel k tel que l'écriture décimale de

2^k commence par 1 et comporte $m = 1$ chiffres. Ainsi, $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité :

On suppose que $\mathcal{P}_m$ est vraie pour un entier naturel $m \geq 1$ quelconque et on montre sous cette

hypothèse que $\mathcal{P}_{m+1}$ est vraie.

Calculons :

$2^k = a_0 \times 10^m + a_1 \times 10^{m-1} + a_2 \times 10^{m-2} + \cdots + a_m \times 10^{m-m}$ avec $a_0 = 0, a_1 = 1$

On remarque que si pour $i \in \{0, m\}$, $a_i \geq 10$ alors

$$\begin{cases} a_{i-1} & \longleftarrow a_{i-1} + 1 \\ a_i & \longleftarrow a_i - 10 \end{cases}$$

On sait que $a_1 = 1$ alors :

$$2^1 a_1 \in \{2, 3\} \text{ selon la valeur de } 2^1 a_2$$

En continuant sur ce raisonnement, on a :

$$2^2 a_1 \in \{4, 5, 6, 7\}$$

$$2^3 a_1 \in \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$

Si $a_1 > 9$ alors la récurrence s'achève et $k' = k + 3$ est l'unique entier naturel tel que l'écriture décimale de $2^{k'}$ comporte $m+1$ chiffres et commence par 1 donc $\mathcal{P}_{m+1}$ est vraie. Si $2^3 a_1 \in \{8, 9\}$ alors $2^4 a_1 \in \{16, 17, 18, 19\}$ et alors la récurrence s'achève et $k' = k+4$ est l'unique entier naturel tel que l'écriture décimale de $2^{k'}$ comporte $m+1$ chiffres et commence par 1 donc $\mathcal{P}_{m+1}$ et vraie.

Conclusion :

D'après l'axiome de récurrence, $\mathcal{P}_m$ est vraie pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

b) On sait que le premier k vérifiant les conditions est $k_0 = 0$ avec $2^0 = 1$. Vient ensuite $k_1 = 0+4$ avec $2^4 = 16$ puis $k_2 = 0+4+3$ avec $2^k = 128$; $k_3 = 0+4+3+3$ avec $2^k = 1024$ et ainsi de suite. On remarque alors que les k vérifiant la condition "2^k commence par 1" sont espacés selon une séquence qui se réitère : +4, +3, +3 en partant de $k = 0$.

On peut alors établir le tableau suivant pour visualiser N_n

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	$n-1$
2^k commence par 1	$\surd$	$\times$	$\times$	$\times$	$\surd$	$\times$	$\times$	$\surd$	$\times$	$\times$	$\surd$	...	?

Ainsi, on peut exprimer N_n en fonction de n

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad N_n = 1 + \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor \times 3 + \begin{cases} 0 & \text{si le chiffre des unités de } n \text{ est dans } [0;3] \\ 1 & \text{si le chiffre des unités de } n \text{ est dans } [4;6] \\ 2 & \text{si le chiffre des unités de } n \text{ est dans } [7;9] \end{cases}$$

Alors

$$\frac{3\left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor + 1}{n} \leq \frac{N_n}{n} \leq \frac{3\left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor + 3}{n}$$

Ce qui donne pour $n \to \infty$:

$$\frac{3n}{10n} \leq \frac{N_n}{n} \leq \frac{3n}{10n}$$
$$\frac{3}{10} \leq \frac{N_n}{n} \leq \frac{3}{10}$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{N_n}{n}\right) = \frac{3}{10}$$

EXERCICE 143 (⑤) par Octave

Déterminer la limite de $(u_n)_{n\geq 0}$ où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} k!\,.$$

On pose $(S_n)_{n\geq 1}$ telle que $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!}{n!}$. On peut donc écrire $u_n = 1 + S_n$. On constate que S_n et positive et que, pour tout $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{k!}{n!}\right) + \frac{1}{n} \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{(n-2)!}{n!}\right) + \frac{1}{n} \\ &= \frac{(n-1)!}{n!} + \frac{1}{n} \\ &= \frac{2}{n} \end{aligned}$$

Donc, par le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} S_n = 0$, d'où $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

EXERCICE 144 (⑤) Par Zinedine

Si $n \in \mathbb{N}^*$, soit N_n le nombre d'entiers de la forme $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ avec $k \in \{1, \ldots, n\}$. Montrer que $\left(\frac{N_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$ converge vers une limite à préciser.

Avant de commencer cet exercice, il convient de faire quelques remarques sur l'exercice et les intuitions de sa résolution. Tout d'abord, l'exercice 144 est un des exercices les plus difficiles du polycopié, même parmi les niveaux 5. Comprendre le raisonnement qui suit implique d'avoir cherché l'exercice un minimum. Ensuite, dans ce genre de problèmes une idée qui est toujours bonne est de regarder les petits cas.

Ici on pouvait assez rapidement conjecturer que tout les entiers $\leq \lfloor\sqrt{n}\rfloor$ sont atteints et aussi que si un entier $\geq \lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1$ est atteint alors il l'est unique une fois. Il ne reste plus qu'a démontrer proprement ces conjectures.
Soit $n = qk + r$ la division euclidienne de n par k où $q \geq 1$ et $0 \leq r < k$

Par définition

$$0 \leq n - qk < k \iff \frac{n}{q+1} < k \leq \frac{n}{q}.$$

Dès lors, on peut dégager une condition suffisante, si $\frac{n}{q} - \frac{n}{q+1} \geq 1$ $(*)$ alors il existe bien

$$k \in [\![1, n]\!] \quad \text{tel que} \quad \lfloor\frac{n}{k}\rfloor = q.$$

Remarque. C'est seulement une condition suffisante par exemple pour $n = 10$ et $q = 5$ on a $\frac{10}{5} - \frac{10}{6} < 1$ mais on a $10 = 5 \cdot 2 + 0$ donc $k = 2$ fonctionne.

Après quelques manipulation de $(*)$ on aboutit à l'inégalité :

$$-q^2 - q + n \geq 0.$$

On pose $f(x) = -x^2 - x + n$ et on l'étudie, on trouve que l'intervalle solution est :

$$\left[\frac{1-\sqrt{1+4n}}{2}, \frac{1+\sqrt{1+4n}}{2}.\right]$$

Donc si

$$q \in [\![1, \left\lfloor\frac{1+\sqrt{1+4n}}{2}\right\rfloor]\!],$$

alors il existe un entier k tel que $q = \lfloor\frac{n}{k}\rfloor$

On notera aussi que $\lfloor\sqrt{n}\rfloor \leq \lfloor\frac{1+\sqrt{1+4n}}{2}\rfloor$

Conclusion partielle : Si

$$q \in [\![1, \lfloor\sqrt{n}\rfloor]\!], \quad \exists k \in [\![1, n]\!] \quad \text{tel que} \quad q = \lfloor\frac{n}{k}\rfloor. \qquad (1)$$

$\star_1$ On montre que si $k \in [\![1, \lfloor\sqrt{n}\rfloor - 1]\!]$ alors

$$\lfloor\frac{n}{k}\rfloor \geq 1 + \lfloor\sqrt{n}\rfloor.$$

En effet,

$$\lfloor\frac{n}{k}\rfloor \geq \lfloor\frac{n}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor - 1}\rfloor \geq \lfloor\frac{n}{\sqrt{n}-1}\rfloor$$

Or, $\frac{n}{\sqrt{n}-1} \geq \sqrt{n} + 1$ (identité remarquable)

D'où, par croissance de la fonction partie entière, $\lfloor\frac{n}{\sqrt{n}-1}\rfloor \geq \lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1$ et on en tire le résultat $\blacksquare$

$\star_2$ Si $k \in [|1 + \lfloor\sqrt{n}\rfloor, n|]$ alors

$$\lfloor\frac{n}{k}\rfloor \leq \lfloor\sqrt{n}\rfloor.$$

Et

$$\begin{aligned}\lfloor\frac{n}{k}\rfloor \leq \lfloor\frac{n}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1}\rfloor \leq \frac{n}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1} &< \frac{n}{\sqrt{n}} \\ &< \sqrt{n}\end{aligned}$$

donc en particulier :

$$\lfloor\frac{n}{k}\rfloor \leq \lfloor\sqrt{n}\rfloor. \blacksquare$$

Montrons que si $k \in [\![1, n]\!] \backslash \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ alors les réciproques de $\star_1$ et $\star_2$ sont vraies.

Démontrons la réciproque de $\star_1$, supposons par l'absurde que

$$\lfloor \frac{n}{k} \rfloor \geq \lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1 \quad \text{où} \quad k \in [\![1 + \lfloor \sqrt{n} \rfloor, n]\!].$$

Alors en vertu de $\star_2$ on aurait aussi $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, ce qui fournit une contradiction qui permet d'établir la réciproque de $\star_1$, on peut raisonner de la même manière pour la réciproque de $\star_2$.

Maintenant, on montre que l'application

$$f : [\![1, \lfloor \sqrt{n} \rfloor - 1]\!] - > [\![\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1, n]\!], k - > \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$$

dont l'existence est prouvée par $\star_1$ est injective, c'est-à-dire que tout élément de $[\![\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1, n]\!]$ a au plus un antécédent par f [1]

Soit $k, k' \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor - 1$ (on peut supposer sans perte de généralité $k < k'$) tel que

$$\lfloor \frac{n}{k} \rfloor = \lfloor \frac{n}{k'} \rfloor = q.$$

Alors :

$$\exists r \in [\![0, k-1]\!], \exists r' \in [\![0, k'-1]\!], n = qk + r = qk' + r'$$

$$\begin{aligned} \iff q(k - k') &= r' - r \\ &< k' \\ &< \lfloor \sqrt{n} \rfloor - 1 \end{aligned}$$

Or

$$q \geq \lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1 \quad \text{donc} \quad k = k'$$

Donc f est bien injective.

Donc si $k \in [\![1, n]\!] \backslash \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ alors en utilisant la réciproque de $\star_1$, il vient qu'à chaque $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ dans $[\![\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1, n]\!]$ correspond au moins un k dans $[\![1, \lfloor \sqrt{n} \rfloor - 1]\!]$, soit un antécédent par f. Grâce à l'injectivité de f, on sait que cet antécédent est unique, et donc , selon $\star_1$, à chaque k dans $[\![1, \lfloor \sqrt{n} \rfloor - 1]\!]$ correspond un $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ dans $[\![\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1, n]\!]$ différent. Il vient donc qu'on a exactement :

$$\lfloor \sqrt{n} \rfloor - 1 \text{ entiers } q \geq \lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1 \text{ atteints.}$$

Donc si $k \in [\![1, n]\!]$ on a au plus

$$\lfloor \sqrt{n} \rfloor \text{ entiers } q \geq \lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1 \text{ atteints.}$$

dans le cas où $\lfloor \frac{n}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \rfloor \in Im(f)$, et au moins $\lfloor \sqrt{n} \rfloor - 1$. si $\lfloor \frac{n}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \rfloor \notin Im(f)$.

De plus, d'après l'argument (1) tous les entiers $q \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ sont atteints.

On peut finir le problème par un encadrement de N_n.

Donc,

$$\lfloor \sqrt{n} \rfloor + \lfloor \sqrt{n} \rfloor - 1 = 2\lfloor \sqrt{n} \rfloor - 1 \leq N_n \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor + \lfloor \sqrt{n} \rfloor = 2\lfloor \sqrt{n} \rfloor$$

D'où le résultat :

$$\left(\frac{N_n}{\sqrt{n}} \right)_{n \geq 1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2.$$

6 Dérivation

6.1 Calcul des dérivées

Exercice 145 (①) par Jean

Pour chacune des fonctions ci-après, déterminer l'ensemble de définition et calculer la dérivée.

1. La notion d'injectivité sera vue en sup

$a : x \mapsto \ x^3\cos(5x+1)$	$b : x \mapsto \ e^{\cos x}$	$c : x \mapsto \ x\ln(x)$
$d : x \mapsto \ \ln(e^x+1)$	$e : x \mapsto \ e^{x^3+2x^2+3x+4}$	$f : x \mapsto \ e^{\sqrt{x^2+x+1}}$
$g : x \mapsto \ \ln(e^x+\sin(x))$	$h : x \mapsto \ \dfrac{x}{x^2+1}$	$i : x \mapsto \ \dfrac{\cos(2x)}{x^2-2}$
$j : x \mapsto \ \ln(\cos(2x))$	$k : x \mapsto \ \dfrac{x}{\sin(x)}$	$l : x \mapsto \ \ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$
$m : x \mapsto \ln\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\right)$	$n : x \mapsto \ \ln(\ln(x))$	$o : x \mapsto \ \ln(\ln(\ln(x)))$
$p : x \mapsto \ \dfrac{\cos(x^2)}{\ln\left(\sqrt{1+e^x}\right)}$		

Pour la fonction g, on n'explicitera pas l'ensemble de définition.

a : La fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, a'(x) = -15x^2\sin(5x+1)$

b : La fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, b'(x) = -\sin(x)e^{\cos(x)}$

c : La fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, c'(x) = \ln(x) + x \cdot \dfrac{1}{x} = \ln(x) + 1$

d : La fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, d'(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$

e : La fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, e'(x) = \left(3x^2+4x+3\right)e^{x^3+2x^2+3x+4}$

f : La fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}e^{\sqrt{x^2+x+1}}$

g : Soit I l'ensemble de dérivabilité de g, $\forall x \in I, g'(x) = \dfrac{e^x+\cos(x)}{e^x+\sin(x)}$

h : La fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = \dfrac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

i : La fonction est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ et :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}, i(x) &= \frac{2\sin(2x)(x^2-2) - 2x\cos(2x)}{(x^2-2)^2} \\ &= \frac{-2\left(\sin(2x)(x^2-2) + x\cos(2x)\right)}{(x^2-2)^2}\end{aligned}$$

j : La fonction est définie sur $I = \left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[[2\pi]$ et $\forall x \in I, j'(x) = \dfrac{-2\sin(2x)}{\cos(2x)}$

k : La fonction est définie sur $]0, \pi[[2\pi]$ et $\forall x \in I, k'(x) = \dfrac{\sin(x) - x\cos(x)}{\sin^2(x)}$

l : La fonction est définie sur $]1; +\infty$

$$\begin{aligned}\forall x \in]1; +\infty[, l'(x) &= \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) \times \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{\sqrt{x^2-1}-x}{\sqrt{x^2-1}} \times \frac{1}{-(\sqrt{x^2-1}-x)} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\end{aligned}$$

m : La fonction est définie sur $]-\infty;-1[\cup]1,+\infty[$

$$\begin{aligned}\forall x\in]-\infty;-1[\cup]1,+\infty[, m'(x) &= \left[\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}\times\frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}\right]\times\frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}\\ &= -\frac{2}{(x-1)^2}\times\frac{1}{2\frac{x+1}{x-1}}\\ &= -\frac{1}{x^2-1}\end{aligned}$$

n : La fonction est définie sur $]1;+\infty[$ et sur cet intervalle, $n'(x)=\dfrac{1}{x\ln(x)}$

p : La fonction est définie sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}, p'(x) &= \frac{-2x_sin(x^2)\ln(\sqrt{1+e^x}-\cos(x^2)\cdot\frac{e^x}{2(1+e^x)}}{\ln(\sqrt{1+e^x})^2}\\ &= -\frac{2x\sin(x^2)}{\ln(\sqrt{1+e^X})}-\frac{e^x\cos(x^2)}{2(e^x+1)\ln(\sqrt{1+e^x})^2}\end{aligned}$$

Exercice 146 (②) par Alexandre

Soient f et g deux fonctions deux fois dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose $h=g\circ f$. Si $x\in\mathbb{R}$, donner une expression de $h''(x)$

$$\begin{aligned}h(x) &= g(f(x))\\ h'(x) &= f'(x)\times g'(f(x))\\ h''(x) &= f''(x)\times g'(f(x))+f'(x)\times f'(x)\times g''(f(x))\\ h''(x) &= f''(x)\times g'(f(x))+(f'(x))^2\times g''(f(x))\end{aligned}$$

Exercice 147 (①) Pour $n\in\mathbb{N}$, montrer que

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad \cos^{(n)}(x)=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

Procédons par récurrence. Pour n dans $\mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}_n$ la propriété de l'énoncé.

Initialisation. $\mathcal{P}_0$ est immédiat. En effet,

$$\cos^{(0)}(x)=\cos\left(x+0\frac{\pi}{2}\right)=\cos(x).$$

Donc $\mathcal{P}_0$ est vérifié.

Hérédité. On fixe n dans $\mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. On remarque que la dérivée de $\cos^{(n)}(x)$ est $\cos^{(n+1)}(x)$. On a donc

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad \cos^{(n)}(x)=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

En dérivant par rapport à x, on obtient

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad \cos^{(n+1)}(x)=-\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

En utilisant les formules d'addition, on obtient :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \qquad -\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) &= -\sin(x)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(x)\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\
&= \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\
&= \cos\left(x+\frac{\pi}{2}+\frac{n\pi}{2}\right) \\
&= \cos\left(x+\frac{(n+1)\pi}{2}\right) \\
&= \cos^{(n+1)}(x).
\end{aligned}$$

Ce qui est exactement $\mathcal{P}_{n+1}$.

EXERCICE 148 (②) par Tristan

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, f une fonction n fois dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = f(ax+b)$$

Pour $0 \leq k \leq n$ et $x \in \mathbb{R}$, donner une expression de $g^{(k)}(x)$.

Pour commencer, on note que $\forall k \in \{0; \ldots; n\}$, g est k fois dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On note également que g est de la forme $u \circ v$ donc de dérivée $v'u' \circ v$.

Ainsi pour tout k de $\{0; \ldots; n\}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}
g\left(x\right) &= f\left(ax+b\right) \\
g^{(1)}\left(x\right) &= af^{(1)}\left(ax+b\right) \\
g^{(2)}\left(x\right) &= a^2 f^{(2)}\left(ax+b\right) \\
&\ldots \\
g^{(k)}\left(x\right) &= a^k f^{(k)}\left(ax+b\right)
\end{aligned}$$

On en conclut que si $0 \leq k \leq n$ alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g^{(k)}\left(x\right) = a^k f^{(k)}\left(ax+b\right)$$

EXERCICE 149 (②) par Mathieu

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(x) = \frac{1}{x}$$

Donner une expression simple de $f^{(n)}(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^*$.

Si $f(x) = \dfrac{1}{x}$, les dérivées successives de f sont : $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, $f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$, $f^{(3)}(x) = -\dfrac{6}{x^4}$, $f^{(4)}(x) = \dfrac{24}{x^5}$ et ainsi de suite... On peut conjecturer alors que, pour tout entier naturel n,

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \frac{1}{x^{n+1}} \qquad (\mathcal{P}_n)$$

Démontrons la propriété $\mathcal{P}_n$ par récurrence.

Initialisation. $f^{(0)}(x) = f(x) = \dfrac{1}{x} = (-1)^0 \times 0! \dfrac{1}{x^{0+1}}$. $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.

Hérédité. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un entier naturel $n \geq 0$. On a alors

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \frac{1}{x^{n+1}}.$$

En dérivant les deux membres de l'égalité on obtient

$$f^{(n+1)}(x) = -(-1)^n n! \frac{(n+1)x^n}{(x^{n+1})^2}.$$

Soit

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}(n+1)! \frac{x^n}{x^{2n+2}}.$$

Ce qui donne finalement

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}(n+1)! \frac{1}{x^{n+2}},$$

c'est exactement $\mathcal{P}_{n+1}$.

Exercice 150 (③) par Maorine

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = e^{-x^2}.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n à coefficients réels tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-x^2}.$$

Expliciter P_0, P_1, P_2.

Démontrons la propriété par récurrence

Initialisation : On a les dérivées successives de f : $f(x) = 1 \times e^{-x^2}$, $f'(x) = -2xe^{-x^2}$, $f''(x) = -2e^{-x^2} - 2x \times (-2x)e^{-x^2} = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$

D'où : $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = -2x$, et $P_2(x) = 4x^2 - 2$
Des polynômes à coefficients réels.

Hérédité : Supposons la propriété vraie au rang $n \in \mathbb{N}$.
Dérivons $f^{(n)}$:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)} &= [f^{(n)}(x)]' \\ &= P_n'(x) \times e^{-x^2} - 2x \times P_n(x)e^{-x^2} \\ &= (P_n'(x) - 2xP_n(x))e^{-x^2}. \end{aligned}$$

On note :

$$P_{n+1}(x) = P_n'(x) - 2xP_n(x).$$

P_{n+1} est bien un polynôme à coefficients réels, ce qui achève la récurrence.

Exercice 151 (①) par Maorine

Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

a) On suppose f paire. Que dire de f' ?

b) Même question si f est impaire.

c) Même question si f est périodique de période T, où $T \in \mathbb{R}_+^*$.

a) On suppose f paire, montrons que f' est impaire.
On a tout d'abord :

$$f(-x) = f(x)$$

Dérivons cette expression :

$$-f'(-x) = f'(x)$$
$$f'(-x) = -f'(x)$$

D'où f' impaire.

b) On suppose f impaire, montrons que f' est paire.
On a cette fois :

$$f(-x) = -f(x)$$

Dérivons cette expression :

$$-f'(-x) = -f'(x)$$
$$f'(-x) = f'(x)$$

D'où f' paire.

c) Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose que f est T-périodique.
C'est-à-dire :

$$f(x+T) = f(x)$$

On dérive :

$$f'(x+T) = f'(x)$$

Donc f' est également T-périodique.

Exercice 152 (③) par Jean

a) Déterminer deux réels a et b tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}, \qquad \frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}.$$

b) Pour n dans $\mathbb{N}^*$, calculer en utilisant a) la dérivée n-ième de

$$f : x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \mapsto \frac{1}{x(x+1)}.$$

a) On constate que $\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} = \dfrac{a(x+1)+bx}{x(x+1)}$. Donc, par identification, on a l'équation $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$, $ax + a + bx = 1$ qui a comme solution $(a, b) = (1, -1)$ (en effet, $x + 1 - x = 1$).

b) On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}, \quad f(x) = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

Donc,

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}, \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

. On itère le procédé, et on trouve

$$\forall (x, n) \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \times \mathbb{N}^*, \quad f^{(n)}(x) = (-1)^n \left(\frac{n!}{x^{n+1}} - \frac{n!}{(x+1)^{n+1}} \right),$$

dont l'hérédité de récurrence est immédiate par dérivation (en remarquant une factorisation par -1).

Exercice 153 (③) par Jean

Si f est une fonction dérivable sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, on appelle dérivée logarithmique de f la fonction $\dfrac{f'}{f}$.

a) Soient u et v deux fonctions dérivables sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^*$. Exprimer la dérivée logarithmique de uv en fonction de celles de u et v.

b) Généraliser la question précédente à un produit de n facteurs.

c) Soient n dans $\mathbb{N}^*$, $a_1 < \cdots < a_n$ des nombres réels et P la fonction polynôme définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - a_i).$$

Calculer la dérivée logarithmique de P sur chacun des intervalles où cette fonction est définie. La dérivée logarithmique d'un produit est donc plus lisible que la dérivée : les produis parasites ont disparu.

a) La dérivée logarithmique de uv est la fonction :

$$\frac{(uv)'}{uv} = \frac{u'v + uv'}{uv} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}.$$

b) Soient a_i, pour $i \in [\![1, n]\!]$ où $n \in \mathbb{N}^*$, des fonctions dérivables sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^*$. Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ «la dérivée logarithmique de $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i$ est égale à la somme des dérivées logarithmiques des a_i».

<u>Initialisation</u> : $\dfrac{{a_1}'}{a_1}$ vérifie immédiatement $\mathcal{P}_1$.

<u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie. On a donc $\dfrac{\left(\prod\limits_{i=1}^{n} a_i\right)'}{\prod\limits_{i=1}^{n}(a_i)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{(a_i)'}{a_i}$. Alors, la dérivée logarithmique de $\displaystyle\prod_{i=1}^{n+1} a_i$ peut être exprimée par :

$$\begin{aligned}
\frac{\left[\prod\limits_{i=1}^{n}(a_i) \times a_{n+1}\right]'}{\prod\limits_{i=1}^{n+1} a_i} &= \frac{\left(\prod\limits_{i=1}^{n} a_i\right)' \times \cancel{a_{n+1}}}{\prod\limits_{i=1}^{n}(a_i) \times \cancel{a_{n+1}}} + \frac{{a_{n+1}}' \times \prod\limits_{i=1}^{n} a_i}{\prod\limits_{i=1}^{n+1} a_1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{(a_i)'}{a_i} + \frac{{a_{n+1}}'}{a_{n+1}} \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{(a_i)'}{a_i},
\end{aligned}$$

ce qui est exactement $\mathcal{P}_{n+1}$.

c) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(x - a_i)$. La dérivée logarithmique de P est donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{(x - a_i)'}{(x - a_i)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x - a_i)}$.

Exercice 154 (2) par Maorine

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable au point 0. Déterminer la limite de $\dfrac{f(x^2) - f(0)}{x}$ lorsque x tend vers 0.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable au point 0.
Etudions $\frac{f(x^2)-f(0)}{x^2-0}$. On pose $y = x^2$.
On a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0 \\ \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{f(y) - f(0)}{y - 0} = f'(0), \qquad f'(0) \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

D'après définition de la dérivée en un point.
Alors par composition de limite :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x^2)-f(0)}{x^2} = f'(0).$$

Enfin :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x^2)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x \times \frac{f(x^2)-f(0)}{x^2} = 0.$$

Par produit de limites.

Exercice 155 (④) par Loïse

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(0)=0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

a) Calculer $f'(x)$ si $x \in \mathbb{R}^*$.

b) En revenant à la définition, montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

c) Montrer que la fonction f' n'est pas continue en 0.

a) La fonction f est définie et dérivable sur l'ensemble des réels non nuls en tant que composée et produit de fonctions dérivables.

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

b) Une fonction est dérivable en un point si et seulement si la limite du taux d'accroissement de la fonction en ce point est un réel.
On calcule donc la limite suivante :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}.$$

Ce qui revient au calcul de limite suivant :

$$\lim_{h\to 0} h\cos\left(\frac{1}{h}\right).$$

Par définition de la fonction cosinus, il est admis que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 \le \cos(x) \le 1.$$

Ainsi,

$$\forall h \in \mathbb{R}^*, \quad -1 \le \cos\left(\frac{1}{h}\right) \le 1.$$

Par produit par le réel h, on obtient l'encadrement suivant :

$$\forall h \in \mathbb{R}^*, \quad -h \le \cos\left(\frac{1}{h}\right) h \le h.$$

D'après le théorème d'encadrement dit "des gendarmes", on obtient la limite recherchée :

$$\lim_{h\to 0} h\cos\left(\frac{1}{h}\right) = 0.$$

On a démontré que la fonction f est dérivable en 0 et donc sur $\mathbb{R}$ et $f'(0) = 0$.

c) Une fonction est continue en 0 si elle admet une limite en 0.La fonction f' est définie sur $\mathbb{R}$. Être définie est une condition nécessaire pour être continue.Pour montrer que la fonction f' n'est pas continue en 0, il faut montrer que la limite de la fonction f' quand x tend vers 0 n'est pas égale à $f'(0) = 0$.
Etudions la limite de la fonction f' quand x tend vers 0.

$$\lim_{x\to 0} 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Par produit de limites, on déduit que :

$$\lim_{x\to 0} 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Or

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = +\infty.$$

La fonction sinus n'admet pas de limite à l'infini.
La limite de la fonction f' quand x tend vers 0 n'existe pas. La fonction f' n'est pas continue en 0.

6.2 Tangente à un graphe

Exercice 156 (①) par Loïse

Soient a un nombre réel non nul, x_1 et x_2 deux nombres réels tels que $x_1 < x_2$, f la fonction :

$$x \in \mathbb{R} \mapsto ax^2.$$

Montrer que la tangente au graphe de f au point d'abscisse $\dfrac{x_1+x_2}{2}$ est parallèle à la droite joignant les points du graphe de f d'abscisses x_1 et x_2

Deux droites du plan sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur. Exprimons donc le coefficient directeur de la tangente au graphe de f au point d'abscisse $\dfrac{x_1+x_2}{2}$ et celui de la droite joignant les points du graphe de f d'abscisses x_1 et x_2. Le coefficient directeur de la tangente au graphe de f au point d'abscisse $\dfrac{x_1+x_2}{2}$ est égal au nombre dérivé de la fonction en ce point. Or la fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2ax.$$

On en déduit donc le coefficient directeur de la tangente au graphe de f au point d'abscisse $\dfrac{x_1+x_2}{2}$:

$$f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = 2a\frac{x_1+x_2}{2} \Leftrightarrow f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = a(x_1+x_2).$$

Le coefficient directeur, noté m, de la droite joignant les points du graphe de f d'abscisses x_1 et x_2 est égal à :

$$m = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \Leftrightarrow m = \frac{a{x_2}^2 - a{x_1}^2}{x_2-x_1} \Leftrightarrow m = \frac{a({x_2}^2-{x_1}^2)}{x_2-x_1}.$$

En s'appuyant sur les identités remarquables, on obtient :

$$m = \frac{a(x_2-x_1)(x_1+x_2)}{x_2-x_1} \Leftrightarrow m = a(x_1+x_2).$$

Ainsi, on a montré que :

$$m = f'(\frac{x_1+x_2}{2}) = a(x_1+x_2).$$

Le coefficient directeur de la tangente au graphe de f au point d'abscisse $\dfrac{x_1+x_2}{2}$ et celui de la droite joignant les points du graphe de f d'abscisses x_1 et x_2 sont égaux. La tangente au graphe de f et la droite joignant les points du graphe de f d'abscisses x_1 et x_2 sont parallèles.

Exercice 157 (②) par Matilde

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer l'équation de la droite D_n, tangente au graphe de la fonction ln au point n.

b) Soit x_n l'abscisse du point d'intersection de D_n et l'axe Ox. Déterminer x_n. Quelle est la limite de $(x_n)_{n\geq 1}$?

a)

Équation de la tangente au graphe de $f(x)$ au point d'abscisse n :

$$y = f'(n)(x-n) + f(n)$$

Ici, on a $f(x) = \ln(x)$, on a alors :

$$D_n : y = \frac{1}{n}(x-n) + \ln(n) = x\frac{1}{n} - 1 + \ln(n)$$

b)

Nous cherchons l'intersection entre la tangente D_n et l'axe Ox d'équation $y = 0$, il suffit de résoudre l'équation :

$$\begin{aligned}
&D_n = Ox \\
&\Leftrightarrow x\frac{1}{n} - 1 + \ln(n) = 0 \\
&\Leftrightarrow x = n(1 - \ln(n))
\end{aligned}$$

On obtient donc :

$$x_n = n(1 - \ln(n))$$

Calculons alors la limite de $(x_n)_{n\geq 1}$:

$$\lim_{n\to+\infty} = -\infty$$

> EXERCICE 158 (③) par Loïse
>
> Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables en 0. On suppose que les graphes des trois fonctions f, g , $\frac{fg}{2}$ ont même tangente au point d'abscisse 0. Quelles sont les équations possibles pour cette tangente ?

Ecrivons les équations des tangentes aux trois courbes.
La fonction f est dérivable en 0. Une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0 est $y = f'(0)(x-0) + f(0)$.
Soit :

$$y = f'(0)x + f(0).$$

La fonction g est dérivable en 0. Une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse 0 est

$$y = g'(0)x + g(0).$$

La fonction $\frac{fg}{2}$ est dérivable en 0 en tant que produit de fonctions dérivables. Une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction $\frac{fg}{2}$ au point d'abscisse 0 est

$$y = \frac{f'(0)g(0) + f(0)g'(0)}{2}x + \frac{f(0)g(0)}{2}.$$

On suppose que le graphe des trois fonctions f, g et $\frac{fg}{2}$ ont même tangente au point d'abscisse 0. Par identification des coefficients constants dans les équations réduites, on obtient le système suivant

$$\begin{cases} f'(0) = g'(0) = \dfrac{f'(0)g(0) + f(0)g'(0)}{2} \\ f(0) = g(0) = \dfrac{f(0)g(0)}{2} \end{cases}.$$

Pour résoudre ce système, on établit une disjonction des cas.

Si $f(0) = g(0) = 0$, alors :

$$\begin{cases} f'(0) = g'(0) = \dfrac{f'(0)g(0) + f(0)g'(0)}{2} \\ f(0) = g(0) = \dfrac{f(0)g(0)}{2} = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} f'(0) = g'(0) = 0 \\ f(0) = g(0) = \dfrac{f(0)g(0)}{2} = 0 \end{cases}.$$

On obtient donc une des équations de tangente possibles :

$$y = 0$$

Si $f(0) = g(0) \neq 0$, alors

$$\begin{cases} f'(0) = g'(0) = \dfrac{f'(0)g(0) + f(0)g'(0)}{2} \\ f(0) = g(0) = \dfrac{f(0)g(0)}{2} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} f'(0) = g'(0) = \dfrac{f'(0)g(0) + f(0)g'(0)}{2} \\ f(0) = g(0) = 2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} f'(0) = g'(0) = 0 \\ f(0) = g(0) = 2 \end{cases}.$$

On obtient la deuxième équation de tangente possible :

$$y = 2$$

Exercice 159 (④) par Alexandre

Soient a un réel non nul, f la fonction :

$$x \in \mathbb{R} \to ax^2.$$

Si p et q sont des nombres réels, on note $\Delta_{p,q}$ la droite d'équation $y = px + q$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur p et q pour que $\Delta_{p,q}$ soit tangente au graphe de f.

On a $f'(x) = 2ax$. Pour tout nombre réel α, la tangente à f au point d'abscisse α a pour équation :

$$y = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha)$$

On peut simplifier :

$$y = 2a\alpha x - 2a\alpha^2 + a\alpha^2$$
$$y = 2a\alpha x - a\alpha^2$$

Ainsi, (p, q) doivent être de la forme $(2a\alpha, -a\alpha^2), \alpha \in \mathbb{R}$ pour que $\Delta_{p,q}$ soit tangente à f. Cette condition est suffisante et nécessaire.

Exercice 160 (②) par Alexandre

a) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, x_0 un élément de I tel que $f'(x_0) \neq 0$. Calculer l'abscisse du point x_1 en lequel la tangente au graphe de f au point d'abscisse x_0 coupe l'axe (Ox).

b) On suppose que a est un nombre réel positif, que f est la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^2 - a.$$

Avec les notations précédentes, vérifier que

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right).$$

a) On écrit l'équation de la tangente à f en x_0 :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

x_1 est l'abscisse du point d'intersection entre cette tangente et la droite d'équation $y = 0$. Si on note y_1 l'ordonnée de ce point, on a alors :

$$\begin{aligned} y_1 = f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0) = 0 \\ \iff f'(x_0)(x_1 - x_0) = -f(x_0) \\ \iff x_1 - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \text{ puisque } f'(x_0) \neq 0 \\ \iff x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \end{aligned}$$

b) On a $f'(x) = 2x$, ce qui nous donne en remplaçant :

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^2 - a}{2x_0}$$

$$x_1 = \frac{2x_0^2 - x_0^2 + a}{2x_0}$$

$$\frac{1}{2}(x_0 + \frac{a}{x_0})$$

EXERCICE 161 (③) par Estelle

Soit a dans $\mathbb{R}^{+*}$. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est définie par son premier terme u_0, élément de $\mathbb{R}^{+*}$, et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) = f_a(u_n)$$

où la fonction f_a est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad f_a(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right).$$

a) Étudier f_a et donner sommairement l'allure de son graphe.

b) Justifier que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est bien définie et à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$.

c) Établir les inégalités :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad f_a(x) \geq \sqrt{a},$$
$$\forall x \in [\sqrt{a}; +\infty[\qquad f_a(x) \leq x$$

d) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante, puis que cette suite converge vers $\sqrt{a}$.

e) Pour n dans $\mathbb{N}$ on pose

$$v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}.$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = v_n^2.$$

f) Exprimer v_n en fonction de n.

g) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leq u_n - \sqrt{a} \leq (u_1 + \sqrt{a})\left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}}\right)^{2^n}.$$

Conclure que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\sqrt{a}$.

h) On prend $a = 2$, $u_0 = 1$. Représenter graphiquement la fonction f_2 et les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$. Écrire l'inégalité de la question précédente dans ce cas. Comment choisir n pour obtenir une valeur approchée à 10^{-5} près de $\sqrt{2}$? Faire les calculs correspondants.

a) $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$:

$$f_a'(x) = \frac{1}{2} - \frac{a}{x^2}.$$

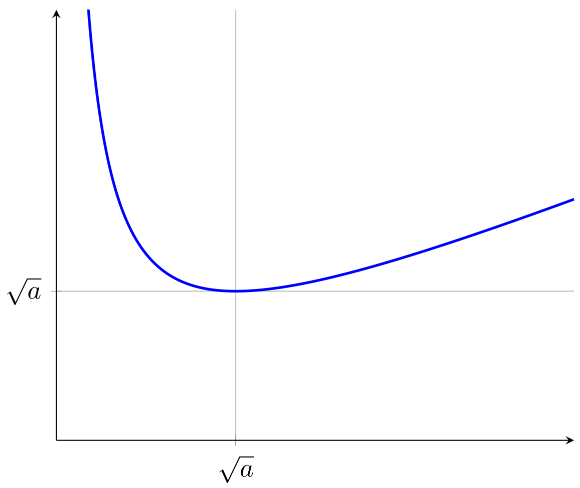
Donc $f_a'(x) \geqslant$ quand

$$\frac{1}{2} - \frac{a}{x^2} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geqslant \frac{a}{x^2} \Leftrightarrow x \geqslant \sqrt{a}.$$

De plus, $f_a(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{a} + \dfrac{a}{\sqrt{a}}\right) = \sqrt{a}$. On obtient le tableau suivant :

x	0		$\sqrt{a}$		$+\infty$
signe de $f_a'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
variations de f_a	$\Vert$	$\searrow$	$\sqrt{a}$	$\nearrow$	

Avec un graphe de l'allure suivante :



b) f_a est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$et à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$. On sait que $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$, donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \mathbb{R}^{+*}$. Ainsi $(u_n)_{n \geq 0}$ est définie et à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$.

c) Pour la première inégalité, on a :
$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$:

$$\begin{aligned}
(x - \sqrt{a})^2 &\geqslant 0 \\
\text{Or } x \neq 0, \text{donc} \quad \frac{(x-\sqrt{a})^2}{2x} &\geqslant 0 \\
\frac{x^2 + a - 2x\sqrt{a}}{2x} &\geqslant 0 \\
\frac{1}{2}x + \frac{a}{2x} - \sqrt{a} &\geqslant 0 \\
\frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) &\geqslant \sqrt{a} \\
f_a(x) &\geqslant \sqrt{a}.
\end{aligned}$$

Pour la seconde :
$\forall x \in [\sqrt{a}; +\infty[$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{a} &\leqslant x \\
a &\leqslant x^2 \\
x^2 + a &\leqslant 2x^2 \\
\frac{x}{2} + \frac{a}{2x} &\leqslant x \\
f_a(x) &\leqslant x.
\end{aligned}$$

d) On sait que $f_a(x) \geqslant \sqrt{a}$ pour tout x positif non-nul, donc $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est à valeurs dans $[\sqrt{a};+\infty[$. Or on sait que $\forall x \in [\sqrt{a};+\infty[, \quad f_a(x) \leqslant x$. Ainsi $f_a(u_n) \leqslant u_n$, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} \leqslant u_n$. Donc $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.
$(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée donc converge vers un réel noté ℓ. Lorsque n tend vers l'infini, $u_{n+1} = u_n = \ell$. Ainsi

$$\begin{aligned} f_a(\ell) &= \ell \\ \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{a}{\ell}\right) &= \ell \\ \frac{\ell^2 + a}{2\ell} &= \ell \\ \ell^2 &= a \\ \ell &= \sqrt{a}. \end{aligned}$$

Donc $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\sqrt{a}$.

e)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_{n+1} = \left(\frac{u_{n+1} - \sqrt{a}}{u_{n+1} + \sqrt{a}}\right) = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) - \sqrt{a} \times \frac{1}{\frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) + \sqrt{a}}.$$

En simplifiant et en mettant sur le même dénominateur, on obtient

$$\frac{u_n^2 + a - 2u_n\sqrt{a}}{u_n^2 + a + 2u_n\sqrt{a}} = \left(\frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}\right)^2 = v_n^2.$$

f) On a $v_0 = \left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}}\right)$. On observe que $v_1 = v_0^2$, $v_2 = v_1^2 = v_0^4$.
On conjecture que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}}\right)^{2^n}.$$

Cette conjecture est facilement démontrable par récurrence simple, sachant que $v_{n+1} = v_n^2$ et que $(v_0^{2^n})^2 = {v_0}^{2\times 2^n} = {v_0}^{2^{n+1}}$.

g) La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante donc

$$\begin{aligned} u_n &\leqslant u_1 \\ u_n + \sqrt{a} &\leqslant u_1 + \sqrt{a} \\ 1 &\leqslant \frac{u_1 + \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}} \\ u_n - \sqrt{a} &\leqslant (u_1 + \sqrt{a})\left(\frac{u_1 + \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}\right) \\ u_n - \sqrt{a} &\leqslant (u_1 + \sqrt{a})\left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}}\right)^{2^n}. \qquad (1) \end{aligned}$$

Or, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \geqslant f_a(u_n) \geqslant \sqrt{a}$ donc $u_n - \sqrt{a} \geqslant 0$. Ainsi

$$0 \leqslant u_n - \sqrt{a} \leqslant (u_1 + \sqrt{a})\left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}}\right)^{2^n}.$$

En additionnant $\sqrt{a}$ des deux côtés de l'inégalité (1), on obtient

$$u_n \leqslant (u_1 + \sqrt{a})\left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}}\right)^{2^n} + \sqrt{a}.$$

Or $a \in \mathbb{R}^{+*}$ donc $\sqrt{a} > 0$, ce qui veut dire que

$$u_0 - \sqrt{a} < u_0 + \sqrt{a} \Leftrightarrow \frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}} < 1$$

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant \sqrt{a}$, donc $u_0 - \sqrt{a} \geqslant 0$. Ainsi

$$0 \leqslant \frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}} < 1.$$

Et

$$0 \leqslant \left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}}\right)^2 < 1.$$

Donc $\left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}}\right)^{2^n}$ est une suite géométrique de raison $\left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}}\right)^2$ comprise entre 0 et 1, donc

$$\left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}}\right)^{2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Soit

$$(u_1 + \sqrt{a})\left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}}\right)^{2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Et donc

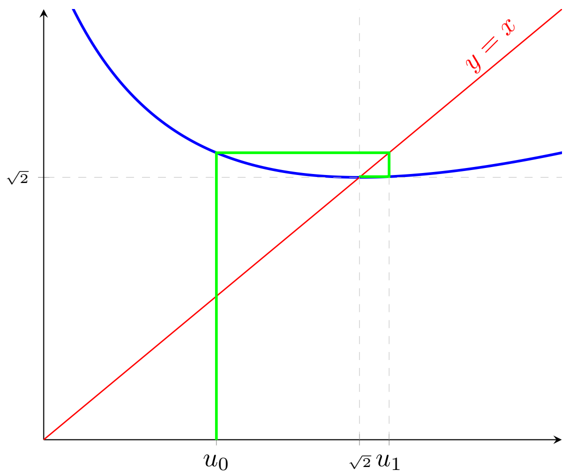
$$(u_1 + \sqrt{a})\left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}}\right)^{2^n} + \sqrt{a} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sqrt{a}.$$

On obtient ainsi, lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\sqrt{a} \leqslant u_n \leqslant \sqrt{a}.$$

D'après le théorème des gendarmes, $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sqrt{a}$.

h) On obtient $u_0 = 1, \quad u_1 = \frac{3}{2}, \quad u_2 = \frac{17}{12}, \quad u_3 = 1.41421$ à 10^{-5} près. Cela donne comme représentation graphique, où on utilise la méthode de l'escalier avec la droite $y = x$ pour montrer les premiers termes de la suite u_n et le fait qu'elle et f_2 convergent vers $\sqrt{2}$:



Dans ce cas, l'inégalité de la question précédente est

$$0 \leqslant u_n - \sqrt{2} \leqslant (\frac{3}{2} + \sqrt{2})\left(\frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}\right)^{2^n}.$$

On veut une valeur approchée à 10^{-5} près de $\sqrt{2}$, donc que $\sqrt{2} - u_n \leqslant 10^{-5}$, soit $u_n - \sqrt{2} \geqslant 10^{-5}$.

Avec l'inégalité, on obtient

$$10^{-5} \leqslant (\frac{3}{2} + \sqrt{2}) \left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \right)^{2^n}$$

$$\ln \left(\frac{10^{-5}}{\frac{3}{2} + \sqrt{2}} \right) \leqslant n \ln \left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \right)^2$$

$$\text{Or } \ln \left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \right)^2 < 0, \text{donc } \left(\frac{\ln \left(\frac{10^{-5}}{\frac{3}{2} + \sqrt{2}} \right)}{\ln \left(\left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \right)^2 \right)} \right) \geqslant n$$

$$\approx 3.57 \geqslant n.$$

Donc le plus petit entier naturel n tel que u_n donne une valeur approchée à 10^{-5} de $\sqrt{2}$ est $n = 3$. On aura ainsi $u_3 = 1.41421$.

6.3 Variations des fonctions

6.3.1 Étude de fonctions, nombres de solutions d'une équation

Exercice 162 (①) par Loïse

Étudier la fonction f définie par

$$\forall x \in]1, +\infty[, \qquad f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

La fonction f est définie et dérivable sur $]1; +\infty[$ en tant que composée et quotient de fonctions dérivables. Pour étudier les variations d'une fonction, on étudie le signe de sa dérivée première. Exprimons $f'(x)$:

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad f'(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2-1} - x\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x^2 - 1} \Leftrightarrow \forall x \in]1, +\infty[, \quad f'(x) = \frac{\sqrt{x^2-1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}.$$

Après mise au même dénominateur et simplification :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \qquad f'(x) = \frac{-1}{(x+1)(x-1)\sqrt{x^2-1}}.$$

Pour étudier le signe de $f'(x)$, il suffit d'étudier le signe de chacun des facteurs.

$$\forall x \in]1, +\infty[, x + 1 > 0 \quad et \quad x - 1 > 0.$$

Par définition de la fonction racine carrée, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$:

$$\forall x \in]1, +\infty[, \qquad \sqrt{x^2 - 1} > 0.$$

Par produit, on en déduit que le dénominateur est positif et par inverse et produit par (-1), il vient :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \qquad f'(x) < 0.$$

La dérivée de la fonction f est strictement négative sur $]1; +\infty[$, la fonction f est strictement décroissante sur cet intervalle. Avant de dresser le tableau de variations complet, on cherche à déterminer les limites de la fonction f aux bornes de l'intervalle d'étude. Par composition de limites de fonction, comme on a :

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} x^2 - 1 = 0 \quad et \quad \lim_{X \to 0} \sqrt{X} = 0,$$

il vient

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \sqrt{x^2 - 1} = 0.$$

D'où par quotient de limites :

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty.$$

Pour déterminer la limite de la fonction f au voisinage de $+\infty$, il faut lever l'indétermination. Pour $x \in]1, +\infty[$:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \Leftrightarrow f(x) = \frac{x}{x\sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}}} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}}}.$$

Or :

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty.$$

Par inverse :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Par somme :

$$\lim_{x \to +\infty} 1 - \frac{1}{x^2} = 1.$$

On en déduit, par composition de limites de fonctions :

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1.$$

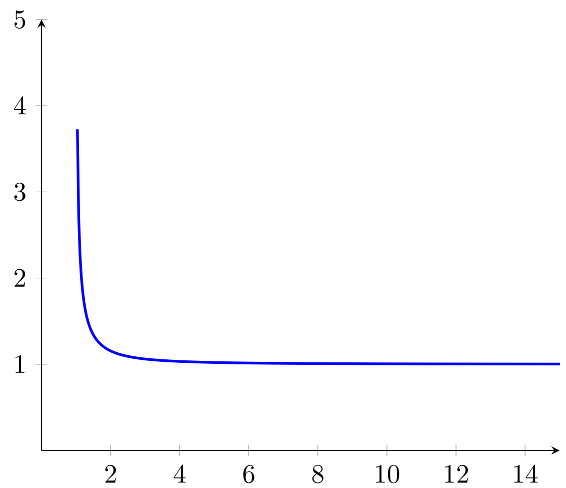
Soit, par inverse :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1.$$

Dressons à présent le tableau de signe de la dérivée première et le tableau de variations complet de la fonction f.

x	1		$+\infty$
signe de $f'(x)$	$\|\|$	$-$	
variations de f	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	1

A présent, on trace le graphe de la fonction f.



Exercice 163 (②) par Loïse

a) Étudier la fonction f définie par

$$\forall x \in]1,+\infty[, \qquad f(x) = \ln(1+e^x).$$

b) Montrer que $f(x) - x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Interpréter géométriquement.

a) La fonction f est définie et dérivable sur $]1;+\infty[$ en tant que composée et quotient de fonctions dérivables. Pour étudier les variations d'une fonction, on étudie le signe de sa dérivée première. Exprimons $f'(x)$:

$$\forall x \in]1,+\infty[, \quad f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}.$$

Or, par définition de la fonction exponentielle réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$, on sait que :

$$\forall x \in]1,+\infty[, \qquad e^x > 0 \qquad .$$

D'où :

$$\forall x \in]1,+\infty[, \qquad e^x + 1 > 0 \qquad .$$

Soit, par quotient :

$$\forall x \in]1,+\infty[, \qquad f'(x) > 0 \qquad .$$

La dérivée de la fonction f est strictement positive sur $]1;+\infty[$, la fonction f est strictement croissante sur cet intervalle. Avant de dresser le tableau de variations complet, on cherche à déterminer les limites de la fonction f aux bornes de l'intervalle d'étude. Comme la fonction exponentielle est continue sur son ensemble de définition, on a :

$$\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} e^x = e.$$

Par somme :

$$\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} e^x + 1 = e + 1.$$

Par composition de limites de fonctions, comme on a :

$$\lim_{X\to e+1} \ln(X) = ln(e+1),$$

il vient :

$$\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = \ln(e+1).$$

Par un raisonnement analogue, on procède pour la limite de la fonction au voisinage de l'infini positif :

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty,$$

et par somme :

$$\lim_{x\to+\infty} e^x + 1 = +\infty.$$

Or,

$$\lim_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty.$$

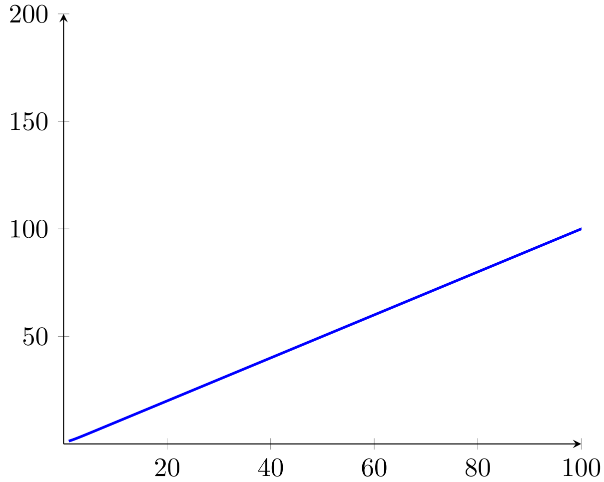
Par composition de limites de fonctions, il vient :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Dressons à présent le tableau de signe de la dérivée première et le tableau de variations complet de la fonction f.

x	1	$+\infty$
signe de $f'(x)$	$+$	
variations de f	$ln(e+1)$ $\nearrow$	$+\infty$

A présent, on trace le graphe de la fonction f.



b) Le calcul de cette limite nécessite de modifier l'expression $f(x)-x$ pour lever l'indétermination. Ainsi pour tout $x \in]1,+\infty[$:

$$f(x)-x = \ln(e^x+1)-x \Leftrightarrow f(x)-x = \ln(e^x+1)-\ln(e^x) \Leftrightarrow f(x)-x = \ln(\frac{e^x+1}{e^x}).$$

Soit :

$$\forall x \in]1,+\infty[, \quad f(x)-x = \ln(e^{-x}+1).$$

Par composition de limites de fonction, comme on a :

$$\lim_{x\to+\infty} -x = -\infty$$

et

$$\lim_{X\to-\infty} e^X = 0,$$

il vient :

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}+1 = 1.$$

Or

$$\lim_{X\to 1} ln(X) = 0.$$

D'où, par composition de limites de fonction :

$$\lim_{x\to+\infty} ln(e^{-x}+1) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)-x = 0.$$

La droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique au graphe de la fonction f au voisinage de $+\infty$.

Exercice 164 (③) par Matilde

a) Étudier la fonction $f : x \in \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \dfrac{\ln(x)}{x}$

b) En utilisant a), déterminer les couples (a,b) d'éléments de $\mathbb{N}^*$ vérifiant $a < b$ et

$$a^b = b^a$$

.

a)

Calculons d'abord la dérivée de la fonction f :

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

Puis étudions son signe :

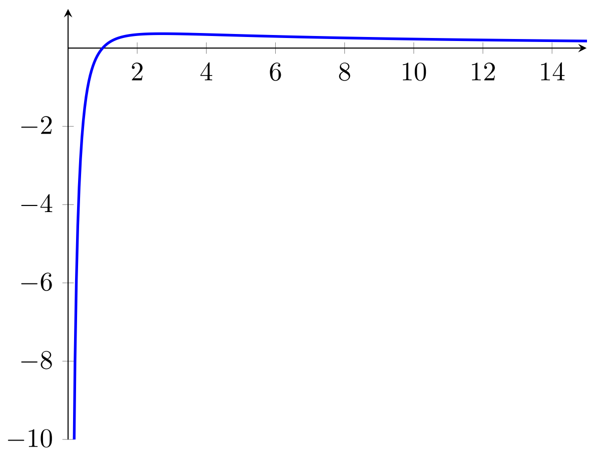
$$\begin{aligned}
&1 - \ln(x) > 0 \\
&\Leftrightarrow \ln(x) < 1 \\
&\Leftrightarrow x < \exp(1) \\
&et \\
&x^2 > 0
\end{aligned}$$

x	0		$\exp(1)$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Dressons ensuite le tableau de variation de f :

x	0		$\exp(1)$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\exp(-1)$	$\searrow$	0^+

Et enfin, traçons le graphe de $\dfrac{\ln(x)}{x}$:



b)

$$\begin{aligned}
&a^b = b^a \\
&\ln(a^b) = \ln(b^a) \\
&b\ln(a) = a\ln(b) \\
&\frac{\ln(a)}{a} = \frac{\ln(b)}{b}
\end{aligned}$$

$a < b$ donc $a \in]0, \exp(1)[$ et $b \in]\exp(1), +\infty[$ et a et $b \in \mathbb{N}^*$, donc $a = 1$ ou $a = 2$.
a ne pouvant prendre que ces deux valeurs, on peut trouver les solutions de l'équation par essais :

Pour $a = 1$:

$$1^b = b^1$$

$$b = 1$$

Cependant ici $a = b$, or $a < b$ donc nous n'obtenons pas de solution pour l'équation.

Pour $a = 2$:

$$2^b = b^2$$

$$(b = 2\ ou)\ b = 4$$

Cependant ici (pour $b = 2$) $a = b$, or $a < b$ donc nous n'obtenons qu'une seule solution pour l'équation.

L'équation $a^b = b^a$ n'a donc qu'un seul couple (a, b) solution qui est $(2, 4)$.

Exercice 165 (③) par Térence (Fonctions hyperboliques $*$)
Les fonctions ch (cosinus hyperbolique) et sh (sinus hyperbolique) sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1. *Étudier ces deux fonctions ; en tracer les graphes.*
2. *Montrer que ch réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $[1, +\infty]$ et exprimer la bijection réciproque.*
3. *Montrer que sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer la bijection réciproque.*
4. *Pour x dans $\mathbb{R}$, calculer*
$$\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x).$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

ch est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ par combinaison linéaire de fonction dérivable.

$$\mathrm{ch}'(x) = (\frac{e^x + e^{-x}}{2})' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{sh}(x)$$

Étudions les variations de ch en regardant le signe de sa dérivée.

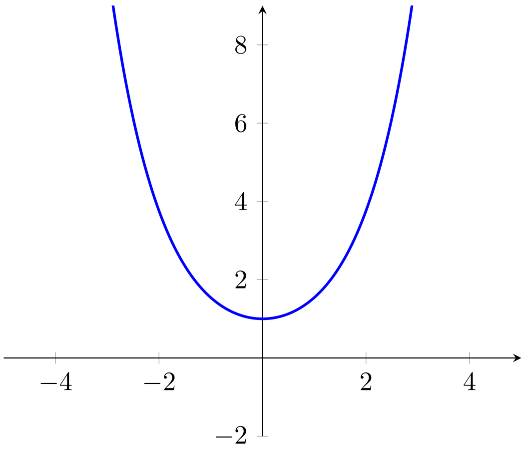
$$\mathrm{ch}'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} > 0 \Leftrightarrow e^x > e^{-x} \Leftrightarrow x > 0$$

ch est donc strictement croissante sur $[0; +\infty[$ et strictement décroissante sur $[-\infty; 0[$; son minimum est donc atteint en 0, $\mathrm{ch}(0) = 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$

Ainsi,

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Pour tracer le graphe, on remarque que ch se comporte comme $\dfrac{e^{-x}}{2}$ en $-\infty$ et $\dfrac{e^x}{2}$ en $+\infty$.



$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ \mathrm{sh}(x) = \frac{e^{-}e^{-x}}{2}$$

sh est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ par combinaison linéaire de fonction dérivable.

$$\mathrm{sh}'(x) = (\frac{e^{x} - e^{-x}}{2})' = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}(x)$$

Étudions les variations de sh en regardant le signe de sa dérivée.
Comme vu lors de l'étude de ch :

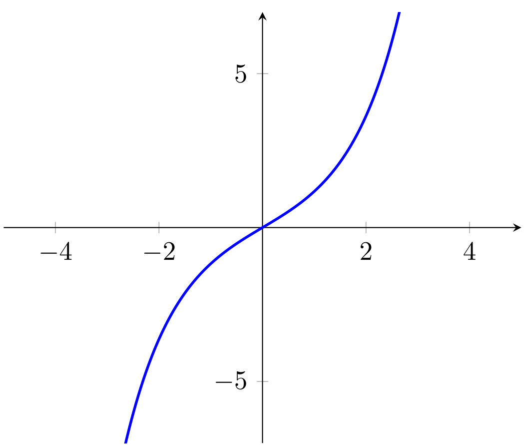
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ \mathrm{ch}(x) > 0 \Leftrightarrow \mathrm{sh}'(x) > 0$$

sh est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty$; $\mathrm{sh}(0) = 0$

Ainsi,

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↗	$+\infty$

Pour tracer le graphe, on remarque que sh se comporte comme $-\frac{e^{-x}}{2}$ en $-\infty$ et $\frac{e^{x}}{2}$ en $+\infty$.



b)

Montrons que ch : $\mathbb{R}^+ \to [1, +\infty[$ est bijective.
C'est-à-dire, montrons que pour tout y de $[1, +\infty[$, il n'existe aucun réel non nul x tel que $\mathrm{ch}(x) = y$.

Soit x un réel non nul et y de $[1, +\infty[$:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ch}(x) = y \\
\Leftrightarrow\ &\frac{e^x + e^{-x}}{2} = y \\
\Leftrightarrow\ &e^x + e^{-x} = 2y \\
\Leftrightarrow\ &e^x + e^{-x} - 2y = 0 \\
\Leftrightarrow\ &e^{2x} + 1 - 2ye^x = 0
\end{aligned}$$

On obtient un polynôme de second degré en e^x

Soit $X = e^x$:

$$\begin{aligned}
&X^2 - 2yX + 1 = 0 \\
\Leftrightarrow\ &X = \frac{2y + \sqrt{4y^2 - 4}}{2} && ou && X = \frac{2y - \sqrt{4y^2 - 4}}{2} \\
\Leftrightarrow\ &X = y + \sqrt{y^2 - 1} > 0 && ou && X = y - \sqrt{y^2 - 1} > 0 \ pour \ y \in [1; +\infty[\\
\Leftrightarrow\ &x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) && ou && x = \ln(y - \sqrt{y^2 - 1})
\end{aligned}$$

Or, $\forall y \in [1; +\infty[$:

$$\begin{aligned}
&\ln(y - \sqrt{y^2 - 1}) \leq 0 \\
\Leftrightarrow\ &y - \sqrt{y^2 - 1} \leq 1 \ car \ u \mapsto e^u s. \nearrow \ sur \ \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow\ &y \leq \sqrt{y^2 - 1} + 1 \\
\Leftrightarrow\ &y^2 \leq y^2 - 1 + 1 + 2\sqrt{y^2 - 1} \ car \ u \mapsto u^2 s. \nearrow \ sur \ \mathbb{R}^+ \\
\Leftrightarrow\ &\sqrt{y^2 - 1} \geq 0
\end{aligned}$$

Donc $\forall y \in]1; +\infty[, \ln(y - \sqrt{y^2 - 1}) < 0$, donc $x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$; pour $y = 1$,
$x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) = \ln(y - \sqrt{y^2 - 1})$.
Donc $\forall y \in]1; +\infty[, \mathrm{ch}(x) = y \Leftrightarrow \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$.

On a raisonné par équivalence donc ch est bien bijective et sa réciproque est :

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}^{-1} : &[1; +\infty[\mapsto \mathbb{R}^+ \\
&x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})
\end{aligned}$$

c)

Montrons que sh est bijective.
C'est-à-dire, montrons que pour tout réel y, il n'existe aucun réel x tel que $\mathrm{sh}(x) = y$.

Soit x, y deux réels :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{sh}(x) = y \\
\Leftrightarrow\ &\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \\
\Leftrightarrow\ &e^x - e^{-x} = 2y \\
\Leftrightarrow\ &e^x - e^{-x} - 2y = 0 \\
\Leftrightarrow\ &e^{2x} - 1 - 2ye^x = 0
\end{aligned}$$

On obtient un polynôme de second degré en e^x

Soit $X = e^x$:

$$\begin{aligned}
& X^2 - 2yX - 1 = 0 \\
& \Leftrightarrow X = \frac{2y + \sqrt{4y^2+4}}{2} && ou \quad X = \frac{2y - \sqrt{4y^2+4}}{2} \\
& \Leftrightarrow X = y + \sqrt{y^2+1} > 0 && ou \quad X = y - \sqrt{y^2+1} \\
& \Leftrightarrow x = \ln(y + \sqrt{y^2+1}) \ \ car \ \ y - \sqrt{y^2+1} < 0 \ \ et \ \ e^x > 0
\end{aligned}$$

En effet :

$$\begin{aligned}
& y^2 < y^2 + 1 \\
\Leftrightarrow\ & y < \sqrt{y^2+1} \\
\Leftrightarrow\ & y - \sqrt{y^2+1} < 0
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{sh}(x) = y \Leftrightarrow x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$.
On a raisonné par équivalence donc sh est bien bijective et sa réciproque est :

$$\begin{aligned}
\mathrm{sh}^{-1} :& \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\
& x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2+1})
\end{aligned}$$

d)

Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) &= \frac{1}{4} \cdot (e^x + e^{-x})^2 - \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 \\
&= \frac{1}{4} \cdot [(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2] \\
&= \frac{1}{4} \cdot (e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x}) \cdot (e^x + e^{-x} + e^x - e^{-x}) \\
&= \frac{1}{4} \cdot 2e^{-x} \cdot 2e^x \\
&= 1
\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$.

Exercice 166 (②) par Matilde

Si $m \in \mathbb{R}$, quel est le nombre de réels x tels que $\exp(x) = mx^2$

Soit une fonction $f(x)$ tel que $f(x) = \dfrac{\exp(x)}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{\exp(x)(x-2)}{x^3}$$

Étudions le signe de la dérivée :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$\exp(x)$		$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
x^3		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

Dressons le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$\frac{\exp(2)}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Pour $m \in]-\infty; 0]$, l'équation $\exp(x) = mx^2$ n'admet **aucune** solution.
Pour $m \in]0; \dfrac{\exp(2)}{4}[$, l'équation $\exp(x) = mx^2$ admet **une** solution.
Pour $m = \dfrac{\exp(2)}{4}$, l'équation $\exp(x) = mx^2$ admet **deux** solutions.
Pour $m \in]\dfrac{\exp(2)}{4}; +\infty[$, l'équation $\exp(x) = mx^2$ admet **trois** solutions.

EXERCICE 167 (③) par Alexandre C

Pour $m \in \mathbb{R}^{+*}$, on note f_m et g_m les fonctions définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ f_m(x) = 1 - x + \frac{m}{x}\left(1 + \ln(x)\right),\ g_m(x) = x^2 + m\ln(x)$$

a) Montrer que g_m s'annule en un unique réel que l'on notera α_m et que l'on ne cherchera pas à calculer
b) Étudier les variations de f_m
c) Soit $P = (x, y)$ un point du plan avec $x > 0$. En discutant selon la position de P, déterminer le nombre de $m \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que le graphe de f_m passe par P

a) Soit $m \in \mathbb{R}^{+*}$. g_m est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ en tant que sommes de fonctions strictement croissantes sur $\mathbb{R}^{+*}$. En outre, g_m est évidemment continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et on a : $\lim_{x\to 0} g_m(x) = -\infty$ et $g_m(1) = 1 > 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte croissance de g_m permettent donc d'affirmer respectivement l'existence et l'unicité d'un réel α_m où g_m s'annule.

b) f_m est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f_m'(x) = -1 - \frac{m}{x^2}\left(1 + \ln(x)\right) + \frac{m}{x^2} = -1 - \frac{m\ln(x)}{x^2}$$

On a :

$$f_m'(x) \geqslant 0 \iff -1 - \frac{m\ln(x)}{x^2} \geqslant 0 \iff x^2 + m\ln(x) \leqslant 0 \iff g_m(x) \leqslant 0$$

Ainsi, $f_m(x)$ est croissante sur $]0; \alpha_m]$ et décroissante sur $[\alpha_m, +\infty[$

c) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
On cherche le nombre de solutions de l'équation d'inconnue $m \in \mathbb{R}^{+*}$

$$1 - x + \frac{m}{x}\left(1 + \ln(x)\right) = y \quad (E)$$

• Si $\ln(x) = -1 \iff x = \dfrac{1}{e}$ alors :
  — Si $y = 1 - \dfrac{1}{e}$ alors $\forall m \in \mathbb{R}^{+*}, 1 - x + \dfrac{m}{x}(1 + \ln(x)) = y$, donc il existe une infinité de $m \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que le graphe de f_m passe par $\left(\dfrac{1}{e}; 1 - \dfrac{1}{e}\right)$
  — Si $y \neq 1 - \dfrac{1}{e}$, alors $\forall m \in \mathbb{R}^{+*}, 1 - x + \dfrac{m}{x}(1 + \ln(x)) \neq y$, donc il n'existe aucun $m \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que le graphe de f_m passe pas $\left(\dfrac{1}{e}; y\right)$

• Si $\ln(x) \neq -1$, alors $(E) \iff m = \dfrac{(x + y - 1)\cdot x}{1 + \ln(x)}$, $m \in \mathbb{R}^{+*}$

Cette équation admet exactement une solution $m \in \mathbb{R}^{+*}$ pour les points $P(x,y)$ tels que $\dfrac{(x+y-1)\cdot x}{1+\ln(x)} > 0$, sinon elle n'admet pas de solution.
On recherche donc les points $P(x,y)$ tels que

$$(S_1)\begin{cases} x+y-1>0 \\ 1+\ln(x)>0 \end{cases} \iff (S_1)\begin{cases} y>1-x \\ x>\dfrac{1}{e} \end{cases}$$

et ceux tels que;

$$(S_2)\begin{cases} x+y-1<0 \\ 1+\ln(x)<0 \end{cases} \iff (S_2)\begin{cases} y<1-x \\ x<\dfrac{1}{e} \end{cases}$$

Exercice 168 (③) par Estelle

Soient p et q deux réels et, pour x dans $\mathbb{R}$:

$$f(x) = x^3 + px + q$$

On se propose de déterminer le nombre de réels x tels que $f(x) = 0$

a) On suppose $p \geqslant 0$. Tracer le tableau de variations de f et conclure dans ce cas

b) On suppose $p < 0$. Tracer le tableau de variations de f

c) On suppose $p < 0$. Soient x_1 et x_2 les points d'annulation de f'. Calculer $f(x_1) \times f(x_2)$ en fonction de p et q.

d) Déterminer en fonction de la quantité

$$\Delta = -(4p^3 + 27q^2)$$

le nombre de racines réelles de l'équation $f(x) = 0$. On montrera en particulier que si $\Delta < 0$, l'équation admet une unique racine réelle.

a) $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2 + p \geqslant 0$, f est donc croissante sur $\mathbb{R}$ et on obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

b)

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \geqslant 0 &\iff 3x^2 \geqslant -p \\ &\iff x^2 \geqslant \frac{-p}{3} \\ &\iff x \leqslant -\sqrt{\frac{-p}{3}} \text{ ou } x \geqslant \sqrt{\frac{-p}{3}} \end{aligned}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{-p}{3}}$		$\sqrt{\frac{-p}{3}}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)$	$\nearrow$	$f\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

c) $x_1 = -\sqrt{\frac{-p}{3}}$ et $x_2 = \sqrt{\frac{-p}{3}}$, donc :

$$\begin{aligned}
f(x_1)\times f(x_2) &= \left[\left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)^3 + p\left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)+q\right]\times\left[\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)^3 + p\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)+q\right]\\
&= \frac{p^3}{3^3}-\frac{2p^3}{3^2}+\frac{p^3}{3}+q^2\\
&= \frac{4p^3+27q^2}{27}
\end{aligned}$$

d) On remarque que $f(x_1)\times f(x_2) = \dfrac{-\Delta}{27}$

• Lorsque $f(x_1)\times f(x_2)$ est strictement positif, les "sommets" (maximum et minimum locaux) sont de même signe, et il y a donc une solution à $f(x)=0$.
Or $f(x_1)\times f(x_2) > 0 \iff \Delta < 0$

• De même, si $f(x_1)\times f(x_2) < 0$ alors il y a trois solutions à $f(x)=0$ car les sommets sont de signe différent.
Or, $f(x_1)\times f(x_2) < 0 \iff \Delta > 0$

• Enfin, si $f(x_1)\times f(x_2) = 0$, alors au moins un des deux sommets a une ordonnée égale à 0, ainsi il y a deux solutions à $f(x)=0$.
Or, $f(x_1)\times f(x_2) = 0 \iff \Delta = 0$.

En définitive :

— Si $\Delta > 0$, il y a 3 solutions à $f(x)=0$
— Si $\Delta = 0$, il y en 2
— Si $\Delta < 0$, il y a une unique solution

EXERCICE 169 (③) Par Paul

Soient $n \geq 2$ un entier, p et q deux nombres réels. Montrer que l'équation $x^n + px + q = 0$ admet au plus deux racines réelles si n est pair, au plus trois si n est impair.

Soit, $\forall x\in\mathbb{R},\ \ f(x) = x^n + xp + q$. Si n est pair, alors : $\exists k\in\mathbb{N},\ \ n=2k$. Il est clair que f est deux fois dérivable. On calcule :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \ f'(x) = nx^{n-1}, \quad \text{et} \quad \forall x\in\mathbb{R},\ \ f''(x) = n(n-1)x^{n-2} = n(n-1)(x^2)^{k-1} \geq 0.$$

Donc f' est strictement croissante. De plus, $\lim_{x\to-\infty} x^{n-1} = -\infty$ car $n-1$ est impair. Donc pas produit puis par somme, $\lim_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty < 0$. Aussi $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$, des mêmes arguments $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty > 0$. Donc d'après le Théorème de la bijection (ou corollaire du Théorème des valeurs intermédiaires),

$$\exists!\alpha\in\mathbb{R},\ \ f(\alpha)=0.$$

Ainsi, f est strictement monotone sur $]-\infty;\alpha[$ et sur $]\alpha;+\infty[$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ car n est pair. Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty;\alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha;+\infty[$. En appliquant deux fois le Théorème de la bijection sur $]-\infty;\alpha]$ et sur $[\alpha;+\infty[$, on trouve que f a exactement 2 racines si $f(\alpha)<0$. Si $f(\alpha)=0$ il n'y a qu'une seule racine, et si $f(\alpha)>0$ il n'y a donc pas de racines.

Si n est impair : $\exists k\in\mathbb{N},\ \ n=2k+1$. Si $p\geq 0$ alors $\forall x\in\mathbb{R},\ \ f'(x) = n(x^2)^k \geq 0$. f' s'annule si et seulement si $x=p=0$, et donc f est strictement croissante. Or :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Donc pas le Théorème de la bijection f a une unique racine. Si $p<0$: en appliquant le Théorème de la bijection, aux intervalles $]-\infty;0]$ et $[0;+\infty$ (car f' est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$ et strictement croissante croissante sur $[0;+\infty)$, on sait qu'il existe $\alpha\in]-\infty;0[$ et $\beta\in]0;+\infty$ tels que $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$. Or $\lim_{x\to-\infty} = \lim_{x\to+\infty} = +\infty$ car n-1 est pair et $f'(0)=p<0$. Donc on en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		α		0		β		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0		$-$		0	$+$	
variations de f	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	$f(0)$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Dans chacun des intervalles $]-\infty;\alpha]$,$[\alpha;\beta]$ et $]\beta;+\infty[$, f admet au plus une racine (car strictement monotone) en utilisant le Théorème de la bijection. Donc f admet au plus 3 racines et l'équation $x^n+px+q=0$ au plus 3 solutions.

Exercice 169 (énoncé rédigé)

EXERCICE 170 (④) par Jean

Soient $n\in\mathbb{N}^*, a_1<..<a_n$ des réels et P la fonction polynôme définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad P(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)$$

a) Dresser le tableau de variations de $\dfrac{P'}{P}$. On utilisera l'exercice 153.

b) Pour α dans $\mathbb{R}$, quel est le nombre de racines de l'équation $P'(x)-\alpha P(x)=0$?

a) D'après l'exercice 153,
$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{a_1;...;a_j\}, \dfrac{P'}{P}(x)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{(x-a_i)}\right)$
Donc, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{a_1;...;a_j\}, \left(\dfrac{P'}{P}\right)'(x)=\left(-\dfrac{1}{(x-a_i)^2}\right)<0$
De plus :

$$\frac{P'}{P}(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$$
$$\frac{P'}{P}(x)\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}0$$
$$\frac{P'}{P}(x)\underset{x\to a_i^-}{\longrightarrow}-\infty$$
$$\frac{P'}{P}(x)\underset{x\to a_i^+}{\longrightarrow}+\infty$$

On obtient donc :

x	$-\infty$		a_1		a_2		a_n		$+\infty$
$\left(\dfrac{P'}{P}\right)'(x)$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	‖	$-$	
$\dfrac{P'}{P}(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

b) Il s'agit de déterminer le nombre de solutions réelles de $\dfrac{P'}{P}(x)=\alpha$.

Ainsi, en remarquant la stricte décroissance de $\dfrac{P'}{P}$, et d'après le tableau de variations de $\dfrac{P'}{P}$, il y a n solutions si $\alpha\in\mathbb{R}^*$ et $n-1$ si $\alpha=0$

EXERCICE 171 (②) par Léo

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x)^2 = 1$$

Montrer que f est constante.

$f(x)^2 = 1 \iff f(x) = \pm 1$, ce qui n'est pas un intervalle. Or, comme f est continue, l'image de I par f doit être un intervalle, ce qui impose que la fonction est constante, à savoir :

$$\forall x \in I, f(x) = 1 \quad \text{ou} \quad \forall x \in I, f(x) = -1$$

6.3.2 Démonstration d'inégalités, détermination d'extrema

EXERCICE 172 (③) par Léo

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, f une application continue de $[a, b]$ dans $[a, b]$. Montrer que f admet un point fixe, i.e. qu'il existe x dans $[a, b]$ tel que $f(x) = x$. On écrira cette équation sous la forme $g(x) = 0$ pour une certaine fonction g.

Soit $g(x) = f(x) - x$. Or, $f(x) \in [a, b]$, donc $g(a) \in [0, b-a] \implies g(a) \geqslant 0$ et $g(b) \in [a-b, 0] \implies g(b) \leqslant 0$.

Or $g(x)$ est une combinaison linéaire de deux fonctions continues, elle est donc continue également. Puisque $g(a) \geqslant 0$ et $g(b) \leqslant 0$, d'après le TVI, il existe un $\lambda \in [a, b]$ tel que $g(\lambda) = 0$, à savoir $f(\lambda) = \lambda$

EXERCICE 173 (③) par Tristan

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation

$$x^3 \sin(x) \ln(x+1) + e^x \cos(x) = 2$$

admet au moins une solution dans $]n\pi, (n+1)\pi[$.

On note dans un premier temps que $f : x \mapsto x^3 \sin(x) \ln(x+1) + e^x \cos(x)$ est définie est continue sur $]-1, +\infty[$.

En calculant ensuite, avec $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x)$ pour $x \to n\pi$ puis pour $x \to (n+1)\pi$, on obtient

$$\begin{aligned} f(n\pi) &= (n\pi)^3 \sin(n\pi) \ln(n\pi+1) + e^{n\pi} \cos(n\pi) \\ &= \begin{cases} e^{n\pi} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -e^{n\pi} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} f((n+1)\pi) &= ((n+1)\pi)^3 \sin((n+1)\pi) \ln((n+1)\pi+1) + e^{(n+1)\pi} \cos((n+1)\pi) \\ &= \begin{cases} -e^{(n+1)\pi} & \text{si } n \text{ est pair} \\ e^{(n+1)\pi} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, si n est pair et en posant $I =]n\pi, (n+1)\pi[$, on a

$$f(I) = \left]-e^{(n+1)\pi}, e^{n\pi}\right[$$

Et si n est impair,

$$f(I) = \left]-e^{n\pi}, e^{(n+1)\pi}\right[$$

Dans tous les cas, $2 \in f(I)$ et d'après le théorème des valeurs intermédiaires (TVI), l'équation

$$x^3 \sin(x) \ln(x+1) + e^x \cos(x) = 2$$

admet au moins une solution dans $]n\pi, (n+1)\pi[$.

EXERCICE 174 (②) par Wéline

Montrer l'inégalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \sin x \leq x$$

En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin x| \leq |x|$$

On définit la fonction f pour tout x dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x) - x$. On cherche à montrer que la fonction f est négative dans $\mathbb{R}^+$.
On cherche la dérivé de f qui est donc : $f'(x) = \cos x - 1$, car f est une fonction dérivable comme somme de deux fonctions dérivables.
On sait que $-1 \leq \cos x \leq 1$, donc, on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de f'			$-$		
variation de f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
signe de f		$+$	0	$-$	

On a donc bien que f est négative sur $\mathbb{R}^+$ donc pour tout x de $\mathbb{R}^+$: $\sin(x) - x \leq 0$.
On peut donc en déduire que pour tout x de $\mathbb{R}^+$: $\sin(x) \leq x$.

Comme $\sin(x)$ est compris entre -1 et 1, quand $x \geq 1$ ou $x \leq -1$, il est évidant que $|\sin(x)| \leq |x|$.
Quand x est compris entre 0 et 1, $\sin(x)$ et x sont positifs, donc, comme la fonction valeur absolue est croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a bien que : $|\sin(x)| \leq |x|$.
Quand x est compris entre -1 et 0, $\sin(x)$ et x sont négatifs, donc, comme la fonction valeur absolue est décroissante sur $\mathbb{R}^-$, on a bien que : $|\sin(x)| \leq |x|$.

EXERCICE 175 (③) par Wéline

En utilisant la fonction $f : x \longmapsto \ln(ch(x)) - \frac{x^2}{2}$, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad chx \leq e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$f(x) = \ln(ch(x)) - \frac{x^2}{2} = \ln(\frac{e^x + e^{-x}}{2}) - \frac{x^2}{2}$$

La fonction f est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, ce qui nous donne :

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \times \frac{1}{\frac{e^x+e^{-x}}{2}} - x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} - x$$

et

$$f''(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = 1 - (\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}})^2$$

On cherche ensuite le signe de la dérivé seconde. Pour cela on sait que e^x et e^{-x} sont toujours strictement positifs donc :

$$e^x - e^{-x} < e^x + e^{-x}$$
$$\iff \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} < 1$$

x	$+\infty$		0		$+\infty$
signe de f''			$-$		
variation de f'	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
signe de f'		$+$	0	$-$	
variation de f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
signe de f		$-$	0	$-$	

Grâce au résultat précédent on en déduit que, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\ln(ch(x)) - \frac{x^2}{2} \leq 0$$
$$\iff \ln(ch(x)) \leq \frac{x^2}{2}$$
$$\iff e^{\ln(ch(x))} \leq e^{\frac{x^2}{2}}$$
$$\iff ch(x) \leq e^{\frac{x^2}{2}}$$

EXERCICE 176 (④) par Matilde *Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 2[$,*

$$(1 + \frac{x}{n})^n \leq \frac{2+x}{2-x}.$$

Étudions la fonction :

$$\frac{2+x}{2-x} - (1+x) = \frac{x^2}{2-x}$$

Dressons son tableau de signes :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{x^2}{2-x}$		$+$	0	$+$	0	$-$	

On remarque ainsi que pour $x \in [0, 2[$, $\frac{x^2}{2-x} \geq 0$. Ainsi :

$$\frac{x^2}{2-x} \geq 0$$
$$\frac{2+x}{2-x} - (1+x) \geq 0$$
$$\frac{2+x}{2-x} \geq (1+x)$$
$$\frac{2+x}{2-x} \geq (1+\frac{x}{1})^1$$
$$\frac{2+x}{2-x} \geq (1+\frac{x}{n})^n \; pour \; n = 1$$

Étudions la fonction :

$$\frac{2+x}{2-x} - (1+\frac{x}{2})^2 = \frac{x^2(2+x)}{4(2-x)}$$

Dressons son tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
x^2		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$2+x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{x^2(2+x)}{4(2-x)}$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

On remarque ainsi que pour $x \in [0, 2[$, $\frac{x^2(2+x)}{4(2-x)} > 0$. Ainsi :

$$\frac{x^2(2+x)}{4(2-x)} \geq 0$$
$$\frac{2+x}{2-x} - (1+\frac{x}{2})^2 \geq 0$$
$$\frac{2+x}{2-x} \geq (1+\frac{x}{2})^2$$
$$\frac{2+x}{2-x} \geq (1+\frac{x}{n})^n \; pour \; n = 2$$

Pour $x \in [0, 2[$:

$$\frac{2+x}{2-x} > 0$$

Pour $x \in [0, 2[$ et $n > 2$, on a :

$$(\frac{n}{n-x})^n > 0$$

Ainsi :

$$\frac{2+x}{2-x}\cdot(\frac{n}{n+x})^n > 0$$
$$\frac{2+x}{2-x}\cdot(\frac{n}{n+x})^{n-1} > \frac{n+x}{n}$$
$$\frac{2+x}{2-x} > (\frac{n+x}{n})^n$$
$$\frac{2+x}{2-x} > (1+\frac{x}{n})^n$$

On peut donc affirmer que pout tout naturel n non nul, on a : $(1+\frac{x}{n})^n \leq \frac{2+x}{2-x}$.

EXERCICE 177 (④) par Tristan

La fonction sinus cardinal, notée ici $\sin_c$, est définie par $\sin_c(0) = 1$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \sin_c(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

a) Étudier la parité de $\sin_c$.
b) Montrer que $\sin_c$ est contiue en 0. Quelle est sa limite en $\pm\infty$?
c) Pour $x \in \mathbb{R}^*$, calculer $\sin_c'(x)$.
   On admettra que $\sin_c$ est également dérivable en 0, de dérivée nulle.
d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction tan admet un unique point fixe sur l'intervalle $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$, que l'on note x_n.
e) Montrer que les x_n pour $n \in \mathbb{Z}$ sont les points en lesquels $\sin_c'$ s'annule.
f) Selon la parité de n, tracer le tableau de variation de $\sin_c$ sur l'intervalle $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$.

a) Étudions la parité de $\sin_c$ en calculant $\sin_c(-x)$.

$$\sin_c(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x}$$
$$\sin_c(-x) = \frac{-\sin(x)}{-x}$$
$$\sin_c(-x) = \frac{\sin(x)}{x}$$
$$\sin_c(-x) = \sin_c(x)$$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\sin_c(-x) = \sin_c(x)$, $\sin_c$ est paire.

b) Montrons que $\sin_c$ est continue en 0.

On a $\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0^-]{} 1 = \sin_c(0)$

Puisque $\lim_{x\to 0}(\sin_c(x)) = \sin_c(0)$, la fonction $\sin_c$ est continue en 0.

Déterminons maintenant la limite de $\sin_c$ en $+\infty$, qui sera la même que celle en $-\infty$ en raison de la parité de $\sin_c$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1$$
$$\frac{-1}{x} \leq \sin_c(x) \leq \frac{1}{x}$$

Ce qui donne par passage à la limite :

$$0 \leq \sin_c(x) \leq 0$$
$$\lim_{x\to\pm\infty}(\sin_c(x)) = 0$$

c) Soit $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\sin_c'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)'$$

$$\sin_c'(x) = \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}$$

On admet que $\sin_c'(0) = 0$

d) Calculons dans un premier temps la dérivée de $\tan(x)$ pour $x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

$$\tan'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)'$$

$$\tan'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}$$

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} > 0$$

Ainsi, la fonction $\tan(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
De plus, $\tan(x) \xrightarrow[x \to n\pi - \frac{\pi}{2}]{} -\infty$ et $\tan(x) \xrightarrow[x \to n\pi + \frac{\pi}{2}]{} +\infty$

En appliquant alors le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires à tan sur $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ on trouve qu'il existe un unique $x \in \left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan(x) = x$ que l'on note alors x_n.

e) Transformons l'expression $\tan(x_n) = x_n$.

$$\tan(x_n) = x_n$$

$$\frac{\sin(x_n)}{\cos(x_n)} = x_n, \quad x_n \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$\frac{\sin(x_n)}{x_n} = \cos(x_n), \quad x_n \neq 0$$

$$\frac{\sin(x_n) - x_n\cos(x_n)}{x_n} = 0$$

$$\frac{x_n\cos(x_n) - \sin(x_n)}{x_n^2} = 0$$

$$\sin_c'(x_n) = 0$$

Ainsi, les x_n pour $n \in \mathbb{Z}$ sont les points en lesquels $\sin_c'$ s'annule.

f) Supposons n pair. Le tableau de variation de $\sin_c$ sur $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ est alors :

x	$n\pi - \frac{\pi}{2}$		x_n		$n\pi + \frac{\pi}{2}$
$\sin_c'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$
$\sin_c(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

En supposant désormais n impair, on obtient le tableau de variation suivant :

x	$n\pi - \frac{\pi}{2}$		x_n		$n\pi + \frac{\pi}{2}$
$\sin_c'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$
$\sin_c(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Exercice 178 (④) par Tristan

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, f et g deux fonctions dérivables de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(a) \leq g(a)$ et que

$$\forall x \in [a, b], \quad f'(x) \leq g'(x)$$

En considérant $h \coloneqq g - f$, montrer que

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x) \leq g(x)$$

Soit $h \ : \underset{[a,b]\to\mathbb{R}}{\longmapsto} g(x) - f(x)$

On a alors $h'(x) = g'(x) - f'(x) \geq 0$ puisque $\forall x \in [a, b], \quad f'(x) \leq g'(x)$

Ainsi, la fonction h est croissante sur $[a, b]$ donc

$$\forall x \in [a, b], \quad h(x) \geq h(a)$$

Or, $h(a) = g(a) - f(a) \geq 0$ car $f(a) \leq g(a)$

On a finalement

$$\forall x \in [a, b], \quad h(x) \geq 0$$
$$\forall x \in [a, b], \quad g(x) - f(x) \geq 0$$
$$\forall x \in [a, b], \quad f(x) \leq g(x)$$

Exercice 179 (③) par Antoine

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, m et M deux nombres réels, f une fonction dérivable sur $[a, b]$; à valeurs dans $\mathbb{R}$

a) On suppose que

$$\forall x \in [a, b], \quad m \leqslant f'(x) \leqslant M$$

Montrer que

$$m(b - a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b - a)$$

On pourra considérer les fonctions

$$g : x \longmapsto f(x) - Mx \quad h : x \longmapsto f(x) - mx$$

b) Soit $K \in \mathbb{R}^+$. On suppose que

$$\forall x \in [a, b], \quad |f'(x)| \leqslant K$$

Montrer que :

$$|f(b) - f(a)| \leqslant K |b - a|$$

puis que :

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, \quad |f(y) - f(x)| \leqslant K |y - x|$$

a) On remarque que $m(b - a) - f(b) + f(a) = h(a) - h(b)$.
Or, h est croissante car $h'(x) = f'(x) - m \geqslant 0$. Donc par croissance de h, on a : $m(b-a) \leqslant f(b) - f(a)$ car $h(a) - h(b) \leqslant 0$.
Le raisonnement pour l'autre inégalité est identique en considérant la fonction g.

b) D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} & f(b) - f(a) \leqslant K(b - a) \\ \Longrightarrow \ & |f(b) - f(a)| \leqslant |K(b - a)| \\ \Longrightarrow \ & |f(b) - f(a)| \leqslant K |b - a| \quad \text{comme } K \geqslant 0 \end{aligned}$$

Pour $\forall (x,y) \in [a,b]^2$, le résultat en découle immédiatement pour $y \geqslant x$. Dans le cas contraire, on peut se rapporter à une situation où $y \geqslant x$ en utilisant la parité de la fonction valeur absolue. En effet, $|x-y| = |-(x-y)| = |y-x|$ ce qui conclut.

EXERCICE 180 (④) par Jean

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, $K \in [0,1[$ et f une fonction dérivable de $[a,b]$ dans $[a,b]$ telle que :

$$\forall x \in [a,b], \quad |f'(x)| \leqslant K$$

On sait depuis l'exercice 172 que f admet un point fixe $c \in [a,b]$. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite définie par $u_0 \in [a,b]$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

En utilisant l'exercice précédent montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - c| \leqslant K^n \cdot |u_0 - c|$$

Qu'en déduit-on sur la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$?

D'après l'exercice 179 :

$$\forall (x,y) \in [a,b]^2, \ |f(x) - f(y)| \leqslant K\,|x-y|$$

Soit P la propriété définie pour n dans $\mathbb{N}$ par

$$|u_n - c| \leqslant K^n\,|u_0 - c|$$

Montrons P par récurrence :

Initialisation. $|u_0 - c| \leqslant |u_0 - c|$ donc P_0 est vraie

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que P_n soit vraie.
Ainsi, $|u_n - c| \leqslant K^n\,|u_0 - c|$.
Or, $|f(u_n) - f(c)| \leqslant K \cdot u_n - c$,
donc, $|u_{n+1} - c| \leqslant K\,|u_n - c| \leqslant K \cdot K^n\,|u_0 - c|$
Finalement, on a :

$$|u_{n+1} - c| \leqslant K^{n+1}\,|u_0 - c|$$

Conclusion. Par récurrence, on peut affirmer que P est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$

On a donc :

$$0 \leqslant |u_n - c| \leqslant K^n\,|u_n - c|$$

or, $K \in [0,1[$, donc $K^n\,|u_n - c| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, $|u_n - c|$ tend vers 0, donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers c.

EXERCICE 181 (①) par Estelle

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le maximum de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f_n(x) = x^n e^{-x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f_n'(x) = nx^{n-1} \cdot e^{-x} - x^n e^{-x} = e^{-x} x^{n-1}(n-x)$$

$f_n'(x)$ est donc du signe de $n - x$, ce qui nous donne le tableau suivant :

x	0		n		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f_n(n)$	$\searrow$	

Avec $f_n(n) = n^n e^{-n}$.

EXERCICE 182 (①) par Wéline

Soit λ dans $\mathbb{R}^{+*}$. Déterminer le minimum de la fonction f_λ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f_\lambda = \frac{\lambda x^2}{2} - \ln(x)$$

La fonction f_λ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme somme de deux fonctions dérivables :

$$f'_\lambda(x) = \lambda x - \frac{1}{x} = \frac{\lambda x^2 - 1}{x}$$

On cherche le signe de la dérivé et pour ça on cherche le signe du numérateur et du dénominateur sur $\mathbb{R}^{+*}$. Pour cela on va donc résoudre l'équation : $\lambda x^2 - 1 = 0$.

$$\begin{aligned}
&\lambda x^2 - 1 = 0 \\
\iff &(\sqrt{\lambda}x)^2 - 1^2 = 0 \\
\iff &(\sqrt{\lambda}x - 1)(\sqrt{\lambda}x + 1) = 0 \\
\iff &\sqrt{\lambda}x - 1 = 0 \quad ou \quad \sqrt{\lambda}x + 1 = 0 \\
\iff &x = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \quad ou \quad x = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \\
\iff &x = \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda} \quad ou \quad x = -\frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda}
\end{aligned}$$

Comme λ est strictement positif, $-\frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda}$ est négatif donc x ne peut pas prendre cette valeur.

x	0		$\frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda}$		$+\infty$
signe de $\lambda x^2 - 1$	‖	$-$	0	$+$	
signe de x	‖	$+$		$+$	
signe de f'_λ	‖	$-$	0	$+$	
variation de f_λ	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Le minimum de la fonction f_λ est donc atteint pour $x = \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda}$ et vaut 0.

Exercice 183 (⑤) par Octave et Tristan

Déterminer le maximum de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f(x) = \ln(1+x)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

Tout d'abord, f est dérivable en tant que produit de fonctions dérivables. On a :

$$f'(x) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{1+x} - \frac{\ln(1+x)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

On cherche les extrema de f, ce qui correspond aux points où f' s'annule :

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff (x^2+x)\ \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = (1+x)\ \ln(1+x) \\ &\iff (1+x)\ \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \left(1+\frac{1}{x}\right)\ \ln(1+x) \end{aligned}$$

On pose g la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ \ g(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)\ (1+x)$

g est aussi dérivable, en tant que produit de fonctions dérivables, et :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{-\ln(1+x)}{x^2} + \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)}{1+x} \\ &= \frac{x^2+x-(1+x)\ \ln(1+x)}{x^3+x^2} \\ &= \frac{(1+x)\ (x-\ln(1+x))}{x^3+x^2} \end{aligned}$$

Or par concavité de ln, $ln(1+x) \leq x$ avec égalité ssi $x=0$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ g'(x) > 0$.
Ainsi, g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.
De plus, si on note i la fonction inverse, $g \circ i$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. En reprenant l'équation découlant de f' :

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff g(x) = g \circ i(x) \\ &\iff g(x) - g \circ i(x) = 0 \end{aligned}$$

Or, $g - g \circ i$ est strictement croissante, donc par le théorème de la bijection ("cas particulier" du TVI), $f'(x) = 0$ a au plus une solution. Or 1 est solution, on en déduit donc :

x	0		1		$+\infty$
signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
variation de $f(x)$	‖ 0	$\nearrow$	$\ln^2(2)$	$\searrow$	0

Conclusion : le maximum de f est $\ln^2(2)$, atteint en $x=1$.

6.4 Caractérisation des fonctions constantes, équations différentielles

6.4.1 Caractérisation des fonctions constantes

Exercice 184 (①) par Tristan

Déterminer les fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, n fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et dont la dérivée n-ième est identiquement nulle.

Supposons une fonction f, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et n fois dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f^{(n)}(x) = 0$$

On peut alors facilement remonter les n dérivées de f afin de retrouver son expression de départ

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= 0 & & \\
f^{(n-1)}(x) &= a_1 & & a_1 \in \mathbb{R} \\
f^{(n-2)}(x) &= xa_1 + a_2 & & a_2 \in \mathbb{R} \\
f^{(n-3)}(x) &= \frac{a_1}{2}x^2 + a_2x + a_3 & & a_3 \in \mathbb{R} \\
&\ldots & & \\
f^{(n-n)}(x) &= \frac{a_1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{a_2}{(n-2)!}x^{n-2} + \cdots + a_n & & (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

De plus, on sait que la dérivée n-ième est identiquement nulle donc la dérivée $(n-1)$-ième ne l'est pas, ce qui nécessite $a_1 \neq 0$.

On peut donc conclure que les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, n fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et de dérivée n-ième identiquement nulle sont les fonctions polynomiales de degré $n-1$ et de coefficient déterminant non nul.

Exercice 185 (③) par Matilde

Pour quelles valeurs du nombre réel λ la fonction f_λ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_\lambda(x) = \cos(x)^6 + \sin(x)^6 - \lambda\cos(4x)$$

est-elle constante ?

Réecrivons la fonction f_λ de manière plus simple :

$$\begin{aligned}
f_\lambda(x) &= \cos^6(x) + \sin^6(x) - \lambda\cos(4x) \\
f_\lambda(x) &= \cos^6(x) + (1-\cos^2(x))^3 - \lambda(\cos^2(2x) - \sin^2(2x)) \\
f_\lambda(x) &= \cos^6(x) + (1 - 3\cos^2(x) + 3\cos^4(x) - \cos^6(x)) - \lambda((\cos^2(x) - \sin^2(x))^2 - (1-\cos^2(2x)) \\
f_\lambda(x) &= 1 - 3\cos^2(x) + 3\cos^4(x) - \lambda((\cos^2(x) - (1-\cos^2(x)))^2) - (1 - (2\cos^2(x)-1)^2)) \\
f_\lambda(x) &= 1 - 3\cos^2(x) + 3\cos^4(x) - \lambda(2\cos^2(x)-1)^2 - (1 - (2\cos^2(x)-1)^2)) \\
f_\lambda(x) &= 1 - 3\cos^2(x) + 3\cos^4(x) - \lambda[2(2\cos^2(x)-1)^2 - 1] \\
f_\lambda(x) &= 1 - 3\cos^2(x) + 3\cos^4(x) - \lambda(1 - 8\cos^2(x) + 8\cos^4(x)) \\
f_\lambda(x) &= (3-8\lambda)\cos^4(x) + (8\lambda-3) + 1 - \lambda \\
f_\lambda(x) &= (3-8\lambda)\cos^2(x)[\cos^2(x) - 1] + 1 - \lambda \\
f_\lambda(x) &= (3-8\lambda)\cos^2(x)\cdot(-\sin^2(x)) + 1 - \lambda \\
f_\lambda(x) &= (3-8\lambda)(\frac{-\sin^2(2x)}{4}) + 1 - \lambda \\
f_\lambda(x) &= (\frac{8\lambda-3}{4})\sin^2(2x) + 1 - \lambda
\end{aligned}$$

Étudions les variations de $f_\lambda(x)$.
Calculons sa dérivée :

$$((\frac{8\lambda-3}{4})\sin^2(2x)+1-\lambda)' = (\frac{8\lambda-3}{4})\cdot 8(2\cos^2(x)-1)\cos(x)\sin(x)$$

Dressons les tableaux de signes et variations :

$$Si \quad \frac{8\lambda-3}{4} > 0$$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
$2\cos^2(x)-1$		$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\cos(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\sin(x)$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$(f_\lambda(x))'$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Soit $\frac{8\lambda-3}{4} = a$ et $1-\lambda = b$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
$f_\lambda(x)$	b	$\nearrow$	$a+b$	$\searrow$	b	$\nearrow$	$a+b$	$\searrow$	b	$\nearrow$	$a+b$	$\searrow$	b

$$Si \quad \frac{8\lambda-3}{4} < 0$$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
$2\cos^2(x)-1$		$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\cos(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\sin(x)$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$(f_\lambda(x))'$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Soit $\frac{8\lambda-3}{4} = a$ et $1-\lambda = b$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
$f_\lambda(x)$	b	$\searrow$	$a+b$	$\nearrow$	b	$\searrow$	$a+b$	$\nearrow$	b	$\searrow$	$a+b$	$\nearrow$	b

On remarque que la fonction est périodique, calculons alors son amplitude :

$$\mathcal{A} = |\frac{max-min}{2}|$$

$$Si \quad \frac{8\lambda-3}{4} > 0$$

$$\mathcal{A} = |\frac{a+b-b}{2}| = |\frac{a}{2}|$$

$$Si\ \frac{8\lambda-3}{4}<0$$

$$\mathcal{A}=|\frac{b-(a+b)}{2}|=|\frac{-a}{2}|=|\frac{a}{2}|$$

Dans les deux cas on obtient $\mathcal{A}=|\frac{a}{2}|$ avec $a=\frac{8\lambda-3}{4}$, ainsi $\mathcal{A}=|\frac{8\lambda-3}{8}|$.

La fonction $f_\lambda(x)$ est constante lorsque son amplitude est égale à 0, il suffit donc de résoudre l'équation :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}=0\\
&|\frac{8\lambda-3}{8}|=0\\
&\frac{8\lambda-3}{8}=0\\
&8\lambda-3=0\\
&\lambda=\frac{3}{8}=0,375
\end{aligned}$$

La fonction $f_\lambda(x)$ est constante pour $\lambda=0,375$.

EXERCICE 186 (②) par Mathieu

Soient un pendule simple de masse m et de longueur l, θ l'angle que fait le pendule avec la « verticale descendante » ; alors θ dépend du temps t et obéit à l'équation différentielle :

$$\theta''(t)+\frac{g}{l}\sin(\theta(t))=0.$$

L'énergie du pendule au temps t est donnée par la formule :

$$E(t)=\frac{ml^2\theta'(t)^2}{2}-mgl\cos(\theta(t)).$$

Montrer que E est constante (conservation de l'énergie).

Dérivons l'expression de l'énergie en fonction du temps :

$E(t)=\frac{1}{2}ml^2\theta'(t)^2-mgl\cos(\theta(t))$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow\ &E'(t)=ml^2\theta''(t)\theta'(t)+mgl\theta'(t)\sin(\theta(t)) \text{ (dérivée de } u^2 \text{ et } \cos(u))\\
&E'(t)=ml^2\theta'(t)(\theta''(t)+\frac{g}{l}\sin(\theta(t)))
\end{aligned}.$$

Or d'après l'équation du pendule simple : $\theta''(t)+\frac{g}{l}\sin(\theta(t))=0$, donc $E'(t)=0$. E est donc une constante

EXERCICE 187 (②) par Macéo

Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a) En considérant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=f(x)-f(-x),$$

montrer que f est paire si et seulement si f' est impaire.

b) Montrer que f est impaire si et seulement si f' est paire et f(0)=0.

a) On a déjà démontré que si f est paire alors f' est impaire (voir Exercice 151). Montrons la réciproque.
On suppose que f' est impaire, alors : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(-x) = -f'(x)$.
D'où : $g'(x) = f'(x) + f'(-x) = 0$.
On en déduit que $g(x) = C$, où C est une constante réelle.
En particulier, en évaluant g en 0 :

$$\begin{aligned} g(0) = f(0) - f(0) &= C \\ 0 &= C. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) &= 0 \\ f(x) - f(-x) &= 0 \\ f(x) &= f(-x). \end{aligned}$$

On peut donc conclure que f est paire si et seulement si f' est impaire.

b) De même, on a déjà démontré que si f est impaire alors f' est paire (voir Exercice 151).
De plus, par définition : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) + f(x) = 0$.
D'où : $f(0) = 0$.
On suppose maintenant que f' est paire et $f(0) = 0$, montrons que f est impaire.
Tout d'abord, par définition : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(-x) = f'(x)$.
D'où : $g'(x) = f'(x) + f'(-x) = 2f'(x)$.
On en déduit que $g(x) = 2f(x) + C$, où C est une constante réelle.
Donc :

$$\begin{aligned} f(x) - f(-x) &= 2f(x) + C \\ -f(-x) &= f(x) + C. \end{aligned}$$

En évaluant en 0, avec $f(0) = 0$, on en déduit que $C = 0$.
Ce qui nous donne enfin :

$$f(x) = -f(-x).$$

On peut donc conclure que f est impaire si et seulement si f' est paire et f(0)=0.

EXERCICE 188 (③) (Dérivation et périodicité $*$). *Soient f un fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, T un élément de $\mathbb{R}^{+*}$.*
a) On suppose qu'il existe λ dans $\mathbb{R}$ et une fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ périodique de période T telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = g(x) + \lambda x.$$

Montrer que f' est périodique de période T.
b) Formuler et démontrer une réciproque du résultat établi en a).

EXERCICE 189 (③) par Ylan

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(y) - f(x)| \leq (y - x)^2$$

Montrer que f est constante

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $y \neq x$. Nous avons :

$$|f(y) - f(x)| \leq (y - x)^2 \quad \text{donc :}$$

$|f(y) - f(x)| \leq |y - x|^2$, et donc, comme $y \neq x$, $|y - x| \neq 0$, d'où :

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| \leq |y - x|$$

Or, $|y-x| \xrightarrow[y\to x]{} 0$, donc par encadrement :

$$\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| \xrightarrow[y\to x]{} 0 \quad \text{d'où :}$$

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \xrightarrow[y\to x]{} 0.$$

On a donc f dérivable en x avec : $f'(x)=0$, et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x)=0$$

f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée nulle, et donc d'après la caractérisation 6.4.1 des fonctions constantes, f est constante.

6.4.2 L'équation différentielle $y' = \lambda y$

Exercice 190 (①) par Estelle

Une certaine quantité d'une substance décroît exponentiellement en fonction du temps en obéissant la loi :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \qquad N(t) = Ce^{-Kt},$$

où les constantes C et K sont > 0. Déterminer le temps de demi-vie, c'est-à dire l'instant t tel que

$$N(t) = \frac{C}{2}.$$

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}^+, \qquad N(t) &= \frac{C}{2} \\
\Leftrightarrow Ce^{-Kt} &= \frac{C}{2} \\
\Leftrightarrow e^{-Kt} &= \frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow -Kt &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) \\
\Leftrightarrow t_{1/2} &= \frac{\ln(2)}{K}.
\end{aligned}$$

Exercice 191 (②) par Estelle

Une bactérie se développe avec un taux d'accroissement proportionnel à la population, c'est-à-dire que le nombre de bactéries à l'instant t obéit à l'équation différentiel :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad N'(t) = KN(t)$$

où K est unse constante > 0. La population passe de 10^6 individus à $2 \cdot 10^6$ en 2 12 minutes. Combien de temps faut-il pour passer de 10^6 individus à 10^8 ?

Soit f la fonction modélisant le développement de la population de bactéries.
f est de la forme $f(t) = Ce^{Kt}$, avec K et C réels.
Or, $f(0) = C \cdot e^{K \cdot 0} = C = 10^6$

De plus,

$$
\begin{aligned}
f(12) &= Ce^{12K} \\
&= 10^6 \cdot e^{12K} \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 10^6 \\
\iff 10^6 e^{12K} &= 2 \cdot 10^6 \\
\iff e^{12K} &= 2 \\
\iff 12K &= \ln(2) \\
\iff K &= \frac{\ln(2)}{12}
\end{aligned}
$$

Donc $f(t) = 10^6 e^{\frac{\ln(2)}{12}t}$.
On cherche t tel que $f(t) = 10^8$

$$
\begin{aligned}
f(t) = 10^8 &\iff 10^6 e^{\frac{\ln(2)}{12}t} = 10^8 \\
&\iff \frac{\ln(2)t}{12} = 2 \cdot \ln(10) \\
&\iff t = \frac{2 \cdot \ln(10) \cdot 12}{\ln(2)} \simeq 79,7 \text{ minutes}
\end{aligned}
$$

EXERCICE 192 (③) par Matilde (Courbes de sous-tangente constante).
Déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition suivante : pour tout réel x, la tangente au graphe de f en x n'est pas parallèle à l'axe (Ox) et, si N(x) désigne le point d'intersection de cette tangente et de (Ox), la distance N(x) à la projection orthogonale du point d'abscisse x du graphe de f sur l'axe (Ox) est constante.
Il est recommandé de faire un dessin.

Soit l'expression de la tangente en a au graphe d'une fonction :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a) = f'(a)x - f'(a)a + f(a)$$

L'énoncé nous dit que "la tangente au graphe de f en [a] n'est pas parallèle à l'axe (Ox)", on peut donc poser :

$$f'(a) \neq 0$$

$f'(a)$ étant le coefficient directeur de la tangente en a.

Ensuite, N(x) est le point d'intersection de la tangente en a et de O(x), il s'agit alors du point d'ordonnée 0 et d'abscisse :

$$
\begin{aligned}
&y = f'(a)(x-a) + f(a) \\
&y = 0 \\
&\Leftrightarrow f'(a)(x-a) + f(a) = 0 \\
&\Leftrightarrow x = \frac{-f(a)}{f'(a)} + a
\end{aligned}
$$

(On peut faire le passage à la dernière ligne sans problème puisque l'on a montré que $f'(a) \neq 0$.)

De plus, "la projection orthogonale du point d'abscisse [a] du graphe de f sur l'axe (Ox)", correspond simplement au point de coordonnées $(a, 0)$.

Ainsi, la distance N(x) à la projection orthogonale est égale à :

$$\left|\frac{-f(a)}{f'(a)} + a - a\right| = \left|\frac{-f(a)}{f'(a)}\right| = \left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right|$$

D'après l'énoncé, on obtient :

$$|\frac{f(a)}{f'(a)}| = C,\ avec\, C \in \mathbb{R}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} \frac{f(a)}{f'(a)} & = & C\, avec\, \frac{f(a)}{f'(a)} > 0 \\ \frac{f(a)}{f'(a)} & = & C\, avec\, \frac{f(a)}{f'(a)} < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(a) & = & \frac{f(a)}{C} \\ f'(a) & = & \frac{f(a)}{C} \end{cases}$$

On obtient donc une équation diférentielle de type $y' = \lambda y$, ainsi :

$$f = C_1 \exp(\frac{x}{C}),\ avec\, C_1 \in \mathbb{R}$$

EXERCICE 193 (③) par Tristan

On se propose de déterminer les fonctions f dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) f(y)$$

a) Soit f une fonction vérifiant les conditions précédentes. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f'(0) f(x)$$

b) Conclure.

a) Prenons f qui convient. Alors

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) f(y)$$

En dérivant par rapport à y chaque membre de l'équation, on obtient

$$f'(x+y) = f'(y) f(x)$$

D'où, en prenant $y = 0$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f'(0) f(x)$$

b) D'après l'équation différentielle précédemment obtenue, les fonctions solutions sont de la forme $f : x \mapsto Ce^{f'(0)x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
En prenant $x = 0$, on trouve alors facilement que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(0) e^{f'(0)x}$$

Or, f vérifie $f'(x) = f'(0) f(x)$ donc pour $x = 0$:

$$f'(0) = f'(0) f(0) \Leftrightarrow f(0) = 1$$

On en déduit que pour $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = e^{xf'(0)}$$

De plus, $f'(0) \in \mathbb{R}$ donc on peut poser $\lambda = f'(0) \in \mathbb{R}$ tel qu'on ait finalement

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{\lambda x}$$

On conclut donc en disant que les fonctions solutions de l'équation fonctionnelle

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) f(y)$$

sont les fonctions définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{\lambda x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

EXERCICE 194 (③) par Tristan

On considère une fonction continue f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) f(y)$$

a) Montrer que f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

b) On suppose que f s'annule en un point de $\mathbb{R}$, montrer que f est identiquement nulle.

c) On suppose que f est à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$. Qu'en déduit t-on à l'aide de l'exercice 24 de **1.5** ?

a) Soit $x = y$.
Alors on obtient d'après l'équation donnée : $f(2x) = f(x)^2$.
Or, il est évident que $f(x)^2 \in \mathbb{R}^+$ donc en prenant $x := \dfrac{x}{2}$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \in \mathbb{R}^+$$

b) On suppose que la fonction f s'annule en $y \in \mathbb{R}$.
Alors d'après son équation fonctionnelle :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) &= f(x) f(y) \\ &= f(x) \times 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

En posant donc $\lambda = x + y$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda) = 0$$

Ce qui montre bien que si f s'annule en un point de $\mathbb{R}$ alors elle est identiquement nulle.

c) Supposons f à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ et adoptons une méthodologie analogue à celle de l'exercice 24 de **1.5**.
On commence ainsi par déterminer $f(0)$:

$$f(0+0) = f(0)^2 \Leftrightarrow f(0) = 1 \text{ car } f(0) \in \mathbb{R}^{+*}$$

On établit ensuite la relation suivante pour tout $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$:

$$f(nx) = f(x)^n \text{ (cette égalité est assez immédiate)}$$

On étend ensuite cette relation à tous les entiers relatifs en remarquant dans un premier temps que pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x-x) = f(x) f(-x) \Leftrightarrow f(-x) = f(x)^{-1}$$

Et bien sûr, pour $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$:

$$f(-nx) = f(-x)^n = f(x)^{-n}$$

On cherche désormais à déterminer une expression de $f(x)$ pour $x \in \mathbb{Q}$ en fonction de $f(1)$ et x.
Pour cela, on pose $x \in \mathbb{Q}$ et on écrit $x = \dfrac{p}{q}$ avec $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \backslash \{0\}$.
Alors $xq = p$ et

$$\begin{aligned} f(xq) &= f(p) \\ f(x)^q &= f(1)^p \\ \sqrt[q]{f(x)^q} &= \sqrt[q]{f(1)^p} \\ f(x) &= f(1)^{\frac{p}{q}} \\ f(x) &= f(1)^x \end{aligned}$$

Comme tout nombre réel est limite d'une suite de rationnels, on peut alors sans grand problème donner l'égalité suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(1)^x$$

Notons alors a le réel $f(1)$, on trouve de cette manière que les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient l'équation fonctionnelle donnée sont les $f : x \mapsto a^x$ où $a = f(1)$.

EXERCICE 195 (1) par Macéo

a) Trouver les fonctions réelles f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) - 2f(x) = 1.$$

On cherchera une solution particulière constante.

b) Trouver les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) + f(x) = x.$$

On cherchera une solution particulière affine.

a) Soient f les fonctions solutions de l'équation

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) - 2f(x) = 1.$$

La solution homogène est de la forme : $f_h(x) = Ce^{2x}, \quad C \in \mathbb{R}$.
Cherchons une solution particulière constante : $f_p(x) = A, \quad A \in \mathbb{R}$.
On a donc : $f_p'(x) = 0$.
En remplaçant dans l'équation, on obtient :

$$\begin{aligned} 0 - 2A &= 1 \\ \implies A &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi les solutions de l'équation sont les fonctions f telles que :

$$f(x) = f_p(x) + f_h(x) = -\frac{1}{2} + Ce^{2x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

b) Soient f les fonctions solutions de l'équation

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) + f(x) = x.$$

La solution homogène est de la forme : $f_h(x) = Ce^{-x}, \quad C \in \mathbb{R}$.
Cherchons une solution particulière affine, donc de la forme : $f_p(x) = Ax + B, \quad A, B \in \mathbb{R}$.
On a donc : $f_p'(x) = A$.
En remplaçant dans l'équation, on obtient :

$$A + Ax + B = X \implies \left\{ \begin{array}{lcl} A & = & 1 \\ A + B & = & 0. \end{array} \right.$$

D'où : $A = 1,\ B = -1\ et\ f_p(x) = x - 1$.
Ainsi les solutions de l'équation sont les fonctions f telles que :

$$f(x) = f_p(x) + f_h(x) = x - 1 + Ce^{-x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

EXERCICE 196 (2) par Jean

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche les fonctions réelles et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) - \lambda f(x) = e^x$$

a) Traiter le cas $\lambda \neq 1$. On cherchera une solution particulière de la forme$x \longmapsto Ce^x$

b) Traiter le cas $\lambda = 1$. On cherchera une solution particulière de la forme$x \longmapsto Cxe^x$

a) Pour $\lambda \neq 1$, il s'agit de résoudre

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) - \lambda f(x) = e^x \quad (1)$$

Soit f_1 une solution particulière de (1). On a :
$\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = Ce^x$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f_1'(x) = Ce^x$.
Or, $Ce^x - \lambda Ce^x = e^x$ donc $C = \dfrac{1}{1-\lambda}$
Ainsi, les solutions de (1) sont les fonctions de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{e^x}{1-\lambda} + Ke^{\lambda x}, K \in \mathbb{R}$$

b) L'équation devient $f'(x) - f(x) = e^x \quad (2)$.
Soit f_2 une solution particulière de (2).
On a $f_2(x) = C_2 x e^x$ et $f_2'(x) = C_2 e^x \cdot (1+x)$
Il vient immédiatement que $C_2 = 1$, ainsi les fonctions solutions de (2) sont de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \longmapsto e^x(x+K) \quad K \in \mathbb{R}$$

Exercice 197 (②) par Estelle

Trouver les fonctions réelles f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) + 3f(x) = \sin(x)$$

On cherchera une solution particulière de la forme $x \longmapsto a\sin(x) + b\cos(x)$

Soit f_0 une solution particulière :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, & f_0(x) = a\sin(x) + b\cos(x) \\ \text{et } & f_0'(x) = a\cos(x) - b\sin(x) \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} f_0'(x) + 3f_0(x) = \sin(x) &\iff a\cos(x) - b\sin(x) + 3a\sin(x) + 3b\cos(x) = \sin(x) \\ &\iff (a+3b)\cdot\cos(x) + (3a-b)\cdot\sin(x) = \sin(x) \\ &\iff \begin{cases} a + 3b = 0 \\ 3a - b = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = \dfrac{3}{10} \\ b = \dfrac{-1}{10} \end{cases} \end{aligned}$$

Finalement $f_0(x) = \dfrac{3}{10}\sin(x) - \dfrac{1}{10}\cos(x)$, donc les solutions à l'équation différentielle sont de la forme :

$$x \longmapsto \frac{3}{10}\sin(x) - \frac{1}{10}\cos(x) + Ce^{3x}, \; C \in \mathbb{R}$$

6.5 Complément : la condition nécessaire d'extremum

Exercice 198 (④) par Estelle

Soient f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et M_0 un point de $\mathbb{R}^2$ n'appartenant pas au graphe de f, de coordonnées (x_0, y_0). Pour x dans $\mathbb{R}$, on note $M(x)$ le point du graphe de f d'abscisse x, c'est-à-dire le point de coordonnées $(x, f(x))$. On suppose que la distance de M_0 au graphe de f est atteinte au point de paramètre x_1, ce qui signifie que la fonction :

$$\varphi : x \longmapsto \left\|\overrightarrow{M_0M(x)}\right\|$$

est minimale en x_1.
Pour x dans $\mathbb{R}$, exprimer $\phi(x) = \varphi(x)^2$ en fonction de $x, x_0, y_0, f(x)$. Calculer ensuite $\phi'(x)$.
En déduire que la droite $(M_0M(x_1))$ est pérpendicualire à la tangente au graphe de f au point d'abscisse x_1
Il est recommandé de faire un dessin

•

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \phi(x) &= \varphi(x)^2\\ &= \left(\left|\left|\overrightarrow{M_0M(x)}\right|\right|\right)^2\\ &= \left(\sqrt{(x_0-x)^2+(y_0-y)^2}\right)^2\\ &= (x_0-x)^2+(y_0-y)^2\\ &= (x_0-x)^2+(y_0-f(x))^2\\ &= x_0^2-2x_0x+x^2+y_0^2-2y_0f(x)+f(x)^2\end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \phi'(x) &= -2x_0+2x-2y_0\cdot f'(x)+2f'(x)f(x)\\ &= 2(x-x_0-y_0f'(x)+f'(x)f(x))\end{aligned}$$

On sait que ϕ est minimale en x_1, donc $\phi'(x_1) = 0$, ainsi :

$$2(x_1-x_0-y_0f'(x_1)+f'(x_1)f(x_1)) = 0 \iff \quad x_1x_0+f'(x_1)(y_1-y_0) = 0$$
$$\iff f'(x_1) = \frac{x_0-x_1}{y_1-y_0}$$

De plus, la droite $(M_0M(x_1))$ est définie par une fonction affine de coefficient directeur $a = \dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$.
Or, on sait que deux droites sont perpendiculaires si $a = \dfrac{-1}{a'}$.
Nous observons que $\dfrac{-1}{a} = \dfrac{x_0-x_1}{y_1-y_0} = f'(x_1)$, donc $(M_0M(x_1))$ est pérpendicualire à la tangente qu graphe de f en x_1

7 Complément : les fonctions puissances

7.1 Généralités

Exercice 199 (②) par Loïse

a) Pour quels nombres réels α la fonction φ_α est-elle convexe sur $\mathbb{R}^{+*}$?
b) En déduire que, si $\alpha > 1$,

$$\forall x \in]-1,+\infty[, \quad (1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x.$$

a) Les fonctions puissances sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$. Pour étudier la convexité d'une fonction, on étudie le signe de la dérivée seconde.

$$\forall x \in \mathbb{R}+*, \quad \varphi'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}+*, \quad \varphi''_\alpha(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}.$$

Par définition des fonctions puissances, pour $x \in R^{+*}$, x^α est strictement positif. Ainsi, le signe de la dérivée seconde dépend du signe de $\alpha(\alpha-1)$. Or :

α	$-\infty$		0		1		$+\infty$
α		$-$	0	$+$		$+$	
$\alpha - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\varphi''_\alpha(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Or une fonction est convexe sur un intervalle si sa dérivée seconde est positive sur cet intervalle. Ainsi, la fonction φ_α est convexe sur $\mathbb{R}+*$ pour tout réel $\alpha \in]-\infty, 0] \cup [1; +\infty[$.

b) On note f la fonction suivante :

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \quad f(x) = (1+x)^\alpha$$

Si $\alpha > 1$, la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}+*$. La courbe d'une fonction convexe est au-dessus de toutes ses tangentes. Il suffit de considérer sa tangente en 0. L'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0 est :

$$y = f(0) + f'(0)(x-0).$$

Or la fonction f est dérivable sur $]-1, +\infty[$ en tant que composée de fonctions dérivables :

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \quad f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}.$$

Ainsi, l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0 est :

$$y = (1+0)^\alpha + \alpha(1+0)^{\alpha-1}(x-0) \Leftrightarrow y = 1 + \alpha x.$$

Par définition de la convexité, il vient :si $\alpha > 1$,

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \quad (1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x.$$

EXERCICE 200 (①) par Maorine

Déterminer la limite de $\frac{x^\alpha - 1}{x-1}$ lorsque x tend vers 1.

Soit φ_α la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi_\alpha(x) = x^\alpha.$$

On a :

$$\varphi'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1},$$
$$\varphi_\alpha(1) = 1 \text{ et } \varphi'_\alpha(1) = \alpha.$$

Alors :

$$\lim_{x\to1} \frac{x^\alpha - 1}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{\varphi_\alpha(x) - \varphi_\alpha(1)}{x-1} = \varphi'_\alpha(1) = \alpha$$

Par définition de la dérivée en un point.

EXERCICE 201 (①) par Macéo

Soit α dans $\mathbb{R}$. Pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer la dérivée n-ième de φ_α.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et φ_α la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi_\alpha(x) = x^\alpha.$$

On cherche à calculer la dérivée n-ième de φ_α. Conjecture :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi_\alpha^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}.$$

Démontrons cette propriété par récurrence sur n :

Initialisation : On sait que $\varphi'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, la propriété est vraie pour $n = 1$.

Hérédité :Supposons la propriété vraie au rang $n \in \mathbb{N}$.
$\varphi_\alpha^{(n)} = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$
On pose $A = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)$ constante, et $\beta = \alpha - n$ réel.
Alors :

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha^{(n+1)} = (Ax^\beta)' &= A\varphi'_\beta(x)\\ &= A \times \beta x^{\beta-1}\\ &= \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)\times(\alpha-n)x^{\alpha-n-1}\\ &= \alpha(\alpha-1)...(\alpha-(n+1)+1)x^{\alpha-(n+1)}.\end{aligned}$$

Ce qui achève la récurrence.

Exercice 202 (④) Antonin D

Soient $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, f une fonction de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$. En imitant éventuellement la démonstration du théorème 4 de **6.4.2**, montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes.

- la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f'(x) = \frac{\alpha}{x} f(x),$$

- il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f(x) = Cx^\alpha.$$

Rappel : les solutions des EDL du 1^{er}ordre à coefficients non constant sont de la forme $f_h(x)+f_p(x)$

Démontrons une propriété plus large, résolvons une EDL du 1^{er} ordre à coefficient non constant :$f'(x) = a(x)f(x) + b(x)$ La solution homogène d'une équation de la forme $f'(x) = a(x)f(x) + b(x)$ est de la forme $\lambda e^{A(x)}$, $A(x) = \int a(x)dx$ et $\lambda \in \mathbb{R}$
Par double inclusion :
$\supseteq$ $f(x) = \lambda e^{A(x)}$ vérifie clairement l'équation
$\subseteq$ f solution
Soit $g(x) = f(x)e^{-A(x)}$

$$g'(x) = e^{-A(x)} \underbrace{(f'(x) - a(x)f(x)}_{0}$$

donc g est constante

$$f(x)e^{-A(x)} = g(x) = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$$
$$f(x) = \lambda e^{A(x)}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Technique de physicien :

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y$$

Donc

$$\frac{dy}{y} = a(x)dx$$

en intégrant

$$ln(|y|) = A(x) + C, C \in \mathbb{R}$$

Introduisons la méthode de recherche de la solution particulière.
Pour cela, notons $f_p(x) = \lambda(x)e^{A(x)}$

$$f'_p(x) = \lambda(x)a(x)e^{A(x)} + \lambda'(x)e^{A(x)}$$

et on injecte le tout dans l'équation différentielle. Ce qui donne :

$$\lambda'(x)e^{A(x)} = b(x)$$

$$\lambda'(x) = b(x)e^{-A(x)}.$$

On appelle cette méthode variation de la constante
Dans cet exercice, $a(x) = \frac{\alpha}{x}$ donc $A(x) = \alpha ln(x)$
donc $f_h(x) = \lambda x^\alpha$
De plus, $b(x) = 0$ Ce qui nous donne $\lambda(x) = c,c \in \mathbb{R}$
On a donc

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x) = \lambda x^\alpha + cx^\alpha$$

En factorisant par x^α on retrouve bien le résultat voulu avec $C = \lambda + c$.
On vérifiera dans l'autre sens que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et vérifie que

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f'(x) = \frac{\alpha}{x} f(x).$$

EXERCICE 203 (②) par Matilde La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est définie par $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = \sqrt{u_n}$$

Exprimer u_n en fonction de u_0 et n, puis déterminer la limite de $(u_n)_{n\geq 0}$.

$$\begin{aligned}
u_0 &= u_0 \\
u_1 &= \sqrt{u_0} = (u_0)^{\frac{1}{2}} \\
u_2 &= \sqrt{\sqrt{u_0}} = (u_0)^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}} \\
u_3 &= \sqrt{\sqrt{\sqrt{u_0}}} = (u_0)^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

On considère la propriété $\mathcal{P}_n$ tel que $u_n = u_0^{(\frac{1}{2})^n}$. Prouvons la par récurrence.

Initialisation. Au rang $n = 0$, $(u_0)^{(\frac{1}{2})^0} = (u_0)^1 = u_0$, donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité. Soit $\mathcal{P}_k$ vraie : $u_k = u_0^{(\frac{1}{2})^k}$. Montrons alors que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie également.

$$\begin{aligned}
u_{k+1} &= \sqrt{u_k} \\
u_{k+1} &= (u_k)^{\frac{1}{2}} \\
u_{k+1} &= (u_0)^{(\frac{1}{2})^k \times \frac{1}{2}} \\
u_{k+1} &= (u_0)^{(\frac{1}{2})^{k+1}}
\end{aligned}$$

$\mathcal{P}_{k+1}$ est donc vraie.

Calculons alors la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$:

$$u_n = (u_0)^{(\frac{1}{2})^n}$$

$$\lim(\frac{1}{2}^n) = 0$$

$$\lim(u_n) = 1$$

Exercice 204 (②) par Matilde (Les fonctions $x \mapsto a^x *$)
Soit a un élément de $\mathbb{R}^{+*}$. On note ϕ_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \phi_a(x) = a^x = \exp(\ln(a)x).$$

1. Calculer la dérivée de $\phi_a(x)$.
2. Déterminer les limites de $\phi_a(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, lorsque x tend vers $-\infty$. on discutera selon la position de a par rapport à 1.
3. Tracer les graphes de ϕ_2, de $\phi_{\frac{1}{2}}$.

1.

Calculons la dérivée de ϕ_a :

$$\phi_a' = \ln(a) \cdot \exp(x \cdot \ln(a)) = \ln(a)a^x$$

2.

Nous allons faire trois distinctions de cas pour le calcul de limite :

a) Pour $a < 1$ et donc $\ln(a) < 0$:

$$\lim_{x \to -\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} = 0$$

b) Pour $a = 1$ et donc $\ln(a) = 0$:

$$\lim_{x \to -\infty} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} = 1$$

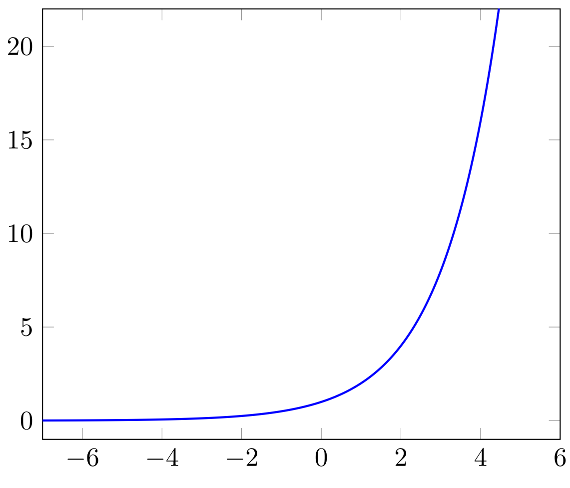
c) Pour $a > 1$ et donc $\ln(a) > 0$:

$$\lim_{x \to -\infty} = 0$$

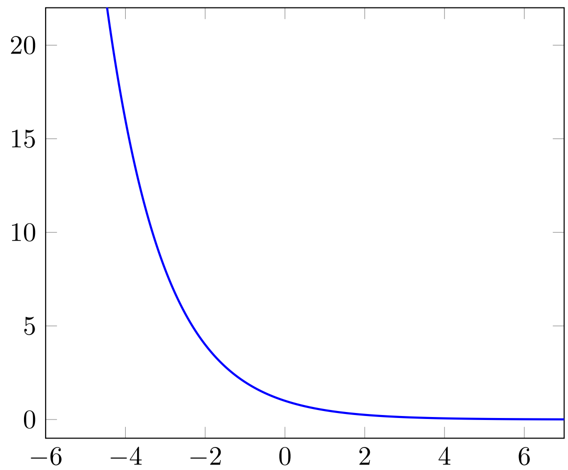
$$\lim_{x \to +\infty} = +\infty$$

3.

Graphe de la fonction ϕ_2 :



Graphe de la fonction $\phi_{\frac{1}{2}}$:



EXERCICE 205 (①) par Léo

Soit $a > 0$. Déterminer la limite de $\dfrac{a^x - 1}{x}$ lorsque x tend vers 0

¨ Soit $f(x) = a^x = e^{\ln(a)x}$. On a : $f'(x) = \ln(a)e^{\ln(a)x}$.
Or, $f'(0) = \lim_{x\to 0} \dfrac{a^x - a^0}{x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x}$.

Or, $f'(0) = \ln(a)$, donc $\lim_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$

EXERCICE 206 (②) par Matilde
a) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, u une fonction dérivable de I dans $\mathbb{R}^{+*}$, v une fonction dérivable de I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour x dans $\mathbb{R}$, on pose :

$$w(x) = u(x)^{v(x)}$$

Calculer la dérivée de w.
b) Écrire l'équation de la tangente au graphe de la fonction $f : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto x^x$ au point d'abscisse 1.

a) Réecrivons d'abord la fonction $w(x)$ de manière à ce que sa dérivée soit plus facile à trouver :

$$w(x) = u(x)^{v(x)} = \exp(\ln(u(x)) \cdot v(x))$$

Puis, calculons la dérivée :

$$w'(x) = [\frac{u'(x)}{u(x)} \cdot v(x) + \ln(u(x)) \cdot v'(x)] \cdot \exp(\ln(u(x)) \cdot v(x))$$

b) On prend :

$$u(x) = x$$
$$v(x) = x$$

Puis, on utilise la formule de la tangente au graphe d'une fonction au point d'abscisse a :

$$T_a : y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Et la dérivée obtenu précédemment :

$$(x^x)' = [\frac{1}{x} \cdot x + \ln(x) \cdot 1] \cdot \exp(\ln(x) \cdot x) = [1 + \ln(x)] \cdot x^x$$

Pour obtenir l'équation de la tangente au graphe de la fonction f au point d'abscisse 1 :

$$T_1 : y = f'(1)(x-1) + f(1)$$
$$T_1 : y = [1+\ln(1)] \cdot 1^1 \cdot (x-1) + 1^1 = x$$

Ainsi :

$$T_1 : y = x$$

L'équation de la tangente au graphe de la fonction f en 1 est la première bissectrice.

EXERCICE 207 (③) par Matilde (Un problème d'optimisation géométrique)
On considère une boîte fermée en forme de cylindre droit. La base est un disque de rayon $r > 0$, la hauteru du cylindre est $h > 0$. On note S l'aire latérale de la boîte (incluant les deux bases), V son volume.

a) Justifier les relations :

$$S = 2\pi(r^2 + rh), \quad V = \pi r^2 h.$$

b) On supporse que V est fixé. En utilisant la relation $S = 2\pi(r^2 + \frac{V}{\pi r})$ et en étudiant la fonction :

$$f : r \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto r^2 + \frac{V}{\pi r},$$

dire comment choisit r et h pour que S soit minimale.

a)

La surface d'un cylindre peut être décomposer en deux disques de rayon r et d'un rectangle de largeur h est de longueur, le périmètre d'un disque de rayon r.

$$\mathcal{A}_{disque} = \pi r^2$$
$$\mathcal{A}_{rectangle} = h \times 2\pi r$$
$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi(r^2 + rh)$$

On retrouve bien l'expression donnée.

On peut se représenter un cylindre comme l'empilement de cercle de rayon r sur une longueur h. Pour calculer son volume il suffit alors de prendre l'aire d'un disque de rayon r et de la multiplier par h :

$$V = \pi r^2 h$$

On obtient bien l'expression donnée.

b)

Pour trouver la surface minimale pour un volume fixé il semble judicieux d'étudier la fonction f afin de trouver son minimum.
Calculons d'abord sa dérivée :

$$f'(x) = 2r + \frac{V}{\pi} \cdot (\frac{-1}{r^2}) = \frac{2r^3\pi - V}{\pi r^2}$$

Puis, étudions le signe de f' :

$$\pi r^2 > 0$$
$$et$$
$$2r^3\pi - V > 0$$
$$r^3 > \frac{V}{2\pi}$$
$$r > \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

$((\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$, pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $(\sqrt[3]{x})'$ est positive, donc $\sqrt[3]{x}$ est croissante.)

Traçons alors les tableaux de signes et variations :

r	0		$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$		$+\infty$
$f(r)$		$-$	0	$+$	

r	0		$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$		$+\infty$
$f(r)$		$\searrow$	$f(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}})$	$\nearrow$	

(L'expression de S suit les même variations puisque $S = 2\pi \cdot f(r)$)

La surface du cylindre est minimale pour $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ et $h = \frac{V}{\pi r^2}$

EXERCICE 208 (③) Par Lancelot Soit α un élément de $]0;1[$

1. En étudiant une fonction judicieuse, montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad (1+x)^\alpha \leq 1 + x^\alpha.$$
2. Soient x et y dans $\mathbb{R}_+$ avec $y > x$. Montrer que $y^\alpha - x^\alpha \leq (x-y)^\alpha$.

1. On pose :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) := (1+x)^\alpha - 1 - x^\alpha.$$
Il est clair que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On calcule alors :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha x^{\alpha-1} = \alpha((1+x)^{\alpha-1} - x^\alpha).$$
Observons que $\alpha - 1 < 0$. Par conséquent, la fonction $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x^\alpha$ est décroissante. En particulier f' est négative sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Puisque $f(0) = 0$, on conclut :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) \leq 0 \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad (1+x)^\alpha \leq 1 + x^\alpha,$$
ce qu'il fallait montrer.
2. Il faut ici user d'une petite astuce. On écrit :
$$y^\alpha = (y - x + x)^\alpha = x^\alpha \left(\frac{y-x}{x} + 1\right)^\alpha.$$
En appliquant a. il vient que :
$$y^\alpha \leq x^\alpha \left(1 + \left(\frac{y-x}{x}\right)^\alpha\right) = x^\alpha + (y-x)^\alpha,$$
d'où l'on tire que :
$$y^\alpha - x^\alpha \leq (y-x)^\alpha,$$
achevant l'exercice.

EXERCICE 209 (③) par Léo

Soit $p \in]1; +\infty[$

a) Montrer qu'il existe un unique réel q tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Vérifier que $q > 1$. Déterminer q pour $p = 2$ puis pour $p = 4$

b) On fixe y dans $\mathbb{R}^{+*}$. Etudier les variations de la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy$$

c) Conclure que

$$\forall (x,y) \in {\mathbb{R}^{+*}}^2, \quad xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

a) $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 \iff \dfrac{1}{q} = \dfrac{p-1}{p} \iff q = \dfrac{p}{p-1}$.
Puisque $p > p-1$, on a bien $q > 1$, et pour $p = 2, q = 2$ et finalement pour $p = 4, q = \frac{4}{3}$

b) $f'(x) = x^{p-1} - y$, on peut donc tracer le tableau de variations suivant :

x	0		$y^{\frac{1}{p-1}}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f\left(y^{\frac{1}{p-1}}\right)$	$\nearrow$	

En effet, $f'(x) = 0 \implies x^{p-1} = y \implies x = \sqrt[p-1]{y} = y^{\frac{1}{p-1}}$

c) On a donc, $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f(x) \geqslant f\left(y^{\frac{1}{p-1}}\right)$
Or, $f\left(y^{\frac{1}{p-1}}\right) = \dfrac{y^{\frac{p}{p-1}}}{p} + \dfrac{y^q}{q} - y^{\frac{p}{p-1}} = y^q \cdot \left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 1\right) = 0$, donc l'inégalité est bien vérifiée :

$$\forall (x,y) \in {\mathbb{R}^{+*}}^2, \quad xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

7.2 Fonctions puissances et croissances comparées

EXERCICE 210 (①) par Elies

Déterminer la limite de $\dfrac{(1,01)^x}{x^{2022}}$ en $+\infty$

On pose $a = 1.01, \alpha = 2022$. Il est clair que $a > 1$. On applique alors la remarque 2 de **7.2** pour aboutir à

$$\frac{(1,01)^x}{x^{2022}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty.$$

EXERCICE 211 (①) par J. Hoarau

Trouver la limite en $+\infty$ de

$$f(x) = e^{-\sqrt{x}}x^2, \quad g(x) = e^{-x^2}x^{10000}, \quad h(x) = \ln(x)^8 e^{-x},$$

$$i(x) = \frac{1.0001^x}{x^{2021}}, \quad j(x) = \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}.$$

EXERCICE 212 (②) par Elies

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. En posant $y = \dfrac{1}{x}$, trouver la limite en 0^+ de :

$$f_\alpha(x) = x^\alpha \ln(x)$$

On a : $y^\alpha = \dfrac{1}{x^\alpha}$, donc quand $x \longrightarrow 0^+, y \to +\infty$

On a également : $f_\alpha(x) = -\dfrac{\ln(y)}{y^\alpha}$. Par conséquent, on a en utilisant les croissances comparées :

$$\lim_{x\to 0^+} f_\alpha(x) = \lim_{y\to+\infty} -\frac{\ln(y)}{y^\alpha} = 0$$

EXERCICE 213 (②) par Tristan

En appliquant la méthode de démonstration du théorème 3 de **5.5**, montrer que, si $a \in \mathbb{R}^+$ et $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, alors

$$\frac{a^n}{(n!)^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Soit $a \in \mathbb{R}^+$ et $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$.

On pose si $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{a^n}{(n!)^\alpha}$ et on note que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{(n+1)^\alpha}$$

Pour $n \geq (2a)^{\frac{1}{\alpha}} - 1$, on a donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{1}{2}$. Notons N le plus petit entier supérieur ou égal à $(2a)^{\frac{1}{\alpha}} - 1$

Ainsi

$$\forall n \geq N, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$$

D'où, par une récurrence laissée au lecteur,

$$\forall n \geq N, \quad u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} u_N$$

Le majorant tend vers 0 et $(u_n)_{n\geq 0}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, ce qui entraîne le résultat.

7.3 L'inégalité artihmético-géometrique

EXERCICE 214 (④) par Tristan

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \ldots, x_n$ des éléments de $\mathbb{R}^{+*}$. La moyenne harmonique de $(x_1, \ldots, x_n)$ est le réel H tel que $\dfrac{1}{H}$ soit la moyenne arithmétique du n-uplet $\left(\dfrac{1}{x_1}, \ldots, \dfrac{1}{x_n}\right)$. En d'autres termes : $H = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$. En appliquant le théorème 7 à $\left(\dfrac{1}{x_1}, \ldots, \dfrac{1}{x_n}\right)$, montrer que $H \leq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$, et qu'il y a égalité si et seulement si les x_i sont tous égaux.

On commence par rappeler l'énoncé du théorème 7 :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \ldots, x_n$ des éléments de $\mathbb{R}^{+*}$.

Alors :

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$$

Pour le n-uplet $\left(\frac{1}{x_1}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right)$ d'éléments de $\mathbb{R}^{+*}$, on a donc :

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}$$

Comme $H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$, on a $H \leq \frac{1}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}} = \sqrt[n]{\frac{1}{\frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i}}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$

On retrouve ainsi l'inégalité voulue :

$$H \leq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

Montrons maintenant que cette inégalité est une égalité si et seulement si les x_i sont tous égaux.

Supposons dans un premier temps que les x_i sont tous égaux et montrons que nous sommes alors dans le cas d'égalité. (i)

Si les x_i sont tous égaux alors on a d'après le théorème 7 :

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}$$

Donc :

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

Et par conséquent :

$$H = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

Supposons désormais que les x_i ne sont pas tous égaux et montrons alors que nous ne sommes pas dans le cas d'égalité. (ii)

Si les x_i ne sont pas tous égaux alors on a d'après le théorème 7 :

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} < \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}$$

Donc :

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}} > \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

Et par conséquent :

$$H < \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

D'après (i) et (ii), on a $H = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$ si et seulement si tous les x_i sont égaux.

Exercice 215 (④) par Tristan

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on se propose d'établir la propriété suivante, que l'on appelle $\mathcal{P}_n$: pour tout n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments de $\mathbb{R}^{+*}$, on a

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i},$$

avec égalité si et seulement si les x_i sont tous égaux. La démonstration proposée dans cet exercice est due à Cauchy.

On note A l'ensemble des n de $\mathbb{N}^*$ tels que $\mathcal{P}_n$ soit vraie.

a) Montrer que $\mathcal{P}_2$ est vraie.

b) Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que, si $\mathcal{P}_n$ est vraie, il en est de même de $\mathcal{P}_{2n}$.

c) Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que, si $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, il en est de même de $\mathcal{P}_n$. On pourra, si $x_1, \ldots, x_n$ sont des éléments de $\mathbb{R}^{+*}$, poser :

$$x_{n+1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

d) Conclure à l'aide de l'exercice 13 de **1.3**.

a) Soit $n = 2$. Alors : $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} x_i = \frac{x_1 + x_2}{2}$ et $\sqrt{\prod_{i=1}^{2} x_i} = \sqrt{x_1 x_2}$

Or, $\frac{x_1 + x_2}{2} - \sqrt{x_1 x_2} = \frac{x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1 x_2}}{2} = \frac{\left(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right)^2}{2} \geq 0$ donc $\mathcal{P}_2$ est vraie.

b) Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Alors :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

$$\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} x_i \geq \frac{1}{2}\left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} + \frac{1}{n}\sum_{i=n+1}^{2n} x_i\right)$$

$$\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} x_i \geq \frac{1}{2}\left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} + \sqrt[n]{\prod_{i=n+1}^{2n} x_i}\right)$$

Or, $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} + \sqrt[n]{\prod_{i=n+1}^{2n} x_i} \geq 2\sqrt[2n]{\prod_{i=1}^{2n} x_i}$ (il suffit d'observer l'inégalité $a^2 + b^2 \geq 2ab$ pour s'en convaincre.)

Ainsi, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \sqrt[2n]{\prod_{i=1}^{2n} x_i}$ et $\mathcal{P}_{2n}$ est vraie.

c) Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Alors :

$$\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} x_i \geq \sqrt[n+1]{\prod_{i=1}^{n+1} x_i}$$

$$\frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + x_{n+1}\right) \geq \sqrt[n+1]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \times \sqrt[n+1]{x_{n+1}}$$

En posant alors $x_{n+1} = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$, on obtient :

$$\frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + x_{n+1}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Et :

$$\sqrt[n+1]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \times \sqrt[n+1]{x_{n+1}} \geq \sqrt[n+1]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \times \sqrt[n(n+1)]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

$$\sqrt[n+1]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \times \sqrt[n+1]{x_{n+1}} \geq \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n\,(n+1)}}$$

$$\sqrt[n+1]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \times \sqrt[n+1]{x_{n+1}} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

Ainsi, on retrouve $\mathcal{P}_n$ qui est alors vraie si $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

d) D'après l'exercice 13, si B est une partie de $\mathbb{N}^*$ contenant 1 et telle que :

$$(i) \quad \forall n \in B,\ 2n \in B$$

$$(ii) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ n+1 \in B \Rightarrow n \in B$$

Alors $B = \mathbb{N}^*$

Selon les questions b) et c) de cet exercice, l'ensemble A défini dans cet exercice vérifie (i) et (ii).

De plus, il est évident que $\mathcal{P}_1$ est vrai donc $1 \in A$ ce qui justifie $A = \mathbb{N}^*$.

Comme $A = \mathbb{N}^*$, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel $n > 0$.

EXERCICE 216 (③) par Estelle

Les arêtes d'un parallélépipède rectangle ont pour longueurs a, b, c. Le volume du parallélépipède est noté V, son aire latérale (i.e. la somme des aires des six faces) est notée S.

a) Calcule V et S en fonction de a, b et c

b) Montrer que

$$\frac{ab+bc+ca}{3} \geqslant V^{\frac{2}{3}}$$

A quelle condition y a-t-il égalité ?

c) Quel est le volume maximal d'un paralléléppipède d'aire latérale S donnée ? Pour quels parallélépipèdes est-il atteint ?

a) $V = abc$ et $S = 2ab + 2ac + 2bc$

b) Soient $x_1 = ab, x_2 = bc$ et $x_3 = ca$ D'après l'inégalité arithmético-géométrique (théorème 7.)

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\text{donc} \quad \sqrt[3]{abbcca} \leqslant \frac{1}{3}\cdot(ab+bc+ca)$$

$$\text{donc} \quad \sqrt[3]{(abc)^2} \leqslant \frac{ab+bc+ac}{3}$$

$$\text{donc} \quad V^{\frac{2}{3}} \leqslant \frac{ab+bc+ca}{3}$$

Il y a égalité si et seulement si $ab = bc = ca$, à savoir ssi $a = b = c$

c) On a

$$\begin{aligned} V^{\frac{2}{3}} &\leqslant \frac{ab+bc+ca}{3} \\ \Longleftrightarrow V &\leqslant \left(\frac{ab+bc+ca}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \\ \Longleftrightarrow V &\leqslant \left(\frac{S}{6}\right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

On sait qu'il y a égalité lorsque $a = b = c$, donc le volume est maximal si le parallélépipède est un cube

EXERCICE 217 (④) par Jean

Soit ABC un triangle. On note a, b, c les longueurs respectives des côtés BC, CA, AB. Le demi-périmètre de ABC est noté p : $p = \dfrac{a+b+c}{2}$. L'aire de ABC est notée S.

Le but des trois premières questions est d'établir la formule de Héron :

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

a) Au moins une des hauteurs du triangle est intérieure au triangle. Supposons que ce soit le cas de la hauteur issue de A, dont on note H le pied. On pose $x = BH$. Montrer que

$$x^2 + h^2 = c^2 \quad \text{et que} \quad (a-x)^2 + h^2 = b^2$$

b) Montrer que

$$16S^2 = 4a^2h^2 = 4a^2c^2 - 4a^2x^2$$

c) Etablir la formule de Héron.

d) En déduire l'inégalité :

$$S \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$$

l'égalité ayant lieu si et seulement si le triangle est équilatéral. Ainsi, parmi les triangles de périmètre fixé, l'aire maximale est atteinte pour les triangles équilatéraux.

a) Le triangle ABH est rectangle en H, donc d'après le théorème de pythagore :

$$AH^2 + HB^2 = AB^2 \Leftrightarrow h^2 + x^2 = c^2$$

De même, dans le triangle AHC on a :

$$AH^2 + HC^2 = AC^2 \Leftrightarrow h^2 + (a-x)^2 = b^2$$

b) $S = \dfrac{1}{2}ah$ donc

$$\begin{aligned} 16S^2 &= \frac{16}{4}a^2h^2 \\ &= 4a^2h^2 \\ &= 4a^2(c^2 - x^2) \qquad \text{puisque } h^2 = c^2 - x^2 \text{ d'après } \mathbf{a)} \\ &= 4a^2c^2 - 4a^2x^2 \end{aligned}$$

c) $16S^2 = 4a^2c^2 - 4a^2x^2 = (2ac)^2 - (2ax)^2 = (2ac + 2ax)(2ac - 2ax)$.

Or, d'après les deux égalités de la question **a)** :

$$h^2 + a^2 - 2ax + x^2 = b^2$$

$$\Leftrightarrow -2ax = b^2 - a^2 - (h^2 + x^2) = b^2 - a^2 - c^2$$

Donc

$$\begin{aligned}
16S^2 &= (2ac + a^2 + c^2 - b^2)(2ac - a^2 - c^2 + b^2) \\
&= ((a+c)^2 - b^2)(b^2 - (a-c)^2) \\
&= (a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c) \\
&= (a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
S^2 &= \left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a-b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\left(\frac{-a+b+c}{2}\right) \\
&= p(p-b)(p-c)(p-a)
\end{aligned}$$

d) D'après l'inégalité arithmético-géométrique :

$$(p-b)(p-c)(p-a) \leq \left(\frac{1}{3}(p-b+p-c+p-a)\right)^3$$

$$\Leftrightarrow p(p-b)(p-c)(p-a) \leq p\left(\frac{1}{3}p\right)^3$$

$$\Leftrightarrow S^2 \leq \frac{p^4}{27}$$

Et puisque $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$:

$$\Leftrightarrow S \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$$

On a égalité si et seulement si $p-a = p-b = p-c \Leftrightarrow a = b = c$, c'est-à-dire si ABC est équilatéral.

L'aire d'un triangle de périmètre fixé est donc maximale s'il est équilatéral.

Exercice 218 (③) Samy Clementz, Georges Faraj

Trouver les limites quand x tend vers $+\infty$ de :

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x, \quad g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}.$$

Première méthode. On utilisera la limite clé suivante, traduisant le fait que la dérivée en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est 1 :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Maintenant,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \exp\left(x \ln(1 + \frac{1}{x^2})\right) \\
&= \exp(u(x)),
\end{aligned}$$

avec $u(x) = x \ln(1 + \frac{1}{x^2})$. Pour connaître la limite de u en $+\infty$, on écrit :

$$\begin{aligned}
u(x) &= x \frac{\ln(1 + \frac{1}{x^2})}{\frac{1}{x^2}} \frac{1}{x^2} \\
&= \frac{1}{x} \frac{\ln(1 + \frac{1}{x^2})}{\frac{1}{x^2}}.
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après la limite clé ci-dessus, $\lim_{x\to+\infty} u(x) = 0$. Comme exp est continue en 0,

$$\lim_{x\to+\infty} \exp(u(x)) = \exp(0) = 1.$$

Finalement $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

De même, pour g,

$$\begin{aligned} g(x) &= \exp\left(x^2 \ln(1+\frac{1}{x})\right) \\ &= \exp(v(x)), \end{aligned}$$

avec $v(x) = x^2 \ln(1+\frac{1}{x})$. Pour connaître la limite de v en $+\infty$, on écrit :

$$\begin{aligned} v(x) &= x^2 \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} \frac{1}{x} \\ &= x \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après la limite clé ci-dessus, $\lim_{x\to+\infty} v(x) = +\infty$. Comme $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \exp(v(x)) = +\infty.$$

Finalement $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

Deuxième méthode.

— On a :

$$(\frac{1}{x^2}+1)^x = e^{x\ln(\frac{1}{x^2}+1)}$$

On étudie alors la limite de $x\ln(\frac{1}{x^2}+1)$
On sait que $\frac{1}{x^2}+1>1$ donc $\ln(\frac{1}{x^2}+1)>0$. On a donc $0 \leq x\ln(\frac{1}{x^2}+1)$
Par concavité de la fonction ln :

$$\ln(\frac{1}{x^2}+1) \leq \frac{1}{x^2} \iff x\ln(\frac{1}{x^2}+1) \leq \frac{1}{x}$$

En prenant alors les limites quand x tend vers ∞ on a :

$$0 \leq \lim_{x\to+\infty} x\ln(\frac{1}{x^2}+1) \leq 0$$

On comprend donc alors que

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln(\frac{1}{x^2}+1) = 0$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} e^{x\ln(\frac{1}{x^2}+1)} = 1$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} (\frac{1}{x^2}+1)^x = 1$$

— On a :

$$(1+\frac{1}{x})^{x^2} = e^{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}$$

On étudie la limite de $x^2\ln(1+\frac{1}{x})$ D'après les encadrements de Neper :

$$\frac{u-1}{u} \leq \ln(u) \leq u-1$$

donc

$$\frac{1}{x+1} \leq \ln(1+\frac{1}{x}) \iff x^2\ln(1+\frac{1}{x}) \geq \frac{x^2}{x+1}$$

donc

$$\lim x \to +\infty x^2 \ln(1+\frac{1}{x}) \geq \lim x \to +\infty \frac{x^2}{x+1} = +\infty$$

On comprend alors que :

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\ln(1+\frac{1}{x}) = +\infty$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} e^{x^2\ln(1+\frac{1}{x})} = +\infty$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} (1+\frac{1}{x})^{x^2} = +\infty$$

Remarque. L'inégalité de Neper se laisse démontrer en utilisant l'intégration. en effet, pour $x \in [1;+\infty[$,

$$\forall t \in [1;+\infty[, \quad \frac{1}{t} \geq \frac{1}{t^2},$$

donc

$$\int_1^x \frac{dt}{t^2} \leq \int_1^x \frac{dt}{t},$$

d'où

$$\frac{x-1}{x} \leq \ln(x).$$

7.4 utilisation de la forme exponentielle pour le calcul des limites

Exercice 219 (③) par Tristan

Trouver la limite quand x tend vers $+\infty$ de

$$f(x) = \frac{\ln(x)^x}{x^{\ln(x)}}$$

On commence par réécrire $f(x)$ sous forme exponentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f(x) = \exp\left(x\ln(\ln(x)) - \ln(x)^2\right)$$

On pose ensuite $X = \ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

D'où

$$f(x) = \exp\left(e^X\ln(X) - X^2\right)$$

$$f(x) = \exp\left(e^X\left(\ln(X) - \frac{X^2}{e^X}\right)\right)$$

Par croissance comparée, $\frac{X^2}{e^X} \xrightarrow[X\to+\infty]{} 0$ et $e^X\left(\ln(X) - \frac{X^2}{e^X}\right) \xrightarrow[X\to+\infty]{} +\infty$

Alors

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)) = +\infty$$

Exercice 220 (④) par Tristan

a) Montrer que x^x tend vers 1 lorsque x tend vers 0^+.
b) Indiquer un exemple de fonction u de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ tendant vers 0 en 0 et telle que $u(x)^x$ ne tende pas vers 1 lorsque x tend vers 0^+.
c) Indiquer un exemple de fonction v de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ tendant vers 0 en 0 et telle que $x^{v(x)}$ ne tende pas vers 1 lorsque x tend vers 0^+.

a) On réécrit $f(x) = x^x$ sous forme exponentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f(x) = e^{x \ln(x)}$$

Par croissance comparée, $x \ln(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$ donc $e^{x \ln(x)} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 1$ d'où $\lim_{x \to 0^+} (x^x) = 1$.

b) Soit $u : x \underset{]0,1[\to \mathbb{R}^{+*}}{\longmapsto} e^{\frac{\ln(x)}{x}}$

Alors on a bien $\lim_{x \to 0} (u(x)) = 0$

Et :

$$\begin{aligned} u(x)^x &= \exp(x \ln(u(x))) \\ &= \exp\left(\frac{x \ln(x)}{x}\right) \\ &= x \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{x \to 0^+} (u(x)^x) = 0^+ \neq 1$$

c) Soit $v : x \underset{]0,1[\to \mathbb{R}^{+*}}{\longmapsto} -\frac{1}{\ln(x)}$

Alors on a bien $\lim\limits_{x \to 0} (v(x)) = 0$

Et :

$$\begin{aligned} x^{v(x)} &= \exp(-v(x) \ln(x)) \\ &= \exp\left(\frac{\ln(x)}{\ln(x)}\right) \\ &= e \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{x \to 0^+} \left(x^{v(x)}\right) = e \neq 1$$

Exercice 221 (④) par Tristan

Soient a et b deux éléments de $\mathbb{R}^{+*}$, f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x}$$

Déterminer la limite de f en 0.

On commence par réécrire la fonction :

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp\left(\frac{1}{x} \ \ln\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)\right) \\ &= \exp\left(\frac{\ln(a^x + b^x) - \ln(2)}{x}\right) \end{aligned}$$

On reconnaît ici le taux d'accroissement de la fonction $g(x) = \ln(a^x + b^x)$ en 0. Comme il s'agit d'une fonction dérivable car composée de fonctions dérivables, la limite de f en 0 est $\exp(g'(0))$.

$$g'(x) = \frac{a^x \ \ln(a) + b^x \ \ln(b)}{a^x + b^x}$$

Donc

$$\begin{aligned} \exp(g'(0)) &= \exp\left(\frac{\ln(a) + \ln(b)}{2}\right) \\ &= \exp\left(\ln\left(\sqrt{ab}\right)\right) \\ &= \sqrt{ab} \end{aligned}$$

D'où $\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x} \xrightarrow[x\to 0]{} \sqrt{ab}$.

Remarque. Cet exercice peut également être l'occasion de s'initier aux développements limités (abrégés en DL), qui seront étudiés au cours de l'année de sup. Il n'est donc pas nécessaire de comprendre cette deuxième correction, même si elle permet de traiter le problème dans des cas plus généraux que celui-ci.

On réécrit l'expression de $\dfrac{a^x+b^x}{2}$ grâce aux DL :

$$\begin{aligned}\frac{a^x+b^x}{2} &= \frac{e^{x\ln(a)}+e^{x\ln(b)}}{2}\\ &= \frac{1+x\ln(a)+1+x\ln(b)+o(x)}{2}\\ &= 1+x\frac{\ln(a)+\ln(b)}{2}+o(x)\end{aligned}$$

Ainsi toujours par DL,

$$\begin{aligned}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x} &= \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(1+x\frac{\ln(a)+\ln(b)}{2}+o(x)\right)\right)\\ &= \exp\left(\frac{1}{2x}\left(x\left(\ln(a)+\ln(b)\right)+o(x)\right)\right)\\ &= \exp\left(\frac{1}{2}\ln(ab)+o(x)\right)\\ &= e^{\ln\left(\sqrt{ab}\right)+o(x)}\end{aligned}$$

$$\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x} \xrightarrow[x\to 0]{} \sqrt{ab}$$

8 Intégration

8.1 Calculs d'intégrales et de primitives

EXERCICE 222 (②) par Matilde

Calculer les primitives des fonctions suivantes :

- $a : x\in\mathbb{R} \mapsto \cos(3x)+2\sin(5x)$
- $b : x\in\mathbb{R} \mapsto 6\exp(-4x)$
- $c : x\in\mathbb{R} \mapsto \cos(x)\sin(x)$
- $d : x\in\mathbb{R} \mapsto x^2\exp(-x^3)$
- $e : x\in\mathbb{R} \mapsto \frac{x}{x^2+1}$
- $f : x\in\mathbb{R} \mapsto \exp(x)\exp(\exp(x))$
- $g : x\in\mathbb{R}^+ \mapsto \sqrt{x}$
- $h : x]-1,1[\mapsto \frac{3x}{\sqrt{(a-x^2)}}$
- $i : x\in\mathbb{R} \mapsto (1-2x)^5$
- $j : x]-\infty,1[\mapsto \frac{x^2}{x^3-1}$
- $k : x\in\mathbb{R} \mapsto \frac{1}{1+2\exp(-x)}$
- $l : x]1,+\infty[\mapsto \frac{(\ln(x))^\alpha}{x}$
- $m : x]-1,+\infty[\mapsto \frac{1}{(x+1)^n}$
- $n : x]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\mapsto \tan(x)$
- $p : x\in\mathbb{R}^{+*} \mapsto \frac{\sin(x)-x\cos(x)}{x^2}$

- $A(x)=\frac{1}{3}\sin(3x)-\frac{2}{5}\cos(5x)$
- $B(x)=\frac{-3}{2}\exp(-4x)$
- $C(x)=\frac{-1}{4}\cos(2x)$
- $D(x)=\frac{-1}{3}\exp(-x)^3$
- $E(x)=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$
- $F(x)=\exp\exp(x)$
- $G(x)=\frac{2}{3}(\sqrt{x})^3$
- $H(x)=-3\sqrt{a-x^2}$
- $I(x)=\frac{-1}{12}(1-2x)^6$
- $J(x)=\frac{1}{3}\ln(x^3-1)$
- $K(x)=\ln(\exp(x)+2)$
- $L(x)=\frac{\ln(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
- $M(x)=\frac{(x+1)^{1-n}}{1-n}$
- $N(x)=-\ln(\cos(x))$
- $P(x)=\frac{-\sin(x)}{x}$

Exercice 223 (②) par Matilde

En utilisant les relations obtenues dans l'exemple de **2.3** et dans l'exercice 46, calculer :

$$I = \int_1^3 \frac{dt}{t(t+1)}, \quad J = \int_2^5 \frac{dt}{t(t+1)(t+2)}$$

Trouvons d'abord une primitive $H(t)$ de la fonction $h(t) = \dfrac{1}{t(t+1)}$:

$$h(t) = \frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$$

$$H(t) = \ln(t) - \ln(t+1) = \ln\left(\frac{t}{t+1}\right)$$

Puis, utilisons-la pour le calcul de l'intégral :

$$I = \int_1^3 \frac{dt}{t(t+1)} = H(3) - H(1) = \ln\left(\frac{3}{4}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

Trouvons d'abord une primitive $F(t)$ de la fonction $f(t) = \dfrac{1}{t(t+1)(t+2)}$:

$$f(t) = \frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{3t} + \frac{1}{2(t+1)} - \frac{1}{6(t+2)}$$

$$F(t) = \frac{1}{3}\ln(t) + \frac{1}{2}\ln(t+1) - \frac{1}{6}\ln(t+2)$$

Puis, utilisons-la pour le calcul de l'intégral :

$$J = \int_2^5 \frac{dt}{t(t+1)(t+2)} = F(5) - F(2) = \frac{1}{3}\ln(5) + \frac{1}{2}\ln(6) - \frac{1}{6}\ln(7) - \left[\frac{1}{3}\ln(2) + \frac{1}{2}\ln(3) - \frac{1}{6}\ln(4)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\ln(\frac{5}{2}) + \ln(\sqrt{2}) - \frac{1}{6}\ln(\frac{7}{4})$$

Exercice 224 (②) proposé par Antonin D

Pour p et q dans $\mathbb{N}^*$, calculer :

$$\int_0^{2\pi} \cos(pt)\cos(qt)\mathrm{d}t, \quad \int_0^{2\pi} \sin(pt)\sin(qt)\mathrm{d}t.$$

Rappel :

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a-b) + \cos(a+b)}{2}$$

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$$

Si p=q

$$\int_0^{2\pi} \cos(pt)^2 dt = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2pt)}{2} dt = \pi$$

Si p≠q

$$\int_0^{2\pi} \cos(pt)\cos(qt)dt = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(pt-qt) + \cos(pt+qt)}{2} dt = 0$$

Si p=q

$$\int_0^{2\pi} \sin(pt)^2 dt = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2pt)}{2} dt = \pi$$

Si p≠q

$$\int_0^{2\pi} \sin(pt)\sin(qt)dt = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(pt-qt)-\cos(pt+qt)}{2} dt = 0$$

Exercice 225 (3) Par Alexandre C

Pour $n \in \mathbb{N}$, f_n désigne la fonction de $]0,\pi]$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in]0,\pi], \quad f_n(t) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer, en utilisant le fait que $\frac{\sin(u)}{u}$ tend vers 1 lorsque u tend vers 0, que la fonction f_n admet une limite que l'on précisera en 0. Ceci permet de prolonger f_n en une fonction continue sur $[0,\pi]$, encore notée f_n et de poser

$$\int_0^{\pi} f_n(t)dt.$$

2. Si $n \in \mathbb{N}$, calculer $I_{n+1} - I_n$, puis I_n.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme

$$\begin{cases} t/2 \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \\ \left(n+\dfrac{1}{2}\right)t \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \end{cases}$$

on a

$$\frac{\sin(t/2)}{t/2} \xrightarrow[t\to 0]{} 1 \quad \text{et} \quad \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1 \quad \text{(par composition des limites)}$$

d'où

$$\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)t/2}{\sin(t/2)\left(n+\frac{1}{2}\right)t} = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin(t/2)(2n+1)} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$$

donc

$$\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin(t/2)} \xrightarrow[t\to 0]{(} 2n+1)$$

donc $f_n(t)$ tend vers $2n+1$ quand t tend vers 0.

2. On a :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(\left(n+1+\frac{1}{2}\right)t\right) - \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin(t/2)} dt.$$

On rappelle que :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{R}^2, \quad \sin(p) - \sin(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

d'où

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi} \frac{2\cos((n+1)t)\cancel{\sin(t/2)}}{\cancel{\sin(t/2)}} dt = 0.$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = I_0 = \int_0^{\pi} dt = \pi.$$

Exercice 226 (3) par Matilde

Pour $x \in [0,1[$, calculer :

$$F(x) = \int_0^x \ln\left[\frac{1+t}{1-t}\right] dt.$$

Quelle est la limite de la fonction F lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures ?

Trouvons d'abord une primitive de $\ln\left(\dfrac{1+t}{1-t}\right)$:

$$\ln((1-t)(1+t)) + t\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$$

Cela nous permet de trouver une expression plus simple pour F :

$$F = \int_0^x \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) = \ln((1-x)(1+x)) + x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln((1-x)(1+x)\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^x$$

$$= \ln\left(\frac{(1+x)^{x+1}}{(1-x)^{x-1}}\right)$$

On peut alors calculer la limite de F lorsque x tend vers 1 :

$$\lim_{x\to 1, x<1}(1+x)^{x+1} = 4$$

$$\lim_{x\to 1, x<1}(1-x)^{x-1} = 0$$

$$\lim_{x\to 0, x>0}\frac{(1+x)^{x+1}}{(1-x)^{x-1}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1, x<1}\ln\left(\frac{(1+x)^{x+1}}{(1-x)^{x-1}}\right) = +\infty$$

La limite de la fonction F en 1 par valeurs inférieures est $+\infty$.

EXERCICE 227 (①) Par Alexandre C

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, f une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. La valeur moyenne d'une fonction est le réel

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt.$$

1. Quelle est la valeur moyenne d'une fonction constante sur $[a,b]$? Montrer que si f est une fonction affine, sa valeur moyenne sur $[a,b]$ est $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.
2. Montrer que la valeur moyenne de f sur $[a,b]$ appartient à l'intervalle $[m;M]$ où m (resp. M) est le minimum (resp. maximum) de f sur $[a,b]$.

1. — Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que f est constante égale à $C \in \mathbb{R}$ sur $[a,b]$. Alors la valeur moyenne de f sur $[a,b]$ est :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt = \frac{1}{b-1}\int_a^b Cdt = \frac{1}{b-a}\times(b-a)\times C = C$$

— Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle qu'il existe $(c,d) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in [a;b], \quad f(x) = cx + d \quad (f \text{ est une fonction affine})$$

Alors la valeur moyenne de f sur $[a,b]$ vaut

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt &= \frac{1}{b-a}\int_a^b (ct+d)dt\\ &= \frac{1}{b-a}\left(\left[\frac{ct^2}{2}+dt\right]_a^b\right)\\ &= \frac{1}{b-a}\left(\frac{cb^2}{2}+db-\frac{ca^2}{2}-da\right)\\ &= c\left(\frac{a+b}{2}\right)+d\\ &= f\left(\frac{a+b}{2}\right)\end{aligned}$$

2. Supposons que
$$\forall t\in[a,b],\quad m\le f(t)\le M.$$
En intégrant cette inégalité entre a et b on obtient :
$$m(b-a)=\int_a^b m dt\le\int_a^b f(t)dt\le\int_a^b Mdt=M(b-a)$$
d'où
$$m\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\le M,$$
ce qu'il fallait démontrer.

8.2 Intégration des inégalités

EXERCICE 228 (②) par Mathieu

Soit f une fonction continue de $[1;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que
$$\forall t\in[1;+\infty[,\qquad f(t)\ge\frac{1}{t}.$$
Montrer que
$$\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty.$$

Sur l'intervalle $[1;+\infty[$,
$$f(t)\ge\frac{1}{t}.$$
Pour $x\ge1$, on intégre l'inégalité
$$\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t\ge\int_1^x\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$
$$\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t\ge\ln(x).$$
Étant donné que $\ln(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$, on trouve finalement par comparaison que
$$\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty.$$

EXERCICE 229 (④) par Octave

Soient f et g deux fonctions continues et croissantes de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

a) Pour $(x,y)\in[0,1]^2$, quel est le signe de $(f(y)-f(x))(g(y)-g(x))$?

b) En déduire que

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \times \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

c) Donner une version discrète (i.e. portant sur des sommes) de cette inégalité.

a) On procède par disjonction de cas
Si $y < x$, alors $(f(y) - f(x)) < 0$ et $(g(y) - g(x)) < 0$ car f et g deux fonctions croissantes de $[0;1[$.
Donc $(f(y) - f(x))(g(y) - g(x)) > 0$.
Par raisonnement analogue, si $y \geqslant x$, alors $(f(y) - f(x))(g(y) - g(x)) \geqslant 0$. Ainsi

$$\forall (x,y) \in [0,1[^2, \quad (f(y) - f(x))(g(y) - g(x)) \geqslant 0.$$

b) On remarque que si on intègre selon x (resp y), les fonctions de y (resp x) sont constantes, et intégrer une constante de 0 à 1 revient à la multiplier par 1. Or :

$$\begin{aligned}
(f(y) - f(x))(g(y) - g(x)) &\geqslant 0 \\
f(y)g(y) - f(y)g(x) - f(x)f(y) + f(x)g(x) &\geqslant 0 \\
f(y)g(y) + f(x)g(x) &\geqslant f(y)g(x) + f(x)f(y) \\
\text{Donc : } \int_0^1 f(x)g(x)\ \mathrm{d}x + f(y)g(y) &\geqslant g(y)\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x + f(y)\int_0^1 g(x)\ \mathrm{d}x \\
\int_0^1 f(x)g(x)\ \mathrm{d}x + \int_0^1 f(y)g(y)\ \mathrm{d}y &\geqslant 2\left(\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x \int_0^1 g(y)\ \mathrm{d}y\right) \\
\int_0^1 f(t)g(t)\ \mathrm{d}t &\geqslant \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \times \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

c) Soit les suites croissantes $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$. On a

$$\begin{aligned}
(u_n - u_m)(v_n - v_m) \geqslant 0 &\implies u_n v_n + u_m v_m \geqslant u_n v_m + u_m v_n \\
&\implies \sum_{i=0}^{n} u_i v_i + n u_m v_m \geqslant v_m \sum_{i=0}^{n} u_i + u_m \sum_{i=0}^{n} v_i \\
&\implies n \sum_{i=0}^{n} u_i v_i \geqslant \sum_{i=0}^{n} u_i \times \sum_{i=0}^{n} v_i.
\end{aligned}$$

En version intégrale,

$$x\int_0^x f(t)g(t)\ \mathrm{d}t \geqslant \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \times \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

EXERCICE 230 (④) par Octave

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, f et g deux fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On se propose d'établir l'inégalité :

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t}\,.$$

Pour x réel on pose :

$$S(x) = \int_a^b (f(t) + xg(t))^2\,\mathrm{d}t\,.$$

Vérifier que la fonction S est polynomiale de degré ≤ 2 et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Conclure en considérant le discriminant de ce trinôme.

Pour tout réel x, on a

$$\begin{aligned} S(x) &= \int_a^b (f(t)+xg(t))^2 \,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b f(t)^2 + 2f(t)g(t)x + g(t)^2x^2 \,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b g(t)^2 \,\mathrm{d}t \, x^2 + 2\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \, x + \int_a^b f(t)^2 \,\mathrm{d}t \,. \end{aligned}$$

Le discriminant de S vaut

$$\Delta = 4\left(\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 - 4\int_a^b g(t)^2\,\mathrm{d}t \int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t \,.$$

Or $\Delta \leq 0$, car S est positive et ne possède donc qu'une seule racine au maximum, alors

$$\begin{aligned} &\left(\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leq \int_a^b g(t)^2\,\mathrm{d}t \int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t \\ \Longrightarrow &\left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t} \,. \end{aligned}$$

Exercice 231 (⑤) par Octave

Les notations p, q sont celles de l'exercice 209 de **7.1** (inégalité de Young), dont on utilise également le résultat. Soient a et b deux réels tels que $a < b$, f et g deux fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On se propose de démontrer l'inégalité de Hölder :

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(t)|^q\,\mathrm{d}t\right)^{1/q} .$$

On remarquera que, pour $p = 2$, on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz (exercice précédent).

a) En utilisant l'inégalité de Young, montrer que, pour λ dans $\mathbb{R}^{+*}$:

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{\lambda^p}{p}\int_a^b |f(t)|^p\,\mathrm{d}t + \frac{1}{q\lambda^q}\int_a^b |g(t)|^q\,\mathrm{d}t \,.$$

b) Déterminer le minimum de la fonction :

$$\psi : \lambda \in \mathbb{R}^{+*} \longmapsto \frac{\lambda^p}{p}\int_a^b |f(t)|^p\,\mathrm{d}t + \frac{1}{q\lambda^q}\int_a^b |g(t)|^q\,\mathrm{d}t \,.$$

Conclure.

a) On obtient l'inégalité voulue en posant $x = \lambda|f(t)|$ et $y = \dfrac{|g(t)|}{\lambda}$, puis en intégrant les deux membres de a a b.

b) Commençons par établir une égalité qui sera utile pour la suite :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow 1 + \frac{p}{q} = p \Rightarrow p + q = pq \,. \tag{1}$$

La fonction ψ est dérivable et de dérivée continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ en tant que somme de fonctions dérivables et de dérivées continues sur cet intervalle.

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^{+*} \qquad \psi'(\lambda) = \lambda^{p-1}\int_a^b |f(t)|^p\,\mathrm{d}t - \frac{1}{\lambda^{q+1}}\int_a^b |g(t)|^q\,\mathrm{d}t \,.$$

On remarque que
$$\psi'(\lambda) \underset{\lambda\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty \qquad \text{et} \qquad \psi'(\lambda) \underset{\lambda\to +\infty}{\longrightarrow} +\infty\,.$$

Par continuité de ψ' sur $\mathbb{R}^{+*}$, on déduit grâce au TVI que ψ' s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}^{+*}$. On pose

$$\begin{aligned}
&\psi'(\lambda_0) = 0\\
\Rightarrow &{\lambda_0}^{p-1}\int_a^b |f(t)|^p\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda_0^{q+1}}\int_a^b |g(t)|^q\,\mathrm{d}t\\
\Rightarrow &{\lambda_0}^{p+q} = \frac{\int_a^b |g(t)|^q\,\mathrm{d}t}{\int_a^b |f(t)|^p\,\mathrm{d}t}\\
\Rightarrow &\lambda_0 = \left(\frac{\int_a^b |g(t)|^q\,\mathrm{d}t}{\int_a^b |f(t)|^p\,\mathrm{d}t}\right)^{\frac{1}{pq}} \qquad \text{(d'après (1)).}
\end{aligned}$$

Ainsi, ψ' ne s'annule qu'en un unique λ_0, et les limites de ψ' en 0 et $+\infty$ permettent de déduire que ψ admet un minimum global en λ_0. De plus :

$$\begin{aligned}
\psi(\lambda_0) &= \frac{1}{p}\left(\frac{\int_a^b |g(t)|^q\,\mathrm{d}t}{\int_a^b |f(t)|^p\,\mathrm{d}t}\right)^{1/q}\int_a^b |f(t)|^p\,\mathrm{d}t + \frac{1}{q}\left(\frac{\int_a^b |f(t)|^p\,\mathrm{d}t}{\int_a^b |g(t)|^q\,\mathrm{d}t}\right)^{1/p}\int_a^b |g(t)|^q\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{p}\left(\int_a^b |g(t)|^q\,\mathrm{d}t\right)^{1/q}\left(\int_a^b |f(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{1/p} + \frac{1}{q}\left(\int_a^b |g(t)|^q\,\mathrm{d}t\right)^{1/q}\left(\int_a^b |f(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{1/p}\\
&= \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\left(\int_a^b |g(t)|^q\,\mathrm{d}t\right)^{1/q}\left(\int_a^b |f(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{1/p}\\
&= \left(\int_a^b |g(t)|^q\,\mathrm{d}t\right)^{1/q}\left(\int_a^b |f(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{1/p}
\end{aligned}$$

En utilisant le résultat de la question a), on peut conclure que

$$\forall t\in[a,b], \qquad \left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{1/p}\left(\int_a^b |g(t)|^q\,\mathrm{d}t\right)^{1/q}.$$

8.3 Intégrale fonction de sa borne supérieure

Exercice 232 (③) Par Alexandre

Soient f une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, G la fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par $G(0) = f(0)$ et
$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad G(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt.$$

1. Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, donner une expression de $G'(x)$ pour $x\in\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que G est continue en 0. On pourra reconnaitre en $G(x)$ un taux d'accroissement

1. la fonction $x\in\mathbb{R}_+ \longmapsto \int_0^x f(t)dt \in\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et de dérivée f d'après le Théorème fondamental de l'analyse, et la fonction $x\in\mathbb{R}_+\longmapsto \frac{1}{x}\in\mathbb{R}$ est usuellement dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et de dérivée la fonction $x\in\mathbb{R}_+\longmapsto -\frac{1}{x^2}\in\mathbb{R}$. Donc leur produit, G, est bien dérivable sur $\mathbb{R}_+$. En outre,
$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad G'(x) = \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt \quad \text{(dérivée d'un produit)}$$

2. En notant F la fonction $x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \int_0^x f(t)dt \in \mathbb{R}$, F est dérivable de dérivée f (Théorème fondamental de l'analyse) et $F(0) = 0$. En outre,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad G(x) = \frac{F(x) - F(0)}{x - 0},$$

ce qui correspond au taux d'accroissement de F entre 0 et x. Par définition du nombre dérivée :

$$G(x) \xrightarrow[x \to 0]{} f(0) = G(0)$$

donc G est bien continue en 0 d'après la caractérisation séquentielle de la dérivée.

Exercice 233 (②) par Léo

Soient f une fonction continue de l'intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, u et v deux fonctions dérivables définies sur un intervalle J à valeurs dans l'intervalle I. Calculer la dérivée de la fonction G définie sur J par :

$$\forall x \in J, \quad G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$$

On notera que, si F est une primitive de f, alors

$$\forall x \in J, \quad G(x) = F(v(x)) - F(u(x))$$

On a $G'(x) = v'(x) \cdot F'(v(x)) - u'(x) \cdot F'(u(x))$. Or puisque F est une primitive de f, on a $F'(x) = f(x)$, donc finalement :

$$G'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$$

Exercice 234 (③) Par Lancelot

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \int_{1/x}^{x} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt = 0.$$

On pose,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad G(x) := \int_{1/x}^{x} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt \quad \text{ et } \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F(x) = \int_0^x \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt.$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad G(x) = F(x) - F(1/x).$$

On va montrer que G est constante. Par définition, F est une primitive de la fonction $t \longmapsto \frac{\ln(t)}{1+t^2}$, donc F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et de dérivée la fonction $x \longmapsto \frac{\ln(x)}{1+x^2}$. Par somme et composée, G est dérivable, et on calcule :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad G'(x) = F'(x) + \frac{1}{x^2}F'(1/x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2} + \frac{1}{x^2}\frac{\ln(1/x)}{1+1/x^2} = \frac{\ln(x)}{1+x^2} - \frac{\ln(x)}{1+x^2} = 0.$$

Donc G est constante. En particulier :

$$\forall x \in \mathbb{R} - +^*, G(x) = G(1) = \int_1^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2} = 0. =,$$

ce qu'il fallait montrer.

Exercice 235 (③) Par Lancelot
Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on pose :
$$f(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$$

1. *Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$.*

2. *Montrer que*
$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ 0 \leq f(x) \leq xe^{-x^2}.$$

En déduire la limite de f en $+\infty$

1. On pose :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\quad g(x) := \int_0^x e^{-t^2} dt,$$
de sorte que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\quad f(x) = g(2x) - g(x).$$
Observons que g est une primitive de la fonction $t \longmapsto e^{-t^2}$. Par conséquent g est dérivable et de dérivée la fonction $t \longmapsto e^{-t^2}$. Par suite, f est dérivable car somme de fonction qui le sont. On calcule alors :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\quad f'(x) = 2g'(2x) - g(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2} = 2(e^{-x^2})^4 - e^{-x^2},$$
qui est un polynôme en $X := e^{-x^2}$. On étudie donc le signe de :
$$P(X) := 2X^4 - X = X(2X^3 - 1),$$
qui s'annule naturellement en 0, mais remarquons que $\sqrt[3]{1/2}$ est aussi une racine. On se demande alors si $\sqrt[3]{1/2}$ admet un antécédent par la fonction $x \longmapsto e^{-x^2}$. Et en effet :
$$e^{-x^2} = \sqrt[3]{1/2} \Longleftrightarrow x = \sqrt{1/3\ln(2)} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{1/3\ln(2)}.$$
Notons que la première solution obtenue est dans $\mathbb{R}_+$. On déduit finalement que sur $[0; \sqrt{1/3\ln(2)}]$ (resp. $[\sqrt{1/3\ln(2)}; +\infty[$) f' est positive (resp. négative). Il s'ensuit que f est croissante (resp. décroissante) sur $[0; \sqrt{1/3\ln(2)}]$ (resp. $[\sqrt{1/3\ln(2)}; +\infty[$).

2. Il est clair que la fonction $x \longmapsto e^{-x^2}$ est décroissante et positive sur $\mathbb{R}_+$. On fixe alors $x \in \mathbb{R}_+$ pour aboutir à l'inégalité :
$$\forall t \in [x; 2x],\quad 0 \leq e^{-t^2} \leq e^{-x^2}.$$
Puis par monotonie de l'intégrale il vient que :
$$0 \leq \int_x^{2x} e^{-t^2} dt \leq \int_x^{2x} e^{-x^2} = [te^{-x^2}]_x^{2x} = xe^{-x^2}.$$
Observons que xe^{-x^2} tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. En vertu du Théorème de convergence par encadrement, on déduit que :
$$\int_x^{2x} e^{-t^2} dt \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$

Exercice 236 (④) Par Jean
Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on pose :
$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt.$$

1. *Étudier les variations de f sur chacun des deux intervalles $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$*

2. *Montrer que*

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f(x) \geq \frac{e^x}{2}.$$

En déduire la limite de f en $+\infty$.

3. *Montrer, à l'aide d'un encadrement, que f(x) tend vers 0 lorsque z tend vers $-\infty$.*

4. *Trouver une constante $C > 0$ telle que*

$$\forall t \in [-1, 1], \quad |e^t - 1| \leq Ct.$$

5. *Déduire de d) la limite de f en 0.*

a)

Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$ par :

$$G'(x) = \frac{e^x}{x}$$

Or,

$$\forall x \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[, \ f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt = G(2x) - G(x)$$

Ainsi,

$$f'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = \frac{e^{2x}}{x} - \frac{e^x}{x} = \frac{e^{2x} - e^x}{x}$$

Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$:
$f'(x)$ est du signe de $e^{2x} - e^x$. Or, dû à la stricte croissance de la fonction exponentielle $e^{2x} - e^x > 0$.
f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Pour $x \in \mathbb{R}^{-*}$:
$e^{2x} - e^x < 0$ donc $f'(x) > 0$.
f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}^{-*}$.

b)

Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$:

$$\begin{aligned} x \leq t &\leq 2x \\ donc\, e^x \leq e^t &\leq e^{2x} \\ donc\, \frac{e^x}{t} \leq \frac{e^t}{t} &\leq \frac{e^{2x}}{t} \end{aligned}$$

En intégrant par rapport à t, on obtient :

$$\int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \geq \int_x^{2x} \frac{e^x}{t} dt$$

Or,

$$\int_x^{2x} \frac{e^x}{t} dt = [e^x \cdot \ln(|t|)]_x^{2x} = e^x \ln(2x) - e^x \ln(x) = e^x \ln(2)$$

Donc :

$$f(x) \geq e^x \ln(2) \geq \frac{1}{2} \cdot e^x$$

Par comparaison avec $\frac{e^x}{2}$, on en déduit que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

c)

Pour $x \in \mathbb{R}^{-*}$:

$$\begin{aligned} x \geq t \geq 2x \\ donc\, e^x \geq e^t \geq e^{2x} \\ donc\, \frac{e^x}{t} \leq \frac{e^t}{t} \leq \frac{e^{2x}}{t} \end{aligned}$$

Donc :

$$\int_x^{2x} \frac{e^x}{t} dt \geq f(x) \geq \int_x^{2x} \frac{e^{2x}}{t} dt$$

Or :

$$\int_x^{2x} \frac{e^x}{t} dt = e^x \ln(2)$$

Et :

$$\int_x^{2x} \frac{e^{2x}}{t} dt = [e^{2x} \cdot \ln(|t|)]_x^{2x} = e^{2x} \ln(2)$$

Ainsi :

$$e^x \ln(2) \geq f(x) \geq e^{2x} \ln(2)$$

On en déduit, d'après le théorème d'encadrement, que $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0$.

d)

On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que présenté dans l'énoncé :

$$t \in [-1; 1], \text{ donc } C \geq C|t| \geq |e^t - 1|$$

Soit $k : x \to |e^x - 1|$:

$$\forall x \in]0; 1], k'(x) = e^x, k \text{ est donc strictement croissante sur}]0; 1]$$

$$\forall x \in] - 1; 0], k'(x) = -e^x, k \text{ est donc strictement décroissante sur}] - 1; 0]$$

$$Or, \quad k(-1) = 1 - e^{-1} = \frac{e-1}{e}, \quad k(1) = e - 1, \quad k(0) = 0$$

On a donc $e - 1 \geq e^t - 1$.
Prenons $C = e - 1$.

Soit $h : x \to (e - 1)|x| - e^x + 1$:

$$\forall x \in] - 1; 0], k'(x) = 1 - e - e^x$$

$$\forall x \in]0; 1], k'(x) = e - e^x - 1$$

$$h'(x) > 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x & > 0 & \\ e^x & < & e-1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x & > 0 & \\ x & < & \ln(e-1) \end{array} \right.$$

$$h'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in [-1; 0[\cup] \ln(e - 1); 1]$$

$$h(0) = 0 \;\; et \;\; h(1) = 0$$

On a :

x	-1		0		$\ln(e-1)$		1
$h'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$		$-$	

x	-1		0		$\ln(e-1)$		1
$h(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

Donc $h(x) \geq 0$, pour $x \in [-1;1]$, donc $(e-1)|t| \geq |e^t - 1|$.

(**Remarque.** Cette inégalité rappelle fortement le théorème des inégalités des accroissements finis appliqué à la fonction exponentielle : On a donc $C \geq e^x$ qui implique $|e^t - e^0| \leq C|t-0|$. Ainsi, $C \geq e$. Pour la résolution de la prochaine question, le choix de C importe peu donc $C = e$ convient également)

(**Remarque.** : On pourrait aussi résoudre cette question en étudiant la position relative de la courbe représentative de la fonction k et de ses tangentes, grâce à la convexité. (Avec $k(x) = 1 - e^x \ sur \ [-1;0] \ et \ k(x) = e^x - 1 \ sur \ [0;1]$))

e)

Pour $x \in]0;0,5]$ et $t \in [0;1]$:
D'après la question b) :

$$f(x) \geq e^x \ln(2)$$

Or, d'après la question d) :

$$(e-1)t \geq e^t - 1$$

Donc :

$$\frac{e^t}{t} \leq \frac{1}{t} + e - 1$$

Donc :

$$f(x) \leq \int_x^{2x} (\frac{1}{t} + e + 1)dt$$

Or,

$$\int_x^{2x} (\frac{1}{t} + e + 1)dt = [(e-1)t + \ln(2)]_x^{2x} = x(e-1) + \ln(2)$$

Ainsi,

$$e^x \ln(2) \leq f(x) \leq x(e-1) + \ln(2)$$

Donc, d'après le théorème d'encadrement, $f(x) \underset{x \to 0,\, x>0}{\longrightarrow} ln(2)$

Pour $x \in [-1;0]$ et $t \in [-1;0]$:
D'après un raisonnement analogue à celui de la question b) :

$$f(x) \leq e^x \ln(2)$$

Or :

$$(e-1)|t| \geq |e^t - 1|$$

Donc :

$$-(e-1)t \geq -(e^t - 1) \ (car \ e^t - 1 < 0 \ pour \ t < 0)$$

Donc :

$$\frac{e^t}{t} \leq e - 1 + \frac{1}{t}$$

Donc :

$$f(x) \geq \int_x^{2x} (\frac{1}{t} + e - 1)dt$$

Ainsi :

$$e^x \ln(2) \geq f(x) \geq x(e-1) + \ln(2)$$

Donc, d'après le théorème d'encadrement, $f(x) \underset{x \to 0,\, x<0}{\longrightarrow} ln(2)$

8.4 L'intégration par parties

EXERCICE 237 (①) par Loïse

Calculer, pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$\int_1^x t^2 \ln(t)dt, \quad \int_1^x (\ln(t))^2 dt.$$

Calculons $\int_1^x t^2 \ln(t)dt$. On pose ici, pour tout t dans $\mathbb{R}^{+*}$:

$$u(t) = \ln(t) \quad et \quad v(t) = \frac{1}{3}t^3.$$

Il vient :

$$u'(t) = \frac{1}{t}, \quad v'(t) = t^2.$$

Les conditions de dérivabilité et de continuité des fonctions sont vérifiées sur l'intervalle d'étude. L'intégration par parties donne :

$$\int_1^x t^2 \ln(t)dt = \left[\frac{1}{3}\ln(t)t^3\right]_1^x - \int_1^x \frac{1}{3}t^2 dt.$$

On a

$$\left[\frac{1}{3}\ln(t)t^3\right]_1^x = \frac{1}{3}\ln(x)x^3, \quad \int_1^x \frac{1}{3}t^2 dt = \left[\frac{1}{9}t^3\right]_1^x = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{9}.$$

Soit

$$\int_1^x t^2 \ln(t)dt = \frac{1}{3}\ln(x)x^3 - \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{9}.$$

Calculons $\int_1^x (\ln(t))^2 dt$. On pose ici, pour tout t dans $\mathbb{R}^{+*}$:

$$u(t) = (\ln(t))^2 \quad et \quad v(t) = t.$$

Il vient :

$$u'(t) = \frac{2}{t}\ln(t), \quad v'(t) = 1$$

Les conditions de dérivabilité et de continuité des fonctions sont vérifiées sur l'intervalle d'étude. L'intégration par partie donne :

$$\int_1^x (\ln(t))^2 dt = \left[t(\ln(t))^2\right]_1^x - \int_1^x 2\ln(t)dt.$$

On a

$$\left[t(\ln(t))^2\right]_1^x = x(\ln(x))^2, \quad \int_1^x 2\ln(t)dt = 2\left[t\ln(t) - t\right]_1^x = 2x\ln(x) - 2x + 2.$$

Remarque. On suppose connu l'expression d'une primitive de ln(x) ou on se reportera à l'intégration par parties de l'exemple 2. Soit

$$\int_1^x (\ln(t))^2 dt = x(\ln(x))^2 - 2x\ln(x) + 2x - 2.$$

Exercice 238 (②) Par Lancelot

Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\int_1^x t^n \ln(t) dt.$$

La fonction $t \longmapsto t^n \ln(t)$ est continument dérivable car produit de fonctions qui le sont. Une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}\int_1^x t^n \ln(x) &= \left[\frac{t^{n+1}\ln(t)}{n+1}\right]_1^x - \frac{1}{n+1}\int_1^x t^n dx \\ &= \left[\frac{t^{n+1}\ln(t)}{n+1}\right]_1^x - \frac{1}{n+1}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_1^x \\ &= \frac{x^{n+1}\ln(x)}{n+1} - \frac{x^{n+1}+1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)x^{n+1}\ln(x) - x^{n+1}+1}{(n+1)^2}.\end{aligned}$$

Exercice 239 (②) Par Lancelot

Calculer :

$$\int_0^x t^2 \sin(t) dt.$$

Plus généralement, donner une méthode permettant de calculer les primitives de fonctions de la forme $x \mapsto p(x)\sin(x)$ ou $x \mapsto p(x)\cos(x)$ où p est un polynôme.

La fonction $t \mapsto t^2 \sin(t)$ est continument dérivable car produit de fonctions qui le sont. Une intégration par partie donne que :

$$\int_0^x t^2\sin(t)dt = [-t^2\cos(t)]_0^x + \int_0^x 2t\cos(t)dt = -x^2\cos(x) + \int_0^x 2t\cos(t)dt.$$

Il nous reste à calculer l'intégrale $\int_0^x 2t\cos(t)dt$. Observons que la fonction $t \mapsto 2t\cos(t)$ est continument dérivable car produit de fonctions qui le sont. Une intégration par parties fournit que :

$$\int_0^x 2t\cos(t)dt = [2t\sin(t)]_0^x - 2\int_0^x = 2x\sin(x) + 2\cos(x) - 2.$$

Au final :

$$\int_0^x t^2\sin(t)dt = -x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x) - 2.$$

De manière général, pour calculer les primitives de fonctions de la forme $x \mapsto p(x)\sin(x)$ ou $x \mapsto p(x)\cos(x)$ où p est un polynôme, en supposant que p est de degré n, il faut intégrer successivement par parties n fois.

Exercice 240 (②) Par Lancelot

Calculer :

$$\int_0^x te^t dt, \quad \int_0^x t^2 e^t.$$

Remarquons que la fonction $t \longmapsto te^t$ est continûment dérivable en tant que produit de fonctions qui le sont. Une intégration par parties fournit alors que :

$$\int_0^x te^t dt = [te^t]_0^x - \int_0^x e^t dt = xe^x e^x + 1 = (x-1)e^x + 1.$$

De même, remarquons que la fonction $t \mapsto t^2e^t$ est continûment dérivable en tant que produit de fonctions qui le son. En utilisant une intégration par parties on obtient que :

$$\int_0^x t^2e^t dt = [t^2e^t]_0^x - 2\int_0^x te^t dt,$$

ce qui est, grâce à l'intégrale déjà calculée :

$$x^2e^x - 2(x-1)e^x - 2 = e^x(x^2 - 2x + 2) - 2.$$

On comprend alors que pour intégrer les fonctions de la forme $x \longmapsto p(x)e^x$, avec p un polynôme de degré n, on intègre n fois par parties en dérivant le polynôme.

Exercice 241 (②) par Loïse

Calculer, si a et b sont deux réels non nuls et x un réel :

$$f(x) = \int_0^x e^{at}\cos(bt)dt.$$

On intégrera successivement deux fois par parties.

Dans toute la résolution de l'exercice, a et b sont deux réels non nuls. Calculons $\int_0^x e^{at}\cos(bt)dt$. On pose ici, pour tout t dans $\mathbb{R}$:

$$u(t) = \cos(bt) \quad \textit{et} \quad v(t) = \frac{1}{a}e^{at}.$$

Il vient :

$$u'(t) = -\sin(bt), \quad v'(t) = e^{at}.$$

Les conditions de dérivabilité et de continuité des fonctions sont vérifiées sur l'intervalle d'étude. L'intégration par parties donne :

$$\int_0^x e^{at}\cos(bt)dt = \left[\frac{1}{a}e^{at}\cos(bt)\right]_0^x - \int_0^x -\sin(bt)\frac{b}{a}e^{at}dt.$$

Par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^x e^{at}\cos(bt)dt = \left[\frac{1}{a}e^{at}\cos(bt)\right]_0^x + \frac{b}{a}\int_0^x \sin(bt)e^{at}dt.$$

Pour une nouvelle intégration par parties, on pose pour tout t dans $\mathbb{R}$:

$$g(t) = \sin(bt) \quad \textit{et} \quad h(t) = \frac{1}{a}e^{at}.$$

Il vient :

$$g'(t) = b\cos(bt), \quad h'(t) = e^{at}.$$

Les conditions de dérivabilité et de continuité des fonctions sont vérifiées sur l'intervalle d'étude. La seconde intégration par parties donne :

$$\int_0^x \sin(bt)e^{at}dt = \left[\frac{1}{a}\sin(bt)e^{at}\right]_0^x - \int_0^x \frac{b}{a}\cos(bt)e^{at}dt.$$

Ainsi, on en déduit pour le calcul de $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{a}e^{ax}\cos(bx) - \frac{1}{a} + \frac{b}{a^2}\sin(bx)e^{ax} - \frac{b^2}{a^2}f(x).$$

D'où :

$$(1 + \frac{b^2}{a^2})f(x) = \frac{e^{ax}\cos(bx) - 1}{a} + \frac{b}{a^2}\sin(bx)e^{ax}.$$

Après simplification du membre de droite :

$$(1 + \frac{b^2}{a^2})f(x) = \frac{ae^{ax}\cos(bx) - a + be^{ax}\sin(bx)}{a^2}.$$

Ainsi :

$$f(x) = \frac{e^{ax}(a\cos(bx) + b\sin(bx)) - a}{a^2 + b^2}.$$

Exercice 242 (③) Par Lancelot

Pour p et q dans $\mathbb{N}^*$, on pose

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx.$$

1. On suppose que $q \geq p \geq 1$. Exprimer $B(p,q)$ en fonction de $B(p-1, q+1)$, p et q.
2. Exprimer $B(p,q)$, en fonction de p et q, d'abord si $q \geq p$, puis si $q \leq p$.

1. La fonction $x \longmapsto x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ est continument dérivable, car produit de fonctions qui le sont. Une intégration par partie donne alors que :

$$\begin{aligned} B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx &= \left[-x^{p-1}\frac{(1-x)^q}{q}\right]_0^1 + \frac{p-1}{q}\int_0^1 x^{p-2}(1-x)^q dx \\ &= \frac{p-1}{q}B(p-1, q+1). \end{aligned}$$

2. On répétant des intégrations par parties, on obtient que :

$$B(p,q) = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(q+p-2)!}B(1, p+q-1).$$

Il reste à calculer :

$$B(1, p+q-1) = \int_0^1 (1-x)^{p+q-2}dx = \left[-\frac{(1-x)^{p+q-1}}{p+q-1}\right]_0^1 \frac{1}{p+q-1},$$

soit finalement que :

$$B(p,q) = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}.$$

Remarquons que le rôle joué par chacune des variables est identique. Par conséquent aucune des conditions $p \geq q \geq 1$ ou $q \geq p \geq 1$ n'a d'influence sur le résultat.

Remarque. L'intégrale étudiée ici peut se définir comme une fonction. Cette dernière est dénommée fonction bêta d'Euler. Remarquons que pour p et q dans $\mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{B(p,q)} = \frac{(p+q-1)!}{(p-1)!(q-1)!} = \binom{p+q-1}{p-1} = \binom{p+q-1}{q-1},$$

ce qui permet une généralisation des coefficients binomiaux lorsque p et q cessent d'être des entiers. Le lecteur curieux pourra se renseigner sur la fonction Gamma d'Euler qui produit une généralisation similaire pour la factorielle.

Exercice 243 (④) par Léo

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, f une application définie sur $[a;b]$, à valeurs réelles, dérivable et à dérivée continue. Pour λ dans $\mathbb{R}^{+*}$, démontrer :

$$\left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{\lambda}\left(|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)|\,dt\right)$$

En déduire que

$$\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

En intégrant par parties, on a :

$$\left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| = \left|\left[-\frac{\cos(\lambda t)\cdot f(t)}{\lambda}\right]_a^b + \frac{1}{\lambda}\cdot\left(\int_a^b f'(t)\cos(\lambda t)\,dt\right)\right|$$

$$\left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| \leqslant \left|\left[-\frac{\cos(\lambda t)\cdot f(t)}{\lambda}\right]_a^b\right| + \left|\frac{1}{\lambda}\cdot\left(\int_a^b f'(t)\cos(\lambda t)\,dt\right)\right| \quad \text{par inégalité triangulaire}$$

$$\left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{\lambda}\cdot\left(|f(b)\cos(\lambda b) - f(a)\cos(\lambda a)| + \left|\int_a^b f'(t)\cos(\lambda t)\,dt\right|\right)$$

$$\left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{\lambda}\cdot\left(|f(a)\cos(\lambda a)| + |f(b)\cos(\lambda b)| + \int_a^b |f'(t)\cos(\lambda t)|\,dt\right) \quad \text{par inégalité triangulaire}$$

$$\left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{\lambda}\left(|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)|\,dt\right) \quad \text{car } |cos(t)| \leqslant 1$$

De plus, une valeur absolue étant toujours positive, on a l'encadrement :

$$0 \leqslant \left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{\lambda}\left(|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)|\,dt\right)$$

Enfin, puisque $\frac{1}{\lambda}\left(|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)|\,dt\right) \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, d'après le théorème des gendarmes :

$$\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

8.5 Suites d'intégrales

Exercice 244 (②) par Wéline

Soit f une fonction continue dans $[0;1]$ dans $\mathbb{R}^+$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^1 f(t) \times t^n \mathrm{d}t$$

Déterminer le signe de I_n, puis le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\geq 0}$.

D'après l'énoncé, on sait que $f(t)$ est positif et que t^n aussi donc pour tout t de $[0;1]$ et pour tout n de $\mathbb{R}^+$, on a :

$$0 \leq f(t) \times t^n$$
$$\iff \int_0^1 0\mathrm{d}t \leq \int_0^1 f(t) \times t^n \mathrm{d}t$$
$$\iff [0]_0^1 \leq I_n$$
$$\iff 0 - 0 \leq I_n$$
$$\iff 0 \leq I_n$$

On peut donc en conclure que $(I_n)_{n\geq 0}$ est positif.
On cherche ensuite le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\geq 0}$.

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 f(t) \times t^{n+1}\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t) \times t^n \mathrm{d}t$$

$$\iff I_{n+1} - I_n = \int_0^1 f(t) \times t^{n+1} - f(t) \times t^n \mathrm{d}t$$

$$\Longleftrightarrow I_{n+1} - I_n = \int_0^1 t^n \times f(t)\,(t-1)\,\mathrm{d}t$$

Pour trouver le sens de variation de la suite on cherche donc le signe de la différence d'un terme avec le terme précédent. On sait que $t \in [0;1]$, donc :

$$t - 1 \leq 0$$

$$\Longleftrightarrow t^n \times f(t)\,(t-1) \leq 0$$

$$\Longleftrightarrow \int_0^1 t^n \times f(t)\,(t-1)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 0\mathrm{d}t$$

$$\Longleftrightarrow \int_0^1 t^n \times f(t)\,(t-1)\,\mathrm{d}t \leq 0$$

Ce qui nous permet de déduire :

$$I_{n+1} - I_n \leq 0$$

$$I_{n+1} \leq I_n$$

Finalement, on peut conclure que $(I_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante.

Exercice 245 (③) par Wéline

Soit f une fonction continue de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^1 f(t) t^n \mathrm{d}t$$

. On admet qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall t \in [0;1]\,, \quad |f(t)| \leq M$$

Majorer $|I_n|$ et montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

D'après l'énoncer, on peut dire que :

$$|f(t)| \times t^n \leq M \times t^n$$

Comme t^n est positif, on a que $t^n = |t^n|$, donc :

$$|f(t)| \times |t^n| \leq M \times t^n$$

$$\Longleftrightarrow |f(t) \times t^n| \leq M \times t^n$$

D'après les propriétés de l'intégrale :

$$\left|\int_0^1 f(t) \times t^n \mathrm{d}t\right| \leq \int_0^1 |f(t) \times t^n|\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 M \times t^n \mathrm{d}t$$

On peut donc déduire que :

$$\left|\int_0^1 f(t) \times t^n \mathrm{d}t\right| \leq \int_0^1 M \times t^n \mathrm{d}t$$

$$|I_n| \leq \int_0^1 M \times t^n \mathrm{d}t$$

.

On a trouvé un majorant de la suite $(I_n)_{n\geq 0}$. Maintenant déterminons sa limite. Pour cela nous allons commencer par développer le majorant.

$$\int_0^1 M \times t^n \mathrm{d}t = \left[\frac{M \times t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

$$\Longleftrightarrow \int_0^1 M \times t^n \mathrm{d}t = \frac{M \times 1^{n+1}}{n+1} - \frac{M \times 0^{n+1}}{n+1}$$

$$\iff \int_0^1 M \times t^n \mathrm{d}t = \frac{M}{n+1}$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{M}{n+1}\right) = 0$$

Comme $|I_n|$ est positif :

$$\lim_{n\to+\infty} (|I_n|) = 0$$

On peut donc en déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty} (I_n) = 0$$

Exercice 246 (③) Par Lancelot, Adrien R

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{e^{nt}}{1+e^t} dt.$$

1. Calculer I_1.
2. Déterminer le minimum de $\frac{1}{1+e^t}$ pour $t \in [0,1]$. En déduire une minoration de I_n et la limite de $(I_n)_{n\geq 0}$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $I_n + I_{n+1}$.
4. Calculer I_0 et I_2.
5. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est croissante.
6. Déduire des questions 3. et 5. la limite de la suite $(ne^{-n}I_n)_{n\geq 0}$.

---

1. On calcule :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t} dt = [\ln(e^t+1)]_0^1 = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right).$$

2. Remarquons que la fonction $t \longmapsto \frac{1}{1+e^t}$ est strictement décroissante sur $[0;1]$ car composée d'une fonction strictement croissante sur $[0;1]$ (fonction $t \mapsto e^t + 1$) par une fonction strictement décroissante sur $[0;1]$ (fonction inverse). Par conséquent on a que :

$$\forall t \in [0;1], \quad \frac{1}{1+e^t} \geq \frac{1}{1+e}.$$

Il s'ensuit alors que, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 \frac{e^{nt}}{1+e^t} dt \geq \frac{1}{1+e} \int_0^1 e^{nt} dt = \frac{1}{1+e} \left[\frac{e^{nt}}{n}\right]_0^1 = \frac{e^n - 1}{n(1+e)},$$

c'est à dire :

$$I_n \geq \frac{e^n - 1}{n(1+e)}.$$

Remarquons que par croissance comparée,

$$\frac{e^n - 1}{n(1+e)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Par le Théorème de comparaison, on déduit alors que :

$$I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On calcule :

$$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{nt}}{1+e^t} dt + \int_0^1 \frac{e^{(n+1)t}}{1+e^t} dt = \int_0^1 \frac{e^{nt} + e^{(n+1)t}}{1+e^t} dt = \int_0^1 \frac{e^{nt}(1+e^t)}{1+e^t} dt,$$

ce qui est :

$$\int_0^1 e^{nt} dt = \left[\frac{e^{nt}}{n}\right]_0^1 = \frac{e^n - 1}{n}.$$

Soit finalement que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n + I_{n+1} = \frac{e^n - 1}{n}.$$
(Le cas $n = 0$ est particulier et traité à la question suivante)

4. On calcule :
$$I_0 + I_1 = \int_0^1 \frac{dt}{1+e^t} + \int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t} dt = \int_0^1 \frac{1+e^t}{1+e^t} dt = \int_0^1 dt = 1,$$
donc :
$$I_0 = 1 - I_1 = 1 - \ln\left(\frac{e+1}{2}\right) = \ln(e) + \ln\left(\frac{2}{e+1}\right) = \ln\left(\frac{2e}{e+1}\right).$$
En utilisant la formule obtenue à la question précédente, on a que :
$$I_1 + I_2 = e - 1$$
donc :
$$I_2 = e - 1 - I_1 = e - 1 - \ln\left(\frac{e+1}{2}\right) = e - \ln(e) - \ln\left(\frac{e+1}{2}\right) = e + \ln\left(\frac{2}{e(e+1)}\right).$$

5. Remarquons que :
$$\forall t \in [0;1], \quad 1 \leq e^t,$$
d'où il suit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\forall t \in [0;1], \quad e^{nt} \leq e^{(n+1)t},$$
c'est à dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\forall t \in [0;1], \quad \frac{e^{nt}}{1+e^t} \leq \frac{e^{(n+1)t}}{1+e^t},$$
et en utilisant la monotonie de l'intégrale, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\int_0^1 \frac{e^{nt}}{1+e^t} dt \leq \int_0^1 \frac{e^{(n+1)t}}{1+e^t} dt$$
donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a que $I_n \leq I_{n+1}$, donc la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est croissante.

6. On pose (u_n) la suite définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = ne^{-n} I_n$$
On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n + I_{n+1} = \dfrac{e^n - 1}{n}$ donc $ne^{-n}I_n + ne^{-n}I_{n+1} = 1 - e^{-n}$. Ainsi, pour tout entier naturel n,
$$u_n = 1 - e^{-n} - ne^{-n}I_{n+1} = 1 - e^{-n} - \frac{en}{n+1}(n+1)e^{-(n+1)}I_{n+1} = 1 - e^{-n} - \frac{en}{n+1}u_{n+1}$$
.
Par ailleurs, on a établi dans la question 2. que pour tout entier naturel n,
$$I_n \geq \frac{e^n - 1}{n(1+e)}$$
Donc
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq \frac{1 - e^{-n}}{1+e}$$
.
On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\frac{1 - e^{-n}}{1+e} + \frac{en}{n+1}u_{n+1} \leq u_n + \frac{en}{n+1}u_{n+1} \leq 1 - e^{-n}$$
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{n+1} \leq (1 - e^{-n})\left(1 - \frac{1}{1+e}\right)\frac{n+1}{en}$$

On a enfin pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1-e^{-(n+1)}}{1+e} \leq u_{n+1} \leq \frac{(1-e^{-n})(n+1)}{(1+e)n}$$

(u_{n+1}) est encadré par deux suites qui convergent vers $\dfrac{1}{1+e}$ donc d'après le théorème d'encadrement (u_{n+1}) converge vers $\dfrac{1}{1+e}$. La limite de $(ne^{-n}I_n)$ est donc $\dfrac{1}{1+e}$

EXERCICE 247 (③) Par Lancelot, Adrien R

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \int_1^e (\ln(t))^n dt.$$

1. Calculer I_1.
2. Si $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer le signe de I_n.
3. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_{n+1} = e - (n+1)I_n.$$
4. Déduire des questions b. et c. la limite de la suite $(I_n)_{n\geq 1}$.
5. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ est décroissante
6. Déterminer la limite de la suite $(nI_n)_{n\geq 1}$. On pourra déduire des questions précédentes un encadrement judicieux de I_n.

1. On calcule :
$$I_1 = \int_1^e \ln(t)dt = [t\ln(t) - t]_1^e = 1$$
2. Remarquons que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0; e], \quad \ln(t)^n \geq 0,$$
par positivité de l'intégrale, on déduit que la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ est positive.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, observons que :
$$I_n = \int_1^e 1 \times (\ln(t))^n dt,$$
dont il est clair que les facteurs que forment l'intégrande sont continument dérivable. Une intégration par partie donne que :
$$I_{n+1} = [t\ln(t)^{n+1}]_1^e - (n+1)I_n = e - I_n,$$
ce qu'il fallait obtenir.
4. On a par positivité que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_{n+1} \geq 0,$$
soit que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad e - (n+1)I_n \geq 0,$$
c'est à dire :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{e}{n+1} \geq I_n \geq 0.$$
Remarquons que $\lim_{n\to+\infty} \frac{e}{n+1} = 0$, le Théorème de convergence par encadrement permet de conclure que :
$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.$$
5. Observons que :
$$\forall t \in [1; e], \quad 0 \leq \ln(t) \leq 1,$$
d'où il suit que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\forall t \in [1; e], \quad (\ln(t))^{n+1} \leq (\ln(t))^n,$$
et par monotonie de l'intégrale (comme l'exercice précédent), on déduit que la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

6. Pour tout entier naturel n, $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$ donc $0 \leq e-(n+1)I_n \leq I_n$ donc :

$$(n+1)I_n \leq e \leq (n+2)I_n$$

Par conséquent, $\frac{e}{n+2} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$ alors, $\frac{ne}{n+2} \leq nI_n \leq \frac{ne}{n+1}$ ainsi, d'après le théorème d'encadrement dit "des gendarmes", on obtient la limite recherchée :

$$nI_n \xrightarrow[n\to\infty]{} e$$

8.6 Complément : intégrales de Wallis

Exercice 248 (④) par Mathieu

a) Montrer, pour n dans $\mathbb{N}$:

$$W_{n+1} \leq W_n.$$

b) En utilisant la relation de récurrence obtenue dans l'exemple 3 ci-dessus, déduire de a) :

$$\frac{n+1}{n+2}W_n \leq W_{n+1}.$$

c) Déterminer la limite de $\frac{W_{n+1}}{W_n}$ lorsque n tend vers $+\infty$

d) Conclure que :

$$\left(\frac{2.4.6.....(2k)}{3.5.7.....(2k-1)}\right)^2 \times \frac{1}{2k+1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}.$$

puis que :

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{4k^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{\pi} \text{ et que } \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{(2k+1)^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{4}$$

a) Pour n dans $\mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} W_{n+1} - W_n &= \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1}(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)(\cos(t)-1)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, $\cos(t) \geq 0$ donc $\cos^n(t) \geq 0$. De plus, pour tout réel t, $\cos(t) \leq 1$, soit $\cos(t)-1 \leq 0$. On en déduit que sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, $\cos^n(t)(\cos(t)-1) \leq 0$. On trouve ainsi par passage à l'intégrale de l'inégalité que $W_{n+1} - W_n \leq 0$.

b) D'après le résultat de la question a), pour tout entier naturel n, $W_{n+2} \leq W_{n+1}$.
Or, $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n$. Donc $\frac{n+1}{n+2}W_n \leq W_{n+1}$.

c) On déduit l'encadrement suivant des résultats précédents : $\frac{n+1}{n+2}W_n \leq W_{n+1} \leq W_n$. Ayant pour tout entier naturel n, $W_n > 0$, on peut donc diviser les membres de l'inégalité par W_n. On a alors :

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1.$$

Puisque $\frac{n+1}{n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, on peut conclure par le théorème des gendarmes que

$$\frac{W_{n+1}}{W_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

d) i) On a :

$$\frac{W_{2k+1}}{W_{2k}} = \frac{2.4.6.....(2k)}{3.5.7.....(2k-1)(2k+1)} \times \frac{2.4.6.....(2k)}{3.5.7.....(2k-1)} \times \frac{2}{\pi}$$

Soit :

$$\frac{\pi}{2} \times \frac{W_{2k+1}}{W_{2k}} = \left(\frac{2.4.6.....(2k)}{3.5.7.....(2k-1)}\right)^2 \times \frac{1}{2k+1}$$

Or $\dfrac{W_{2k+1}}{W_{2k}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1$, donc :

$$\left(\frac{2.4.6.....(2k)}{3.5.7.....(2k-1)}\right)^2 \times \frac{1}{2k+1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}.$$

ii) Puisque $W_{2n} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \times \frac{\pi}{2}$ et $W_{2n+1} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}$, on a alors :

$$\frac{W_{2n+1}}{W_{2n}} = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k \times 2k}{(2k+1)(2k-1)} \times \frac{2}{\pi}$$

$$\iff \frac{\pi}{2} \times \frac{W_{2n+1}}{W_{2n}} = \prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{4k^2-1}$$

$$\iff \frac{2}{\pi} \times \frac{W_{2n}}{W_{2n+1}} = \prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2-1}{4k^2}$$

$$\iff \frac{2}{\pi} \times \frac{W_{2n}}{W_{2n+1}} = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right).$$

Ayant par inverse $\dfrac{W_{2n}}{W_{2n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, on peut conclure que :

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{\pi}.$$

iii) D'une part $W_{2n+1} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}$, et d'autre part :

$$\begin{aligned} W_{2n} &= \frac{(2n-1)(2n-3) \times ... \times 3 \times 1}{(2n)(2n-2) \times ... \times 4 \times 2} \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3) \times ... \times 3}{(2n+2)(2n)(2n-2) \times ... \times 4} \times \frac{\pi}{4} \times \frac{2n+2}{2n+1} \\ &= \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{2k+1}{2k+2}\right) \times \frac{\pi}{4} \times \frac{2n+2}{2n+1}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{W_{2n+1}}{W_{2n}} = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{2k \times (2k+2)}{(2k+1)^2}\right) \times \frac{4}{\pi} \times \frac{2n+1}{2n+2}.$$

C'est-à-dire

$$\frac{\pi}{4} \times \frac{2n+2}{2n+1} \times \frac{W_{2n+1}}{W_{2n}} = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{2k \times (2k+2)}{(2k+1)^2}\right).$$

On remarque que $\dfrac{2k \times (2k+2)}{(2k+1)^2} = \dfrac{(2k+1)^2 - 1}{(2k+1)^2} = 1 - \dfrac{1}{(2k+1)^2}$.

De plus $\dfrac{W_{2n+1}}{W_{2n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $\dfrac{2n+2}{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. On peut donc finalement conclure que

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{(2k+1)^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 249 (③) par Mathieu

Déduire de l'exercice précédent la relation

$$\sqrt{n}\ \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Commençons par noter que $\displaystyle\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

Notons également que

$$\begin{aligned}
W_{2n} &= \frac{(2n-1)(2n-3)\times ... \times 3 \times 1}{(2n)(2n-2)\times ... \times 4 \times 2} \times \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)\times ... \times 3 \times 2 \times 1}{(2n)^2(2n-2)^2 \times ... \times 4^2 \times 2^2} \times \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2n)!}{4^n \times (n!)^2} \times \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Et de manière analogue, $\displaystyle W_{2n+1} = \frac{4^n \times (n!)^2}{(2n+1)!}$. De là, il vient que

$$\frac{W_{2n+1}}{W_{2n}} = \frac{4^n \times (n!)^2}{(2n+1)!} \times \frac{4^n \times (n!)^2}{(2n)!} \times \frac{2}{\pi},$$

que l'on peut écrire

$$\pi \frac{W_{2n+1}}{W_{2n}} = \left(\frac{4^n \times (n!)^2}{(2n)!}\right)^2 \times \frac{2}{2n+1}.$$

En passant à l'inverse et à la racine (les deux membres de l'égalité étant strictement positifs), on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{W_{2n}}{W_{2n+1}}} = \frac{(2n)!}{4^n \times (n!)^2} \times \sqrt{n + \frac{1}{2}},$$

soit

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{W_{2n}}{W_{2n+1}}} = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \times \sqrt{n}\sqrt{1 + \frac{1}{2n}}.$$

On sait par composition des limites que $\displaystyle\sqrt{\frac{W_{2n}}{W_{2n+1}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. De plus, $\sqrt{1 + \frac{1}{2n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

On peut ainsi conclure que

$$\sqrt{n}\ \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

8.7 Complément : développement en série de l'exponentielle

Exercice 250 (②) par Samy Clementz

Compléter les détails de la preuve du cas $x \leq 0$.

Soit $x \leq 0$. On a

$$\begin{aligned}
R_n(x) &= \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \\
&= -\int_x^0 \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}|R_n(x)| &= |\int_x^0 \frac{(x-t)^n}{n!}e^t dt| \\ &\leq \int_x^0 \frac{|x-t|^n}{n!}e^t dt \\ &= \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{n!}e^t dt.\end{aligned}$$

Tous les facteurs constituant l'intégrande sont positifs ou nuls. De plus $e^t \leq 1$ pour $t \in [x, 0]$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}|R_n(x)| &\leq \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{n!}dt \\ &= \frac{1}{n!}\Big[\frac{(t-x)^{n+1}}{n+1}\Big]_x^0 \\ &= \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!},\end{aligned}$$

tendant vers 0 quand n tend vers l'infini.

Exercice 251 (③) par Daniel

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\,.$$

a) Pour $n \in \mathbb{N}$, justifier l'encadrement :

$$0 < e - u_n < \frac{e}{(n+1)!}$$

b) On raisonne par l'absurde et on suppose e rationnel. On peut donc écrire :

$$e = \frac{p}{q}\,, \qquad (p, q) \in \mathbb{N}^{*2}\,.$$

Vérifier que, pour $n \geq q$, le réel

$$n!(e - u_n)$$

est un entier appartenant à $\left]0, \dfrac{e}{n+1}\right[$. Obtenir alors une contradiction.

a) On part de la propriété

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}e^t\,\mathrm{d}t\,.$$

En substituant $x = 1$, on a donc

$$e = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}}_{u_n} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}e^t\,\mathrm{d}t\,.$$

Soit $e - u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}e^t\,\mathrm{d}t$. La fonction exponentielle est majorée par e sur $[0, 1]$ et $\forall t \in [0, 1],\ 0 \leq (1-t)^n$.

On a donc $\forall t \in [0, 1],\ 0 \leq \dfrac{(1-t)^n}{n!}e^t \leq \dfrac{(1-t)^n}{n!}e.$

En intégrant, cela devient $0 \leq e - u_n \leq \dfrac{e}{(n+1)!}$. On peut même écrire $0 < e - u_n < \dfrac{e}{(n+1)!}$ car
il existe des valeurs de t telles que $\dfrac{(1-t)^n}{n!}e^t$ est différent de 0 et de $\dfrac{(1-t)^n}{n!}e$.

b) L'inégalité ci-dessus est équivalente à $0 < n!(e - u_n) < \dfrac{e}{n+1}$, soit $0 < n!\left(\dfrac{p}{q} - u_n\right) < \dfrac{e}{n+1}$ d'après l'hypothèse de la question.
Pour $n \geq q,\ q|n!$ et $\forall k \in [\![0;n]\!],\ k!|n!$ donc $n!u_n$ est un entier. Donc $n!(e-u_n)$ est un entier. On a donc, pour tout n supérieur à q, un entier appartenant à $\left]0, \dfrac{e}{n+1}\right[$, ce qui est impossible.

Exercice 252 (④) par Daniel

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant des dérivées de tous ordres. Montrer que, pour n dans $\mathbb{N}$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

On note $\mathcal{P}_n$ la propriété $\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$

On raisonne par récurrence.
Pour $n = 0$, l'expression vaut $f(0) + \displaystyle\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t = f(x)$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie, c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2}$$

Posons, pour t dans $\mathbb{R}$,

$$u(t) = \frac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad v(t) = f^{(n+1)}(t).$$

On a alors, pour t dans $\mathbb{R}$,

$$u'(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}, \qquad v'(t) = f^{(n+2)}(t).$$

D'après la formule de l'intégration par parties, on a donc

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{3}$$

En combinant (1) et (2), on obtient bien

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

c'est-à-dire $\mathcal{P}_{n+1}$
Remarque. Ce résultat sera redémontré en sup

Exercice 253 (④) par Antoine

a) Montrer que, pour $t \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$,

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k = \frac{1}{1+t} + \frac{(-1)^n t^{n+1}}{1+t}.$$

b) En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t.$$

c) Montrer que

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n+2}.$$

d) Conclure :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(2).$$

e) Plus généralement, montrer que, si $0 \leq x \leq 1$, alors

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(1+x).$$

Donner une estimation de la "vitesse de convergence", c'est-à dire de l'erreur :

$$\left|\ln(x+1) - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}\right|.$$

f) Étendre ce résultat au cas $-1 < x \leq 0$.

a)

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k = \sum_{k=0}^{n}(-t)^k.$$

D'où par la formule des sommes géométriques, on a :

$$\sum_{k=0}^{n}(-t)^k = \frac{1-t^{n+1}}{1+t} = \frac{1}{1+t} - \frac{(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t} = \frac{1}{1+t} + \frac{(-1)^n t^{n+1}}{1+t}.$$

b) On intègre entre 0 et 1 l'égalité précédente :

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n}(-t)^k \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n}\int_0^1 (-t)^k \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1} - \frac{(-0)^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}$$

et

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t = \ln(1+1) - \ln(1+0) = \ln(2).$$

De plus,

$$\int_0^1 \frac{(-1)^n t^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t = (-1)^n \times \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t.$$

D'où

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1} = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n}(-t)^k \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{1+t} + \int_0^1 \frac{(-1)^n t^{n+1}}{1+t} = \ln(2) + (-1)^n \times \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t.$$

c)

$$0 \leq \frac{1}{1+t} \leq 1 \implies \forall t \in [0,1], \quad 0 \leq \frac{t^{n+1}}{1+t} \leq t^{n+1}.$$

D'où en intégrant, sachant que $\displaystyle\int_0^1 t^{n+1} = \frac{1}{n+2}$:

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} \leq \frac{1}{n+2}.$$

d) Comme $\displaystyle\frac{1}{n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors par le théorème des gendarmes,

$$(-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Sachant que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) + (-1)^n \times \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t$, on en conclut que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(2).$$

e) On repart de la question *a*) et on refait les question *b*) et *c*), mais en intégrant cette fois entre 0 et x. On obtient :

$$\forall x \in [0;1] \quad \left| \ln(1+x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} \right| = \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} \leq \frac{x^{n+2}}{n+2}.$$

Comme $x^{n+2} \leq 1$, on a l'encadrement :

$$0 \leq \left| \ln(1+x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} \right| \leq \frac{1}{n+2}.$$

Avec les gendarmes, on conclut que la différence tend vers 0 et donc

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(1+x).$$

f) Si $-1 < x \leq 0$ on reprend le raisonnement précédent, on intègre entre 0 et x. Pour reproduire l'inégalité de la question *c*), on remarque que :

$$\forall t \in [-x;0], \quad 0 \leq \frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{1+x}.$$

On majore donc par

$$\left| \frac{1}{1+x} \int_0^x t^{n+1} dt \right| = \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)(1+x)}$$

On obtient

$$\left| \ln(1+x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} \right| \leq \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)(1+x)}.$$

Ce qui, par les gendarmes, tend vers 0 et amène à nouveau à l'égalité voulue.

Exercice 254 (④) par Daniel et Octave

a) Montrer que

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \int_0^{\tan(x)} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = x.$$

En particulier :

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

b) Pour n dans $\mathbb{N}$, établir :

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

c) Conclure :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{4}.$$

a) On note :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \qquad f(x) = \int_0^{\tan(x)} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

On pose la fonction $g : x \longmapsto \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$. et on remarque que $f(x) = g(\tan(x))$.
Calculons $f'(x)$:

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \qquad f'(x) = \tan'(x) g'(\tan(x)) = (1+\tan^2(x)) \frac{1}{1+\tan^2(x)} = 1.$$

Donc $f(x) = x + c$ avec $c \in \mathbb{R}$. Or $f(0) = 0$ donc $f(x) = x$. En particulier,

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_0^{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

b) On raisonne par récurrence. Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété à démontrer.
Initialisation.

$$\sum_{k=0}^{0} \frac{(-1)^k}{2k+1} - \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t = 1 - \int_0^1 1\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}.$$

Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.
Hérédité. On fixe n dans $\mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie.

$$\mathcal{P}_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1} + (-1)^{n+2} \int_0^1 \frac{t^{2n+4}}{1+t^2}\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1} + (-1)^{n+2} \left[\int_0^1 \frac{t^{2n+4}+t^{2n+2}}{1+t^2} - \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\right].$$

En distribuant, on obtient

$$\mathcal{P}_{n+1} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t}_{\frac{\pi}{4} \text{ d'après l'hypothèse de récurrence}} + \frac{(-1)^{n+1}}{2n+3} + (-1)^{n+2} \int_0^1 t^{2n+2}\mathrm{d}t.$$

On remarque que $-\int_0^1 t^{2n+2}\mathrm{d}t = -\frac{1}{2n+3}$. Donc

$$\frac{(-1)^{n+1}}{2n+3} + (-1)^{n+2} \int_0^1 t^{2n+2}\mathrm{d}t = (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+3}\right) = 0.$$

Ainsi,

$$\mathcal{P}_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}.$$

c)

$$\forall t \in [0;1], \quad 0 \leq \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \leq t^{2n+2}.$$

Donc

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^{2n+2}\mathrm{d}t.$$

Soit

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{2n+3}.$$

Donc par le théorème des gendarmes,

$$\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Soit

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{4}.$$

8.8 Complément : séries

Exercice 255 (③) Par Lancelot La suite de Fibonacci $(F_n)_{n\geq 0}$ est définie en **1.3**. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F_n}{2^n} = 2.$$

On reprend les notations du paragraphes **1.3**. En utilisant la forme explicite de la suite de Fibonacci, on obtient que :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{F_k}{2^k} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^k - \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\beta}{2}\right)^k \right).$$

Observons alors que $\alpha/2 < 1$ et $\beta/2 > -1$, donc les sommes ci-dessus convergent (c.f Exercice 39). Il en découle que :

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\beta}{2}\right)^n \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{2}{2-\alpha} - \frac{2}{2-\beta} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{2(\alpha-\beta)}{(2-\alpha)(2-\beta)}.$$

Un rapide calcule donne que $\alpha - \beta = \sqrt{5}$ et $(2-\alpha)(2-\beta) = 1$. D'où :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n}{2^n} = 2.$$

Exercice 256 (③) par Ylan

Montrer que, pour tout $x \in]-1;1[$,

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Soit $x \in]-1;1[$, soit $N \in \mathbb{N}$. Nous avons :

$$2\sum_{k=0}^{N} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \sum_{\substack{p=0 \\ p=2k}}^{2N} \frac{x^{p+1}}{p+1} \left[(-1)^p + 1\right]$$

$$= \sum_{p=0}^{2N} \frac{x^{p+1}}{p+1} \left[(-1)^p + 1\right], \text{ car lorsque } p = 2k+1,\ (-1)^p + 1 = 0$$

$$= \sum_{p=0}^{2N} \frac{(-1)^p x^{p+1}}{p+1} + \sum_{p=0}^{2N} \frac{(-1)^{p+1}(-x)^{p+1}}{p+1}$$

$$= \sum_{p=0}^{2N} \frac{(-1)^p x^{p+1}}{p+1} - \sum_{p=0}^{2N} \frac{(-1)^p(-x)^{p+1}}{p+1}$$

Nous avons $-1 < x < 1$, donc on a également $-1 < -x < 1$, et donc d'après l'exercice 253 :

$$\sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p x^{p+1}}{p+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(1+x) \quad \text{et :}$$

$$\sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p(-x)^p+1}{p+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(1-x)$$

Nous avons donc également :

$$\sum_{p=0}^{2N} \frac{(-1)^p x^{p+1}}{p+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \ln(1+x) \quad \text{et :}$$

$$\sum_{p=0}^{2N} \frac{(-1)^p(-x)^p+1}{p+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \ln(1-x)$$

Par sommation des limites, nous avons donc :

$$2\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(1+x)-\ln(1-x) \quad \text{, d'où :}$$

$$2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \ln(1+x)-\ln(1-x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad \text{et donc :}$$

$$\forall x \in]-1;1[, \quad \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{k+1}$$

EXERCICE 257 (③) Par Lancelot Pour $x \in \mathbb{R}$, établir les formules :

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2k} \qquad \text{et} \qquad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

On commence par le cosinus. Observons que cos admet des dérivées de tout ordre et que conformément à l'exercice 147, on montre que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \cos^{(2k+1)}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \cos^{(2k)}(0) = (-1)^k.$$

On utilise alors la formule de Taylor avec reste intégrale de l'exercice 252, en fixant $n \in \mathbb{N}^*$, pour obtenir :

$$\begin{aligned}\left|\cos(x) - \sum_{k=0}^{2n} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!}x^k\right| &= \left|\cos(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}\right| \\ &= \left|\int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}\cos^{(2n+1)}(t)dt\right|.\end{aligned}$$

Il reste alors à montrer que l'intégrale obtenue tend vers 0. Remarquons que la dérivée $2n+1$-ième est un sinus au signe près qui est borné par 1. Il s'ensuit que :

$$\left|\int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}\cos^{(2n+1)}(t)dt\right| \le \left|\int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}dt\right| \le \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

le Théorème 3 et le Théorème de convergence par encadrement donnent alors que :

$$\left|\int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}\cos^{(2n+1)}(t)dt\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

et donc :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \cos(x).$$

Pour le sinus, on obtient des égalités similaires pour les dérivées successives :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \sin^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \sin^{(2k)}(0) = 0.$$

En effectuant le même raisonnement, on obtient que :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sin(x),$$

ce qui achève la résolution de l'exercice.

Remarque. Ces deux nouvelles expressions pour cos et sin, combinées à la série entière de exp démontrée au début du paragraphe, permettent de démontrer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

En effet, si on place $i\theta$ dans la somme partielle de la série de entière de exp, on doit distinguer le cas pair et impaire, simplifiant i^k. On remarque que $i^{2q} = (-1)^q$ et que $i^{2q+1} = i(i)^{2q} = i(-1)^k$. En séparant la somme partielle selon la parité de k on obtient alors les sommes partielles des deux séries obtenues dans l'exercice.

8.9 Complément : méthodes des rectangles et estimation de sommes

Exercice 258 (②) par Martin

Déduire de (4) un encadrement du nombre de chiffres de 100!.

De (4) on déduit directement l'encadrement suivant :

$$e(\frac{100}{e})^{100} \leq 100! \leq 100e(\frac{100}{e})^{100}$$

Or, $\lfloor \log e(\frac{100}{e})^{100} \rfloor + 1 = 158$ et $\lfloor \log 100e(\frac{100}{e})^{100} \rfloor + 1 = 160$. Par conséquent, 100! comporte entre 158 et 160 chiffres.

Exercice 259 (③) par Martin

Soit α dans $\mathbb{R}^{+*}$. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} k^\alpha$$

Encadrer S_n par la méthode des rectangles et en déduire que

$$\frac{S_n}{n^{\alpha+1}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\alpha+1}$$

Soit α dans $\mathbb{R}^{+*}$. Posons $f : x \mapsto x^\alpha$. f est croissante sur $\mathbb{N}^*$ car sa dérivée est strictement positive sur $\mathbb{N}^*$ (α étant strictement positif). Encadrons alors S_n par la méthode des rectangles.

Pour k dans $\mathbb{N}^*$ et pour t dans $[k, k+1]$, on a $f(k) \leq f(t) \leq f(k+1)$ ce qui implique

$$f(k) \leq \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq f(k+1)$$

En sommant k dans $\{1, ..., n-1\}$ et après réorganisation, on obtient :

$$\int_1^n f(t)\,dt + f(1) \leq S_n \leq \int_1^n f(t)\,dt + f(n)$$

Or, $F : x \mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ est une primitive de f. Par conséquent, on a :

$$[F(t)]_1^n + f(1) \leq S_n \leq [F(t)]_1^n + f(n) \iff \frac{n^{\alpha+1}+\alpha}{\alpha+1} \leq S_n \leq \frac{n^{\alpha+1}-1}{\alpha+1} + n^\alpha$$

En divisant les trois membres de l'inégalité par $n^{\alpha+1}$, on obtient finalement :

$$\frac{1}{\alpha+1} + \frac{\alpha}{(\alpha+1)(n^{\alpha+1})} \leq \frac{S_n}{n^{\alpha+1}} \leq \frac{1}{\alpha+1} - \frac{\alpha}{(\alpha+1)(n^{\alpha+1})} + \frac{1}{n}$$

Par encadrement, on en déduit le résultat cherché :

$$\frac{S_n}{n^{\alpha+1}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\alpha+1}$$

Exercice 260 (④) par Octave

Soit $\alpha \in]\alpha, +\infty[$. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}.$$

a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1}.$$

b) Montrer que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est convergente et que sa limite appartient à l'intervalle

$$\left[\frac{1}{\alpha-1}, \frac{\alpha}{\alpha-1}\right].$$

En utilisant le vocabulaire l'exercice précédent : la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ converge.

c) En utilisant l'exemple 1 ou une comparaison somme-intégrale, montrer que, si $\alpha \in]0, 1]$,

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

a) Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$. Pour $\alpha > 1$, la fonction f est décroissante. On a donc

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leqslant \frac{1}{k^\alpha}.$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} - 1 \leqslant \int_1^n \frac{1}{x^\alpha} dx \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}.$$

$$\Longrightarrow \int_1^n \frac{1}{x^\alpha} dx + 1 \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \geqslant \int_1^n \frac{1}{x^\alpha} dx - \frac{1}{n^\alpha}.$$

$$\Longrightarrow -\frac{1}{n^{\alpha-1}(\alpha-1)} + \frac{1}{\alpha-1} + 1 \geqslant S_n \geqslant -\frac{1}{n^{\alpha-1}(\alpha-1)} + \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{n^\alpha}.$$

$$\Longrightarrow \frac{\alpha}{\alpha-1} \geqslant S_n \geqslant -\frac{1}{n^{\alpha-1}(\alpha-1)} + \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{n^\alpha}.$$

On a donc bien $S_n \leqslant \frac{\alpha}{\alpha-1}$

b) S_n est croissante et majorée, on note ℓ sa limite. On remarque que

$$-\frac{1}{n^{\alpha-1}(\alpha-1)} - \frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On a donc

$$\frac{\alpha}{\alpha-1} \geqslant \ell \geqslant \frac{1}{\alpha-1}.$$

c) En utilisant l'exemple 1, et en remarquant que si $\alpha \in]0; 1]$, $\quad S_n \geqslant H_n$, comme $H_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, alors par théorème de comparaison $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Exercice 261 (④) par Octave

On pose, pour $n \geq 2$ entier, $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln(k)}$. Encadrer S_n et en déduire que

$$\frac{S_n}{\ln(\ln(x))} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Exercice 261 (énoncé rédigé)

Exercice 262 (④) par Octave

a) On suppose f croissante sur $[1,+\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$. Établir l'implication

$$\frac{f(n)}{\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Longrightarrow \frac{\sum_{k=1}^n f(k)}{\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

b) On prend $f = exp$. Calculer

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \quad \text{et} \quad \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Le résultat de a) s'applique-t-il ?

Exercice 262 (énoncé rédigé)

Exercice 263 (③) Par Lancelot

Montrer que la suite $(H_n - \ln(n))_{n\geq 1}$ est décroissante. En déduire que cette suite est convergente.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a que :

$$H_{n+1} - \ln(n+1) - H_n + \ln(n) = \frac{1}{n+1} + \ln(\frac{n}{n+1}) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right),$$

Or, d'après le paragraphe **6.3.2**,

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(y) \leq y - 1,$$

en prenant $y = 1 - \frac{1}{n+1}$, on obtient que :

$$\frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leq 0,$$

d'où la décroissance de la suite $(H_n - \ln(n))_{n\geq 1}$. En reprenant l'encadrement de $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ du début de paragraphe, il vient que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(n) \leq H_n \leq \ln(n) + 1 \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq H_n - \ln(n) \leq 1,$$

il en découle que la suite $(H_n - \ln(n))_{n\geq 1}$ est minorée, étant décroissante, elle converge vers un réel $\gamma \in [0;1]$, en vertu du Théorème de convergence monotone.

8.10 Problème : un premier calcul de $\zeta(2)$

Problème 1 (⑤) par Octave

1. a) Pour n dans $\mathbb{N}^*$, calculer :

$$\int_0^\pi t\cos(nt)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^\pi t^2\cos(nt)\mathrm{d}t.$$

   b) Déterminer deux constantes réelles a et b telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \int_0^\pi (at^2 + bt)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}.$$

2. Pour n dans $\mathbb{N}^*$ et t dans $\mathbb{R}$, soit :

$$C_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \cos(kt).$$

Montrer que, pour n dans $\mathbb{N}^*$ et t dans $\mathbb{R}$ non multiple entier de 2π :

$$C_n(t) = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

3. Déduire de ce qui précède que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi} \varphi(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) \mathrm{d}t.$$

où φ est une fonction définie et continue sur $[0;\pi]$ que l'on précisera.

4. On admet que φ est dérivable sur $[0;\pi]$ et que sa dérivée est continue. Montrer, en utilisant l'exercice 243 de **8.4** (lemme de Riemann-Lebesgue), que

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

1. a) En intégrant par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad & \int_0^{\pi} t\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{1}{n^2}. \\ \text{et} \quad & \int_0^{\pi} t^2\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{2\pi(-1)^n}{n^2}. \end{aligned}$$

b) On déduit de la question précédente, sachant que

$$\int_0^{\pi} (at^2 + bt)\cos(nt)\mathrm{d}t = a\left(\frac{2\pi(-1)^n}{n^2}\right) + b\left(\frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

que $a = \dfrac{1}{2\pi}$ et $b = -1$.

2. On procède par récurrence :

Soit $\mathcal{P}_n$: " $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ ".

Initialisation.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{3t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} &= -\frac{1}{2} + \frac{\sin(t)\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \cos(t)\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \\ &= \frac{\left[2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \left[1 - 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right]\sin\left(\frac{t}{2}\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \\ &= \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \\ &= \cos(t). \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}_1$ est vérifiée.

Hérédité. Fixons n dans $\mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vrai. On veut donc montrer que

$$\mathcal{P}_{n+1} = \frac{\sin\left(\frac{2(n+1)+1}{2}t\right) - \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \cos((n+1)t).$$

Soit n dans $\mathbb{N}^*$, et t non multiple entier de 2π.

D'une part : $\sin\left(\frac{2(n+1)+1}{2}t\right) = \cos((n+1)t)\sin\left(\frac{t}{2}\right) + \sin((n+1)t)\cos\left(\frac{t}{2}\right)$.

D'autre part : $\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) = \sin\left(\frac{2(n+1)-1}{2}t\right) = -\cos((n+1)t)\sin\left(\frac{t}{2}\right) + \sin((n+1)t)\cos\left(\frac{t}{2}\right)$.

Ce qui entraîne :

$$\begin{aligned}
&\sin\left(\frac{2(n+1)+1}{2}t\right) - \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos((n+1)t) \\
\Longrightarrow\ &\frac{\sin\left(\frac{2(n+1)+1}{2}t\right) - \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \cos((n+1)t).
\end{aligned}$$

Ce qui est exactement $\mathcal{P}_{n+1}$. Donc

$$C_n(t) = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

3. Soit n dans $\mathbb{N}^*$ et φ une fonction définie par :

$$\varphi : \begin{cases} [0,\pi] \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\left(\dfrac{x^2}{2\pi} - x\right) & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

φ est continue sur $]0;\pi]$ en tant que produit de fractions continues sur cet intervalle.
Montrons que φ est continue en 0.

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \\
\Longrightarrow\ &\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 && \text{par Composition} \\
\Longrightarrow\ &\frac{x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 && \text{par Inverse}
\end{aligned}$$

De plus, $\frac{x}{2\pi} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow\ &\frac{x}{4\pi\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \\
\Longrightarrow\ &\left(\frac{x^2}{2\pi} - x\right) \times \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \xrightarrow[x\to 0]{} -1.
\end{aligned}$$

Ainsi, φ est continue sur $[0;\pi]$.
Montrons que pour t dans $[0;\pi]$:

$$\varphi(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) = \left(C_n(t) + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right).$$

Si $t = 0$, $\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) = 0$ et $\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) = 0$ donc l'égalité est vérifiée.

Sinon, on remarque que :

$$\varphi(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)=\frac{\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)=\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\left(\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)$$
$$=\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\left(C_n(t)+\frac{1}{2}\right).$$

On déduit de 1.b) :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}&=\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(nt)\mathrm{d}t.\\&=\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\left(C_n(t)-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t\\&=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\mathrm{d}t+\int_0^{\pi}\left(C_n(t)+\frac{1}{2}\right)\left(\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{\pi^2}{6}+\int_0^{\pi}\varphi(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

4. D'après le lemme de Riemann-Lebesgue :

$$\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\xrightarrow[\lambda\to+\infty]{}0.$$

On pose $f(t)=\varphi(t)$, car $\varphi(t)$ est une application définie sur $[0;\pi]$, à valeurs réelles, dérivable et à dérivée continue. On pose aussi $\lambda=\frac{2n+1}{2}$. Sachant que quand
$n\to+\infty,\quad \frac{2n+1}{2}\to+\infty$, alors

$$\int_0^{\pi}\varphi(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

D'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$.

9 Probabilités

9.1 Exercices introductifs

Exercice 264 (①) par Victor

On lance deux dés non pipés. Est-il plus probable que la somme soit égale à 9 où à 10 ?

Les deux lancers sont indépendants et les dés non pipés. Chaque couple de résultats (x,y) est donc équiprobable. Il y a 4 couples donnant une somme de 9 et 3 donnant une somme de 10. Il est donc plus probable que la somme fasse 9 que 10.

Exercice 265 (①) par Victor

On lance six dés non pipés. Quelle est la probabilité d'obtenir tout les nombres de 1 à 6 ?

On numérote les 6 dés. Il y a 6! issus favorables (6 choix pour le premier dé, 4 pour le 2ème...). Il y a donc au total 6^6 issues. Ainsi, la probabilité est de $\frac{6!}{6^6}=0.0154$.

Exercice 266 (①) par Victor

On lance un dé non pipé. On répète n fois l'opération, les lancers successifs étant supposés indépendants. Quelle est la probabilité p_n pour que l'on obtienne au moins un 6 ? Déterminer la limite de $(p_n)_{n\geq 1}$.

On étudie l'évènement contraire Q_n : ne jamais obtenir de 6 après n lancers. La probabilité de ne pas obtenir un 6 sur un lancer étant de $\frac{5}{6}$, on a :

$$Q_n = \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

Et donc

$$p_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

Sachant que $\left(\frac{5}{6}\right)^n$ est une suite géométrique de raison $\frac{5}{6}$ où $-1 < \frac{5}{6} < 1$, alors $\left(\frac{5}{6}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Et

$$p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Exercice 267 (②) par Victor

a) On considère un dé non pipé. La probabilité qu'en 4 lancers, le dé amène au moins un 6 est-elle supérieure à $\frac{1}{2}$?

b) On considère deux dés non pipés. La probabilité qu'en 24 lancers, les dés amènent au moins un double 6 est-elle supérieure à $\frac{1}{2}$?

a) On considère l'évènement complémentaire :

$$\mathbf{P}(Q_4) = \frac{5}{6}^4 < \frac{1}{2}.$$

Donc la probabilité d'obtenir au moins un 6 est plus grande que $\frac{1}{2}$.

b) Sur un lancé, la probabilité d'avoir un double 6 est de $\frac{1}{36}$ car les deux dés sont indépendants.

La probabilité de ne jamais avoir de double 6 sur 24 lancers est donc de $\left(\frac{35}{36}\right)^{24} > \frac{1}{2}$ Donc la probabilité d'obtenir au moins un 6

Exercice 268 (③) par Victor

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n dés non pipés, que l'on jette simultanément 4.6^{n-1} fois.

a) Déterminer la probabilité p_n d'obtenir au moins une fois n six.

b) Déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n\geq 1}$

a) Pour un dé donné, la probabilité d'obtenir six est de $\frac{1}{6}$.

Pour un lancer donné, la probabilité d'obtenir n six sur les n dés est donc de $\left(\frac{1}{6}\right)^n$

Ainsi, la probabilité de ne jamais obtenir n six sur les 4.6^{n-1} lancers est de $\left(1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n\right)^{4.6^{n-1}}$

Dès lors, on obtient l'évènement complémentaire : $p_n = 1 - \left(1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n\right)^{4.6^{n-1}}$

b) $\left(1-\left(\frac{1}{6}\right)^n\right)^{4.6^{n-1}} = \left[\left(1-\left(\frac{1}{6}\right)^n\right)\right]^{\frac{4}{6}}$

Or, $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$

Donc, $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{-1}{6^n}\right)^{6n} = e^{-1}$

Donc, $\lim_{n\to+\infty} p_n = 1 - e^{\frac{-2}{3}}$

Exercice 269 (③) par Victor

On lance 3 dés non pipés. Montrer que la probabilité d'amener un total inférieur ou égal à 10 est $\frac{1}{2}$. On essaiera de donner un argument ne nécessitant aucun calcul.

Le résultat moyen d'un lancer de dé est de 3.5
Donc le résultat moyen d'un lancer de 3 dés est de $3 * 3.5 = 10.5$
Puisqu'il s'agit du résultat moyen, il est tout autant probable de se trouver au dessus ou en dessous.
Donc la probabilité de se trouver en dessous est de $\frac{1}{2}$

Exercice 270 (②) par Victor

Un joueur de tennis A en affronte deux autres, B et C. On suppose que C est meilleur que B. Le joueur A gagne s'il gagne au moins deux matchs consécutifs. Quel est l'ordre qui maximise sa chance de gagner entre BCB et CBC ?

On note b_i (resp. c_i) l'évènement correspondant à une victoire contre B (resp. C) au $i$ème match.
On note p_b (resp. p_c) la probabilité de l'évènement b (resp. c).
$P(b_1 \cap c_2 \cup c_2 \cap b_3) = P(b_1 \cap c_2) + P(c_2\ capb_3) - P(b_1 \cap c_2 \cap c_2 \cap b_3) = 2p_bp_c - p_b^2p_c = p_bp_c(2-p_b)$
$P(c_1 \cap b_2 \cup b_2 \cap c_3) = P(c_1 \cap b_2) + P(b_2\ capc_3) - P(c_1 \cap b_2 \cap b_2 \cap c_3) = 2p_bp_c - p_bp_c^2 = p_bp_c(2-p_c)$
Puisque $p_c < p_b$. On a $p_bp_c(2-p_b) < p_bp_c(2-p_c)$
Donc CBC est plus favorable. Cela se comprend bien : il vaut mieux se donner 2 chances contre l'adversaire le plus fort.

Exercice 271 (②) par Victor

Un jury comprend trois membres A, B, C. Les deux premiers prennent une décision juste avec probabilité p, le troisième avec probabilité $\frac{1}{2}$. Quelle est la probabilité qu'une décision juste soit prise en appliquant la règle de la majorité ?

On note a (resp. b et c) l'évènement correspondant à une décision juste de A (resp. B et C)
Étudions le cas ou les 3 prennent une décision juste : $P(a \cap b \cap c) = \frac{p^2}{2}$
Étudions le cas ou seulement 2 prennent une décision juste, i.e. seulement l'un a tort : on peut décomposer car les évènements décrits sont incompatibles :
$P(a \cap b \cap \neg c \cup a \cap \neg b \cap c \cup \neg a \cap b \cap c) = p * p * (1 - \frac{1}{2} + p * (1-p) * \frac{1}{2} + (1-p) * p * \frac{1}{2} = \frac{p^2}{2} + p(1-p)$
Ainsi, en rejoignant les deux cas, la probabilité d'avoir une décision juste est : $p^2 + p(1-p) = p$

Exercice 272 (②) par Wéline

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient 10 boules noires et n boules blanches. Un joueur tire 20 fois successivement et avec remise une boule de l'urne, les tirages étant indépendants. Quelle est la probabilité p_n d'obtenir au moins une boule blanche au cours de ces 20 tirages. Quels sont les n tels que $p_n \geq \frac{1}{2}$?

L'événement : « tiré une boule blanche » avec une probabilité p de réussite corresponds au succès d'une épreuve de Bernouilli. On répète de manière identique et indépendante cette épreuve 20 fois. La variable aléatoire X compte le nombre de succès, elle suit donc une loi Binomial de paramètres

$n = 20$ et $p = \frac{n}{10+n}$. On cherche la probabilité d'obtenir au moins une fois une boule blanche ce qui correspond à obtenir au moins un succès.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$

$$\iff P(X \geq 1) = 1 - \binom{0}{20} \times p^0 \times (1-p)^{20}$$

$$\iff P(X \geq 1) = 1 - \left(1 - \frac{n}{10+n}\right)^{20}$$

$$\iff P(X \geq 1) = 1 - \left(\frac{10+n-n}{10+n}\right)^{20}$$

$$\iff P(X \geq 1) = 1 - \frac{10^{20}}{(10+n)^{20}}$$

La probabilité p_n est égale à la probabilité $P(X \geq 1)$ donc :

$$p_n = 1 - \frac{10^{20}}{(10+n)^{20}}$$

Maintenant, on cherche à déterminer pour quelles valeurs de n, p_n est supérieur à $\frac{1}{2}$.

$$p_n \geq \frac{1}{2}$$

$$\iff 1 - \frac{10^{20}}{(10+n)^{20}} \geq \frac{1}{2}$$

$$\iff -\frac{10^{20}}{(10+n)^{20}} \geq -\frac{1}{2}$$

$$\iff \frac{10^{20}}{(10+n)^{20}} \leq \frac{1}{2}$$

$$\iff 10^{20} \leq \frac{(10+n)^{20}}{2}$$

$$\iff 2 \times 10^{20} \leq (10+n)^{20}$$

$$\iff \ln\left(2 \times 10^{20}\right) \leq \ln\left((10+n)^{20}\right)$$

$$\iff \ln\left(2 \times 10^{20}\right) \leq 20 \times \ln(10+n)$$

$$\iff \frac{\ln\left(2 \times 10^{20}\right)}{20} \leq \ln(10+n)$$

$$\iff \exp\left(\frac{\ln\left(2 \times 10^{20}\right)}{20}\right) \leq \exp\left(\ln(10+n)\right)$$

$$\iff \left(2 \times 10^{20}\right)^{\frac{1}{20}} \leq 10+n$$

$$\iff \sqrt[20]{2} \times \left(10^{20}\right)^{\frac{1}{20}} - 10 \leq n$$

$$\iff \sqrt[20]{2} \times 10 - 10 \leq n$$

$$\iff 10 \times \left(\sqrt[20]{2} - 1\right) \leq n$$

Grâce à la calculatrice on obtient $10 \times \left(\sqrt[20]{2} - 1\right) \approx 0,3526$, comme n est un entier naturel, on a :

$$1 \leq n$$

Pour conclure, p_n est supérieur ou égale à $\frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 273 (③) par Wéline

Un message binaire est transmis à travers des canaux successifs. La probabilité que le message soit transmis correctement d'un opérateur à un autre est p, avec $0 < p < 1$. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, soit πn la probabilité pour que le n-ième opérateur reçoive un message correct. On a donc $\pi_1 = 1$.

a) Justifier, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la formule

$$\pi_{n+1} = p\pi_n + (1-p)(1-\pi_n)$$

b) En utilisant le protocole d'étude des suites arithmético-géométriques (1.2, exercice 3), exprimer π_n en fonction de p et n. Déterminer la limite de $(\pi_n)_{n\geq 1}$.

a) Quand on veut obtenir la probabilité de π_{n+1} à partir de la probabilité de π_n, il y a deux cas de figure :
   - Le message à l'étape précédente est correcte. Dans ce cas là, il faut juste que le message soit transmis à l'étape suivante sans qu'il soit déformé donc : $\pi_n \times p$.
   - Le message à l'étape précédente n'est pas correcte. Dans ce cas là, il faut que le message soit mal transmis pour que la faute soit corrigée donc : $(1-\pi_n) \times (1-p)$.

   Donc on obtient bien la formule : $\pi_{n+1} = p\pi_n + (1-p)(1-\pi_n)$.

b) Pour trouver la forme explicite de la fonction (π_n), nous allons commencer par la mettre sous forme $\pi_{n+1} = a\pi_n + b$ avec a et b deux réels.

$$\pi_{n+1} = p\pi_n + (1-p)(1-\pi_n)$$

$$\Longleftrightarrow \pi_{n+1} = p\pi_n + 1 - \pi_n - p + p\pi_n$$
$$\Longleftrightarrow \pi_{n+1} = (2p-1)\pi_n + 1$$

On a donc $a = 2p-1$ et $b = 1$, passons maintenant à la deuxième étape qui consiste à résoudre l'équation $l = al + b$ avec $l \in \mathbb{R}$.

$$l = (2p-1)l + 1$$
$$\Longleftrightarrow -1 = (2p-2)l$$
$$\Longleftrightarrow l = \frac{-1}{2p-2}$$

Maintenant que nous avons la valeur de l, nous allons définir, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, la suite (v_n) par : $v_n = \pi_n - l$. Montrons maintenant que la suite (v_n) est géométrique.

$$v_{n+1} = \pi_{n+1} + \frac{1}{2p-2}$$

$$v_{n+1} = (2p-1)\pi_n + 1 + \frac{1}{2p-2}$$
$$v_{n+1} = (2p-1)\pi_n + \frac{2p-1}{2p-2}$$
$$v_{n+1} = (2p-1)\left(\pi_n + \frac{1}{2p-2}\right)$$
$$v_{n+1} = (2p-1)v_n$$

Calculons maintenant v_1 :

$$v_1 = \pi_1 + \frac{1}{2p-2} = 1 + \frac{1}{2p-2} = \frac{2p-1}{2p-2}$$

Nous pouvons donc conclure que (v_n) est bien une suite géométrique de raison égale à $2p-1$ et de premier terme égale à $\frac{2p-1}{2p-2}$, donc :

$$v_n = \frac{2p-1}{2p-2} \times (2p-1)^n$$

On peut maintenant exprimer (π_n) en fonction de p et n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$$v_n = \pi_n + \frac{1}{2p-2}$$

$$\Longleftrightarrow \pi_n = v_n - \frac{1}{2p-2}$$

$$\iff \pi_n = \frac{2p-1}{2p-2} \times (2p-1)^n - \frac{1}{2p-2}$$

Grâce à la formule explicite on peut maintenant déterminer la limite de cette suite.

$$0 < p < 1 \iff 0 < 2p < 2 \iff -1 < 2p-1 < 1$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} (2p-1)^n = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2p-1}{2p-2} \times (2p-1)^n = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \pi_n = -\frac{1}{2p-2}$$

EXERCICE 274 (③) par Wéline

On considère une assemblée de m personnes ; quelle est la probabilité que deux d'entre elles aient même anniversaire (on ne tient pas compte des années bissextiles) ? Pour quels m cette probabilité est-elle supérieure à $\frac{1}{2}$?

Pour calculer la probabilité que deux personnes est la même date d'anniversaire parmi une assemblée de m personnes, on va calculer la probabilité inverse c'est-à-dire, la probabilité que deux personnes dans cette assemblée n'est jamais la même date d'anniversaire.

On sait déjà que la probabilité que personne n'est la même date d'anniversaire est égale à 1 si $m = 1$ car avec une seule personne on est assuré qu'elle ne tombe pas le même jours qu'une autre.

Si on a $m \geq 366$, comme on ne compte pas les années bissextiles, on est sûr que deux personnes est leur anniversaire le même jours car on a que 365 possibilité de dates, donc la probabilité que personne n'est la même date d'anniversaire sera toujours égale à 0.

Pour une assemblée de m personnes avec $2 \leq m \leq 365$, on va utilisé la suite (u_m) définie pour $m \in [1; 365]$, qui associe à m la probabilité que personne n'est la même date d'anniversaire.

$u_1 = 1$ pour les raisons déjà évoqué précédemment.

$u_{n+1} = u_n \times \frac{366-n}{365}$ car on multiplie la probabilité que parmi les personnes déjà présente personne n'est la même date d'anniversaire par celle que la nouvelle personne est sa date d'anniversaire sur un des $366 - n$ jours qui n'ont pas été pris par les autres.

Donc la probabilité qu'au moins deux personnes est la même date d'anniversaire dans une assemblé de m personnes est de $1 - u_n$.

$$1 - u_n \geq \frac{1}{2}$$

$$\iff -u_n \geq \frac{1}{2} - 1$$

$$\iff u_n \leq \frac{1}{2}$$

On cherche donc la premier valeur de n tel que (u_n) soit inférieur à $\frac{1}{2}$. Grâce à la calculatrice, on obtient que :

$$u_{23} \approx 0,52$$

$$u_{24} \approx 0,49$$

Donc à partir du moment où l'on a $m \geq 24$, la probabilité que deux personnes est la même date d'anniversaire est supérieur à $\frac{1}{2}$.

EXERCICE 275 (③) par Antoine Soit m et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$ tels que $m \leq n$.On se donne une population de n personnes dans laquelle chaque personne admet exactement m amis. On choisit deux individus. Quelle est la probabilité qu'ils aient au moins un ami en commun ?

Soient x un entier naturel $P(x)$ la probabilité d'avoir x amis en communs. $P(x \geq 1) = 1 - P(0)$. Or $P(0) = \frac{\binom{n-m}{m}}{\binom{n}{200}}$ d'où on trouve $P(x \geq 1) = 1 - \frac{(n-m)! \cdot (n-m)!}{(n-2m)! \cdot n!}$. L'application numérique donne $P(x \geq 1) \approx 0.33$

EXERCICE 276 (③) par Antoine

Un gène possède deux allèles notés a et A. Les trois génotypes possibles sont aa, aA, AA, avec des probabilités respectives $x_1, 2y_1, z_1$. Chaque allèle a et A a une probabilité $\frac{1}{2}$ d'être transmis. Les parents sont sélectionnés indépendamment.

a) On note $x_2, 2y_2, z_2$ les probabilités respectives des génotypes aa, aA, AA à la seconde génération. Montrer que :

$$x_2 = (x_1 + y_1)^2, \quad 2y = (x_1 + y_1)(y_1 + z_1), \quad z_2 = (y_1 + z_1)^2$$

b) Montrer que la probabilité de chaque génotype est constante à partir de la seconde génération, c'est à dire que si l'on note $x_n, 2y_n, z_n$ les probabilités respectives des génotypes aa, aA, AA à la n-ième génération, on a, pour tout entier $n \geqslant 2$

$$x_n = x_2, \quad y_n = y_2, \quad z_n = z_2$$

a) Par l'indépendance : $x_2 = (x_1 + y_1)^2$. Comme pour avoir aa on peut avoir soit x_1, soit $\frac{2y_1}{2}$ (comme $2y_1$ correspond à AA). De la même manière on montre bien que $z_2 = (y_1 + z_1)^2$. Pour $2y_2$, il faut un "a" et un "A".
On trouve donc $\left(\frac{x_1 + z_1}{2}\right)(y_1 + z_1)$. Le premier membre nous donne a ou A et le second A qui est interchangeable avec $y_1 + x_1$. De plus, pour $2y_2$: $aA = Aa$, donc

$$\begin{aligned} 2y_2 &= 2\frac{x_1 + y_1}{2} \cdot (y_1 + z_1) \\ &= (x_1 + y_1)(y_1 + z_1) \end{aligned}$$

b) Posons A_n la probabilité d'avoir A et a_n celle d'avoir a au rang $n \geqslant 2$ pour les deux, on montre par récurrence le résultat voulu :
Initialisation. On a bien $x_2 = x_2, y_2 = y_2, z_2 = z_2$

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que la propriété soit vraie au rang n. On a alors :
$x_{n+1} = (A_n^2 + y_n)^2 = (a_n^2 + A_n \cdot a_n) = (a_n(a_n + A_n))^2 = a_n^2 = x_2$ car $a_n + A_n = 1$.
Les autres résultats se retrouvent de manière identique

Conclusion. Par le principe de récurrence, on a bien, pour $n \geqslant 2$, $x_n = x_2, y_n = y_2, z_n = z_2$

EXERCICE 277 (②) par Antoine

Lors d'un examen, un étudiant a le choix entre m réponses. Il connaît la réponse à la question avec probabilité p. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard et de façon équiprobable la réponse parmi les m possibles. Sachant que l'étudiant a bien répondu, quelle est la probabilité qu'il ait connu la réponse ?

Soit J (juste) et C (réponse connue), d'après l'arbre de probabilités, on a :

$$\begin{aligned} P(J) &= P(C \cap J) + P(\overline{C} \cap J) \\ &= 1 \cdot p + \frac{1}{m} \cdot (1 - p) \\ &= \frac{(1 - p) + mp}{m} \end{aligned}$$

et on retrouve : $P_J(C) = \dfrac{P(C\cap J)}{P(J)} = \dfrac{pm}{(1-p)+pm}$

EXERCICE 278 (②) par Maxime

Un test médical est réalisé sur une population contenant une proportion p de malades. Le test n'étant pas parfait, il est positif avec probabilité p_1 (proche de 1) sur les malades et p_2 (proche de 0) sur les individus sains. Déterminer la probabilité qu'un individu sur lequel le test est positif soir effectivement malade.

On note P l'événement "être positif" et M l'événement "être malade". Alors,

$$\mathbb{P}(P) = p \times p_1 + (1-p)p_2.$$

Donc

$$\mathbb{P}_P(M) = \frac{\mathbb{P}(M\cap P)}{\mathbb{P}(P)} = \frac{p\times p_1}{p\times p_1 + (1-p)p_2}.$$

EXERCICE 279 (④) Par Lancelot

a) Soient $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $m+1$ urnes $U_0, \dots, U_m$ telles que, pour tout $k \in \{0, \dots, m\}$, U_k contienne k boules bleues et $m-k$ boules rouges. Choisissons au hasard, avec équiprobabilité, une des urnes et effectuons-y $(n+1)$ tirages avec remise. Pour $1 \leq k \leq n+1$, notons $A_{k,m}$ l'évènement « pour chacun des k premiers tirages, on a obtenu une boule bleue ». Exprimer $p_{n,m} = \mathbb{P}\left(A_{n+1,m} | A_{n,m}\right)$.
b) On fixe n. Déterminer la limite de $\left(p_{m,n}\right)_{m\geq 1}$ lorsque m tend vers $+\infty$. On pourra utiliser la méthode des rectangles (**8.9**).

a) On notera (abusivement), pour tout $k \in [\![0;m]\!]$, U_k l'évènement, tirer aléatoirement l'urne k et l'évènement, tirer $n \in \mathbb{N}^*$ boules bleues de suite dans l'urne k, $B_{n,k}$. On cherche d'abord à exprimer $\mathbb{P}(A_{n,m})$.Par hypothèse :
$$\mathbb{P}(U_k) = \frac{1}{m+1}.$$
On fixe alors $k \in [\![0;m]\!]$. Observons que dans l'urne k, on a :
$$\mathbb{P}(B_{1,k}) = \frac{k}{m},$$
et *a fortiori*, pour $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\mathbb{P}(B_{n,k}) = \left(\frac{k}{m}\right)^n.$$
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si B_n désigne tirer n boules bleues de suite en n lancers, la formule des probabilités totales donne que :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_{n,m}) &= \sum_{k=0}^{m} \mathbb{P}(B_n \cap U_k)\\ &= \sum_{k=0}^{m} \mathbb{P}(U_k)\mathbb{P}(B_n|U_k)\\ &= \sum_{k=0}^{m} \mathbb{P}(U_k)\mathbb{P}(B_{n,k}) = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{k}{m}\right)^n.\end{aligned}$$
Ainsi,
$$p_{n,m} = \frac{\mathbb{P}(A_{n+1,m}\cap A_{n,m})}{\mathbb{P}(A_{n,m})}.$$
Mais on a clairement que $A_{n+1,m} \subseteq A_{n,m}$, donc $A_{n+1,m} \cap A_{n,m} = A_{n+1,m}$. Par suite :
$$\frac{\mathbb{P}(A_{n+1,m}\cap A_{n,m})}{\mathbb{P}(A_{n,m})} = \frac{\mathbb{P}(A_{n+1,m})}{\mathbb{P}(A_{n,m})}.$$

D'où :

$$p_{n,m} = \frac{\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{k}{m}\right)^{n+1}}{\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{k}{m}\right)^{n}}.$$

(on ne simplifie pas volontairement)

b) n est fixé. Soit $m \in \mathbb{N}$. On va utiliser la méthode des rectangles. On a que la fonction $x \longmapsto \left(\frac{x}{m}\right)^n$ est naturellement croissante. On a donc pour $k \in [\![0;m]\!]$:

$$\forall t \in [k;k+1], \quad \left(\frac{k}{m}\right)^n \leq \left(\frac{t}{m}\right)^n \leq \left(\frac{k+1}{m}\right)^n.$$

Puis, par monotonie de l'intégrale on obtient que :

$$\left(\frac{k}{m}\right)^n \leq \int_k^{k+1} \left(\frac{t}{m}\right)^n dt \leq \left(\frac{k+1}{m}\right)^n,$$

et en sommant k sur $[\![0;m]\!]$:

$$\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{k}{m}\right)^n - 1 \leq \int_0^m \left(\frac{t}{m}\right)^n dt \leq \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{k}{m}\right)^n,$$

ce qui est également :

$$\int_0^m \left(\frac{t}{m}\right)^n dt + 1 \geq \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{m}\right)^n \geq \int_0^m \left(\frac{t}{m}\right)^n dt,$$

d'où :

$$\frac{1}{m+1}\int_0^m \left(\frac{t}{m}\right)^n dt + \frac{1}{m+1} \geq \frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{m}\right)^n \geq \int_0^m \left(\frac{t}{m}\right)^n dt.$$

Il nous reste à calculer l'intégrale qui apparait dans les membres extérieurs de l'inégalité. En utilisant les primitives usuelles on a que :

$$\frac{1}{m+1}\int_0^m \left(\frac{t}{m}\right)^n dt = \frac{1}{m+1}\left[\frac{m\left(\frac{t}{m}\right)^{n+1}}{n+1}\right]_0^m = \frac{m}{m+1}\frac{1}{n+1}.$$

Ainsi l'inégalité devient :

$$\frac{m}{m+1}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{m+1} \geq \frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{m}\right)^n \geq \frac{m}{m+1}\frac{1}{n+1}.$$

Enfin, en laissant m tendre vers $+\infty$, on obtient, par le Théorème de convergence par encadrement que :

$$\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{m}\right)^n \xrightarrow[m\to+\infty]{} \frac{1}{n+1}.$$

Un raisonnement similaire donne que :

$$\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{m}\right)^{n+1} \xrightarrow[m\to+\infty]{} \frac{1}{n+2}.$$

Par conséquent :

$$p_{n,m} \xrightarrow[m\to+\infty]{} \frac{n+1}{n+2}.$$

Exercice 280 (⑤) par Tristan

Le jeu de Monty Hall se présente de la façon suivante. Trois portes sont fermées ; derrière l'une d'entre elles se trouve une voiture, derrière chacune des deux autres un porte-clés. Le candidat se place devant l'une des portes. Le présentateur, qui sait quelle est la porte cachant la voiture, ouvre alors l'une des deux portes non choisies par le candidat, derrière laquelle, bien sûr, se trouve un porte-clés. Que doit faire le candidat : garder son choix ou le modifier ?

On commence par poser les évènements suivants :

P : "la porte choisie cache un porte clé"

V : "la porte choisie cache la voiture"

C : "gagner en changeant de porte"

G : "gagner en gardant sa porte"

Comme 2 des trois portes cachent des porte-clés, on a $\mathbb{P}(P) = \dfrac{2}{3}$ et $\mathbb{P}(V) = \dfrac{1}{3}$.

Supposons que le candidat se place devant une porte avec un porte-clé. Alors le présentateur ouvrira l'autre porte cachant un porte clé et la porte restante, où le candidat n'est pas cache évidemment la voiture donc il la gagnera s'il change et ne gagnera pas s'il ne change pas.

Alors $\mathbb{P}(C|P) = 1$ et $\mathbb{P}(G|P) = 0$.

Supposons maintenant que le candidat se soit placé devant la porte cachant la voiture. Alors le présentateur ouvre une des deux portes restantes cachant un porte clé et le candidat gagnera la voiture s'il garde sa porte, la perdra s'il change.

Alors $\mathbb{P}(G|V) = 1$ et $\mathbb{P}(C|V) = 0$.

On peut alors calculer les probabilités $\mathbb{P}(C)$ et $\mathbb{P}(G)$, ce qui donne :

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(C|P) \times \mathbb{P}(P) + \mathbb{P}(C|V) \times \mathbb{P}(V) = 1 \times \frac{2}{3} + 0 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(G|P) \times \mathbb{P}(P) + \mathbb{P}(G|V) \times \mathbb{P}(V) = 0 \times \frac{2}{3} + 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

On remarque alors que la probabilité de gagner en changeant de porte est deux fois supérieure à celle de gagner sans changer, ce qui répond au problème.

Pour rendre ce phénomène plus évident, on peut s'intéresser à l'idée suivante, pouvant être considérée comme une généralisation du problème de Monty Hall :

Pour $n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$, on considère n portes. Derrière une de ces portes se cache la voiture et derrière les autres il n'y a que des porte-clés. Le candidat choisi une porte parmi les n, au hasard puis le présentateur de l'émission ouvre toutes les autres portes sauf une. Évidemment, toutes les portes ouvertes par le présentateur ne cachent que des porte-clés. Le candidat a alors le choix entre garder sa porte ou changer et prendre l'autre porte.

On reprends les évènements définis un peu plus haut et on écrit alors $\mathbb{P}(P) = \dfrac{n-1}{n}$ et $\mathbb{P}(V) = \dfrac{1}{n}$. Les autres probabilités quant à elles ne changent pas.

Ainsi,

$$\mathbb{P}(C) = \frac{n-1}{n} \text{ et } \mathbb{P}(G) = \frac{1}{n}$$

Il est alors facile de voir que la probabilité de gagner en changeant de porte est plus grande que celle de gagner sans changer. En effet, si on étudie les suites $\left(\dfrac{n-1}{n}\right)_{n\geq 3}$ et $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geq 3}$, on trouve que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right) = 1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

Ainsi, plus le nombre de portes est grand, plus la probabilité de gagner en changeant de porte se rapproche de 1 et celle de gagner sans changer, de 0, ce qui montre bien que le candidat a tout intérêt à changer de porte lorsque le choix lui est proposé.

EXERCICE 281 (1) par Maxime

Que dire de deux événements A et B indépendants et incompatibles ?

Si A et B sont indépendants alors

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Si A et B sont incompatibles alors
$$\mathbb{P}(A \cap B) = 0.$$

Donc, si A et B sont indépendants et incompatibles, au moins l'un des deux à une probabilité nulle.

EXERCICE 282 (②) par Loïse

Soient A et B deux évènements de probabilités respectives $\frac{5}{10}$ et $\frac{7}{10}$. On suppose que la probabilité que A et B se produisent est $\frac{3}{10}$. Quelle est la probabilité que ni A ni B ne se produise ?

L'évènement contraire de "ni A ni B ne se produisent" est "A ou B se produit". D'après les propriétés des évènements contraires, on a donc :

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B).$$

Or :
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Soit :
$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B).$$

Le calcul donne :
$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - \frac{5}{10} - \frac{7}{10} + \frac{3}{10} = \frac{1}{10}.$$

EXERCICE 283 (③)

Soient A et B deux évènements. Comparer $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(A \cup B)\mathbb{P}(A \cap B)$.

Exercice 283 (énoncé rédigé)

EXERCICE 284 (④) par Samy Clementz

Soient A et B deux événements avec $P(B) > 0$. Montrer que

$$|P(A \cap B) - P(A|B)| \leq \frac{1}{P(B)} - 1, \quad |P(A) - P(A \cap B)| \leq 1 - P(B).$$

En déduire que
$$|P(A) - P(A|B)| \leq \frac{1}{P(B)} - P(B).$$

Première inégalité :

$$\begin{aligned} |P(A \cap B) - P(A|B)| &= |P(A \cap B) - \frac{P(A \cap B)}{P(B)}| \\ &= P(A \cap B)|1 - \frac{1}{P(B)}| \\ &\leq |1 - \frac{1}{P(B)}|. \end{aligned}$$

Comme $P(B)$ est compris entre 0 et 1, on a

$$|1 - \frac{1}{P(B)}| = \frac{1}{P(B)} - 1,$$

ce qui prouve l'inégalité.

Deuxième inégalité : remarquons que, puisque A est union disjointe de $A\cap B$ et de $A\cap B^c$, on a

$$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^c).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}|P(A)-P(A\cap B)|&=P(A\cap B^c)\\&\leq P(B^c)\\&=1-P(B).\end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}|P(A)-P(A|B)|&=|P(A)-P(A\cap B)+P(A\cap B)-P(A|B)|\\&\leq |P(A)-P(A\cap B)|+|P(A\cap B)-P(A|B)|\\&\leq 1-P(B)+\frac{1}{P(B)}-1\\&=\frac{1}{P(B)}-P(B).\end{aligned}$$

EXERCICE 285 (③) par Ylan

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On se donne n évènements indépendants de probabilité respectives $p_1,...,p_n$.

a) Calculer la probabilité π_n qu'aucun de ces évènements de ne se réalise.

b) Montrer que :

$$\pi_n\leq \exp\left(-\sum_{i=1}^n p_i\right)$$

a) On note ces n évènements $A_1,...,A_n$. Nous avons donc :

$$\forall i\in\{1,...,n\},\quad p_i=P(A_i)$$

La probabilité qu'aucun de ces évènements ne se réalise correspond à $P\left(\bigcap_{i=1}^n\overline{A_i}\right)$.

Or, les $A_1,...,A_n$ sont 2 à 2 indépendants, donc les $\overline{A_1},...,\overline{A_n}$ le sont également, et donc :

$$\pi_n=P\left(\bigcap_{i=1}^n\overline{A_i}\right)=\prod_{i=1}^n P\left(\overline{A_i}\right)=\prod_{i=1}^n\left(1-P\left(A_i\right)\right)=\prod_{i=1}^n\left(1-p_i\right)$$

b) Supposons que les p_i ne soient pas tous différents de 1. Nous avons alors :

$$\pi_n=\prod_{i=1}^n(1-p_i)=0,\text{ et comme exp est à valeurs dans }\mathbb{R}_+^*,\ \pi_n\leq\exp\left(-\sum_{i=1}^n p_i\right).$$

On suppose désormais tous les p_i différents de 1. Nous avons alors, comme une probabilité est comprise entre 0 et 1 :

$$\forall i\in\{1,...,n\},\quad 1-p_i>0\quad\text{ et donc :}$$

$$\pi_n=\prod_{i=1}^n(1-p_i)>0.\quad\text{Nous avons donc :}$$

$$\pi_n=\exp\left(\ln\left(\pi_n\right)\right)=\exp\left(\ln\left(\prod_{i=1}^n\left(1-p_i\right)\right)\right)=\exp\left(\sum_{i=1}^n\ln\left(1-p_i\right)\right)$$

Or, nous avons $0\leq p_i<1$, donc : $-1<-p_i\leq 0$, et donc d'après l'exemple du paragraphe 6.3.2 :

$$\ln(1-p_i)\leq -p_i,\text{ puis en sommant les inégalités, il vient :}$$

$$\sum_{i=1}^n\ln\left(1-p_i\right)\leq-\sum_{i=1}^n p_i,\text{ puis par croissance de la fonction exp sur }\mathbb{R},\text{ il vient :}$$

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{n}\ln(1-p_i)\right) \leq \exp\left(-\sum_{i=1}^{n}p_i\right), \text{ d'où :}$$

$$\pi_n \leq \exp\left(-\sum_{i=1}^{n}p_i\right)$$

EXERCICE 286 (③) par Loïse

Soit p un élément de $]0;1[$. Une expérience aléatoire réussit avec la probabilité p. On la répète une infinité de fois, avec indépendance. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n la probabilité que l'expérience ait réussi au moins une fois lors des n premières répétitions.

a) On note N_p le plus petit n tel que $p_n \geq \frac{1}{2}$. Exprimer N_p.

b) Quelle est la limite de pN_p lorsque p tend vers 0 ?

a) Par définition p_n est la probabilité que l'expérience ait réussi au moins une fois lors des n premières répétitions. Or, l'évènement de "L'expérience a réussi au moins une fois lors des n premières répétitions" est "L'expérience n'a jamais réussi lors des n premières répétitions". La probabilité de l'échec de l'expérience est égale à $1-p$. Comme les n expériences sont répétées avec indépendance, il vient :

$$p_n = 1-(1-p)^n.$$

On cherche l'entier N_p tel que $p_n \geq \frac{1}{2}$. Soit :

$$1-(1-p)^n \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -(1-p)^n \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow (1-p)^n \leq \frac{1}{2}.$$

Par composition par la fonction logarithme népérien strictement croissante sur $]0,+\infty[$, il vient :

$$\ln((1-p)^n) \leq \ln(\frac{1}{2}) \Leftrightarrow n\ln(1-p) \leq -\ln(2).$$

Or p est un élément de $]0;1[$, d'où :

$$1-p<1,$$

et par composition par la fonction logarithme népérien strictement croissante sur $]0,+\infty[$;

$$\ln(1-p)<0.$$

Soit :

$$n \geq -\frac{\ln(2)}{\ln(1-p)}.$$

Si on définit l'ensemble A comme l'ensemble des entiers naturels n non nuls qui vérifient $n \geq -\frac{\ln(2)}{\ln(1-p)}$, alors $N_p = \inf(A)$. Ainsi :

$$-\frac{\ln(2)}{\ln(1-p)}+1 \geq N_p \geq -\frac{\ln(2)}{\ln(1-p)}, \quad N_p \in \mathbb{N}.$$

On peut également exprimer N_p à l'aide de la partie entière :

$$N_p = \left\lfloor -\frac{\ln(2)}{\ln(1-p)} \right\rfloor + 1.$$

b) A partir de la double inégalité établie précédemment, comme p est strictement positif, il vient :

$$-p\frac{\ln(2)}{\ln(1-p)}+p \geq pN_p \geq -p\frac{\ln(2)}{\ln(1-p)}.$$

Calculons la limite du minorant et du majorant de N_p.

$$\forall p \in]0,1[, \quad \frac{p}{\ln(1-p)} = \frac{1}{\frac{\ln(1-p)-\ln(1)}{-p}}.$$

Par passage à la limite, on reconnaît au dénominateur l'expression du taux d'accroissement de la fonction logarithme népérien en 1. Or la fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0, +\infty[$ et donc en 1. D'où :

$$\lim_{p\to 0} \frac{\ln(1-p) - \ln(1)}{-p} = \ln'(1) = 1.$$

Par inverse :

$$\lim_{p\to 0} \frac{1}{\dfrac{\ln(1-p) - \ln(1)}{-p}} = 1.$$

Par produit par $ln(2)$, il vient :

$$\lim_{p\to 0} p\frac{\ln(2)}{\ln(1-p)} = \ln(2).$$

Par somme avec p, il vient :

$$\lim_{p\to 0} p\frac{\ln(2)}{\ln(1-p)} + p = \ln(2).$$

D'après le théorème d'encadrement dit "des gendarmes" :

$$\lim_{p\to 0} pN_p = \ln(2).$$

Exercice 287 (③) par Maorine

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une expérience aléatoire peut produire n résultats distincts notés $1, ..., n$, de probabilités respectives $p_1, ..., p_n$. On la répète deux fois de manière indépendante. On note p la probabilité que les deux résultats soient égaux.

a) Exprimer p en fonction des p_i, $1 \leq i \leq n$.

b) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz de **3.4**, montrer que $p \geq \frac{1}{n}$. Caractériser le cas d'égalité.

a) Pour que les deux résultats soient égaux, on peut obtenir deux fois le résultat 1, ou deux fois 2, ..., ou deux fois n.
De plus, la probabilité d'obtenir deux fois le résultat i, pour $i \in \{1, ..., n\}$ est de p_i^2.
Alors la probabilité p d'obtenir deux résultats identiques est la somme des probabilités d'obtenir deux fois le résultat i, c'est-à-dire :

$$p = \sum_{i=1}^{n} p_i^2.$$

b) Voir le paragraphe **3.4** pour l'inégalité de Cauchy-Schwarz et son cas d'égalité.
On applique l'inégalité avec les p_i et $\frac{1}{\sqrt{n}}$:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{1}{\sqrt{n}}\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}$$

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right|\left|\sum_{i=1}^{n} p_i\right| \leq \sqrt{p}\sqrt{n \times \frac{1}{n}}$$

La somme des p_i vaut 1. On passe l'inégalité au carré :

$$\frac{1}{n} \times 1 \leq p.$$

Le résultat voulu.

Il y a égalité si et seulement si $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, \qquad p_i = \lambda \times \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

De plus, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Donc :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda}{\sqrt{n}} = 1$$
$$n \times \frac{\lambda}{\sqrt{n}} = 1$$
$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Ainsi, $p = \frac{1}{n}$ si et seulement si $\forall i \in \{1, ..., n\},\quad p_i = \frac{1}{n}$.

EXERCICE 288 (①) par Loïse

On lance deux dés non pipés, on note X la variable aléatoire donnant la somme des deux résultats. Donner la loi de X.

Soit l'expérience aléatoire "On lance deux dés non pipés, et on regarde le résultat". L'univers Ω de l'expérience est :

$$\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}.$$

Étudions un exemple, puis généralisons avec un tableau. Pour calculer la probabilité d'obtenir la somme égale à 3, on compte le nombre de possibilités d'obtenir 3 avec deux dés. Ici, il y a deux possibilités (1 et 2 ou 2 et 1). Ensuite, comme les dés sont non pipés, chaque issue est équiprobable. Il y a 36 issues possibles puisque chaque dé compte 6 faces. Ainsi $P(X = 3) = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$ La variable aléatoire X est définie sur Ω et sa loi de probabilité est :

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

EXERCICE 289 (②) par Esteban

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $d \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$. Soit R la variable aléatoire égale au reste de la division euclidienne de X par d. Donner la loi de R.

On note Ω l'univers fini des possibles associé à nos expériences aléatoires.

$$R(\Omega) = \begin{cases} \{1, \ldots, n\} & \text{si } d > n\,(1) \\ \{0, \ldots, d-1\} & \text{si } d \leq n\,(2) \end{cases}.$$

(1) : Il s'ensuit que :

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\},\, P(R = k) = \frac{1}{n}$$

(2) : On aura donc, si r représente le reste de la division de n par d :

$$n = \lfloor \frac{n}{d} \rfloor d + r$$
$$\forall k \in \{0, \ldots, d-1\}$$
$$\text{Si } k > r \text{ ou } k = 0,\, P(R = k) = \frac{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor}{n}$$
$$\text{Si } k \leq r \text{ avec } k \neq 0,\, P(R = k) = \frac{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor + 1}{n}$$

Puisqu'il y aura un cycle de $\lfloor \frac{n}{d} \rfloor$ segments de d restes ainsi qu'un dernier de r restes. Les $d - r$ restes supérieurs à r n'apparaîtront pas sur ce dernier segment. $\lfloor \frac{n}{d} \rfloor$ est le nombre de fois que ces derniers apparaissent tandis que les restes inférieurs à r sont visibles une fois de plus car présents sur le dernier segment, donc $\lfloor \frac{n}{d} \rfloor + 1$ fois.

EXERCICE 290 (③) par Samy Clementz

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne n variables aléatoires indépendantes $X_1, \dots, X_n$ suivant chacune la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$. On note E_n l'événement « il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $X_i = 1$ ». Déterminer la probabilité p_n de E_n. Quelle est la limite de $(p_n)_{n \geq 1}$?

E_n^c= « pour tout $i = 1, \dots, n$, on a $X_i \neq 1$ ». Alors

$$\begin{aligned} P(E_n^c) &= P(X_1 \neq 1, \dots, X_n \neq 1) \\ &= P(X_1 \neq 1) \times \dots \times P(X_n \neq 1) \quad \text{(les } X_i \text{ sont indépendants)} \\ &= P(X_1 \neq 1)^n \quad \text{(les } X_i \text{ sont de même loi)} \\ &= P(X_1 \in \{2, \dots, n\})^n \\ &= (\frac{n-1}{n})^n \\ &= (1 - \frac{1}{n})^n. \end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned} p_n &= P(E_n) \\ &= 1 - P(E_n^c) \\ &= 1 - (1 - \frac{1}{n})^n, \end{aligned}$$

qui tend vers $1 - e^{-1}$ quand n tend vers l'infini. (limite classique)

EXERCICE 291 (②) par Samy Clementz

a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{1, \dots, n\}$, $S = \max(X, Y)$. Pour $1 \leq k \leq n$, exprimer $P(S \leq k)$ en fonction de $P(X \leq k)$ et $P(Y \leq k)$. En déduire la loi de S.

b) Expliciter la loi de S si X et Y suivent toutes deux la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$.

a) S est à valeurs dans $\{1, \dots, n\}$. L'observation fondamentale est la suivante. Soit $k \in \{1, \dots, n\}$.

$$\begin{aligned} S \leq k &\Leftrightarrow \max(X, Y) \leq k \\ &\Leftrightarrow X \leq k \text{ et } Y \leq k. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} P(S \leq k) &= P(X \leq k \cap Y \leq k) \\ &= P(X \leq k)P(Y \leq k). \quad \text{(car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes)} \end{aligned}$$

Notons que cette relation est vraie aussi pour $k = 0$. Remarquons que

$$(S = k) = (S \leq k) \setminus (S \leq k - 1).$$

Donc

$$\begin{aligned} P(S = k) &= P(S \leq k) - P(S \leq k - 1) \\ &= P(X \leq k)P(Y \leq k) - P(X \leq k - 1)P(Y \leq k - 1). \end{aligned}$$

Ces quantités définissent la loi de S.

b) Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on a :

$$P(X \leq k) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n} = \frac{k}{n}.$$

Notons que cette égalité est aussi vraie pour $k = 0$. Donc

$$\begin{aligned} P(S=k) &= \left(\frac{k}{n}\right)^2 - \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 \\ &= \frac{2k-1}{n}. \end{aligned}$$

EXERCICE 292 (③) par Samy Clementz

Soient n, n' et m trois éléments de $\mathbb{N}^*$ tels que $n' \leq n$ et $m \leq n$, $E = \{1, \ldots, n\}$ et $E' = \{1, \ldots, n'\}$; du point de vue de la modélisation, E représente une population de n individus, E' une sous-population de n' individus. On choisit aléatoirement une partie F de E de cardinal m. On note X la variable aléatoire égale au cardinal de $F \cap E'$. Déterminer la loi de X.

Précisons les modalités du tirage. Quand l'énoncé dit que l'on choisit "aléatoirement" une partie de E de cardinal m, on supposera que cela sous-entend que les parties de E de cardinal m ont toutes autant de chances d'être tirées. Autrement dit, on munit l'ensemble des parties de E de cardinal m de la probabilité uniforme.

Tout découle du raisonnement suivant. Déjà il est clair que X est compris entre 0 et m. Soit $k \in \{0, \ldots, m\}$. Choisir une partie F de E de cardinal m, et dont l'intersection avec E' est de cardinal k, revient à :
— Choisir une partie de E' de cardinal k.
— Puis choisir une partie de $E \setminus E'$ de cardinal $m-k$.
Il y a $\binom{n'}{k}$ parties de E' de cardinal k, et $\binom{n-n'}{m-k}$ parties de $E \setminus E'$ de cardinal $m-k$. Donc il y a

$$\binom{n'}{k}\binom{n-n'}{m-k}$$

choix différents pour F. Le nombre total de parties de E de cardinal m est $\binom{n}{m}$, donc la probabilité cherchée est :

$$P(X=k) = \frac{\binom{n'}{k}\binom{n-n'}{m-k}}{\binom{n}{m}}.$$

On remarque à posteriori que $X \in [[\max(0, m-n+n'), \ldots, \min(n', m)]]$.

EXERCICE 293 (④) par Matilde (Problème des boîtes d'allumettes de Banach)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, ..., n\}$. Un mathématicien a deux boîtes de n allumettes, une dans chaque poche. Chaque fois qu'il fume, il choisit au hasard une poche avec probabilité $\frac{1}{2}$, jusqu'à se rendre compte que l'une des deux boîtes est vide. On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'allumettes restant dans l'autre boîte à cet instant. Déterminer la loi de X.

Dans cette expérience aléatoire il n'y a uniquement deux issues possibles : "le mathématicien pioche dans sa poche droite" et "le mathématicien pioche dans sa poche gauche".
De plus, chaque tirage est indépendant du précédent et du suivant.
Cela nous renvoie à la loi binomiale. En effet, on peut considérer que piocher dans la poche qui se videra en premier est un succès. Ainsi :

S'il reste n allumettes, il n'y a qu'un seul chemin possible :

$$P(X=n) = (\frac{1}{2})^n$$

S'il reste $n-1$ allumettes, cela signifie qu'il y a eu $n+1$ tirages et sur ces tirages, n ont été des succès, on peut donc écrire grâce à la formule de la loi binomiale :

$$P(X=n-1) = \binom{n+1}{n}(\frac{1}{2})^n(\frac{1}{2}) = \binom{n+1}{n}(\frac{1}{2})^{n+1}$$

S'il reste $n-2$ allumettes, cela signifie qu'il y a eu $n+2$ tirages, dont n succès, on peut donc écrire grâce à la formule de la loi binomiale :

$$P(X=n-2) = \binom{n+2}{n}(\frac{1}{2})^{n+2}$$

Etc.
Pour généraliser :
S'il reste k allumettes, cela signifie qu'il y a eu $2n-k$ tirages et, sur ces tirages, n ont été des succès, on peut donc écrire grâce à la formule de la loi binomiale :

$$P(X=k) = \binom{2n-k}{n}(\frac{1}{2})^n(\frac{1}{2})^{n-k} = \binom{2n-k}{n}(\frac{1}{2})^{2n-k}$$

La loi de X s'exprime alors par :

$$P(X=k) = \frac{\binom{2n-k}{n}}{2^{2n-k}}$$

EXERCICE 294 (④) par Tristan

On se donne deux dés. Pour $1 \leq i \leq 6$, on note p_i (resp. q_i) la probabilité d'obtenir i en lançant le premier dé (resp. le second). Les lancers sont supposés indépendants. On note S la variable aléatoire donnant la somme des deux lancers.

a) Exprimer $\mathbb{P}(S=2)$ et $\mathbb{P}(S=12)$ en fonction de p_1, q_1, p_6 et q_6.

b) Exprimer $\mathbb{P}(S=7)$ en fonction de $p_1, \dots, p_6$ et $q_1, \dots, q_6$, puis montrer que

$$\mathbb{P}(S=7) \geq 2\sqrt{\mathbb{P}(S=1)\,\mathbb{P}(S=12)}$$

c) Montrer que S ne suit pas la loi uniforme sur $\{2, \dots, 12\}$.

a) $S=2$ si et seulement si l'on obtient le chiffre 1 au premier et au deuxième lancer. Ainsi, $\mathbb{P}(S=2) = p_1 q_1$.
$S=12$ si et seulement si l'on obtient le chiffre 6 au premier et au deuxième lancer d'où $\mathbb{P}(S=12) = p_6 q_6$.

b) On commence par lister les cas où $S=7$, en notant D_1 la valeur prise par le premier dé et D_2 celle prise par le second, on a alors $S = D_1 + D_2$ et

$$S = 7 \Leftrightarrow \begin{cases} D_1 = 1 & \text{et } D_2 = 6 \\ D_1 = 2 & \text{et } D_2 = 5 \\ D_1 = 3 & \text{et } D_2 = 4 \\ D_1 = 4 & \text{et } D_2 = 3 \\ D_1 = 5 & \text{et } D_2 = 2 \\ D_1 = 6 & \text{et } D_2 = 1 \end{cases}$$

On en déduit la valeur de $\mathbb{P}(S=7)$

$$\mathbb{P}(S=7) = p_1q_6 + p_2q_5 + p_3q_4 + p_4q_3 + p_5q_2 + p_6q_1$$

On remarque qu'une erreur s'est glissée dans l'énoncé de cette question. En effet, l'évènement $S=1$ *n'existe pas donc sa probabilité de réalisation est évidemment* 0, *ce qui rend la question inutile. On suppose donc que l'on doit en réalité montrer que*

$$\mathbb{P}(S=7) \geq 2\sqrt{\mathbb{P}(S=2)\,\mathbb{P}(S=12)}$$

ce qui est tout de suite plus palpitant.

D'après les expressions de $\mathbb{P}(S=2)$ et $\mathbb{P}(S=12)$ trouvée, on établit que

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\mathbb{P}(S=2)\,\mathbb{P}(S=12)} &= 2\sqrt{p_1q_1p_6q_6} \\ &= 2\sqrt{p_1q_6}\sqrt{p_6q_1} \\ &\leq p_1q_6 + p_6q_1 \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbb{P}(S=7) - 2\sqrt{\mathbb{P}(S=2)\,\mathbb{P}(S=12)} = p_2q_5 + p_3q_4 + p_4q_3 + p_5q_2$, ce qui entraîne immédiatement l'inéquation souhaitée

$$\mathbb{P}(S=7) \geq 2\sqrt{\mathbb{P}(S=2)\,\mathbb{P}(S=12)}$$

c) Si S suit la loi uniforme sur $\{2,\dots,12\}$ alors $\forall i,j\in\{2,\dots,12\}$, $\mathbb{P}(S=i)=\mathbb{P}(S=j)$.

On suppose par l'absurde que ce soit le cas.
Alors on peut écrire $\mathbb{P}(S=2)=\mathbb{P}(S=12)$ et, d'après la question précédente, on a

$$\mathbb{P}(S=7)\geq 2\mathbb{P}(S=2)$$

Or cela est absurde car selon notre hypothèse de départ, $\mathbb{P}(S=7)=\mathbb{P}(S=2)$ et le seul moyen d'arriver à ce résultat serait d'avoir $\mathbb{P}(S=i)=0$ pour $2\leq i\leq 12$, ce qui est impossible.
D'après cette contradiction, S ne suit pas la loi uniforme sur $\{2,\dots,12\}$.

9.2 Schéma binomial

EXERCICE 295 (②) par Loïse

Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 fois six en lançant 6 fois un dé équilibré ?

Chaque lancer de dé est une expérience aléatoire à deux issues formant une partition de l'univers dont le succès est "Obtenir un 6" de probabilité égale à $\frac{1}{6}$. C'est une expérience de Bernoulli que l'on répète 6 fois de manière identique et indépendante. On reconnaît un schéma de Bernoulli. La loi de probabilité X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale $B(6;\frac{1}{6})$.
La probabilité d'obtenir exactement 3 fois six en lançant 6 fois un dé équilibré s'écrit donc :

$$P(X=3)=\binom{6}{3}(\frac{1}{6})^3(\frac{5}{6})^3=\frac{4\cdot 5^4}{6^6}.$$

On peut donner une valeur approchée arrondie au millième : $P(X=3)\approx 0,054$.

EXERCICE 296 (②) par Loïse

Un tireur a une chance sur deux d'atteindre une cible. Quelle est la probabilité de l'atteindre au moins trois fois en dix coups ?

Chaque tir est une expérience aléatoire à deux issues formant une partition de l'univers dont le succès est "La flèche atteint la cible" de probabilité égale à $\frac{1}{2}$. C'est une expérience de Bernoulli que l'on répète 10 fois de manière identique et indépendante. On reconnaît un schéma de Bernoulli. La loi de probabilité X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale $B(10;\frac{1}{2})$.
La probabilité d'atteindre la cible au moins trois fois en dix coups s'écrit (à l'aide des évènements contraires pour simplifier l'expression) :

$$P(X\geq 3)=1-P(X=2)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2).$$

Soit :

$$P(X\geq 3)=1-\binom{10}{2}(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^8-\binom{10}{1}(\frac{1}{2})^1(\frac{1}{2})^9-\binom{10}{0}(\frac{1}{2})^0(\frac{1}{2})^{10}.$$

Soit :

$$P(X\geq 3)=1-\frac{90}{2^{11}}-\frac{10}{2^{10}}-\frac{1}{2^{10}}$$

On peut donner une valeur approchée arrondie au millième : $P(X\geq 3)\approx 0,945$.

EXERCICE 297 (②) par Loïse

Un comité de 9 personnes se réunit. Chaque participant est présent avec probabilité de $\frac{1}{2}$. Quelle est la probabilité qu'au moins 6 membres soient présents ?

La présence éventuelle d'un membre du comité est une expérience aléatoire à deux issues qui forment une partition de l'univers dont le succès est "Le membre est présent" de probabilité égale à $\dfrac{1}{2}$. C'est une expérience de Bernoulli que l'on répète 9 fois de manière identique et indépendante. On reconnaît un schéma de Bernoulli. La loi de probabilité X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale $B(9;\dfrac{1}{2})$. La probabilité qu'au moins 6 membres soient présents s'écrit :

$$P(X \geq 6) = \sum_{k=6}^{9} \binom{9}{k} (\frac{1}{2})^k (\frac{1}{2})^{9-k}$$

Soit :

$$P(X \geq 6) = \binom{9}{6}(\frac{1}{2})^6(\frac{1}{2})^3 + \binom{9}{7}(\frac{1}{2})^7(\frac{1}{2})^2 + \binom{9}{8}(\frac{1}{2})^8(\frac{1}{2})^1 + \binom{9}{9}(\frac{1}{2})^9(\frac{1}{2})^0$$

Soit :

$$P(X \geq 6) = \frac{21}{2^7} + \frac{9}{2^7} + \frac{9}{2^9} + \frac{1}{2^9}$$

On peut donner une valeur approchée arrondie au millième : $P(X \geq 6) \approx 0,254$.

Exercice 298 (②) par Loïse

On lance n fois un dé équilibré. On note X le nombre de 6 obtenu. Exprimer simplement $P(X \geq 2)$. On demande une expression ne faisant pas intervenir le symbole $\sum$.

Commençons par donner la loi de X. Chaque lancer de dé est une expérience aléatoire à deux issues formant une partition de l'univers dont le succès est "Obtenir un 6" de probabilité égale à $\dfrac{1}{6}$. C'est une expérience de Bernoulli que l'on répète n fois de manière identique et indépendante. On reconnaît un schéma de Bernoulli. La loi de probabilité X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale $B(n;\dfrac{1}{6})$. L'évènement contraire d'"obtenir au moins deux 6 sur n lancers" est d'"obtenir strictement moins de deux 6 sur n lancers". On peut donc écrire, d'après les propriétés des évènements contraires :

$$P(X \geq 2) = 1 - P(\overline{X \geq 2}) \Leftrightarrow P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) \Leftrightarrow P(X \geq 2) = 1 - \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} (\frac{1}{6})^k (\frac{5}{6})^{n-k}.$$

Or,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \binom{n}{0} = 1 \quad et \quad \binom{n}{1} = n.$$

On en déduit donc

$$P(X \geq 2) = 1 - \frac{n}{6}(\frac{5}{6})^5 - (\frac{5}{6})^6.$$

Exercice 299 (②) par Macéo

Un livre de 500 pages contient 50 fautes d'impression réparties aléatoirement. Quelle est la probabilité qu'une page donnée comporte au moins deux erreurs ?

On cherche la probabilité qu'une page donnée comporte au moins deux erreurs, notons cette page $k, \quad k \in \{1, ..., 500\}$.
Chaque faute est répartie aléatoirement sur les 500 pages, de manière indépendante aux autres fautes.
Ainsi, la probabilité qu'une erreur donnée se trouve sur la k-ième page est de $p = \frac{1}{500}$.

Soit X_k la variable aléatoire qui donne le nombre d'erreurs se trouvant sur la k-ième page.
Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = \frac{1}{500}$.
On a donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_k \geq 2) &= 1 - \mathbb{P}(Y = 0) - \mathbb{P}(Y = 1) \\ &= 1 - \binom{50}{0}\left(\frac{499}{500}\right)^{50} - \binom{50}{1}\frac{1}{500}\left(\frac{499}{500}\right)^{49} \\ &= \frac{500^{50} - 499^{50} - 50 \times 499^{49}}{500^{50}}. \end{aligned}$$

Exercice 300 (②) par Macéo

Soit $p \in]0,1[$. On lance une pièce pipée, ayant la probabilité p de donner pile. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 3 piles en 5 lancers ? Au moins 5 piles en 8 lancers ?

Soit $p \in]0,1[$ la probabilité d'obtenir pile. Soit Y_n la variable aléatoire qui donne le nombre de piles après n lancers, $n \in \mathbb{N}^*$. Les lancers sont indépendants donc Y_n suit la loi binomiale de paramètres n, p.
Donc la probabilité d'obtenir au moins 3 piles en $n = 5$ lancers est :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_5 \geq 3) &= \mathbb{P}(Y_5 = 3) + \mathbb{P}(Y_5 = 4) + \mathbb{P}(Y_5 = 5) \\ &= \binom{5}{3} p^3(1-p)^2 + \binom{5}{4} p^4(1-p) + \binom{5}{5} p^5.\end{aligned}$$

Et la probabilité d'obtenir au moins 5 piles en $n = 8$ lancers est :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_8 \geq 5) &= \mathbb{P}(Y_8 = 5) + \mathbb{P}(Y_8 = 6) + \mathbb{P}(Y_8 = 7) + \mathbb{P}(Y_8 = 8) \\ &= \binom{8}{5} p^5(1-p)^3 + \binom{8}{6} p^6(1-p)^2 + \binom{8}{7} p^7(1-p) + \binom{8}{8} p^8.\end{aligned}$$

Exercice 301 (③) par Wéline

Soient n et n' deux éléments de $\mathbb{N}^*$ tels que $n' \leq n$. On note $E = \{1; ...; n\}$, $E' = 1; ...; n'$. Effectuons n tirages dans E avec remise, de sorte que chaque élément de E ait la probabilité $\frac{1}{n}$ d'être tiré et que les tirages soient indépendants. Soit X le nombre de tirages ayant donné un élément de E'. Quelle est la loi de X ?

Comme $n' \leq n$, on peut dire que $E' \subset E$. On a donc que E et E' ont n' éléments en commun. Donc la probabilité de tomber sur un élément de E' quand on en pioche un dans E est de $\frac{n'}{n}$. On peut donc définir une épreuve de Bernouilli où le succès est : « Pioché un élément dans E commun à E' » et dont la probabilité de succès est $\frac{n'}{n}$. On répète de manière identique et indépendante cette épreuve n fois. La variable aléatoire X compte le nombre de succès, elle suit donc une loi binomiale $\mathcal{B}(\frac{n'}{n}; n)$.

Exercice 302 (③) par Wéline

Une population de n élèves passe un examen constitué de deux épreuves indépendantes. La probabilité de réussite à la première (resp. deuxième) est p_1 (resp. p_2). Les deux épreuves donnent des résultats indépendants. Quelle est la loi de la variable aléatoire X donnant le nombre de candidats ayant réussi les deux épreuves ? On pourra écrire X comme somme de variables de Bernoulli indépendantes.

La probabilité qu'un élève réussisse l'épreuve 1 et l'épreuve 2 est de $p_1 p_2$. On définie la variable aléatoire Y tel que Y suive la loi de probabilité suivante :

Y	0	1
$P(Y = p_i)$	$1 - p_1 p_2$	$p_1 p_2$

La variable aléatoire Y modélise donc une épreuve de Bernouilli. Comme X compte le nombre d'élèves ayant réussi les deux épreuves, X est la somme de n variable aléatoire suivant la même loi de probabilité que Y et qui sont toutes indépendantes les unes des autres. Comme X est la somme de ses n variables de Bernouilli, X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(p_1 p_2; n)$.

Exercice 303 (③) par Loïse

Soit $p \in [0; 1]$. Un système de communication comporte un certain nombre n de composants. Chaque composant fonctionne avec la probabilité p, indépendamment des autres. Le système fonctionne si au moins la moitié des composants sont opérationnels.

a) Quelle est la loi du nombre de composants opérationnels ?

b) Si $k \in \mathbb{N}^*$, on note π_k la probabilité pour qu'un système ayant exactement $2k-1$ composants fonctionne. Exprimer $\pi_{k+1} - \pi_k$.

c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. A quelle condition sur p a-t-on $\pi_{k+1} \geq \pi_k$?

a) Opérons une modélisation du problème. Chaque composant est indépendant et suit la même probabilité de fonctionnement. Le fait qu'un composant soit fonctionnel ou non est une expérience aléatoire à deux issues, qui forment une partition de l'univers, dont le succès est "Le système fonctionne" de probabilité p. C'est une expérience de Bernoulli que l'on répète n fois de manière identique et indépendante. La variable aléatoire X qui compte le nombre de composants opérationnels suit la loi binomiale $B(n, p)$.

b) On cherche à exprimer $\pi_{k+1} - \pi_k$. Après quelques recherches, on comprend aisément qu'une écriture avec une différence de sommes n'est pas l'idéal :

$$\pi_{k+1} - \pi_k = \sum_{i=k+1}^{2k+1} \binom{2k+1}{i} p^i (1-p)^{(2k+1-i)} - \sum_{i=k}^{2k-1} \binom{2k-1}{i} p^i (1-p)^{(2k-1-i)}.$$

Raisonnons alors par disjonction des cas pour connaître π_{k+1}, la probabilité qu'un système ayant exactement $2k+1$ composants fonctionne. On scinde ce système en 2 (comme les probabilités sont indépendantes) : un système de 2 composants et un système de $2k-1$ composants. Ce choix est expliqué par la définition de π_k. On écarte le cas où le système de $2k-1$ composants admet strictement moins de $k-1$ composants fonctionnels qui ne permettrait pas d'atteindre la moitié des $2k+1$ composants opérationnels. Trois cas sont alors possibles :

(a) Le système de $2k-1$ composants possède au moins $k+1$ composants opérationnels. Ainsi, l'état des deux autres composants n'a pas d'importance. La probabilité de cet évènement est donc égale à $P(X_{2k-1} \geq k+1)(2p(1-p) + p^2 + (1-p)^2)$ soit $P(X_{2k-1} \geq k+1)$.

(b) Le système de $2k-1$ composants possède exactement k composants opérationnels. Dans le système de 2 composants, au moins un des deux doit être fonctionnel. La probabilité de cet évènement est donc égale à $P(X_{2k-1} = k)(2p(1-p) + p^2)$.

(c) Le système de $2k-1$ composants possède exactement $k-1$ composants opérationnels. Dans le système de 2 composants, les deux composants doivent être fonctionnels. La probabilité de cet évènement est donc égale à $P(X_{2k-1} = k-1)(p^2)$.

D'après le principe additif, on en déduit la probabilité π_{k+1} :

$$\pi_{k+1} = P(X_{2k-1} \geq k+1)(2p(1-p)+p^2+(1-p)^2)+P(X_{2k-1} = k)(2p(1-p)+p^2)+P(X_{2k-1} = k-1)(p^2).$$

Par définition de π_k, on sait que

$$\pi_k = P(X_{2k-1} \geq k) = P(X_{2k-1} = k) + P(X_{2k-1} \geq k+1).$$

Ainsi :

$$\pi_{k+1} = (\pi_k - P(X_{2k-1} = k))(2p(1-p)+p^2+(1-p)^2)+P(X_{2k-1} = k)(2p(1-p)+p^2)+P(X_{2k-1} = k-1)(p^2)$$

Soit :

$$\pi_{k+1} = \pi_k(2p(1-p) + p^2 + (1-p)^2 - P(X_{2k-1} = k)(1-p)^2 + P(X_{2k-1} = k-1)(p^2).$$

Ensuite, comme X suit une loi binomiale, il vient :

$$\pi_{k+1} = \pi_k - \binom{2k-1}{k} p^k (1-p)^{k-1} (1-p)^2 + \binom{2k-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^k p^2.$$

Soit :

$$\pi_{k+1} = \pi_k - \binom{2k-1}{k} p^k (1-p)^{k+1} + \binom{2k-1}{k-1} p^{k+1} (1-p)^k.$$

D'après la propriété de symétrie des coefficients binomiaux, on a :

$$\binom{2k-1}{k-1} = \binom{2k-1}{k},$$

d'où, après factorisation, il vient :

$$\pi_{k+1} = \pi_k + \binom{2k-1}{k} p^k (1-p)^k (p-(1-p)) \Leftrightarrow \pi_{k+1} = \pi_k + \binom{2k-1}{k} p^k (1-p)^k (2p-1).$$

Exprimons à présent $\pi_{k+1} - \pi_k$:

$$\pi_{k+1} - \pi_k = \pi_k + \binom{2k-1}{k} p^k (1-p)^k (2p-1) - \pi_k \Leftrightarrow \pi_{k+1} - \pi_k = \binom{2k-1}{k} p^k (1-p)^k (2p-1).$$

c) Soit $k \in \mathbb{N}$, on cherche une condition sur p, où p est une probabilité comprise entre 0 et 1, telle que $\pi_{k+1} \geq \pi_k$.

$$\pi_{k+1} \geq \pi_k \Leftrightarrow \pi_{k+1} - \pi_k \geq 0 \Leftrightarrow \binom{2k-1}{k} p^k (1-p)^k (2p-1) \geq 0.$$

Or, par définition, un coefficient binomial est un entier positif, d'où

$$\binom{2k-1}{k} > 0.$$

Comme $p \in [0,1]$, p et $1-p$ sont des réels positifs, et par définition de la fonction puissance, on a :

$$p^k \geq 0 \quad et \quad (1-p)^k \geq 0.$$

Par produit, il vient :

$$\binom{2k-1}{k} p^k (1-p)^k \geq 0.$$

Soit :

$$\pi_{k+1} \geq \pi_k \Leftrightarrow 2p-1 \geq 0 \Leftrightarrow p \geq \frac{1}{2}.$$

Conclusion : $\pi_{k+1} \geq \pi_k$ si et seulement si $p \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Exercice 304 (③) par Matilde
On reprend les notations de l'exercice précédent. On considère deux appareils, l'un ayant deux composants, l'autre quatre. On suppose que les deux appareils ont la même probabilité de fonctionner. Déterminer p, puis la probabilité commune de fonctionnement.

Commençons par le premier appareil.
Comme l'on a vu lors de l'exercice précédent, la loi du nombre de composants opérationnels suit une loi binomiale de paramètres 2 et p : $\mathcal{B}_1(2,p)$.
Ici, l'appareil est composé uniquement par 2 composants, il n'est donc pas opérationnel que lorsque aucun des composants ne fonctionne.
La probabilité qu'il fonctionne s'exprime donc ainsi :

$$P_{fonctionnement1} = 1 - P_1(X=0)$$

Passons maintenant au deuxième appareil.
Toujours avec l'exercice précédent, on peut affirmer que la loi du nombre de composants opérationnels suit une loi binomiale de paramètre 4 et p : $\mathcal{B}_2(4,p)$.
Ici, l'appareil est composé de 4 composants, il n'est pas opérationnel lorsque aucun des composants ne fonctionne ou lorsque seulement un seul fonctionne.
La probabilité de fonctionnement s'exprime donc ainsi :

$$P_{fonctionnement2} = 1 - P_2(X \leq 1)$$

L'énoncé nous indique que les deux appareils ont la même probabilité de fonctionnement, ainsi :

$$\begin{aligned}
&P_{fonctionnement1} = P_{fonctionnement2} \\
&\Leftrightarrow 1 - P_1(X=0) = 1 - P_2(X \leq 1) \\
&\Leftrightarrow P_1(X=0) = P_2(X \leq 1)
\end{aligned}$$

Cette égalité nous permet de trouver p :

$$\begin{aligned}
&P_1(X=0) = P_2(X \leq 1)\\
&\Leftrightarrow P_1(X=0) = P_2(X=0) + P_2(X=1)\\
&\Leftrightarrow \binom{2}{0} \cdot p^0(1-p)^2 = \binom{4}{0}p^0(1-p)^4 + \binom{4}{1}p^1(1-p)^3\\
&\Leftrightarrow (1-p)^2 = (1-p)^4 + 4p(1-p)^3\\
&\Leftrightarrow (1-p)^4 + 4p(1-p)^3 - (1-p)^2 = 0\\
&\Leftrightarrow (1-p)^2((1-p)^2 + 4p(1-p) - 1) = 0\\
&\Leftrightarrow (1-p)^2(p^2 - 2p + 1 + 4p - 4p^2 - 1) = 0\\
&\Leftrightarrow (1-p)^2(2p - 3p^2) = 0\\
&\Leftrightarrow (1-p)^2[p(2-3p)] = 0\\
&\Leftrightarrow S = \{0, \frac{2}{3}, 1\}
\end{aligned}$$

Si $p = 0$, il semble évident que les deux appareils aient la même probabilité de fonctionnement puisque si aucun des composants ne fonctionne, l'appareil ne fcontionnera pas non plus, elle est ainsi nulle.
Si $p = 1$, il semble évident aussi que les deux appareils aient la même probabilité de fonctionnement puisque si tous les composants fonctionnent, l'appareil fonctionnera aussi, elle vaut ainsi 1.
Si $p = \frac{2}{3}$, la probabilité de fonctionnement sera égale à $1 - P_1(X=0)$ soit $1 - (\frac{2}{3})^2 = \frac{5}{9}$.

Exercice 305 (③) Par Lancelot

Soient $p \in]0,1[$, $n \in \mathbb{N}^*$, X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(b,p)$.

1. Pour k dans $\{0, \ldots, n-1\}$, donner une expression simplifiée de
$$u_k = \frac{\mathbb{P}(X = k+1)}{\mathbb{P}(X = k)}.$$
2. A quelle condition le quotient précédent est-il supérieur à 1 ?
3. Quelles sont la ou les valeurs de k maximisant $\mathbb{P}(X = k)$? Expliciter le cas $p = \frac{1}{2}$.
4. Quelle est l'allure de l'histogramme de X ?

1. On calcule :
$$\begin{aligned}
u_k = \frac{\binom{n}{k+1}p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}}{\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}} &= \frac{p}{1-p}\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}\frac{k!(n-k)!}{n!}\\
&= \frac{n-k}{k+1}\frac{p}{1-p}.
\end{aligned}$$
2. Soit $k \in [\![0; n-1]\!]$ On étudie :
$$u_k \geq 1 \Longleftrightarrow \frac{n-k}{k+1} \geq \frac{1-p}{p} \Longleftrightarrow n-k \geq (k+1)\frac{1-p}{p} \Longleftrightarrow np - 1 + p \geq k.$$
comme k est un entier, on prend alors $\lfloor np - 1 + p \rfloor$. Lorsque $p = \frac{1}{2}$, on doit choisir $k = \lfloor (n-1)/2 \rfloor$.
3. Puisque les coefficients binomiaux sont symétriques, on déduit que l'histogramme ressemble à une courbe en cloche.

Exercice 306 (④) Par Lancelot

Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $(\lambda)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+$ convergeant vers λ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, X_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et $\frac{\lambda_n}{n}$. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

On pourra utiliser la limite établie en **5.2** et l'exercice 130 de **5.3**.

Par hypothèse, on a que :

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k}\frac{\lambda^k}{n^k}\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}.$$

Observons que :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\binom{n}{k}}{n^k} = \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty}\lambda_n^k = \lambda^k.$$

Remarquons que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{-k}\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n},$$

il reste alors à montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n} = e^{-\lambda}.$$

Or d'après le complément de **5.2**, cette dernière limite tend vers $e^{-\lambda}$. Soit finalement que :

$$\lim_{n\to+\infty}(X_n = k) = \lim_{n\to+\infty}\binom{n}{k}\frac{\lambda^k}{n^k}\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},$$

ce qui était attendu.

Exercice 307 (②) Par Lancelot

Soient $p \in]0;1[, n \in \mathbb{N}^*$. Une expérience a la probabilité p de réussir. On la répète n fois de manière indépendante. Autrement dit, on se donne n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. On note T la variable aléatoire définie de la façon suivante (premier instant de succès).

— Si l'ensemble $\{i \in \{1;n\} : \quad X_n = 1\}$ n'est pas vide, T est le plus petit élément de cet ensemble. Ainsi

$$(T = k) = (X_1 = \cdots = X_{k-1} = 0, X_n = 1).$$

— Sinon $T = 0$.

Quelle est la loi de T.

Chaque variable aléatoire X à une probabilité p de réussir et sont toutes indépendantes. On en déduit que pour atteindre k étapes, il faut avoir échoué $k-1$ fois et réussi 1 fois. De quoi on déduit que :

$$\forall k \in [\![1;n]\!], \quad \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}.$$

Exercice 308 (③) Par Victor

On joue à pile ou face avec une pièce ayant la probabilité $p \in]0,1[$ de donner pile. On se donne a et b dans $\mathbb{N}$ non tous deux nuls et une séquence S de $l = a+b$ éléments de $\{P, F\}$, contenant a lettres P et b lettres F.

a) Soit m dans $\mathbb{N}^*$. On lance ml fois la pièce. Montrer que la probabilité que la séquence S n'apparaisse pas est inférieure ou égale à $(1 - p^a q^b)^m$.

b) Soit $m \geq l$ un entier. On lance n fois la pièce. Montrer que la probabilité que la séquence S n'apparaisse pas est inférieure ou égale à $(1 - p^a q^b)^{\lfloor n/l \rfloor}$. Quelle est la limite de cette suite lorsque n tend vers $+\infty$?

L'idée globale de cet exercice va être de considérer une variante plus contraignante de l'enoncé : On va imposer des positions de départ pour la séquence S tous les l lancers. De cette manière, on sépare les lancers en paquets de l lancers, et ainsi on gagne l'indépendance des résultats, ce qui va nous permettre de travailler avec nettement plus d'aisance.

a) Soit k un entier compris entre 0 et m. La probabilité que la séquence S se trouve entre les lancers $kl+1$ et $(k+1)l$ est de $p^a q^b$. En effet, il s'agit d'un choix de positionnement de a résultats P parmi $l = a+b$ lancers indépendants.
Ainsi, la probabilité que la séquence S ne se trouve par entre les lancers $kl+1$ et $(k+1)l$ est de $1 - p^a q^b$.
Dès lors, puisque les séquences de résultats entre les lancers $kl+1$ et $(k+1)l$ ne se chevauchent pas. Les évènements sont indépendants entre les k.
Ainsi, la probabilité que la séquence S n'apparaisse pour aucune des séquences entre les lancers $kl+1$ et $(k+1)l$ est de $(1-p^a q^b)^m$.
Enfin, la probabilité que la séquence S n'apparaisse pas lors des ml lancers est inférieure à égale à la probabilité que la séquence S n'apparaisse pas *en commançant à une position de la forme* $kl+1$, donc inférieure à $(1-p^a q^b)^m$

b) Soit $n \geq l$ entier. Soit $m = \lfloor \frac{n}{l} \rfloor$. D'après la question précédente, si on lance $ml = \lfloor \frac{n}{l} \rfloor l \leq n$, alors la probabilité que la séquence S n'apparaisse pas est inférieure à $(1-p^a q^b)^m = (1-p^a q^b)^{\lfloor \frac{n}{l} \rfloor}$.
Puisque l'on a fait finalement plus de ml lancers, la probabilité de ne pas obtenir la séquence S est plus faible qu'avec ml lancers, donc plus faible que $(1-p^a q^b)^{\lfloor \frac{n}{l} \rfloor}$.
Puisque $0 < p < 1$ et $0 < q < 1$, on a $0 < 1 - p^a q^b < 1$. Dès lors, la suite obtenue est semblable à une suite géométrique de raison comprise entre 0 et 1. Elle tend donc vers 0.
Ainsi, la séquence S finira forcément par être obtenue avec un nombre infini de lancers.

Exercice 309 (④) Par Lancelot

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit p_n la probabilité de n'avoir jamais observé deux piles consécutifs en lançant n fois une pièce équilibrée.

1. Calculer p_1 et p_2.
2. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_{n+2} = \frac{p_{n+1}}{2} + \frac{p_n}{4}.$$
3. Résoudre l'équation $x^2 = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$. On notera λ la racine positive, μ la racine négative.
4. En utilisant l'exercice 11 de **1.3**, déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des suites réelles $(u_n)_{n\geq 0}$ telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+2} = \frac{u_{n+1}}{2} + \frac{u_n}{4}.$$
5. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer p_n en fonction de n.

1. On a $p_1 = 1$ et $p_2 = \frac{1}{2}$.
2. Pour ne pas observer deux fois deux piles consécutifs à partir de l'évènement A_n, il n'y a que deux possibilités.
— Soit on fait face, et on obtient A_{n+1}, soit l'évènement $A_{n+1} \cap F$. (et qu'importe le lancer suivant nous ne pouvons pas obtenir deux piles consécutifs).
— Soit on fait pile puis face et on obtient A_{n+2}, c'est à dire l'évènement $A_n \cap P \cap F$.
Les deux évènements listés sont incompatibles. Par conséquent :
$$\mathbb{P}(A_{n+2}) = \mathbb{P}((A_{n+1} \cap F) \sqcup (A_n \cap P \cap F)) = \mathbb{P}(A_{n+1} \cap F) + \mathbb{P}(A_n \cap p \cap F),$$
les évènement P,F, sont indépendant entre eux et des évènements A_n et A_{n+1}. On a donc que :
$$\mathbb{P}(A_{n+1} \cap F) + \mathbb{P}(A_n \cap p \cap F) = \mathbb{P}(A_{n+1})\mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(P)\mathbb{P}(F),$$
d'où l'on tire la relation de récurrence :
$$p_{n+2} = \frac{p_{n+1}}{2} + \frac{p_n}{4}.$$

3. On détermine à l'aide de la méthode classique, les racines du polynômes :
$$X^2 - \frac{X}{2} - \frac{1}{4},$$
qui sont :
$$\lambda = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}.$$
Par conséquent, l'ensemble des suites vérifiant la relation,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{u_{n+1}}{2} + \frac{u_n}{4},$$
est l'ensemble :
$$\mathcal{E} := \{\alpha\lambda^n + \beta\mu^n : \ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}.$$
4. Il nous reste à résoudre le système :
$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha\lambda + \beta\mu = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$
c'est à dire le système :
$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{\sqrt{5}}{4}\right) + \beta\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{\sqrt{5}}{4}\right) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$
On écrit le système sous forme matriciel :
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} & \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
La matrice de gauche est inversible, car un calcule de déterminant donne $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ qui, étant différent de 0, permet de calculer son inverse :
$$\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 5 - \sqrt{5} & 4\sqrt{5} \\ 5 + \sqrt{5} & \\ -4\sqrt{5} & \end{pmatrix},$$
ce qui nous donne les solutions :
$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 5 - \sqrt{5} & 4\sqrt{5} \\ 5 + \sqrt{5} & \\ -4\sqrt{5} & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 5 + \sqrt{5} \\ 5 - \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$
Finalement :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = \frac{1}{10}(5 + \sqrt{5})\left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}\right)^n + \frac{1}{10}(5 - \sqrt{5})\left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}\right)^n.$$

Exercice 310 (④) Par Lancelot

Soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que
$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, \quad \mathbb{P}(X_k = 1) = p, \quad \mathbb{P}(X_k = -1) = 1 - p =: q.$$
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$
1. Montrer que, si $n \in \mathbb{N}^*$, S_n est à valeurs dans l'ensemble des entiers relatifs de valeur absolue bornée par n et de même parité que n.

2. On suppose n pair : $n = 2\ell$, avec $\ell \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la loi de S_n est donnée par

$$\forall j \in \{-\ell, \dots, \ell\}, \quad \mathbb{P}(S_{2\ell} = 2j) = \binom{2\ell}{\ell + j} p^{\ell+j} q^{\ell-j}.$$

3. Les notations sont celles de b. Pour quelle valeur de p la probabilité $\mathbb{P}(S_{2\ell} = 0)$ est-elle maximale ?
4. Montrer que
$$\mathbb{P}(S_{2\ell} = 0) \leq (4pq)^{\ell}.$$
5. On suppose $p \neq \frac{1}{2}$. Montrer que $4pq < 1$, puis que
$$\mathbb{P}(S_{2\ell} = 0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition,
$$\forall k \in [\![1; n]\!], \quad -1 \leq X_k \leq 1.$$
En sommant k sur $[\![1; n]\!]$ il vient que :
$$-n \leq S_n \leq n \iff S_n \in \{k \in \mathbb{Z} : \ |k| \leq n\}.$$
Posons alors :
$$a := \text{Card}\{k \in [\![1; n]\!] : \ X_k = 1\} \quad \text{et} \quad b := \text{Card}\{k \in [\![1; n]\!] : \ X_k = -1\},$$
de sorte que :
$$n = a + b \quad \text{et} \quad S_n = a - b.$$
On effectue une disjonction de cas selon la parité de n :
— Soit n est pair, dans ce cas il y a deux possibilités :
  — a et b sont pairs, donc $p - q$ est pair
  — a et b sont impairs, donc $p - q$ est pair.
— Soit n est impair, dans ce cas il y a deux possibilités :
  — a est pair et b est impair, donc $a - b$ est impair
  — a est impair et b est pair, ce qui se ramène au cas précédent.

Dans tous les cas S_n est de la parité de n. On a donc montré les deux résultats voulus.

2. Il faut noter ici que S_n ne suit pas exactement en lui binomiale en raison des valeurs prises par les $(X_k)_{k \geq 1}$. On effectue alors une transformation. Posons :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad Y_k := \frac{X_k + 1}{2},$$
de sorte que Y_k soit une épreuve de Bernoulli avec une probabilité de succès p. Par conséquent, posons :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S'_n := \sum_{k=1}^{n} Y_k,$$
de telle manière que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S'_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. De plus observons que pour $n \in \mathbb{N}^*$:
$$S'_n = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n} X_k - n \right) = \frac{S_n + n}{2},$$
qui n'a de sens que si n est pair. Ainsi, on obtient que pour $\ell \in \mathbb{N}^*$ et $n = 2\ell$:
$$\begin{aligned}
\forall j \in [\![-\ell; \ell]\!], \quad \mathbb{P}(S_{2\ell} = 2j) &= \mathbb{P}\left(S'_n = \frac{2j + n}{2}\right) \\
&= \mathbb{P}(S'_n = \ell + j) \\
&= \binom{n}{\ell + j} p^{\ell+j} q^{n-\ell-j} = \binom{2\ell}{\ell + j} p^{\ell+j} q^{\ell-j}
\end{aligned}$$
ce qu'il fallait obtenir.

3. A l'aide de la question précédente, on a que :

$$\mathbb{P}(S_{2\ell}=0)=\binom{2\ell}{\ell}p^\ell q^\ell=\binom{2\ell}{\ell}(p(1-p))^\ell,$$

qui est une fonction de p sur $[0;1]$. Puisque la fonction $x\longmapsto x^\ell$ est croissante, remarquons que cela revient à étudier le maximum de la fonction $f:p\in[01;1]\longmapsto p(1-p)$. Observons que f est dérivable, on calcule :

$$\forall p\in[0;1],\quad f'(p)=1-2p,$$

qui est positive sur $[0;1/2]$ et négative sur $[1/2;1]$. Donc f admet un maximum en $1/2$ qui vaut $1/4$. D'où la probabilité maximale de $\mathbb{P}(S_{2\ell}=0)$ est :

$$\binom{2\ell}{\ell}\left(\frac{1}{4}\right)^\ell.$$

4. Soit $\ell\in\mathbb{N}^*$. A l'aide de l'exercice 63, on a que :

$$\binom{2\ell}{\ell}\leq 2^\ell\leq 4^\ell.$$

En utilisant la question précédente, on a que :

$$\mathbb{P}(S_{2\ell}=0)=\binom{2\ell}{\ell}p^\ell q^\ell=\binom{2\ell}{\ell}(p(1-p))^\ell\leq\binom{2\ell}{\ell}\left(\frac{1}{4}\right)^\ell\leq(4p(1-p)^\ell=(4pq)^\ell,$$

ce qui était attendu.

5. Puisque $p\neq\frac{1}{2}$, on a que :

$$f(p)<f\left(\frac{1}{2}\right)\Longleftrightarrow(4f(p))^\ell<1.$$

Par conséquent la suite $(4f(p)^\ell)_{\ell\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison strictement inférieure à 1, elle tend donc vers 0. En reprenant l'inégalité obtenue dans la question précédente, on a que :

$$0\leq\mathbb{P}(S_{2\ell}=0)\leq(4pq)^\ell,$$

et un passage à la limite dans l'inégalité au dessus donne, à l'aide du Théorème de convergence par encadrement, que :

$$\mathbb{P}(S_{2\ell}=0)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0,$$

ce qu'il fallait montrer.

Exercice 311 (5) par Tristan

On se place dans le cadre de l'exercice précédent, avec de plus $p=\dfrac{1}{2}$. Ainsi, $(X_k)_{k\geq1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes telle que

$$\forall k\in\{1,\dots,n\},\quad\mathbb{P}(X_k=1)=\mathbb{P}(X_k=-1)=\frac{1}{2}$$

a) En utilisant l'exercice 249 de **8.6**, montrer que

$$\mathbb{P}(S_{2\ell}=0)\xrightarrow[\ell\to+\infty]{}0$$

b) Soit $m\in\mathbb{N}^*$. En utilisant la question précédente et l'exercice 68 de **3.1** montrer que

$$\mathbb{P}(|S_{2\ell}|\leq m)\xrightarrow[\ell\to+\infty]{}0$$

a) On commence par rappeler que $n = 2\ell$.
D'après l'exercice 249 de **8.6**,

$$\sqrt{n}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

De plus, on a la relation suivante

$$\forall j \in \{-\ell, \dots, \ell\}, \quad \mathbb{P}(S_{2\ell} = 2j) = \binom{2\ell}{\ell+j} p^{n+j} q^{n-j}$$

Ainsi, pour $p = \dfrac{1}{2}$ et $j = 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_{2\ell} = 0) &= \binom{2\ell}{\ell} p^{4\ell} \\
&= \frac{\binom{2\ell}{\ell}}{4^{2\ell}} \\
&\leq \sqrt{\ell}\frac{\binom{2\ell}{\ell}}{4^{2\ell}} \\
&\leq \sqrt{\ell}\frac{\binom{2\ell}{\ell}}{4^{\ell}} \times \frac{1}{4^\ell}
\end{aligned}$$

Or, $\sqrt{\ell}\dfrac{\binom{2\ell}{\ell}}{4^{\ell}} \xrightarrow[\ell\to+\infty]{} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$

$\Longrightarrow \mathbb{P}(S_{2\ell} = 0) \xrightarrow[\ell\to+\infty]{} \dfrac{1}{4^\ell\sqrt{\pi}}$

$\Longrightarrow \mathbb{P}(S_{2\ell} = 0) \xrightarrow[\ell\to+\infty]{} 0$

b) On note dans un premier temps l'égalité

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(|S_{2\ell}| \leq m) = 2\mathbb{P}(0 \leq S_{2\ell} \leq m) - \mathbb{P}(S_{2\ell} = 0)$$

Ce qui revient à

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(|S_{2\ell}| \leq m) = 2\sum_{k=0}^{m} \mathbb{P}(S_{2\ell} = k) - \mathbb{P}(S_{2\ell} = 0)$$

Ensuite on remarque que si $m > n$ alors

$$\mathbb{P}(|S_{2\ell}| \leq m) = \mathbb{P}(|S_{2\ell}| \leq n) \Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(|S_{2\ell}| \leq m) \leq \mathbb{P}(|S_{2\ell}| \leq n)$$

On en déduit l'inégalité

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(|S_{2\ell}| \leq m) \leq 2\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(S_{2\ell} = k) - \mathbb{P}(S_{2\ell} = 0)$$

Or, pour $k \in \{0, \dots, n\}$ tel que $k = 2j$ avec $j \in \{0, \dots, \ell\}$ on a $\mathbb{P}(S_{2\ell} = k) = \binom{2\ell}{\ell+j} p^{\ell+j} q^{\ell-j}$ et, dans le cas où k est impair, $\mathbb{P}(S_{2\ell} = k) = 0$ puisque $S_{2\ell}$ est de même parité que n

Ainsi,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(|S_{2\ell}|\le m\right)\le 2\sum_{j=0}^{\ell}\binom{2\ell}{\ell+j}p^{\ell+j}q^{\ell-j}-\mathbb{P}\left(S_{2\ell}=0\right)\\
\iff &\mathbb{P}\left(|S_{2\ell}|\le m\right)\le 2\sum_{j=0}^{\ell}\binom{2\ell}{\ell+j}p^{n}-\mathbb{P}\left(S_{2\ell}=0\right)\\
\iff &\mathbb{P}\left(|S_{2\ell}|\le m\right)\le \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{\ell}2\binom{2\ell}{\ell+j}-\mathbb{P}\left(S_{2\ell}=0\right)\\
\iff &\mathbb{P}\left(|S_{2\ell}|\le m\right)\le \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{\ell}\binom{2\ell}{\ell+j}+\binom{2\ell}{\ell-j}-\mathbb{P}\left(S_{2\ell}=0\right)\\
\iff &\mathbb{P}\left(|S_{2\ell}|\le m\right)\le \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{2\ell}\binom{2\ell}{j}-\frac{\binom{2\ell}{\ell}}{2^n}-\mathbb{P}\left(S_{2\ell}=0\right)
\end{aligned}$$

D'après l'exercice 68 de **3.1**,

$$\sum_{j=0}^{2\ell}\binom{2\ell}{j}=2^n$$

$$\frac{2^n}{\ell+1}\le\binom{2\ell}{\ell}\le 2^n$$

Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(|S_{2\ell}|\le m\right)&\le \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{2\ell}\binom{2\ell}{j}-\frac{\binom{2\ell}{\ell}}{2^n}-\mathbb{P}\left(S_{2\ell}=0\right)\\
&\le 1-\frac{2^n}{2^n}-\mathbb{P}\left(S_{2\ell}=0\right)\\
&\le -\mathbb{P}\left(S_{2\ell}=0\right)
\end{aligned}$$

Enfin, comme $\mathbb{P}\left(S_{2\ell}=0\right)\xrightarrow[\ell\to+\infty]{}0$ et $\mathbb{P}\left(|S_{2\ell}|\le m\right)$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, on peut conclure que

$$\forall m\in\mathbb{N}^*,\quad \mathbb{P}\left(|S_{2\ell}|\le m\right)\xrightarrow[\ell\to+\infty]{}0$$

9.3 Espérance d'une variable aléatoire

Exercice 312 (①) Par Lancelot

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer l'espérance d'une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur $\{1,\dots,n\}$, d'une variable aléatoire Y suivant la loi uniforme sur $\{1,2,4,\dots,2^n\}$.

Par définition de l'espérance et de la loi uniforme, on a :

$$\mathbb{E}(X)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n+1}{2}.$$

De même :

$$\mathbb{E}(Y)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}2^k=\frac{1}{n}(2^{n+1}-1).$$

Exercice 313 (①) Par Lancelot

Soient a et b deux nombres réels tels que $a<b$, X une variable aléatoire à valeurs dans $[a,b]$. Montrer que $\mathbb{E}(X)$ appartient à $[a,b]$.

Par hypothèse, on a pour tout évènement $\omega \in \Omega$:

$$a\mathbb{P}(X=\omega) \leq X(\omega)\mathbb{P}(X=\omega) \leq b\mathbb{P}(X=\omega),$$

d'où en sommant :

$$a\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}(X=\omega) \leq \sum_{\omega\in\Omega}X(\omega)\mathbb{P}(X=\omega) \leq b\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}(X=\omega),$$

ce qui est :

$$a \leq \mathbb{E}(X) \leq b,$$

donc $\mathbb{E}(X) \in [a;b]$.

EXERCICE 314 (③) Par Lancelot

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. En utilisant la dérivation, donner une expression simple de

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}.$$

2. Les notations sont celles de l'exercice 307. Calculer $\mathbb{E}(T)$.

1. On renvoie le lecteur à l'exercice 40, et on donne le résultat obtenu dans celui-ci :

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2.}$$

si $x \neq 1$.

2. Par définition de l'espérance :

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(T=k) = p\sum_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1},$$

ce qui est d'après a.

$$\mathbb{E}(T) = \frac{n(1-p)^{n+1}-(n+1)(1-p)^n+1}{p}.$$

EXERCICE 315 (④) par Alexandre (Urne d'Ehrenfest : nombre moyen de boules dans la première urne). *On fixe un entier $a \geq 2$ et on se donne a boules numérotées de 1 à a réparties dans deux boîtes. On considére l'opération suivante. A chaque seconde à partir de l'instant 0, on choisit uniformément un entier de $[|1,a|]$ et on déplace la boule portant ce numéro d'une boîte dans l'autre. On suppose que les tirages effectués à des instants distincts sont indépendants. Si $n \in \mathbb{N}$, on note X_n le nombre de boules dnas la prmière urne à l'instant n et $Y_n = X_{n+1} - X_n$.*

1. *Montrer, pour $n \in \mathbb{N}$,*

$$\boldsymbol{E}(Y_n) = 1 - \frac{2}{a}\cdot\boldsymbol{E}(X_n) \quad et \quad \boldsymbol{E}(X_{n+1}) = (1-\frac{2}{a})\cdot\boldsymbol{E}(X_n)+1$$

2. *En utilisant le protocole d'étude des suite arithmético-géométriques (**1.2**, exercice 3), exprimer $\boldsymbol{E}(X_n)$ en fonction de $\boldsymbol{E}(X_0)$, a et n. Déterminer la limite de $(\boldsymbol{E}(X_n))_{n\geq 1}$. Comment explique ce résultat ?*

a)

Par définition du jeu, pour tout entier naturel n et pour tout $k \in [|0,a|]$, on a :

$$\mathbf{P}(Y_n = 1|X_n = k) = 1 - \frac{k}{a}$$

(Probabilité de tirer la $(n+1)$ième boule dans la 2ème urne sachant qu'il y en a k dans la 1ère) Et :

$$\mathbf{P}(Y_n = -1|X_n = k) = \frac{k}{a}$$

(Probabilité de tirer la $(n+1)$ième boule dans la 1ème urne sachant qu'il y en a k dans la 1ère)

Ceci étant dit, on peut écrire :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y_n) &= P(Y_n = 1) - P(Y_n = -1) \\
&= \sum_{k=0}^{a} P(Y_n = 1 | X_n = k) \cdot P(X_n = k) - \sum_{k=0}^{a} P(Y_n = -1 | X_n = k) \cdot P(X_n = k) \\
&= \sum_{k=0}^{a} (1 - \frac{k}{a} - \frac{k}{a}) \cdot P(X_n = k) \\
&= \sum_{k=0}^{a} P(X_n = k) - \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{a} k \cdot P(X_n = k) \\
\mathbf{E}(Y_n) &= 1 - \frac{2}{a} \cdot \mathbf{E}(X_n)
\end{aligned}
$$

Comme $Y_n = X_{n+1} - X_n$ on en tire :

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}(X_{n+1} - X_n) = 1 - \frac{2}{a} \cdot \mathbf{E}(X_n) \\
&\mathbf{E}(X_{n+1}) - \mathbf{E}(X_n) = 1 - \frac{2}{a} \cdot \mathbf{E}(X_n) \text{ linéarité de l'espérance} \\
&\mathbf{E}(X_{n+1}) = (1 - \frac{2}{a}) \cdot \mathbf{E}(X_n) + 1
\end{aligned}
$$

b)

On a démontré à la question a) que la suite $(u_n)_{n\geq 0} = E(X_n)_{n\geq 0}$ est une suite arithmético-géométrique vérifiant la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = (1 - \frac{2}{a}) \cdot u_n + 1$$

On cherche un réel l tel que :

$$l = (1 - \frac{2}{a}) \cdot l + 1$$

$$donc\ l = \frac{a}{2}$$

La suite $(u_n - l)_{n\geq 0}$ est géométrique de raison $1 - \frac{2}{a}$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n - l = (1 - \frac{2}{a})^n (u_0 - l)$$

C'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ \mathbf{E}(X_n) = (1 - \frac{2}{a})^n (\mathbf{E}(X_0) - \frac{a}{2}) + \frac{a}{2}$$

Comme $|1 - \frac{2}{a}| < 1$, on a :

$$(1 - \frac{2}{a})^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Donc :

$$\mathbf{E}(X) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{a}{2}$$

Ceci signifie que si l'on attend assez longtemps, il y aura en moyenne environ la moitié des boules situées dans la boîte de gauche.

Exercice 316 (③) Par Lancelot

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Justifier la relation
$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq .k + 1)$$
2. On note n la plus grande valeur que prend X. Montrer que
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X \geq k).$$

1. Si X est plus grand que k et plus petit que $k+1$, alors X vaut k d'où la relation voulue.
2. On va faire apparaître une somme télescopique avec a. :
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{n} k(\mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k+1))$$
$$= \sum_{k=1} k\mathbb{P}(X \geq k) - \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X \geq k+1),$$
en décalant l'indice de la première somme (et en utilisant le fait que $\mathbb{P}(X \geq n+1) = 0$) :
$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\mathbb{P}(X \geq k+1) - \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X \geq k+1) = \mathbb{P}(X \geq 1) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X \geq k+1)$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X \geq k+1),$$
en décalant une nouvelle fois l'indice de la dernière somme on obtient que :
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X \geq k),$$
ce qu'il fallait montrer.

Exercice 317 (③)

On reprend les notations de l'exercice 286 et on note U_n le nombre d'expériences ayant réussi à l'instant n. Calculer $\mathbb{E}(U_n)$ et exprimer N'_p, le plus petit n tel que $\mathbb{E}(U_n) \geq \frac{1}{2}$. Quelle est la limite de pN'_p lorsque p tend vers 0 ?

Exercice 318 (④) Par Lancelot

Soient X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que
$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

On écrit :
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) \geq a}} X(\omega)\mathbb{P}(\omega) + \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) < a}} X(\omega)\mathbb{P}(\omega).$$
Par conséquent :
$$\mathbb{E}(X) \geq \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) \geq a}} X(\omega)\mathbb{P}(\omega) \geq a \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) \geq a}} \mathbb{P}(\omega).$$
Observons alors que :
$$\sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) \geq a}} \mathbb{P}(\omega) = \mathbb{P}(X \geq a).$$

Il suit donc que :

$$\mathbb{E}(X) \geq a\mathbb{P}(X \geq a),$$

c'est à dire :

$$\frac{\mathbb{E}(X)}{a} \geq \mathbb{P}(X \geq a),$$

et l'inégalité de Markov est démontrée.

EXERCICE 319 (④) Par Lancelot

1. Soit X une variable aléatoire réelle. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz (**3.4**), montrer que
$$\mathbb{E}(X)^2 \leq \mathbb{E}(X^2).$$
2. Soit $x \in [-1; 1]$. Montrer qu'il existe une variable aléatoire réelle telle que
$$\mathbb{E}(X) = x \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(X^2).$$
On pourra considérer les variables aléatoires à valeurs dans $\{-1, 1\}$.

1. On écrit :
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\sqrt{\mathbb{P}(\omega)}\sqrt{\mathbb{P}(\omega)}.$$
En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz
$$\mathbb{E}(X)^2 = \left(\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\sqrt{\mathbb{P}(\omega)}\sqrt{\mathbb{P}(\omega)}\right)^2 \leq \left(\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)^2\mathbb{P}(\omega)\right)\left(\sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(\omega)\right) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)^2\mathbb{P}(\omega),$$
ce qui est $\mathbb{E}(X)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)$.
2. On se demande si le système
$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha - \beta = x \end{cases}$$
avec $(\alpha, \beta) \in [0; 1]^2$ et $x \in [-1; 1]$ admet toujours des solutions. Calculons alors le déterminant de la matrice du système :
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2,$$
Donc la matrice du système est inversible, donc ce dernier admet toujours une solution. Il nous reste à considérer la variable aléatoire prenant les valeurs $\{-1; 1\}$ avec leur probabilité respective β et α. On calcule alors
$$\mathbb{E}(X) = \alpha - \beta = x, \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(X^2) = \alpha + \beta = 1.$$

9.4 La linéarité de l'espérance

EXERCICE 320 (②) Par Valentin Les notations sont celles de l'exercice 292. Déduire de l'exemple 1 l'espérance de X.

On avait pour $k \in [\![0; m]\!]$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{n'}{k}\binom{n-n'}{m-m'}}{\binom{n}{m}}.$$

Le calcul repose sur deux identités :

— Pour $n \in \mathbb{N}^*, k \in [\![1; n]\!]$, on a
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}, \tag{$*$}$$
que l'on prouve en passant par l'écriture avec les factorielles.

— Pour $p, q \in \mathbb{N}, n \in [\![0; p+q]\!]$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n} \qquad (**)$$

dont la preuve concerne le premier point de l'exercice 415.

On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X=k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{n'}{k}\binom{n-n'}{m-m'}}{\binom{n}{m}} \qquad \text{(premier terme nul)} \\
&= \frac{1}{\binom{n}{m}} \sum_{k=1}^{n} k\binom{n'}{k}\binom{n-n'}{m-m'} \\
&= \frac{1}{\binom{n}{m}} \sum_{k=1}^{n} n'\binom{n'-1}{k-1}\binom{n-n'}{m-k} \qquad (*) \\
&= \frac{n'}{\binom{n}{m}} \sum_{k=1}^{n} \binom{n'-1}{k-1}\binom{n-n'}{m-k} \\
&= \frac{n'}{\binom{n}{m}} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{k}{n'-1}\binom{n-m'}{n-1-k} \qquad \text{(changement d'indice "}k=k-1\text{")} \\
&= \frac{n'}{\binom{n}{m}} \binom{n-1}{m-1} = \frac{n'm!\cancel{(n-m)!}(n-1)!}{n!(m-1)!\cancel{(n-m)!}} = \frac{n'm}{n} \qquad (**).
\end{aligned}$$

EXERCICE 321 (③) Par Valentin

Soient X une variable aléatoire, $n \in \mathbb{N}^*, X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et suivant la loi de X et

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

1. Exprimer $\mathbb{E}(S_n)$ en fonction de n et $\mathbb{E}(X)$.
2. Exprimer $\mathbb{E}(S_n^2)$ en fonction de n, $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(X^2)$.

---

1. Par linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k).$$

Puisque les $(X_k)_{1 \le k \le n}$ suivent la loi de X,

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X) = n\mathbb{E}(X).$$

2. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_n^2) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{j=1}^{n} X_j\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{1 \le i,j \le n} X_i X_j\right) \\
&= \sum_{1 \le i,j \le n} \mathbb{E}(X_i X_j) \qquad \text{(linéarité de l'espérance)} \\
&= \sum_{\substack{1 \le i,j \le n \\ i=j}} \mathbb{E}(X_i X_j) + \sum_{\substack{1 \le i,j \le n \\ i \ne j}} \mathbb{E}(X_i X_j).
\end{aligned}$$

Mais

$$\sum_{\substack{1\le i,j\le n\\ i=j}} \mathbb{E}(X_iX_j) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k^2)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X^2) \quad \text{(les } (X_k)_{1\le k\le n} \text{ suivent la loi de } X)$$

$$= n\mathbb{E}(X^2);$$

et

$$\sum_{\substack{1\le i,j\le n\\ i\neq j}} \mathbb{E}(X_iX_j) = \sum_{\substack{1\le i,j\le n\\ i\neq j}} \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j) \quad \text{(Indépendance des } (X_k)_{1\le k\le n})$$

$$= \sum_{\substack{1\le i,j\le n\\ i\neq j}} \mathbb{E}(X^2) \quad \text{(les } (X_k)_{1\le k\le n} \text{ suivent la loi de } X)$$

$$= n(n-1)\mathbb{E}(X)^2.$$

Donc

$$\mathbb{E}(S_n^2) = n\mathbb{E}(X^2) + n(n-1)\mathbb{E}(X)^2$$

EXERCICE 322 (③) par Valentin (Marches aléatoires : concentration autour de $n\mathbb{E}(X)$). On reprend les notations de l'exercice précédent.

a) On suppose $\mathbb{E}(X) = 0$. Montrer, en appliquant l'inégalité de Markov (exercice 318) à ${S_n}^2$ que, pour, $a \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$\mathbb{P}(|S_n| \geq a\sqrt{n}) \leq \frac{\mathbb{E}(X^2)}{a^2}.$$

b) On revient au cas général. En considérant $Y := X - \mathbb{E}(X)$, montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$\mathbb{P}(|S_n - n\mathbb{E}(X)| \geq a\sqrt{n}) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{a^2},$$

où $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.

a) On a ${S_n}^2$ donc par Markov, $\forall \varepsilon \geq 0$ $\mathbb{P}(S_n^2 \geq \varepsilon) \leq \dfrac{\mathbb{E}({S_n}^2)}{\varepsilon}$.

Alors, $\forall \varepsilon \geq 0$, $\mathbb{P}({S_n}^2 \geq \varepsilon) \leq \dfrac{n\mathbb{E}(X^2) + n(n-1)\mathbb{E}(X^2)}{\varepsilon}$ en posant $\varepsilon = a^2 n$ avec $a \in \mathbb{R}^{*+}$:

$$\mathbb{P}({S_n}^2 \geq a^2 n) \leq \frac{n\mathbb{E}(X^2)}{a^2 n} = \frac{\mathbb{E}(X^2)}{a^2}.$$

Or, les événements $[S_n \geq a^2 n]$ et $[|S_n| \geq a\sqrt{n}]$ sont les mêmes, alors on retrouve bien :

$$\mathbb{P}(|S_n| \geq a\sqrt{n}) \leq \frac{\mathbb{E}(X^2)}{a^2}.$$

b) On applique Markov à la variable aléatoire positive $(S_n - n\mathbb{E}(X))^2$,

$\forall \varepsilon \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}((S_n - n\mathbb{E}(X))^2 \geq \varepsilon) &\leq \frac{\mathbb{E}((S_n - n\mathbb{E}(X))^2)}{\varepsilon^2} \\
&\leq \frac{\mathbb{E}({S_n}^2) - 2n\mathbb{E}(S_n)\mathbb{E}(X) + n^2\mathbb{E}(X)^2}{\varepsilon^2} \\
&\leq \frac{n\mathbb{E}(X^2) + n(n-1)\mathbb{E}(X)^2 - 2n^2\mathbb{E}(X)^2 + n^2\mathbb{E}(X)^2}{\varepsilon^2} \\
&\leq \frac{n\mathbb{E}(X^2) - n\mathbb{E}(X)^2}{\varepsilon} = \frac{n\mathbb{V}(X)}{\varepsilon} \\
\mathbb{P}((S_n - n\mathbb{E}(X))^2 \geq a^2 n) &\leq \frac{\mathbb{V}(X)}{a^2} \quad \text{(en posant } \varepsilon = a^2 n)
\end{aligned}$$

Ainsi, vu que les événements $[S_n \geq a^2 n]$ et $[|S_n| \geq a\sqrt{n}]$ sont les mêmes cela donne :

$$\mathbb{P}(|S_n - n\mathbb{E}(X)| \geq a\sqrt{n}) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{a^2}.$$

Exercice 323 (④) par Valentin

On considère une assemblée de n personnes. On ignore les années bissextiles. Sous les hypothèses d'indépendance des dates d'anniversaire des personnes et d'équiprobabilité de la date de naissance de chaque personne, quelle est l'espérance du nombre de paires de personnes ayant le même anniversaire ? Pour $1 \leq i < j \leq n$, on introduira la variable aléatoire de Bernoulli $X_{i,j}$ égale à 1 si les personnes i et j ont même anniversaire.

On note $S_n = \sum_{1\leq i<j\leq n} X_{i,j}$ par définition, une réalisation de S_n donne le nombre pairs de personnes ayant le même anniversaire.
La question revient à calculer $\mathbb{E}(S_n)$,

$$\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(\sum_{1\leq i<j\leq n} X_{i,j}) = \sum_{1\leq i<j\leq n} \mathbb{E}(X_{i,j}) \text{ (linéarité).}$$

Les $X_{i,j}$ sont indépendants, de même loi : $\mathbb{B}(p)$ avec p la probabilité que deux personnes soient né le même jour.
i.e. :

$$p = \frac{1}{365} \text{ donc } \mathbb{E}(S_n) = \sum_{1\leq i<j\leq n} \mathbb{E}(X_{i,j}) = \frac{n(n-1)}{2} \times \frac{1}{365} \text{ alors, } \mathbb{E}(S_n) = \frac{n(n-1)}{730}$$

Exercice 324 (④) par Valentin

Une population est formée de $2n$ individus répartis en n couples. Parmi ces $2n$ individus, m choisis aléatoirement et de manière équiprobable parmi la population initiale meurent. Quel est l'espérance du nombre de couples survivants ? Numérotant les couples de 1 à n, on introduira, si $1 \leq i \leq n$, la variable de Bernoulli X_i égale à 1 si le couple i survit.

On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, par définition, on cherche à calculer $\mathbb{E}(S_n)$. Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$ et comme les X_i ont la même loi que X_1, on a $\mathbb{E}(S_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = n\mathbb{E}(X_1)$.

$$\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_1 = 0).$$

Pour que $X_1 = 0$, il faut que $m \geq 2$ et que les individus 1 et 2 soient choisis. Ainsi, créer une partie de taille m de $[\![1, 2n]\!]$ contenant 1 et 2 revient à créer une partie de taille $m-2$ de $[[3, 2n]\!]$.
Il y a alors $\binom{2n-2}{m-2}$ choix,

$$\text{donc } \mathbb{E}(X_1) = 1 - \binom{2n-2}{m-2} \text{ et } \mathbb{E}(S_n) = n(1 - \binom{2n-2}{m-2}).$$

Dans le cas où $m < 2$, on obtient directement

$$\mathbb{E}(S_n) = n.$$

Exercice 325 (④) par Théo

Soit $n \geqslant 2$ un entier. Une entreprise suit la stratégie suivante pour recruter ses n employés. L'employé 1 fonde l'entreprise et recrute l'employé 2 ; l'un des deux employés 1 ou 2 recrute l'employé 3, l'un des trois employés $1, 2$ et 3 recrute l'employé 4 et ainsi de suite. On suppose que si $1 \leqslant i \leqslant n-1$, chaque employé parmi $1, ..., i$ a la même probabilité de recruter l'employé $i+1$

a) Si $1 \leqslant i \leqslant n$, quelle est la probabilité que l'employé i ne recrute personne ?

b) Soit N le nombre d'employés n'ayant recruté personne. Calculer $\mathbb{E}(N)$

a) Soit $i \in [\![1; n]\!]$. On note $X_k, k \in [\![i+1, n]\!]$ la variable aléatoire qui indique si l'employé k a été recruté ($X_k = 1$) par l'employé i ou non ($X_k = 0$).
On note également Y_i la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes recrutées par l'employé i ($Y_i = j$ si l'employé i a recruté j personnes).
L'employé i a une chance sur i de recruter l'employé $i+1$ (donc une probabilité de $1 - \dfrac{1}{i}$ de ne pas le recruter). On a donc :

$$\begin{aligned}
(Y_i = 0) &= (X_{i+1} = 0) \cap ... \cap (X_n = 0) \\
&= \bigcap_{k=i+1}^{n} (X_k = 0)
\end{aligned}$$

Et, $\forall k \in [\![1; n]\!]$, $\mathbb{P}(X_k = 0) = 1 - \dfrac{1}{k-1} = \dfrac{k-2}{k-1}$
Les variables aléatoire $(X_k)_k$ sont disjointes donc on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_i = 0) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=i+1}^{n} (X_k = 0)\right) \\
&= \prod_{k=i+1}^{n} \mathbb{P}(X_k = 0) \\
&= \prod_{k=i+1}^{n} \frac{k-2}{k-1} \\
&= \frac{i-1}{n-1} \quad \text{par produit télescopique}
\end{aligned}$$

Donc, $\mathbb{P}(Y_i = 0) = \dfrac{i-1}{n-1}$

b) On a $N(\Omega) = [\![1; n]\!]$
On introduit la variable aléatoire $Z_i : \forall i \in [\![1; n]\!], Z_i = 1$ si i ne recrute personne, $Z_i = 0$ sinon.
On a donc : $\mathbb{P}(Z_i = 1) = \dfrac{i-1}{n-1}$ et $N = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Z_i$.
Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(N) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(Z_i) \quad \text{(par linéarité de l'espérance)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{1} k\mathbb{P}(Z_i = k)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(Z_i = 1) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n-1} \\
&= \frac{1}{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{1}{n-1} \cdots \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n}{2}
\end{aligned}$$

Finalement, on a $\mathbb{E}(N) = \dfrac{n}{2}$

EXERCICE 326 (④) Par Lancelot

On se donne n boules numérotées de 1 à n, n urnes également numérotées de 1 à n. On place une boule dans chaque urne, les choix étant équiprobables. Quelle est l'espérance du nombre de boules placées dans l'urne portant leur numéro ? Pour $1 \leq i \leq n$, on introduira la variable de Bernoulli X_i égale à 1 si la boule i est placée dans l'urne i.

On considère les variables aléatoires $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ valant 1 si la boule i est dans l'urne i, sinon 0. Soit $i \in [\![1;n]\!]$. Observons que :

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_i = 0) = \frac{n-1}{n},$$

on calcule alors :

$$\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{n}.$$

Posons alors la variable aléatoire :

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

De sorte que S_n comptabilise le nombre de boules biens placées. On calcule alors par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1.$$

On peut donc espérer qu'une permutation de n élément produise 1 point fixe.

EXERCICE 328 (⑤) par Tristan

On reprend les notations de l'exercice 311. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note R_n le nombre de $k \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $S_k = 0$.

a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{E}[R_{2n}] = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k}$$

b) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{E}[R_{2n}] = \frac{(2n+1)\binom{2n}{n}}{4^n} - 1$$

c) En utilisant l'exercice 249 de **8.6**, déterminer la limite de la suite $\left(\dfrac{\mathbb{E}[R_{2n}]}{\sqrt{2n}}\right)_{n\geq 1}$, puis celle de $\left(\dfrac{\mathbb{E}[R_n]}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$. Ainsi, en moyenne, la marche aléatoire revient à l'origine environ $c\sqrt{n}$ fois avant l'instant n, où $c > 0$ est déterminé dans cette question.

a) *L'énoncé de cette question comporte une erreur, on doit en effet déterminer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\mathbb{E}[R_{2n}] = \sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k}$ afin, d'une part, d'obtenir une expression de $\mathbb{E}[R_n]$ qui correspond avec celle de la question b) ; et d'autre, car partir de $k = 0$ impliquerait que l'on prend S_0 en compte dans le calcul de $\mathbb{E}[R_n]$, ce qui ne coïncide pas avec la définition de R_n.*

Cherchons tout d'abord le nombre de chemins menant à 0 en exactement $2n$ pas. Comme on part de telle sorte que $S_0 = 0$, il faut faire exactement le même nombre de pas vers vers le haut que vers le bas. (Cette expression se base sur une représentation de la marche aléatoire avec un axe sur lequel on se déplace soit en montant d'un cran vers le haut et à droite ou d'un cran vers le bas et la droite. cf. fig 1)

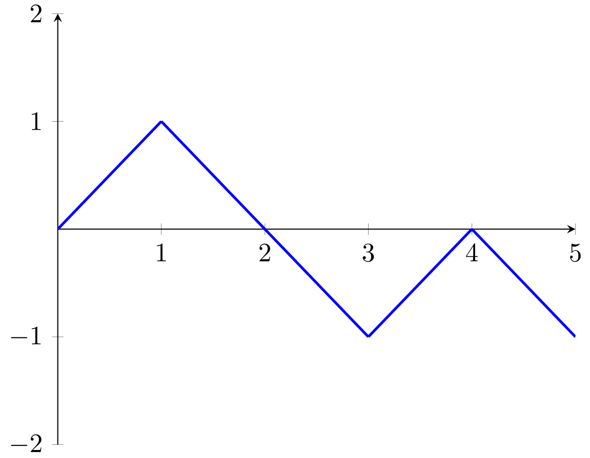


Figure 1 : marche aléatoire pour n=5

Ainsi, on doit effectuer n pas vers le haut et n pas vers le bas pour atteindre 0 en $2n$.
Le nombre de chemins contenant n pas vers le haut dans ce cas est alors $\binom{2n}{n}$.
De plus, on rappelle que la probabilité d'aller vers le haut ou vers le bas est donnée par $\dfrac{1}{2}$ pour chaque itération. Ainsi, la probabilité de faire n pas vers le haut et la même que celle de faire n pas vers le haut et elle est égale à $\dfrac{1}{2^n}$.
On a alors finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}\left(S_{2n}=0\right)=\binom{2n}{n} \times \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{2^n}=\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$$

On en déduit que pour $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\mathbb{E}\left[S_{2k}=0\right]=\frac{\binom{2k}{k}}{4^k}$$

Soit

$$\mathbb{E}\left[R_{2n}\right]=\sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k}$$

b) On propose un raisonnement par récurrence pour démontrer $\mathcal{P}_n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathcal{P}_n \ : \ \mathbb{E}\left[R_{2n}\right]=\frac{(2n+1)\binom{2n}{n}}{4^n}-1$$

Initialisation :
On vérifie que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n=1$:

$$\mathbb{E}\left[R_2\right]=\frac{\binom{2}{1}}{4}=\frac{1}{2}$$

Et

$$\frac{(2+1)\binom{2}{1}}{4}-1=\frac{4+2-4}{4}=\frac{1}{2}$$

Ainsi, $\mathcal{P}_1$ est vraie.

On remarquera ici qu'avec l'expression de $\mathbb{E}\left[R_n\right]$ donnée dans l'énoncé, $\mathcal{P}_1$ serait fausse.

Hérédité :
On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un entier nature $n \geq 1$ quelconque et on montre sous cette hypothèse que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Calculons :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} &= \frac{(2n+1)\binom{2n}{n}}{4^n} - 1 \\
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} &= \frac{(2n+1)\binom{2n}{n}}{4^n} - 1 + \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{4^{n+1}}
\end{aligned}$$

Il s'agit alors de démontrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{(2n+3)\binom{2n+2}{n+1}}{4^{n+1}} = \frac{(2n+1)\binom{2n}{n}}{4^n} + \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{4^{n+1}}$$

On procède par l'absurde en supposant l'exact contraire, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\frac{(2n+3)\binom{2n+2}{n+1}}{4^{n+1}} &\neq \frac{(2n+1)\binom{2n}{n}}{4^n} + \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{4^{n+1}} \\
\frac{(2n+2)\binom{2n+2}{n+1}}{4^{n+1}} &\neq \frac{(2n+1)\binom{2n}{n}}{4^n} \\
\frac{(2n+2)(2n+2)!}{(n+1)!^2} &\neq \frac{4(2n+1)(2n)!}{n!^2} \\
\frac{2(n+1)(2n+2)!}{(n+1)^2} &\neq 4(2n+1)(2n)! \\
\frac{2(2n+1)(2n+2)}{n+1} &\neq 4(2n+1) \\
\frac{4(n+1)}{n+1} &\neq 4 \\
4 &\neq 4
\end{aligned}$$

On obtient $4 \neq 4$ ce qui est évidemment absurde donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie ce qui achève la récurrence.

On conclut donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{E}[R_{2n}] = \frac{(2n+1)\binom{2n}{n}}{4^n} - 1$$

c) On rappelle la conclusion de l'exercice 249 de **8.6** :

$$\sqrt{n}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbb{E}[R_{2n}]}{\sqrt{2n}} &= \frac{2n+1}{\sqrt{2n}} \times \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} - \frac{1}{\sqrt{2n}} \\
&= \frac{2n+1}{n\sqrt{2}} \times \sqrt{n}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n} - \frac{1}{\sqrt{2n}} \\
&= \sqrt{2}\left(\frac{1+\frac{1}{2n}}{1}\right) \times \sqrt{n}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n} - \frac{1}{\sqrt{2n}} \\
&\xrightarrow[n \to +\infty]{} \sqrt{\frac{2}{\pi}}
\end{aligned}$$

Et pour tout $\ell = \dfrac{n}{2}$ dans $\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbb{E}[R_n]}{\sqrt{n}} &= \frac{\mathbb{E}[R_{2\ell}]}{\sqrt{2\ell}} \\
&= \frac{2\ell+1}{\sqrt{2\ell}} \times \frac{\binom{2\ell}{\ell}}{4^\ell} - \frac{1}{\sqrt{2\ell}} \\
&= \frac{2\ell+1}{\ell\sqrt{2}} \times \sqrt{\ell}\frac{\binom{2\ell}{\ell}}{4^\ell} - \frac{1}{\sqrt{2\ell}} \\
&= \sqrt{2}\left(\frac{1+\frac{1}{2\ell}}{1}\right) \times \sqrt{\ell}\frac{\binom{2\ell}{\ell}}{4^\ell} - \frac{1}{\sqrt{2\ell}} \\
&\xrightarrow[\ell\to+\infty]{} \sqrt{\frac{2}{\pi}}
\end{aligned}$$

On en déduit que $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$ est un équivalent de $\dfrac{\mathbb{E}[R_n]}{\sqrt{n}}$ et finalement, on a

$$\mathbb{E}[R_n] \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2n}{\pi}}$$

Exercice 329 (⑤) par Tristan

On reprend ici les notations de l'exercice 310 et on suppose que $p \neq \dfrac{1}{2}$.

a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{E}[R_{2n}] = \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} (pq)^k$$

b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{E}[R_{2n}] \leq \sum_{k=0}^{n} (4pq)^k$$

c) En déduire que la suite $(\mathbb{E}[R_{2n}])_{n\geq 1}$ est majorée.

d) Montrer finalement que la suite $(\mathbb{E}[R_n])_{n\geq 1}$ est croissante et majorée, donc convergente. Ce résultat contraste fortement avec celui de l'exercice précédent.

a) On reprend le même raisonnement que pour l'exercice précédent mais avec cette fois $p \neq q \neq \dfrac{1}{2}$, ce qui donne bien pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} \times p^n \times q^n = \binom{2n}{n} (pq)^n$$

D'où, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$

$$\mathbb{E}[S_{2k} = 0] = \binom{2k}{k} (pq)^k$$

Et finalement,

$$\mathbb{E}[R_{2n}] = \sum_{k=1}^{n} \binom{2k}{k} (pq)^k$$

Encore une fois, il y a une erreur dans l'énoncé de cette question puisque l'indice de la somme est $k = 1$ et non pas $k = 0$. En effet, commencer à $k = 0$ implique que l'on compte S_0 dans le calcul de $\mathbb{E}[R_n]$ ce qui est contraire à la définition de R_n.

b) D'après l'exercice 310, on a démontré que pour $k \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\mathbb{P}(S_{2k} = 0) \leq (4pq)^k$$

On en déduit assez facilement que d'une part,

$$\mathbb{E}[S_{2k} = 0] \leq (4pq)^k$$

Et d'autre,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[R_{2n}] &\leq \sum_{k=1}^{n} (4pq)^k \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} (4pq)^k + (4pq)^0 \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} (4pq)^k
\end{aligned}$$

c) On remarque immédiatement que $\sum_{k=0}^{n} (4pq)^k$ est la somme des n+1 premiers termes de la suite géométrique $((4pq)^n)_{n\geq 0}$. On écrit alors

$$\sum_{k=0}^{n} (4pq)^k = \frac{1-(4pq)^{n+1}}{1-4pq}$$

Or, on sait également d'après l'exercice 310 que le produit pq est maximal quand $p = q = \frac{1}{2}$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
0 \leq &4pq < 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\
0 \leq &4pq < 1
\end{aligned}$$

Comme $4pq \in [0,1[$ on peut établir que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (4pq)^k\right) = \frac{1}{1-4pq}$$

Enfin, ce résultat amène pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'inéquation

$$\mathbb{E}[R_{2n}] \leq \frac{1}{1-4pq}$$

Et on en conclut que $(\mathbb{E}[R_n])_{n\geq 1}$ est majorée.

d) Posons alors $\ell = \frac{n}{2}$. On obtient l'expression de $\mathbb{E}[R_n]$ ci dessous

$$\mathbb{E}[R_n] = \sum_{k=1}^{\ell} \binom{2k}{k} (pq)^k$$

On voit tout de suite que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ pair, on a $\mathbb{E}[R_{n+1}] = \mathbb{E}[R_n]$ donc on va s'intéresser à la différence $\mathbb{E}[R_{n+2}] - \mathbb{E}[R_n]$ afin d'obtenir la variation de $(\mathbb{E}[R_n])_{n\geq 1}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[R_{n+2}] - \mathbb{E}[R_n] &= \sum_{k=1}^{\ell+1} \binom{2k}{k} (pq)^k - \sum_{k=1}^{\ell} \binom{2k}{k} (pq)^k \\
&= \sum_{k=1}^{\ell} \binom{2k}{k} (pq)^k - \sum_{k=1}^{\ell} \binom{2k}{k} (pq)^k + \binom{2\ell+2}{\ell+1} (pq)^{\ell+1} \\
&= \binom{2\ell+2}{\ell+1} (pq)^{\ell+1} \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

On déduit de ce résultat la croissance $(\mathbb{E}[R_n])_{n\geq 1}$, qui en s'ajoute au résultat de la question précédente pour montrer que la suite $(\mathbb{E}[R_n])_{n\geq 1}$ est convergent, ce qui contraste avec l'exercice précédent, où elle était divergente.

En conclusion, on peut établir qu'une marche aléatoire repasse un nombre infini de fois par 0 si elle est symétrique mais un nombre fini de fois dans le cas contraire.

10 Nombres complexes

10.1 Forme algébrique d'un nombre complexe

EXERCICE 330 (①) par Mattéo

Ecrire sous forme algébrique :

$$a = (1+i)^2,\ b = (3-2i)(1-i) - (2+i),\ c = \frac{3-2i}{2+5i},\ d = \frac{4+i}{1-i} + \frac{2-i}{3-i},\ e = \left(\frac{1+i}{i}\right)^3$$

$$\begin{aligned}
a &= (1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i \\
b &= 1 - 5i - (3+4i) = -2 - 9i \\
c &= \frac{(3-2i)(2-5i)}{29} = \frac{-4-19i}{29} = -\frac{4}{29} - \frac{19}{29}i \\
d &= \frac{(13-i)+(1-3i)}{2-4i} = \frac{(14-4i)(2+4i)}{20} = \frac{44}{20} + \frac{48}{20}i = \frac{11}{5} + \frac{12}{5}i \\
e &= \frac{(1+i)^3}{i^3} = \frac{2i-2}{-i} = -2i - 2
\end{aligned}$$

EXERCICE 331 (①) par Mattéo

Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer i^n

On raisonne par disjonction de cas :
- Si $n = 4k$, alors $i^n = \left(i^4\right)^k = 1^k = 1$
- Si $n = 4k+1$, alors $i^n = (i)^{4k} \cdot i = i$
- Si $n = 4k+2$, alors $i^n = (i)^{4k} \cdot i^2 = -1$
- Si $n = 4k+3$ alors $i^n = (i)^{4k} \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$

EXERCICE 332 (①) par Loïse

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation du premier degré $2iz + 4 = z - 4i$

On a donc

$$2iz + 4 = z - 4i \Leftrightarrow 2iz - z = -4i - 4 \Leftrightarrow z(2i-1) = -4i - 4 \Leftrightarrow z = \frac{-4i-4}{2i-1}$$

car $2i - 1 \neq 0$. En multipliant le numérateur et le dénominateur par $(2i-1)$, on obtient :

$$z = \frac{-8 + 8i + 4i + 4}{1+4} = -\frac{4}{5} + \frac{12i}{5}.$$

EXERCICE 333 (②) par Loïse

Soit $z = \dfrac{-4}{1+i\sqrt{3}}$. Calculer z^3.

Soit

$$z = \frac{-4}{1+i\sqrt{3}}.$$

Alors

$$z^3 = \left(\frac{-4}{1+i\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{-64}{1 + 3i\sqrt{3} + 3(i\sqrt{3})^2 + (i\sqrt{3})^3} = \frac{-64}{1 - 9 + 3i\sqrt{3} - 3i\sqrt{3}} = \frac{64}{8} = 8$$

Exercice 334 (①) par Loïse

Déterminer les nombres complexes z tel que $z^2 = i$.

$$z^2 = i \Leftrightarrow \mathfrak{Im}(z^2) = 1 \text{ et } \mathfrak{Re}(z^2) = 0$$
$$\Leftrightarrow 2\mathfrak{Re}(z)\mathfrak{Im}(z) = 1 \text{ et } \mathfrak{Re}(z^2) = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{Re}(z)\mathfrak{Im}(z) = \frac{1}{2} \text{ et } \mathfrak{Re}(z)^2 - \mathfrak{Im}(z)^2 = 0.$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathfrak{Re}(z)\mathfrak{Im}(z) = \frac{1}{2} \\ \mathfrak{Re}(z) = \mathfrak{Im}(z) \end{cases}.$$

La partie réelle et la partie imaginaire de z dont de même signe car leur produit est positif. Soit

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad \text{ou} \quad z = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

Exercice 335 (②) par Loïse

a) Quels sont les nombres complexes dont le carré est un nombre réel ?
b) Quels sont les nombres complexes dont le carré est un nombre imaginaire pur ?

a)
$$z^2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathfrak{Im}(z^2) = 0 \Leftrightarrow 2\mathfrak{Re}(z)\mathfrak{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{Re}(z)\mathfrak{Im}(z) = 0, /quad 2 \neq 0$$

D'après le théorème des produits nuls :

$$z^2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathfrak{Re}(z) = 0 \quad \text{ou} \quad \mathfrak{Im}(z) = 0.$$

b)

$$z^2 \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathfrak{Re}(z^2) = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{Re}(z)^2 - \mathfrak{Im}(z)^2 = 0 \Leftrightarrow (\mathfrak{Re}(z) - \mathfrak{Im}(z))(\mathfrak{Re}(z) + \mathfrak{Im}(z)) = 0.$$

Selon le théorème des produits nuls :

$$z^2 \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathfrak{Re}(z) - \mathfrak{Im}(z) = 0 \quad \text{ou} \quad \mathfrak{Re}(z) + \mathfrak{Im}(z) = 0.$$

Exercice 336 (③) par Matilde

Trouver les nombres complexes non nuls z tels que $Z = z + \frac{1}{z}$ soit réel. Idem en remplaçant « réel » par « imaginaire pur ».

Soit z un nombre conplexe tel que $z = ai + b$ avec a et $b \in \mathbb{R}$, écrivons Z sous sa forme algébrique :

$$Z = z + \frac{1}{z} = a + ib + \frac{1}{a+ib} = a + ib + \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{ib}{a^2+b^2}$$
$$Z = \frac{a(a^2+b^2+1) + ib(a^2+b^2-1)}{a^2+b^2}$$

On cherche les nombres complexes z pour lesquelles Z est un nombre réel et donc pour lesquels sa partie imaginaire est nulle.

On a $Im(Z) = \dfrac{b(a^2+b^2-1)}{a^2+b^2}$, il suffit alors de résoudre l'équation $Im(Z) = 0$:

$$\begin{aligned}
&Im(Z) = \frac{b(a^2+b^2-1)}{a^2+b^2} = 0 \\
&\Leftrightarrow\ b(a^2+b^2-1) = 0 \\
&\Leftrightarrow\ b = 0\ ou\ a^2+b^2-1 = 0 \\
&\Leftrightarrow\ b = 0\ ou\ b = \sqrt{1-a^2}\ ou\ b = -\sqrt{1-a^2}
\end{aligned}$$

Pour $b = 0$, et donc $z = a$, ou $b = \sqrt{1-a^2}$ avec $a \in [-1, 1]$, puisque $b \in \mathbb{R}$,et donc $z = a+i\sqrt{1-a^2}$ ou $b = -\sqrt{1-a^2}$ avec $a \in [\,-1\ ,\ 1\,]$, et donc $z = a - i\sqrt{1-a^2}$, Z est un nombre réel.

On cherche les nombres complexes z pour lesquels Z est un imaginaire pur et donc pour lesquels sa partie réelle est nulle.

On a $Re(Z) = \dfrac{a(a^2+b^2+1)}{a^2+b^2}$, il suffit de résoudre l'équation $Re(Z) = 0$.

$$\begin{aligned}
&Re(Z) = \frac{a(a^2+b^2+1)}{a^2+b^2} = 0 \\
&\Leftrightarrow\ a(a^2+b^2+1) = 0 \\
&\Leftrightarrow\ a = 0\ ou\ a^2+b^2+1 = 0 \\
&\Leftrightarrow\ a = 0\ ou\ a = \sqrt{-1-b^2}\ ou\ a = -\sqrt{-1-b^2}
\end{aligned}$$

Or, $b \in \mathbb{R}$ et $-1-b^2 < 0$, donc Z est une imaginaire pur si et seulement si $a = 0$.

10.2 Conjugué et module

EXERCICE 337 (②) par Loïse

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

$$z = 1 - \overline{z} + 3i, \qquad \frac{z+2i}{\overline{z}+i} = 1.$$

$\exists (a;b) \in \mathbb{R}^2 / z = a+ib\ \ et\ \ \overline{z} = a - ib$ On réécrit les équations en utilisant la forme algébrique du nombre complexe z et de son conjugué :

$$a + ib = 1 - a + ib + 3i \iff 2a = 1 + 3i.$$

Or, deux nombres complexes sont égaux ssi ils ont même partie réelle et même partie imaginaire. $2a$ étant un nombre réel, l'équation n'admet pas de solutions.

$$S = \varnothing.$$

On procède de manière analogue pour la deuxième équation en posant $z = a + ib$ où a et b sont deux réels. On résout sur $\mathbb{C}\backslash\{i\}$ L'équation s'écrit donc :

$$\frac{a+ib+2i}{a-ib+i} = 1 \iff a + i(b+2) = a + i(1-b).$$

Après simplification, on obtient :

$$b = -\frac{1}{2}$$

$$S = \left\{a - \frac{1}{2}i\right\}_{a\in\mathbb{R}}$$

EXERCICE 338 (②) par Loïse

Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$iz^2 - 2\overline{z} + z - i = 0$$

Pour résoudre une équation faisant intervenir un nombre complexe z et son conjugué $\overline{z}$, on utilise la forme algébrique. Posons, a et b deux réels tels que $z = a + ib$ et $\overline{z} = a - ib$.
L'équation s'écrit donc :

$$i(a+ib)^2 - 2(a-ib) + a + ib - i = 0 \iff -2ab - a + i(a^2 - b^2 + 3b - 1) = 0.$$

Or, un nombre complexe est nul ssi sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles. On peut donc résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} a(2b+1) = 0 \\ a^2 - b^2 + 3b - 1 = 0 \end{cases}.$$

Or, un produit de facteurs est nul ssi au moins l'un des facteurs est nul. Soit a=0, le système devient :

$$\begin{cases} a = 0 \\ b^2 - 3b + 1 = 0 \end{cases}$$

On résout l'équation du second degré dans $\mathbb{R}$. Le discriminant est strictement positif : $\delta = 5$. On a donc $b = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ ou $b = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$. Nous avons donc obtenu deux solutions. Intéressons nous au cas où $2b + 1 = 0$.

$$\begin{cases} b = -\dfrac{1}{2} \\ \\ a^2 - \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{2} - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -\dfrac{1}{2} \\ \\ a^2 = \dfrac{11}{4} \end{cases}.$$

On conclut la résolution de cette équation complexe :

$$S = \left\{ \frac{3+\sqrt{5}}{2}i \ ; \ \frac{3-\sqrt{5}}{2}i \ ; \ \frac{\sqrt{11}}{4} - \frac{1}{2}i \ ; \ -\frac{\sqrt{11}}{4} - \frac{1}{2}i \right\}.$$

EXERCICE 339 (④) par Octave

Dans les questions a), b), c), f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(1) = 1$ et que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y), \quad f(xy) = f(x)f(y)\,.$$

a) Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{Q}, \quad f(x) = x\,.$$

b) Soient x et y deux nombres réels tels que $y \geq x$. En utilisant le nombre réel $\sqrt{y-x}$, montrer que $f(y) - f(x) \geq 0$. Ainsi, f est croissante.

c) Déduire de a) et b) que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x\,.$$

Dans les questions suivantes, g est une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $g(1) = 1$ et que

$$\forall (u,v) \in \mathbb{C}^2, \quad g(u+v) = g(u) + g(v), \quad g(uv)g(u)g(v)\,.$$

d) Montrer que $g(i) \in \{-i, i\}$.

e) On suppose que $g(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Montrer que g est l'identité de $\mathbb{C}$ ou la conjugaison complexe.

a) On établit, par récurrence immédiate en utilisant les propriétés de f :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(n) = n\,.$$

De plus, $f(0+0) = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0$, et

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad & f\left(n + \frac{1}{n}\right) = 1 \\ \Rightarrow \quad & f(n) f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \\ \Rightarrow \quad & f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n},\end{aligned}$$

et, pour tout réel x,

$$\begin{aligned}& f(x-x) = f(x) + f(-x) \\ \Rightarrow\, & f(0) = f(x) + f(-x) \\ \Rightarrow\, & f(-x) = -f(x).\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*,\ f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b}$. Ou, plus simplement, $\forall x \in \mathbb{Q},\ f(x) = x$.

b)

$$\begin{aligned}& f(y-x) = f(\sqrt{y-x}) f(\sqrt{y-x}) \\ \Rightarrow\, & f(y) - f(x) = f(\sqrt{y-x})^2 \\ \Rightarrow\, & f(y) - f(x) \geq 0.\end{aligned}$$

c) Pour tout x réel, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe deux suites d'éléments de $\mathbb{Q}$ $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ tendant vers x telles que :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \quad & a_n \leq x \leq b_n \\ \Rightarrow \quad & f(a_n) \leq f(x) \leq f(b_n) \qquad \text{(par croissance de } f\text{)} \\ \Rightarrow \quad & a_n \leq f(x) \leq b_n.\end{aligned}$$

On a bien, d'après le théorème des gendarmes, $f(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x$. Autrement dit, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$.

d)

$$\begin{aligned}& g(i) g(i) = g(i \times i) \\ \Rightarrow\, & g(i)^2 = -1 \\ \Rightarrow\, & g(i) \in \{-i, i\}.\end{aligned}$$

e) Soit $z \in \mathbb{C}$. On note $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$.

$$\begin{aligned}g(z) &= g(a + ib) \\ &= g(a) + g(i) g(b) \\ &= g(a) + g(i) b \\ &\Rightarrow g(z) = a + ib \text{ ou } g(z) = a - ib \\ &\Rightarrow g(z) = z \text{ ou } g(z) = \bar{z}.\end{aligned}$$

Exercice 340 (3) par Mattéo

Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$2z - |z|^2 + 1 - 2i = 0, \quad z\,|z| = 2 + i\sqrt{3}$$

On pose $z = a + ib$.

$$\begin{aligned}2z - |z|^2 + 1 - 2i = 0 &\iff 2(a+ib) - a^2 - b^2 + 1 - 2i = 0 \\ &\iff 2a + 2ib - a^2 b^2 + 1 - 2i = 0 \\ &\iff 2a - a^2 - b^2 + 2ib = -1 + 2i\end{aligned}$$

Par identification on a :

$$\left\{\begin{array}{l} 2a-a^2-b^2=-1 \\ 2ib=2i \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 2a-a^2-b^2=-1 \\ b=1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 2a-a^2=0 \\ b=1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a=0 \quad \text{ou} \quad a=2 \\ b=1 \end{array}\right.$$

Ainsi : $S=\{i,2+i\}$

Pour la deuxième équation :

$$\begin{aligned}
& z\,|z| = 2+i\sqrt{3} \\
\iff & (a+ib)\sqrt{a^2+b^2} = 2+i\sqrt{3} \\
\iff & \left\{\begin{array}{l} a\sqrt{a^2+b^2}=2 \\ b\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3} \end{array}\right. \\
\iff & \left\{\begin{array}{l} a\sqrt{a^2+b^2}=2 \\ \dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \\
\iff & \left\{\begin{array}{l} b^2(a^2+b^2)=3 \\ b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a \end{array}\right. \\
\iff & \left\{\begin{array}{l} a^2\cdot\dfrac{3}{4}a^2+\dfrac{9}{16}a^4=3 \\ b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a \end{array}\right. \\
\iff & \left\{\begin{array}{l} a^4=\dfrac{16}{7} \\ b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a \end{array}\right. \\
\iff & \left\{\begin{array}{l} a=\pm\dfrac{2}{\sqrt[4]{7}} \\ b=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{7}} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Finalement, $S=\left\{\dfrac{2}{\sqrt[4]{7}}+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{7}};-\dfrac{2}{\sqrt[4]{7}}-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{7}}\right\}$

Exercice 341 (③) par Matteo

Résoudre l'équation d'inconnue $z\in\mathbb{C}$:

$$z^2+8i=|z|^2-2$$

$$\begin{aligned}
z^2+8i=|z|^2-2 &\iff z^2-|z|^2=-2-8i \\
&\iff a^2+2abi-b^2-a^2-b^2=-2-8i
\end{aligned}$$

$$\left\{\begin{array}{l} -2b^2=-2 \\ 2ab=-8 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{r} b^2=1 \\ ab=-4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} b=1 \text{ ou } b=-1 \\ a=-4 \text{ ou } a=4 \end{array}\right.$$

Finalement, $S=\{-4+i;4-i\}$

Exercice 342 (④) par Wéline

Déterminer l'image de $\mathbb{C}$ par l'application f définie par

$$\forall z\in\mathbb{C},\quad f(z)=z+|z|.$$

Soit $z \in \mathbb{C}$, il existe $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = a + ib$. On a :

$$f(z) = a + ib + |a + ib|$$
$$f(z) = a + ib + \sqrt{a^2 + b^2}$$

Donc, on a $\mathbf{Re}\left(f(z)\right) = a + \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\mathbf{Im}\left(f(z)\right) = b$. On sait donc que $\mathbf{Im}\left(f(z)\right) \in \mathbb{R}$. On a aussi :

$$|a| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

Donc :

$$|a| \geq -\sqrt{a^2 + b^2}$$
$$a + \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$$

Finalement, on a que $\mathbf{Re}\left(f(z)\right) \in \mathbb{R}^+$.
On définie E tel que :

$$E = \left\{x + iy; x \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R}\right\}$$

On sait que toutes les images de z par la fonction f se trouve dans E. Montrons maintenant que si $z \in E$, alors il admet un antécédent z' par la fonction f. Soit deux réels a' et b' tel que $z' = a' + ib'$. On pose $a' = \frac{y^2 - x^2}{-2x}$ et $b' = y$. Montrons que $f\left(z'\right) = z$.

$$\begin{aligned}
& f(z') = z' + |z'| \\
\iff & f(z') = \frac{y^2 - x^2}{-2x} + iy + \left|\frac{y^2 - x^2}{-2x} + iy\right| \\
\iff & f(z') = \frac{y^2 - x^2}{-2x} + iy + \sqrt{\left(\frac{y^2 - x^2}{-2x}\right)^2 + y^2} \\
\iff & f(z') = \frac{y^2 - x^2}{-2x} + iy + \sqrt{\frac{\left(y^2 - x^2\right)^2}{(-2x)^2} + y^2} \\
\iff & f(z') = \frac{y^2 - x^2}{-2x} + iy + \sqrt{\frac{y^4 - 2y^2x^2 + x^4}{4x^2} + \frac{4x^2y^2}{4x^2}} \\
\iff & f(z') = \frac{y^2 - x^2}{-2x} + iy + \sqrt{\frac{y^4 - 2y^2x^2 + x^4 + 4x^2y^2}{4x^2}} \\
\iff & f(z') = \frac{y^2 - x^2}{-2x} + iy + \sqrt{\frac{y^4 + x^4 + 2x^2y^2}{4x^2}} \\
\iff & f(z') = \frac{y^2 - x^2}{-2x} + iy + \sqrt{\frac{\left(y^2 + x^2\right)^2}{4x^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\implies & f(z') = \frac{y^2 - x^2}{-2x} + iy + \frac{y^2 + x^2}{2x} \text{ ou } f(z') = \frac{y^2 - x^2}{-2x} + iy + \frac{y^2 + x^2}{-2x} \\
\iff & f(z') = \frac{y^2 - x^2}{-2x} + iy + \frac{-y^2 - x^2}{-2x} \text{ ou } f(z') = \frac{y^2 - x^2 + y^2 + x^2}{-2x} + iy \\
\iff & f(z') = \frac{-2x^2}{-2x} + iy \text{ ou } f(z') = \frac{2y^2}{-2x} + iy \\
\iff & f(z') = x + iy \text{ ou } f(z') = \frac{2y^2}{-2x} + iy
\end{aligned}$$

$\frac{2y^2}{-2x} + iy$ n'est pas solution car sa partie réel, $\frac{2y^2}{-2x}$, est négative, $\frac{2y^2}{-2x} + iy \notin E$. Donc il existe toujours un antécédent à z par la fonction f.
On a donc bien que l'image de $\mathbb{C}$ par la fonction f est l'ensemble E.

10.3 Représentation géométrique des nombres complexes

Exercice 345 (②) par Matilde

a) Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que :

$$|z - i| = |z + i|$$

par deux méthodes :

1. *par un calcul en écrivant z sous forme algébrique ;*
2. *en interprétant géométriquement la relation.*

Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que

$$|z - i| < |z + i|$$

a) 1.

$$\begin{aligned}
&|z - i| = |z + i| \\
&|a + i(b-1)| = |a + i(b+1)| \\
&\sqrt{a^2 + (b-1)^2} = \sqrt{a^2 + (b+1)^2} \\
&a^2 + (b-1)^2 = a^2 + (b+1)^2 \\
&-b = b \\
&b = 0
\end{aligned}$$

L'égalité $|z - i| = |z + i|$ est vraie pour $z \in \mathbb{R}$.

2.

L'égalité nous indique que l'on cherche les points d'affixe z qui se trouve à la même distance des points d'affixes i et $-i$. ($|z - i| = |z + i| = |z - i| = |z - (-i)|$).
On cherche donc les points qui se trouvent sur la médiatrice du segment qui relie les points d'affixes i et $-i$, puisqu'ils sont équidistants aux deux points.

Les points d'affixes i et $-i$ ont pour coordonnées $(0, 1)$ et $(0, -1)$, ils se trouvent sur l'axe des ordonnées.
Calculons le milieu du segment qui relie ces deux points :

$$x_M = \frac{x_i + x_{-i}}{2} = \frac{0+0}{2} = 0$$

$$y_M = \frac{y_i + y_{-i}}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$$

Le milieu du segment est donc l'origine du repère.
La médiatrice du segment est donc perpendiculaire à l'axe des ordonnées et passe par le milieu du repère, c'est donc l'axe des abscisses : l'ensemble des complexes z qui vérifient l'égalité est donc bien l'ensemble des réels.

b)

$$\begin{aligned}
&|z - i| < |z + i| \\
&|a + i(b-1)| < |a + i(b+1)| \\
&\sqrt{a^2 + (b-1)^2} < \sqrt{a^2 + (b+1)^2} \\
&a^2 + (b-1)^2 < a^2 + (b+1)^2 \\
&-b < b \\
&b > 0
\end{aligned}$$

L'inégalité est vérifiée pour les complexes z donc la partie imaginaire est strictement supérieure à 0 : $Im(z) > 0$.

> EXERCICE 346 (②) par Matilde
> *Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $|z| = |z-1| = 1$. Interpréter géométriquement.*

$$\begin{aligned}
&|z| = |z-1| \\
&|a+ib| = |a+i(b-1)| \\
&\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2+(b-1)^2} \\
&a^2+b^2 = a^2+(b-1)^2 \\
&-2b+1 = 0 \\
&b = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}
&|z| = 1 \\
&|a+i\cdot\frac{1}{2}| = 1 \\
&\sqrt{a^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1 \\
&a^2+\frac{1}{4} = 1 \\
&a = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } a = -\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

Les nombres complexes qui vérifient les deux égalités sont :

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{1}{2}$$

$$z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{1}{2}$$

$|z| = 1$ décrit le cercle de rayon 1 et qui a pour milieu l'origine du repère.
$|z-1| = 1$ décrit le cercle de rayon 1 et qui a pour milieu le point d'affixe i (point de coordonnées $(0,1)$).
$|z| = |z-1| = 1$ décrit donc l'intersection de ces deux cercles qui a lieu à deux endroits différents, aux points d'affixes z_1 et z_2.

> EXERCICE 347 (②) par Loïse
>
> Déterminer l'ensemble des nombres complexes z non nuls tels que $\dfrac{1+z}{\overline{z}}$ soit réel. Quelle est l'image de cet ensemble ?

Posons a et b deux réels non simultanément nuls tels que $z = a+ib$ et $\overline{z} = a-ib$. Avec cette mise sous forme algébrique, il vient :

$$\frac{1+a+ib}{a-ib} = \frac{(1+a+ib)(a+ib)}{a^2+b^2} = \frac{a+a^2+iab+ib+iab-b^2}{a^2+b^2} = \frac{(a+a^2-b^2)+i(b+2ab)}{a^2+b^2}.$$

On en déduit donc la partie imaginaire du nombre complexe $\dfrac{1+z}{\overline{z}}$:

$$\mathfrak{Im}\left(\frac{1+z}{\overline{z}}\right) = \frac{b(1+2a)}{a^2+b^2}.$$

Or $\dfrac{1+z}{\overline{z}}$ est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle :

$$\frac{1+z}{\overline{z}} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{b(1+2a)}{a^2+b^2} = 0 \Leftrightarrow b(1+2a) = 0$$

Or un produit de facteurs est nul si et seulement si au moins l'un des facteurs est nul.
Si $b = 0$, alors $z = a, a \in \mathbb{R}^*$.
Si $1 + 2a = 0 \Leftrightarrow a = -\dfrac{1}{2}$, alors $z = -\dfrac{1}{2} + ib, b \in \mathbb{R}$. Ainsi, l'ensemble des nombres complexes non nuls z tels que $\dfrac{1+z}{\overline{z}}$ soit réel est

$$\{z = a\}_{a\in\mathbb{R}^*} \cap \left\{z = -\frac{1}{2} + ib\right\}_{b\in\mathbb{R}}.$$

L'image de cet ensemble est donc l'axe des réels purs privé de l'origine du plan complexe ainsi que la droite d'équation $a = -\dfrac{1}{2}$.

EXERCICE 348 (②) par Loïse

Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $z^3 + 3z^2 + 3z + 9$ soit réel. Quelle est l'image de cet ensemble dans le plan complexe ?

Posons a et b deux réels tels que $z = a + ib$. Avec cette mise sous forme algébrique, il vient :

$$(a + ib)^3 + 3(a + ib)^2 + 3(a + ib) + 9 = a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i + 3a^2 + 6abi - 3b^2 + 3a + 3bi.$$

On en déduit la partie imaginaire du nombre complexe $z^3 + 3z^2 + 3z + 9$:

$$\mathfrak{Im}(z^3 + 3z^2 + 3z + 9) = 3a^2b - b^3 + 6ab + 3b = b(3a^2 - b^2 + 6a + 3).$$

Or $z^3 + 3z^2 + 3z + 9$ est un réel si et seulement si i sa partie imaginaire est nulle :

$$z^3 + 3z^2 + 3z + 9 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow b(3a^2 - b^2 + 6a + 3) = 0.$$

Or, un produit de facteurs est nul si et seulement si au moins l'un des facteurs est nul.
Si $b = 0$, alors $z = a, a \in \mathbb{R}^*$.
Si $3a^2 - b^2 + 6a + 3 = 0$, alors

$$3a^2 - b^2 + 6a + 3 = 0 \Leftrightarrow 3(a + 1)^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow b = \sqrt{3}(a + 1) \quad ou \quad b = -\sqrt{3}(a + 1).$$

Ainsi, l'ensemble des nombres complexes z tels que $z^3 + 3z^2 + 3z + 9$ soit réel est

$$\{z = a\}_{a\in\mathbb{R}} \cap \left\{z = -a + i\sqrt{3}(a + 1)\right\}_{a\in\mathbb{R}} \cap \left\{z = -a - i\sqrt{3}(a + 1)\right\}_{a\in\mathbb{R}}.$$

L'image de cet ensemble est donc l'axe des réels purs ainsi que les droites d'équation $b = \sqrt{3}(a + 1) \quad ou \quad b = -\sqrt{3}(a + 1)$.

EXERCICE 349 (②) par Loïse

Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $z^2 - 2i = \overline{z}^2 + 2i$. Quelle est l'image de cet ensemble dans le plan complexe ?

Posons a et b deux réels tels que $z = a + ib$ et $\overline{z} = a - ib$. Avec cette mise sous forme algébrique, il vient :

$$(a+ib)^2 - 2i = (a-ib)^2 + 2i \Leftrightarrow a^2 + 2abi - b^2 - 2i = a^2 - 2abi - b^2 + 2i \Leftrightarrow 4abi - 4i = 0 \Leftrightarrow ab = 1.$$

Nécessairement, a et b sont non nuls, soit :

$$z = a + \frac{1}{a}i.$$

L'ensemble des nombres complexes z tels que $z^2 - 2i = \overline{z}^2 + 2i$ est

$$\left\{ z = a + \frac{1}{a} i \right\}_{a \in \mathbb{R}^*}.$$

L'ensemble image dans le plan complexe est le graphe de la fonction inverse $f : a \longmapsto \dfrac{1}{a}$.

EXERCICE 350 (③) par Tristan

a) Soient z et z' deux nombres complexes. Montrer :

$$|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right)$$

b) Donner une interprétation géométrique de cette égalité en considérant un parallélogramme, les longueurs de ses côtés, les longueurs de ses diagonales.

c) Soient A, B, C trois point non alignés du plan. I le milieu de $[BC]$. Déduire de b) une expression de AI^2 en fonction de AB^2, BC^2, CA^2.

a) Calculons le premier membre de l'inégalité à démontrer.

$$\begin{aligned} |z + z'|^2 + |z - z'|^2 &= (z + z')\left(\overline{z} + \overline{z'}\right) + (z - z')\left(\overline{z} - \overline{z'}\right) \\ &= |z|^2 + |z'|^2 + |z|^2 + |z'|^2 + z\overline{z'} + z'\overline{z} - z\overline{z'} - z'\overline{z} \\ &= 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right) \end{aligned}$$

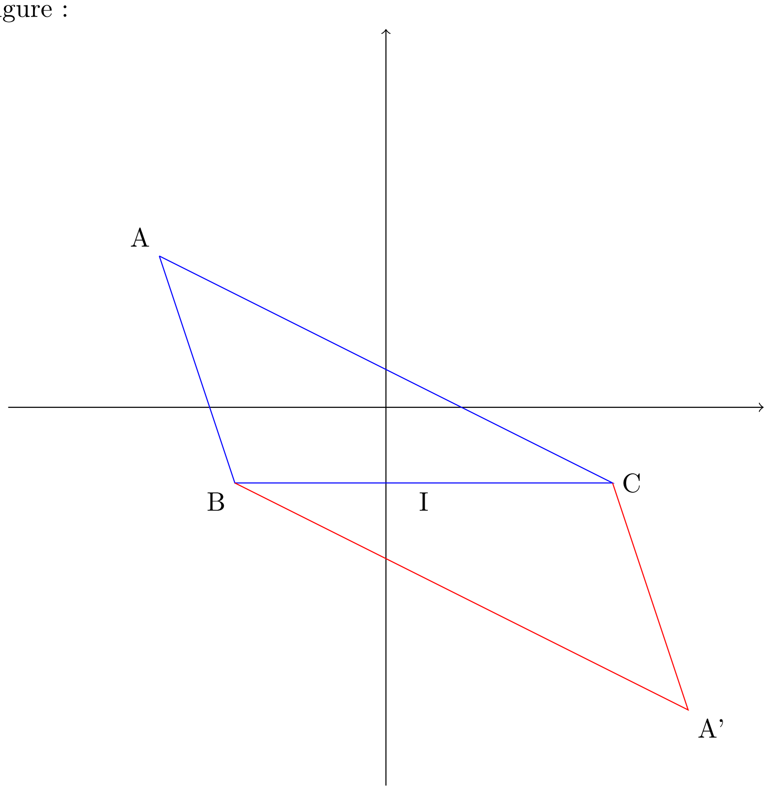
On retrouve ainsi le second membre de l'égalité.

b) Posons A, B, C, D les points d'affixes respectifs $z, -z', z, z'$. On remarque alors immédiatement que $ABCD$ est un parallélogramme et que l'égalité précédente devient

$$AB^2 + AD^2 = 2\left(OA^2 + OD^2\right)$$

On en déduit que dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs de deux côtés consécutifs est égale à la somme des carrés de ses diagonales.

c) Traçons une figure :



On remarque alors qu'avec A' le symétrique de A par rapport à I, $ABA'C$ est un parallélogramme et la propriété précédemment évoquée est applicable.

$$\begin{aligned} AB^2 + CA^2 &= 2\left(AI^2 + BI^2\right) \\ AB^2 + CA^2 - 2BI^2 &= 2AI^2 \\ \frac{AB^2 + CA^2 - BC^2}{2} &= AI^2 \end{aligned}$$

EXERCICE 351 (②) par Matilde

Soient z et z' deux nombres complexes, M et M' leurs images dans le plan conplexe. Montrer qu'un point appartient au segment [MM'] si et seulement si son affixe est de la forme $\lambda z + (1-\lambda)z'$ *avec* $\lambda \in [0,1]$.

La droite $(M'M)$ est l'ensemble des points de la forme :

$$M' + \lambda \cdot \overrightarrow{M'M}$$

Ainsi, cette droite qui passe par les points d'affixe z et z' est l'image de l'ensemble des nombres complexes de la forme :

$$z' + \lambda(z - z') = z' + \lambda z - \lambda z' = \lambda z + z'(1-\lambda)$$

De même, le segment $[M'M]$ est l'ensemble des points de la forme :

$$M' + \lambda \cdot \overrightarrow{M'M} \; avec \; 0 \leq \lambda \leq 1$$

(Puisque $\lambda \cdot ||\overrightarrow{M'M}||$ doit être positif et inférieur ou égal à $||\overrightarrow{M'M}||$).
Ainsi, le segment $[M'M]$ est l'image de l'ensemble des nombres complexes de la forme :

$$\lambda z + z'(1-\lambda) \; avec \; \lambda \in [0,1]$$

EXERCICE 352 (③) par Alexandre

Soient a, b, c trois nombres complexes, A, B, C leurs images dans le plan. On suppose que A, B, C ne sont pas alignés. Montrer que les médianes du triangle ABC passent par le point G d'affixe $g = \frac{a+b+c}{3}$ (qui est le centre de gravité *du* triangle ABC).

Soient A', B', C', les milieux de $[BC], [AC], [AB]$, et a', b', c' leurs affixes.
Par définition, on a : $a' = \dfrac{b+c}{2}, b' = \dfrac{a+c}{2}, c' = \dfrac{a+b}{2}$.
Les médianes de ABC se caractérisent comme les segments $[AA'], [BB'], [CC']$.
Or, l'exercice 351 nous indique qu'un point appartient à $[AA']$ si et seulement si son affixe est de la forme $\lambda a + (1-\lambda)a'$, avec $\lambda \in [0,1]$.
Ainsi, pour $\lambda = \dfrac{1}{3}$, on trouve que le point d'affixe $\dfrac{a}{3} + \dfrac{2}{3}\dfrac{b+c}{2} = \dfrac{a+b+c}{3} = g$, appartient bien à $[AA']$, donc à une des médianes de ABC.
De même, on trouve que g appartient à $[BB']$ et $[CC']$, donc on a bien établi que les médianes de ABC passent par G.

EXERCICE 353 (⑤) par Octave

Montrer que l'ensemble des nombres complexes non nuls z tels que $\left|z + \dfrac{1}{z}\right| = 2$ a pour image la réunion de deux cercles que l'on précisera.

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{C}^*$ respectant :

$$\left(|z-i|^2 - 2\right)\left(|z+i|^2 - 2\right) = 0\,. \tag{E}$$

L'image de $\mathcal{E}$ est l'union de deux cercles, en effet :

$$\begin{aligned}(E) &\Longleftrightarrow |z-i|^2 = 2 \quad \text{ou} \quad |z+i|^2 = 2\\ &\Longleftrightarrow |z-i| = \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad |z+i| = \sqrt{2}\end{aligned}$$

Donc, z appartient au cercle de centre i et de rayon $\sqrt{2}$, ou au cercle de centre $-i$ et de rayon $\sqrt{2}$.
Montrons maintenant que $(E) \Leftrightarrow \left|z+\dfrac{1}{z}\right| = 2$:

$$\begin{aligned}(E) &\Longleftrightarrow [(z-i)(\bar{z}+i)-2]\,[(z+i)(\bar{z}-i)-2] = 0\\
&\Longleftrightarrow (z\bar{z}+iz-i\bar{z}-1)(z\bar{z}-iz+i\bar{z}-1) = 0\\
&\Longleftrightarrow (z\bar{z})^2 - \cancel{iz^2\bar{z}} + \cancel{iz\bar{z}^2} - z\bar{z} + \cancel{iz^2\bar{z}} + z^2 - z\bar{z} - \cancel{iz} - \cancel{iz\bar{z}^2} - z\bar{z} + \bar{z}^2 + \cancel{i\bar{z}} - z\bar{z} + \cancel{iz} - \cancel{i\bar{z}} + 1 = 0\\
&\Longleftrightarrow (z\bar{z})^2 - 4z\bar{z} + z^2 + \bar{z}^2 + 1 = 0\\
&\Longleftrightarrow (z\bar{z})^2 + z^2 + \bar{z}^2 + 1 = 4z\bar{z}\\
&\Longleftrightarrow z\bar{z} + \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} + \frac{1}{z\bar{z}} = 4\\
&\Longleftrightarrow \left(z+\frac{1}{z}\right)\left(\bar{z}+\frac{1}{\bar{z}}\right) = 4\\
&\Longleftrightarrow \left|z+\frac{1}{z}\right|^2 = 4\\
&\Longleftrightarrow \left|z+\frac{1}{z}\right| = 2\,. && \text{(par positivité du module)}\end{aligned}$$

10.4 Nombres complexes de module 1, exponentielle imaginaire

EXERCICE 354 (1) par Mattéo

Écrire sous forme algébrique $e^{i\pi/6}$, $e^{i5\pi/6}$.

On a immédiatement : $e^{i\pi/6} = \cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

et $e^{i5\pi/6} = \cos(\frac{5\pi}{6}) + i\sin(\frac{5\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

EXERCICE 355 (2) par Martin

Montrer, en utilisant la formule d'Euler pour le sinus, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(nx)| \leq n|\sin(x)|$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

Si $x \in \pi\mathbb{Z}$ ou $n = 0$ ou $n = 1$, le résultat est immédiat.

Considérons ainsi le cas où n est un entier supérieur ou égal à 2 et x un réel non multiple de π.

$$|\sin(nx)| \leq n|\sin(x)| \iff \left|\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}\right| \leq n\left|\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right| \iff \left|\frac{(e^{ix})^n-(e^{-ix})^n}{2i}\right| \leq n\left|\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right|$$

Ainsi, en factorisant par $|\sin(x)|$, on obtient :

$$\left|\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}(e^{ix})^k\cdot(e^{-ix})^{n-1-k}\right| \leq n\left|\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right|$$

Ce qui équivaut, en divisant par $|\sin(x)|$ qui est strictement positif, à :

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}(e^{ix})^k\cdot(e^{-ix})^{n-1-k}\right| \leq n$$

Procédons alors par disjonction de cas suivant la parité de n pour déterminer une expression simple de cette somme. C'est en effet la parité de n qui va indiquer s'il existe k entier naturel dans $\{0, ..., n-1\}$ tel que $(e^{ix})^k \cdot (e^{-ix})^{n-1-k} = 1$ c'est-à-dire s'il existe k tel que $k = n-1-k \iff n = 2k+1$. On note ainsi qu'il existe un tel k pour n impair mais non pas pour n pair.

- Si n est pair, alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}(e^{ix})^k(e^{-ix})^{n-1-k} &= e^{-i(n-1)x} + e^{ix}e^{-i(n-2)x} + ... + e^{-ix} + e^{ix} + ... + e^{i(n-2)x}e^{-ix} + e^{i(n-1)x} \\ &= e^{i(n-1)x} + e^{-i(n-1)x} + e^{i(n-3)x} + e^{-i(n-3)x} + ... + e^{ix} + e^{-ix} \\ &= 2\cos((n-1)x) + 2\cos((n-3)x) + ... + 2\cos(x)\end{aligned}$$

La somme comportant initialement n termes, la combinaison linéaire de cosinus comporte $\frac{n}{2}$ termes. En posant $n_1 = \frac{n}{2} - 1$ on établit que

$$\sum_{k=0}^{n-1}(e^{ix})^k(e^{-ix})^{n-1-k} = 2\sum_{k=0}^{n_1}\cos((2k+1)x)$$

Or, puisque pour tout x réel, $|\cos(x)|$ est majoré par 1, on a :

$$\left|\sum_{k=0}^{n_1}\cos((2k+1)x)\right| \leq \frac{n}{2}$$

D'où

$$\left|2\sum_{k=0}^{n_1}\cos((2k+1)x)\right| \leq n$$

- Si n est impair, alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}(e^{ix})^k(e^{-ix})^{n-1-k} &= e^{-i(n-1)x} + e^{ix}e^{-i(n-2)x} + ... + e^{-i2x} + 1 + e^{i2x} + ... + e^{i(n-2)x}e^{-ix} + e^{i(n-1)x} \\ &= e^{i(n-1)x} + e^{-i(n-1)x} + e^{i(n-3)x} + e^{-i(n-3)x} + ... + e^{i2x} + e^{-i2x} + 1 \\ &= 2\cos((n-1)x) + 2\cos((n-3)x) + ... + 2\cos(2x) + 1\end{aligned}$$

La somme comportant $n-1$ termes que l'on peut additionner deux par deux pour obtenir un cosinus avec la formule de Euler, on obtient finalement $\frac{n-1}{2}$ termes en cosinus. En posant $n_2 = \frac{n-1}{2} - 1$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(e^{ix})^k(e^{-ix})^{n-1-k} = 2\sum_{k=0}^{n_2}\cos((2k+2)x) + 1$$

En majorant chaque cosinus par 1, on établit que :

$$\left|\sum_{k=0}^{n_2}\cos((2k+2)x)\right| \leq \frac{n-1}{2}$$

Ce qui équivaut, puisque pour tout p réel $|p+1| \leq |p| + |1|$, à

$$\left|2\sum_{k=0}^{n_2}\cos((2k+2)x) + 1\right| \leq n$$

Ainsi donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(nx)| \leq n|\sin(x)|$$

EXERCICE 356 (④) par Daniel

Il est conseillé dans cet exercice, d'éviter les parties réelles et imaginaires et de travailler avec les carrés des modules écrits avec l'aide du conjugué.
Soit $a \in \mathbb{C}$.

a) Montrer que, si $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$,

$$\forall z \in \mathbb{U}, \quad \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \in \mathbb{U}$$

b) Soit $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C};\, |z| < 1\}$. Montrer que, si $a \in \mathbb{D}$, alors :

$$\forall z \in \mathbb{D}, \quad \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \in \mathbb{D}$$

a) $|z-a|^2 = (z-a)(\overline{z}-\overline{a}) = z\overline{z} - z\overline{a} - a\overline{z} + a\overline{a} = 1 - 2Re(\overline{a}z) + |a|^2$
$|1-\overline{a}z|^2 = (1-\overline{a}z)(1-a\overline{z}) = 1 - a\overline{z} - \overline{a}z + \overline{a}a\overline{z}z = 1 - 2Re(\overline{a}z) + |a|^2$

Par conséquent, on a : $|z-a|^2 = |1-\overline{a}z|^2$, à savoir : $\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z} \in \mathbb{U}$

b) $|z-a|^2 - |1-\overline{a}z|^2 = |z|^2 - 1 + |a|^2\left(1-|z|^2\right) = \left(1-|z|^2\right)\left(|a|^2-1\right) < 0 \quad \text{car } (a,z) \in \mathbb{D}^2$

Par conséquent, $|z-a|^2 < |1-\overline{a}z|^2$, donc $\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z} \in \mathbb{D}$

EXERCICE 357 (③) par Maorine

Quels sont les $n \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad (\sin(\theta) + i\,\cos(\theta))^n = \sin(n\theta) + i\,\cos(n\theta)?$$

Transformons chaque côté de l'égalité avec la notation exponentielle imaginaire :

— $(\sin(\theta) + i\,\cos(\theta))^n = [i(\cos(\theta) - i\,\sin(\theta)]^n = i^n e^{-in\theta}$.
— $\sin(n\theta) + i\,\cos(n\theta) = i(\cos(n\theta) - i\,\sin(n\theta)) = ie^{-in\theta}$.

D'où :

$$i^n e^{-in\theta} = ie^{-in\theta}$$
$$i^n = i.$$

Donc on cherche les $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $i^n = i$.

Soit $k \in \mathbb{Z}$, on a : $i^{4k} = (i^4)^k = 1^k = 1$
Donc : $i^{4k+1} = i,\ \ i^{4k+2} = -1,\ \ i^{4k+3} = -i$.
Ainsi, les $n \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels l'égalité est vérifiée sont les $n = 4k+1, \quad k \in \mathbb{Z}$.

10.5 Arguments d'un nombre complexe non nul, forme trigonométrique

EXERCICE 358 (①) par Martin

Soit $a \in \mathbb{C}$. Quelle est l'image de l'ensemble $\{a + 2e^{i\theta}\ ; \theta \in \mathbb{R}\}$?

L'image de l'ensemble $\{a + 2e^{i\theta}\ ; \theta \in \mathbb{R}\}$ est le cercle de rayon 2 ayant pour centre le point d'affixe a.

EXERCICE 359 (②) par Martin

Soient $a \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{R}$. Quelle est l'image de l'ensemble des nombres complexes de la forme $a + re^{i\alpha}$ lorsque r décrit $\mathbb{R}$? $\mathbb{R}^+$? $[0, R]$ où $R \in \mathbb{R}^+$ est fixé ?

L'image de l'ensemble des nombres complexes de la forme $a + re^{i\alpha}$ lorsque r décrit $\mathbb{R}$ est la droite passant par le point d'affixe a et dirigée par le vecteur directeur d'affixe $e^{i\alpha}$.

L'image de l'ensemble des nombres complexes de la forme $a + re^{i\alpha}$ lorsque r décrit $\mathbb{R}^+$ est la demi-droite ayant pour origine le point d'affixe a et dirigée par le vecteur directeur d'affixe $e^{i\alpha}$.

Pour la dernière question, on appelle Δ la demi-droite mentionnée ci-dessus et on place le point B sur Δ à une distance R du point d'affixe a. L'image de l'ensemble des nombres complexes de la forme $a + re^{i\alpha}$ lorsque r décrit $[0, R]$ où $R \in \mathbb{R}^+$ est fixé est alors le segment reliant le point d'affixe a au point B.

Exercice 360 (①) par Wéline

Soit $z = \frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$. Écrire z sous forme trigonométrique puis calculer z^3.
Retrouver le résultat de l'exercice 333 de 10.1.

$$z = \frac{-4}{1+i\sqrt{3}} = \frac{-4\left(1-i\sqrt{3}\right)}{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{-4+4i\sqrt{3}}{4} = -1+i\sqrt{3}$$

Pour trouver la forme trigonométrique de z, il faut commencer par trouver son module.

$$|z| = \sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$$

Puis on note θ l'argument de z modulo 2π.

$$\left\{\begin{array}{lcl} \cos(\theta) & = & \frac{-1}{2} \\ \sin(\theta) & = & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} \theta & = & \cos^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right) \\ \theta & = & \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{array}\right. \iff \theta = \frac{2\pi}{3}\,[2\pi]$$

On a donc :

$$z = 2 \times \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$$

Avec cette forme on peut calculer z^3 plus facilement.

$$z^3 = \left(2 \times \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = 2^3 \times \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}\times 3} = 8 \times \mathrm{e}^{i2\pi} = 8$$

Exercice 361 (②) par Loïse

Mettre $1+i\sqrt{3}$ sous forme trigonométrique et trouver les entiers naturels n tels que

$$(1+i\sqrt{3})^n \in \mathbb{R}^+.$$

Nous mettons sous forme trigonométrique le nombre complexe $z = 1+i\sqrt{3}$ en commençant par le calcul du module :

$$|z| = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} = 2.$$

On recherche ensuite l'argument de z, noté θ, tel que $\cos(\theta) = \dfrac{1}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Avec appui sur les valeurs remarquables, on en déduit $\theta = \dfrac{\pi}{3}\,[2\pi]$. Soit :

$$z = 2e^{i}\frac{\pi}{3}.$$

D'où

$$(1+i\sqrt{3})^n = \left(2e^{i}\frac{\pi}{3}\right)^n = 2e^{i\left(\frac{n\pi}{3}\right)}.$$

Or,
$$(1+i\sqrt{3})^n \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \arg(((1+i\sqrt{3})^n) = 0\,[2\pi] \Leftrightarrow \frac{n\pi}{3} = 0\,[2\pi]\,.$$
Conclusion :
$$(1+i\sqrt{3})^n \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow n = 6k, k \in \mathbb{N}.$$

EXERCICE 362 (②) par Loïse

Soit f l'application de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$ définie par
$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \qquad f(x) = \frac{1}{z}.$$
On identifie $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$ un point du plan et son affixe. On considère une droite D passant par 0, un cercle C de centre 0.

a) Montrer que l'image de $D\setminus\{0\}$ est de la forme $D'\setminus\{0\}$ où D' est une droite passant par 0 que l'on précisera.

b) Montrer que l'image de C par f est un cercle que l'on précisera.

a) Soit z un nombre complexe non nul. On note $|z| =$ et $\arg(z) = \theta$. Écrivons z sous forme trigonométrique :
$$z = r\mathrm{e}^{i\theta}.$$
Appliquons la fonction f à z. Il vient
$$f(z) = \frac{1}{z} \Leftrightarrow f(z) = \frac{1}{re^{i\theta}} \Leftrightarrow f(z) = \frac{1}{r}\cdot\frac{1}{e^{i\theta}} \Leftrightarrow f(z) = \frac{1}{r}\cdot e^{-i\theta}.$$
On s'intéresse au cas où r décrit $\mathbb{R}^{+*}$. Or $\forall r \in \mathbb{R}^{+*}$, $\frac{1}{r} \in \mathbb{R}^{+*}$. On en déduit que l'image de $D\setminus\{0\}$ est de la forme $D'\setminus\{0\}$ où D' est une droite passant par 0 et dirigée par le vecteur d'affixe $e^{-i\theta}$.

b) Soit z un nombre complexe non nul. On note $|z| =$ et $\arg(z) = \theta$. Écrivons z sous forme trigonométrique :
$$z = r\mathrm{e}^{i\theta}.$$
Appliquons la fonction f à z. Il vient
$$f(z) = \frac{1}{z} \Leftrightarrow f(z) = \frac{1}{re^{i\theta}} \Leftrightarrow f(z) = \frac{1}{r}\cdot\frac{1}{e^{i\theta}} \Leftrightarrow f(z) = \frac{1}{r}\cdot e^{-i\theta}.$$
On s'intéresse au cas où θ décrit $\mathbb{R}$. Or $\forall r \in \mathbb{R}^{+*}$, $\frac{1}{r} \in \mathbb{R}^{+*}$. On en déduit que l'image C par f est le cercle de centre le point d'affixe 0 de rayon $\frac{1}{r}$.

EXERCICE 363 (②) par Wéline

a) En utilisant la forme trigonométrique, déterminer les nombres complexes dont le carré est un nombre réel.

b) En utilisant la forme trigonométrique, déterminer les nombres complexes dont le carré est un nombre imaginaire pur.

Soit $z \in \mathbb{C}$, on note $|z| = r$ et $\arg(z) = \theta$, donc $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$.

a)
$$a \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \arg(a) = 0[2\pi] \text{ ou } \arg(a) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$$
Ensuite, on a que :
$$z^2 = \left(r\mathrm{e}^{i\theta}\right)^2 = r^2\mathrm{e}^{i2\theta}$$
Donc :
$$z^2 \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow 2\theta = 0[2\pi] \text{ ou } 2\theta = \frac{\pi}{2}[2\pi]$$
$$z^2 \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \theta = 0[2\pi] \text{ ou } \theta = \frac{\pi}{4}[2\pi]$$

b) On note I l'ensemble des imaginaires pures. On sait que :

$$a \in I \iff \arg(a) = \frac{\pi}{2}[2\pi] \text{ ou } \arg(a) = \frac{3\pi}{2}[2\pi]$$

Ensuite, on a que :

$$z^2 = \left(r\mathrm{e}^{i\theta}\right)^2 = r^2\mathrm{e}^{i2\theta}$$

Donc :

$$z^2 \in I \iff 2\theta = \frac{\pi}{2}[2\pi] \text{ ou } 2\theta = \frac{3\pi}{2}[2\pi]$$

$$z^2 \in I \iff \theta = \frac{\pi}{4}[2\pi] \text{ ou } \theta = \frac{3\pi}{4}[2\pi]$$

EXERCICE 364 (②) par Loïse

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit

$$u_n = (1+i)^n + (1-i)^n.$$

a) Écrire $(1+i)^n$ et $(1-i)^n$ sous forme trigonométrique.
b) En déduire une expression de u_n.
c) Pour quels n a-t-on $u_n = 0$?

a) Nous mettons sous forme trigonométrique les nombres $1+i$ et $1-i$ avant de les élever à la puissance n. Nous débutons par le calcul des modules :

$$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2},$$

$$|1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Puis, nous déterminons l'argument de chacun des nombres complexes à l'aide des valeurs remarquables :

$$\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}\,[2\pi]\,,$$

$$\arg(1-i) = -\frac{\pi}{4}\,[2\pi]\,.$$

Soit :

$$1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}},$$

$$1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

On élève à la puissance n :

$$(1+i)^n = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^n = \sqrt{2}^n e^{i\frac{n\pi}{4}},$$

$$(1-i)^n = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^n = \sqrt{2}^n e^{-i\frac{n\pi}{4}}.$$

b) A l'aide de la mise sous forme trigonométrique réalisée à la question précédente, on en déduit une nouvelle expression de u_n.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (1+i)^n + (1-i)^n = \sqrt{2}^n e^{i\frac{n\pi}{4}} + \sqrt{2}^n e^{-i\frac{n\pi}{4}} = \sqrt{2}^n(e^{i\frac{n\pi}{4}} + e^{-i\frac{n\pi}{4}}).$$

c) Cherchons les entiers naturels n tels que $u_n = 0$. Un produit de facteurs est nul si et seulement si au moins l'un des facteurs est nul. Or $\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{2}^n \neq 0$. D'où :

$$u_n = 0 \Leftrightarrow e^{i\frac{n\pi}{4}} + e^{-i\frac{n\pi}{4}} = 0 \Leftrightarrow \cos(\frac{n\pi}{4}) + i\sin(\frac{n\pi}{4}) + \cos(\frac{-n\pi}{4}) + i\sin(\frac{-n\pi}{4}) = 0$$

Or, $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(-x) = -\sin(x)$ par imparité de la fonction sinus et $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos(x)$ par parité de la fonction cosinus. Soit :

$$2\cos(\frac{n\pi}{4}) = 0 \Leftrightarrow \frac{n\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\,[\pi]\,.$$

Conclusion :

$$u_n = 0 \Leftrightarrow n = 4k+2, k \in \mathbb{N}.$$

Exercice 365 (②) par Térence

On veut résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(1) \qquad z^5 = \bar{z}.$$

Montrer que si z vérfie (1), alors z est nul ou de module 1. Conclure ; on montrera en particulier que l'équation admet 7 solutions.

Montrons que $\forall z \in \mathbb{C}, (z^5 = \bar{z}) \implies (z = 0 \text{ ou } |z|= 1)$

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^5 = \bar{z}$,

on a donc

$$|z^5|= |\bar{z}|= |z|$$
$$\Leftrightarrow |z^5|-|z|= 0$$
$$\Leftrightarrow |z|(|z|^4-1) = 0$$
$$\Leftrightarrow |z|= 0 \text{ ou } |z|^4= 1$$
$$\Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } |z|= 1$$

Trouvons maintenant les solutions de (1) pour $z \in \mathbb{C}^*$
Soit $z \in \mathbb{C}^*$,

$$z^5 = \bar{z}$$
$$\Leftrightarrow zz^5 = \bar{z}z = |z|^2$$
$$\Leftrightarrow z^6 = 1$$
$$\Leftrightarrow z = e^{\frac{2ik\pi}{6}}; \text{ pour } k \in [\![-2 \ ; \ 3]\!]$$
$$\Leftrightarrow z = e^{\frac{ik\pi}{3}}$$
$$\left\{e^{\frac{ik\pi}{3}}; k \in [\![-2 \ ; \ 3]\!]\right\}$$

Ainsi, toutes les solutions de (1) sont :

$$S = \left\{e^{\frac{-2\pi}{3}i}; e^{\frac{-\pi}{3}i}; 1; e^{\frac{\pi}{3}i}; e^{\frac{2\pi}{3}i}; -1; 0\right\}$$

10.6 Interprétation géométrique du module et de l'argument de $\frac{c-a}{b-a}$

Exercice 366 (②) par Loïse

Quels sont les nombres complexes non nuls z tels que les points d'affixes $i,z,\dfrac{1}{z}$ soient alignés ?

Les points d'affixes $i,z,\dfrac{1}{z}$ sont alignés si et seulement si $\dfrac{z-i}{\frac{1}{z}-i}$ est réel. Posons a et b deux réels non simultanément nuls tels que $z = a + ib$ et $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a+ib}$. L'écriture du quotient devient donc :

$$\frac{a+ib-i}{\dfrac{1}{a+ib}-i} = (a+ib)\frac{a+i(b-1)}{1+b-ai}.$$

$$\frac{a+i(b-1)}{1+b-ai} = (a+ib)\frac{(a+i(b-1))(1+b+ai)}{(1+b-ai)(1+b+ai)}.$$

Soit :

$$\frac{a+i(b-1)}{1+b-ai} = (a+ib)\frac{a+ab+a^2i+i(b-1)+ib(b-1)-a(b-1))}{(1+b)^2+a^2}.$$

Simplifions :

$$(a+ib)\frac{a+ab+a^2i+i(b-1)+ib(b-1)-a(b-1))}{(1+b)^2+a^2}=(a+ib)\frac{a+ab+a^2i+ib-i+ib^2-ib-ab+a}{(1+b)^2+a^2}.$$

D'où :

$$(a+ib)\frac{a+ab+a^2i+ib-i+ib^2-ib-ab+a}{(1+b)^2+a^2}=(a+ib)\frac{2a+i(a^2+b^2-1)}{(1+b)^2+a^2}.$$

Soit :

$$(a+ib)\frac{2a+i(a^2+b^2-1)}{(1+b)^2+a^2}=\frac{2a^2+i2ab+ia(a^2+b^2-1)-b(a^2+b^2-1)}{(1+b)^2+a^2}.$$

On écrit la forme algébrique du quotient :

$$\frac{a+ib-i}{\dfrac{1}{a+ib}-i}=\frac{2a^2-b(a^2+b^2-1)}{(1+b)^2+a^2}+i\frac{2ab+a(a^2+b^2-1)}{(1+b)^2+a^2}.$$

Or,

$$\frac{z-i}{\dfrac{1}{z}-i}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\mathfrak{Im}(\frac{z-i}{\dfrac{1}{z}-i})=0\Leftrightarrow 2ab+a(a^2+b^2-1)=0\Leftrightarrow 2b+a^2+b^2-1=0\quad ou\quad a=0.$$

Soit :

$$a^2+(b-1)^2=2\quad ou\quad a=0.$$

Conclusion : i,z,$\frac{1}{z}$ sont alignés si et seulement si z est un imaginaire pur non nul (son image dans le plan complexe appartient à l'axe des imaginaires purs privé de l'origine du plan complexe) ou si son image dans le plan complexe appartient au cercle de centre le point A d'affixe i et de rayon $\sqrt{2}$.

EXERCICE 368 (③) par Loïse

Soient a, b et c trois nombres complexes distincts, A, B et C leurs images dans le plan.

a) A quelle condition sur $\dfrac{c-a}{b-a}$ le triangle ABC est-t-il équilatéral de sens direct ? de sens indirect ?

b) Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$.

a) Un triangle isocèle avec un angle de $\dfrac{\pi}{3}$ radians est équilatéral. Nous allons donc nous intéresser à deux conditions sur le quotient $\dfrac{c-a}{b-a}$. Pour que le triangle ABC soit isocèle de sommet principal A, il faut que

$$AB=AC\Leftrightarrow||\overrightarrow{AB}||=||\overrightarrow{AC}||\Leftrightarrow|\frac{c-a}{b-a}|=1.$$

Nous obtenons une condition nécessaire à ce que le triangle ABC soit équilatéral. Pour que le triangle ABC soit équilatéral de sens direct, il faut que : $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})=\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$. Soit :

$$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})=\frac{\pi}{3}[2\pi]\Leftrightarrow\arg(\frac{c-a}{b-a})=\frac{\pi}{3}[2\pi].$$

Ainsi, le triangle ABC équilatéral de sens direct si et seulement si $\dfrac{c-a}{b-a}=e^{i\frac{\pi}{3}}$. Pour que le triangle ABC soit équilatéral de sens indirect, il faut que : $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})=\dfrac{5\pi}{3}[2\pi]=\dfrac{-\pi}{3}[2\pi]$. Soit :

$$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})=\frac{\pi}{3}[2\pi]\Leftrightarrow\arg(\frac{c-a}{b-a})=\frac{-\pi}{3}[2\pi].$$

Ainsi, le triangle ABC équilatéral de sens indirect si et seulement si ses trois côtés sont égaux et deux de ses angles sont de même mesure. Soit : $\dfrac{c-a}{b-a}=e^{i\frac{-\pi}{3}}[2\pi]$.

b) Le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $AB = AC = BC$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})$.
On peut traduire ceci par l'égalité suivante :

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{a-b}{c-b} \Leftrightarrow (c-a)(c-b) = (a-b)(b-a).$$

On développe les deux membres de l'égalité :

$$(c-a)(c-b) = (a-b)(b-a) \Leftrightarrow c^2 - ac - b + ab = ab - b^2 - a^2 + ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac = 0.$$

On a démontré l'équivalence suivante : ABC est un triangle équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac = 0$.

Exercice 369 (④) par Tristan

Soient, dans les questions a) à c), a, b, c trois éléments distincts de $\mathbb{U}$, A, B, C leurs images.

a) Quel est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC ?

b) Soit M un point du plan d'affixe z. En remarquant que le conjugué d'un élément de $\mathbb{U}$ est égal à son inverse, montrer que M appartient à la hauteur du triangle ABC issue de C si et seulement si

$$\overline{z} = \frac{z}{ab} + \frac{1}{c} - \frac{c}{ab}$$

c) Montrer que les trois hauteurs de ABC concourent au point d'affixe

$$h = a + b + c$$

d) Montrer que dans un triangle quelconque ABC, l'orthocentre H, le centre de gravité G et le ventre du cercle circonscrit O sont alignés et vérifient la relation d'Euler

$$\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$$

a) Comme a, b, c sont des éléments distincts de $\mathbb{U}$, leurs images sont sur le cercle trigonométrique qui devient alors le cercle circonscrit au triangle ABC. Son centre est donc le point $O\,(0,0)$.

b) Le point M d'affixe z est sur la hauteur issue de C si et seulement si on a la relation suivante :

$$\frac{z-c}{b-a} = -\overline{\left(\frac{z-c}{b-a}\right)}$$

$$\frac{z-c}{b-a} = -\frac{\overline{z}-\overline{c}}{\overline{b}-\overline{a}}$$

$$\frac{z-c}{b-a} \times \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = -\overline{z} + \overline{c}$$

$$\overline{z} = \frac{z-c}{ab} + \frac{1}{c}$$

$$\overline{z} = \frac{z}{ab} + \frac{1}{c} - \frac{c}{ab}$$

c) On commence par obtenir l'affixe de l'intersection M de deux des hauteurs de ABC puis on vérifie que M est aussi sur la troisième hauteur.

D'après la question précédente, M d'affixe z est sur la hauteur issue de C si et seulement si

$$\overline{z} = \frac{z}{ab} + \frac{1}{c} - \frac{c}{ab}$$

De la même manière, on trouvera qu'il est sur la hauteur issue de A (resp. B) si et seulement si

$$\overline{z} = \frac{z}{bc} + \frac{1}{a} - \frac{a}{bc}, \left(\text{resp. } \overline{z} = \frac{z}{ca} + \frac{1}{b} - \frac{b}{ca}\right)$$

Ainsi, M est l'intersection des hauteurs issues de A et B si et seulement si

$$\frac{z}{bc}+\frac{1}{a}-\frac{a}{bc}=\frac{z}{ca}+\frac{1}{b}-\frac{b}{ca}$$

$$\frac{za+bc-a^2}{abc}=\frac{zb+ca-b^2}{abc}$$

$$z\,(a-b)=ca-b^2-bc+a^2$$

$$z\,(a-b)=(a-b)\,(a+b)+c\,(a-b)$$

$$z\,(a-b)=(a-b)\,(a+b+c)$$

$$z=a+b+c$$

Et

$$\frac{a+b+c}{ab}+\frac{1}{c}-\frac{c}{ab}=\frac{c\,(a+b+c)+ab-c^2}{abc}$$

$$\frac{a+b+c}{ab}+\frac{1}{c}-\frac{c}{ab}=\frac{ab+bc+ca}{abc}$$

$$\frac{a+b+c}{ab}+\frac{1}{c}-\frac{c}{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

$$\frac{a+b+c}{ab}+\frac{1}{c}-\frac{c}{ab}=\overline{a+b+c}$$

Ainsi, le point M d'affixe $z=a+b+c$ appartient aux trois hauteurs de ABC. On le renomme alors H et son affixe est

$$h=a+b+c$$

d) Soit ABC un triangle quelconque. Sans perdre de généralité en ce qui concerne ce triangle, on peut supposer que ses sommets sont tels que leurs affixes respectifs soient des éléments distincts de $\mathbb{U}$. (en effet, cela revient simplement à faire une translation puis une homothétie). D'après la question c), on a alors la relation

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$

On sait également depuis l'exercice 352 que le centre de gravité G d'un triangle a pour affixe

$$g=\frac{a+b+c}{3}$$

On obtient finalement l'égalité suivante

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$$

$$3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$

$$3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OH}$$

Comme $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OG}$ sont colinéaires, les points H, G et O sont alignés.

Exercice 370 (⑤) par Tristan

On reprend les notations de l'exercice précédent.

a) Montrer que le cercle de rayon $\frac{1}{2}$ et dont le centre a pour affixe $\frac{h}{2}$ contient les milieux des côtés de ABC, les milieux des segments joignant l'orthocentre aux sommets, les pieds des hauteurs.

b) Énoncer le théorème établi dans un triangle quelconque.

a) Commençons par définir l'équation du cercle décrit afin de pouvoir vérifier l'appartenance des différents points énoncés à ce dernier. On sait que le cercle est de centre Ω d'affixe $\dfrac{h}{2}$ d'où ses coordonnées : $\Omega\left(\Re\left(\dfrac{h}{2}\right),\Im\left(\dfrac{h}{2}\right)\right)$, soit, en notant (x_A, y_A) les coordonnées de A, (x_B, y_B) celles de B et (x_C, y_C) celles de C

$$\Omega\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{2},\frac{y_A+y_B+y_C}{2}\right)$$

De plus, son rayon est $\dfrac{1}{2}$. On peut alors établir la relation suivante

$$M\,(x,y) \text{ est sur le cercle ssi } \left(x-\frac{x_A+x_B+x_C}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_A+y_B+y_C}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

Vérifions dans un premier temps que les milieux des côtés de ABC sont sur le cercle.
En nommant I, J, K les milieux respectifs de $[AB], [BC], [CA]$, et i, j, k leurs affixes (i ne désigne pas ici $\sqrt{-1}$), on obtient alors

$$\begin{cases} i &= \frac{a+b}{2} \\ j &= \frac{b+c}{2} \\ k &= \frac{c+a}{2} \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A+x_B}{2} & \text{et } y_I = \frac{y_A+y_B}{2} \\ x_J = \frac{x_B+x_C}{2} & \text{et } y_J = \frac{y_B+y_C}{2} \\ x_K = \frac{x_C+x_A}{2} & \text{et } y_K = \frac{y_C+y_A}{2} \end{cases}$$

On remplace alors x et y dans l'équation de cercle par x_I et y_I et on obtient

$$\begin{aligned} &\left(x_I-\frac{x_A+x_B+x_C}{2}\right)^2+\left(y_I-\frac{y_A+y_B+y_C}{2}\right)^2 \\ \Longleftrightarrow\ &\left(\frac{-x_C}{2}\right)^2+\left(\frac{-y_C}{2}\right)^2 \\ \Longleftrightarrow\ &\frac{x_C^2+y_C^2}{4} \\ \Longleftrightarrow\ &\frac{|c|^2}{4} \\ \Longleftrightarrow\ &\frac{1}{4} \qquad \text{car } c\in\mathbb{U} \end{aligned}$$

Ainsi, I est sur le cercle. Un calcul analogue, laissé au lecteur, mènera à la conclusion que J et K sont également sur le cercle.

Vérifions maintenant que les milieux des segments joignant l'orthocentre aux sommets sont égalemement sur le cercle.
Comme précédemment, définissons le point L, milieu du segment $[AH]$. Alors son affixe est $l=\dfrac{2a+b+c}{2}$, d'où ses coordonnées : $L\left(\dfrac{2x_A+x_B+x_C}{2},\dfrac{2y_A+y_B+y_C}{2}\right)$
On calcule alors le premier membre de l'équation de cercle avec les coordonnées de L :

$$\begin{aligned} &\left(x_L-\frac{x_A+x_B+x_C}{2}\right)^2+\left(y_L-\frac{y_A+y_B+y_C}{2}\right)^2 \\ \Longleftrightarrow\ &\left(\frac{x_A}{2}\right)^2+\left(\frac{y_A}{2}\right)^2 \\ \Longleftrightarrow\ &\frac{x_A^2+y_A^2}{4} \\ \Longleftrightarrow\ &\frac{|a|^2}{4} \\ \Longleftrightarrow\ &\frac{1}{4} \qquad \text{car } a\in\mathbb{U} \end{aligned}$$

Ainsi, L est sur le cercle.
Le même raisonnement s'applique pour les milieux des deux segments restants et on trouvera que ces derniers sont également sur le cercle.

Finalement, déterminons l'affixe, et donc les coordonnées du pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC, point que l'on nommera H_A et son affixe h_A.
H_A est l'unique point d'intersection des droites (AH) et (BC). D'après l'exercice précédent, un point M d'affixe z appartient à la droite (AH) si et seulement si z vérifie la relation

$$\overline{z} = \frac{z}{bc} + \frac{1}{a} + \frac{a}{bc}$$

On remarque alors que si M est sur la droite (BC), z vérifie

$$\frac{z-c}{h-a} = -\overline{\left(\frac{z-c}{h-a}\right)}$$

$$\overline{z} = \frac{b+c-z}{bc}$$

Ainsi, h_A vérifie l'équation suivante

$$\frac{h_A}{bc} + \frac{1}{a} + \frac{a}{bc} = \frac{b+c-h_A}{bc}$$

$$h_A = \frac{a^2+ab+ac-bc}{2a}$$

$$h_A = \frac{\overline{a}a^2+\overline{a}ab+\overline{a}ac-\overline{a}bc}{2a\overline{a}}$$

$$h_A = \frac{a+b+c-\overline{a}bc}{2}$$

D'après cette expression, on peut déterminer les coordonnées de H_A :
D'une part,

$$x_{H_A} = \Re(h_A)$$

$$x_{H_A} = \frac{x_A+x_B+x_C-x_A\left(x_Bx_C-y_By_C\right)+y_A\left(x_By_C+x_Cy_B\right)}{2}$$

Et d'autre,

$$y_{H_A} = \Im(h_A)$$

$$y_{H_A} = \frac{y_A+y_B+y_C-x_A\left(x_By_C+y_Bx_C\right)+y_A\left(x_Bx_C-y_By_C\right)}{2}$$

Alors on a finalement

$$\begin{aligned}
&\left(x_{H_A}-\frac{x_A+x_B+x_C}{2}\right)^2+\left(y_{H_A}-\frac{y_A+y_B+y_C}{2}\right)^2\\
\iff\ &\frac{\Re(\overline{a}bc)^2+\Im(\overline{a}bc)^2}{4}\\
\iff\ &\frac{|\overline{a}bc|^2}{4}\\
\iff\ &\frac{|\overline{a}|^2\times|b|^2\times|c|^2}{4}\\
\iff\ &\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Ainsi, H_A appartient bien au cercle. En adoptant le même raisonnement pour les autres pieds, on trouvera qu'ils appartiennent aussi au cercle.
On en conclut que le cercle de rayon $\frac{1}{2}$ et dont le centre a pour affixe $\frac{h}{2}$ contient les milieux des côtés de ABC, les milieux des segments joignant l'orthocentre aux sommets, les pieds des hauteurs.

b) On a le théorème suivant :
Soit ABC un triangle quelconque, H son orthocentre. On pose a, b, c et h les affixes des sommets A, B, C et de H. Alors le cercle dont le centre a pour affixe $\dfrac{h}{2}$ en prenant comme origine le centre O de son cercle circonscrit et de rayon $\dfrac{k}{2}$, où k est le rapport de l'homothétie transformant le cercle circonscrit de ABC en un cercle de rayon 1, contient les milieux des côtés de ABC, les milieux des segments joignant l'orthocentre aux sommets, les pieds des hauteurs.

10.7 La formule du binôme

Exercice 371 (③) par Antonin D

Pour $n \in \mathbb{R}$, donner une expression simple de la somme

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

On note

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$$

Ainsi

$$f(x) = \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} + C$$

Pour connaître C, calculons f(0)

$$f(0) = \frac{1}{n+1} + C = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{0^{k+1}}{k+1} \Longrightarrow C = \frac{-1}{n+1}$$

$$f(x) = \frac{(1+x)^{n+1} - 1}{n+1}$$

Exercice 372 (②) par Antonin D

soit $n \in \mathbb{N}*$. Quelle est la moyenne des cardinaux des parties de $\{1, ..., n\}$

Calculons d'abords le nombre de partie de $\{1, ..., n\}$

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}}_{\text{on choisi k éléments parmi n}} = 2^n$$

Calculons maintenant le nombre de partie à k éléments. il y a $\binom{n}{k}$ parties de cardinal k
La moyenne est donc

$$\frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k}{2^n} = \frac{n 2^{n-1}}{2^n} = \frac{n}{2}.$$

La somme $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k$ se trouve dans le Théorème 11, exemple 2, avec x=1

Exercice 373 (③) par Antoine

soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0; 1]$. Déduire de l'exemple 2 la variance d'une variable d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n, p)$

En dérivant deux fois par rapport à x le binome : $(x+a)^n$. On trouve :

$$n(n-1)(a+x)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot k(k-1) \cdot x^{k-2} \cdot a^{n-k}.$$

En multipliant des deux cotés par x^2 et en développant à droite on trouve :

$$n(n-1)x^2(a+x)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot k^2 \cdot x^k \cdot a^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot k \cdot x^k \cdot a^{n-k}.$$

On pose $x = p$ et $a = 1-p$ ce qui donne :

$$p^2 n(n-1) = \mathbb{E}(k^2) - \mathbb{E}(k).$$

Comme $\mathbb{E}(k) = np$ on trouve finalement :

$$np(p-1) = \mathbb{E}(k^2) - \mathbb{E}(k)^2 = \mathbb{V}(k).$$

Exercice 374 (②) par Antonin D

Trouver deux fonction polynomiales P et Q telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad cos(4x) = P(cos(x)), \quad sin(4x) = sin(x)Q(cos(x))$$

Rappelons quelques formules de trigo

$$cos^2(x) + sin^2(x) = 1, \quad cos(2x) = cos^2(x) - sin^2(x), \quad sin(2x) = 2cos(x)sin(x)$$

$$\begin{aligned} cos(4x) &= cos^2(2x) + sin^2(2x) \\ &= 2cos^2(2x) - 1 \\ &= 2(cos^2(x) - sin^2(x))^2 - 1 \\ &= 2(2cos^2(x) - 1)^2 - 1 \\ &= 8cos^4(x) - 8cos^2(x) + 1 \end{aligned}$$

On en déduit donc que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$

$$\begin{aligned} sin(4x) &= 2cos(2x)sin(2x) \\ &= 4sin(x)cos(x)(2cos^2(x) - 1) \\ &= sin(x)(8cos^3(x) - 4cos(x)) \end{aligned}$$

On en déduit donc que $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = 8x^3 - 4x$

Exercice 375 (③) par Georges

1. Déterminer une fonction polynomiale P telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(5x) = P(\cos(x))$$

2. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$

a) D'après la formule de Moivre on a : $(\cos(x)+i\sin(x))^5=\cos(5x)+i\sin(5x)$

En utilisant la formule du Binôme de newton ,on obtient :

$$(\cos(x)+i\sin(x))^5=\sum_{k=0}^{5}C_5^k\cdot\cos(x)^k\cdot i\sin(x)^{5-k}$$
$$=5\sin(x)\cdot\cos(x)^4\ \ i-10\sin(x)^3\cdot\cos(x)^2\ \ i+\sin(x)^5\ \ i+\cos(x)^5-10\sin(x)^2\cdot\cos(x)^3+5\sin(x)^4\cdot\cos(x)$$
$$=\cos(x)^5+10\cdot\cos(x)^5-10\cdot\cos(x)^3+5\cdot\cos(x)^5-10\cdot\cos(x)^3+5\cdot\cos(x)+5\sin(x)\cdot\cos(x)^4 i-10\sin(x)^3\cdot\cos(x)^2 i+\sin(x)^5 i$$

On prend alors les parties réelles,

$$\cos(5x)$$
$$=\Re\left(\cos(x)^5+10\cdot\cos(x)^5-10\cdot\cos(x)^3+5\cdot\cos(x)^5-10\cdot\cos(x)^3+5\cdot\cos(x)+5\sin(x)\cdot\cos(x)^4 i-10\sin(x)^3\cdot\cos(x)^2 i+\sin(x)^5 i\right)$$
$$=16\cdot\cos(x)^5-20\cdot\cos(x)^3+5\cdot\cos(x)$$

Finalement, on a :

$$\cos(5x)=16\cdot\cos(x)^5-20\cdot\cos(x)^3+5\cdot\cos(x)$$

Et donc :

$$\forall X\in\mathbb{R},\quad P(X)=6X^5-20X^3+5X,$$

b) On pose, $\dfrac{\pi}{10}=x$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=16\cdot\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)^5-20\cdot\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)^3+5\cdot\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)=0$$

On pose, $B=\cos(\frac{\pi}{10})^2$

On a donc $16B^2-20B+5=0$, il suffit de résoudre cette équation du second degré, qui nous donne comme racines :

$$x_1=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$$
$$x_2=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$$
$$x_3=-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$$
$$x_4=-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$$

Puisque $\dfrac{\pi}{10}>\dfrac{\pi}{6}$ et que $x_1<\dfrac{\pi}{6}$, il ne reste plus qu'une solution, à savoir x_2, donc :

$$\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$$

EXERCICE 376 (②) par Antonin (Linéarisation *)

a) Ecrire x$\mapsto\cos^3(x)$ comme combinaison linéaire des fonctions

$$x\mapsto cos(kx),k\in\{0,1,2,3\}.$$

b) Ecrire x$\mapsto \cos^4(x)$ comme combinaison linéaire des fonctions

$$x \mapsto cos(kx), k \in \{0,1,2,3,4\}.$$

a)

$$\begin{aligned}\cos^3(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3\\ &= \frac{e^{3ix}+e^{-3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}}{8}\\ &= \frac{\cos(3x)+3\cos(x)}{4}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\cos^4(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4\\ &= \frac{e^{4ix}+e^{4ix}+4e^{2ix}+4e^{-2ix}+6}{16}\\ &= \frac{\cos(4x)+4\cos(2x)+3}{8}\end{aligned}$$

EXERCICE 377 (④) par Alexandre (Linéarisation suite *)

a) Montrer que la fonction

$$x \mapsto cos^n(x)$$

est une combinaison linéaire de fonctions

$$x \mapsto \cos(kx), \quad k \in \{0, ..., n\}.$$

b) Calculer en utilisant a) :

$$\int_{-\pi}^{\pi} cos^n(x)dx.$$

a) Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $x \in \mathbb{R}$. Si n est pair, on a :

$$\cos^n(x) = (\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2})^n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ikx}e^{-i(n-k)x}.$$

$$\cos^n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}e^{i(2k-n)x} = \frac{1}{2^n}(\binom{n}{\frac{n}{2}} + \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}\binom{n}{k}(e^{i(2k-n)x}e^{i(n-2k)x})).$$

Soit, si n est pair,

$$\cos^n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}(\frac{1}{2}\binom{n}{\frac{n}{2}} + \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}\binom{n}{k}\cos((2k-n)x)).$$

Si n est impair :

$$\cos^n(x) = (\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2})^n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=o}^{\frac{n+1}{2}}\binom{n}{k}(e^{i(2k-n)x}+e^{i(n-2k)x}) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\frac{n+1}{2}}\binom{n}{k}\cos((2k-n)x).$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $x \in \mathbb{R}$.
Remarquons que si $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)dx = [\frac{1}{k} sin(kx)]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

On utilise ici les propriétés de linéarité de l'intégrale. Donc, si n est pair :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)dx = \frac{1}{2^{n-1}}(\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \binom{n}{\frac{n}{2}} dx + \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \binom{n}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((2k-n)x)dx) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{\frac{n}{2}}(2\pi)$$

Soit :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)dx = \frac{1}{2^n+1}\binom{n}{\frac{n}{2}}\pi.$$

Et si n est impair :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)dx = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\frac{n+1}{2}} \binom{n}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((2k-n)x)dx = 0.$$

Exercice 378 (③) par Alexandre C. (Retour sur les intégrales de Wallis).
Soit $p \in \mathbb{N}$. À l'aide de l'exercice précédent, retrouver l'intégrale W_{2p} de **8.6**.

Soit $p \in \mathbb{N}$:
D'après l'exercice 377, d'une part :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2p}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2^{2p-1}}\binom{2p}{p}\pi$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2p}(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{0} \cos^{2p}(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} \cos^{2p}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_{0}^{\pi} \cos^{2p}(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{(la fonction cosinus étant paire)} \\
&= 2(\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^{2p}(x)\,\mathrm{d}x)
\end{aligned}$$

Or,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^{2p}(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^{2p}(\pi-u)\,\mathrm{d}u = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}(u)\,\mathrm{d}u \quad \text{(en posant } u = \pi - x\text{)}$$

donc

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2p}(x)\,\mathrm{d}x = 4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}(x)\,\mathrm{d}x = 4W_{2p}.$$

ainsi :

$$\begin{aligned}
W_{2p} &= \frac{1}{2^{2p+1}}\binom{2p}{p}\pi \\
&= \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2p)\cdot(2p-1)\cdot \ldots \cdot 1}{((2p)\cdot(2(p-1))\cdot \ldots \cdot 2)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \\
W_{2p} &= \frac{(2p-1)\cdot(2p-3)\cdot \ldots \cdot 1}{(2p)\cdot(2p-2)\cdot \ldots \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

et on retrouve donc bien le résultat de la section **8.6**.

Exercice 379 (③) par Antonin (Linéarisation et primitives de fonctions trigonométriques).

a) Montrer que, si $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, la fonction

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto \cos(x)^m \sin(x)^n$$

est combinaison linéaire de fonctions de la forme

$$u_p : x \in \mathbb{R} \longmapsto \cos(x)^p \text{ et } v_p : x \in \mathbb{R} \longmapsto \cos(x)^p \sin(x),\ \text{avec } p \in \mathbb{N}.$$

b) Expliquer comment calculer les primitives de u_p et v_p sur $\mathbb{R}$.

c) Application numérique : déterminer les primitives de

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto \cos(x)^3 \sin(x)^5 \quad \text{et de} \quad x \in \mathbb{R} \longmapsto \cos(x)^3 \sin(x)^4.$$

a) il nous suffit de remplacer $\sin^2(x)$ par $1-\cos^2(x)$.
Ainsi, si n est pair on a alors

$$\cos(x)^m \sin(x)^n = \cos^m(x)(1-\cos^2)^{\frac{n}{2}}$$

et, si n est impair on a

$$\cos(x)^m \sin(x)^n = \cos^m(x)(1-\cos^2)^{\frac{n-1}{2}} \sin(x)$$

Dans Tous les cas on a bien une combinaison linéaire de la forme

$$u_p : x \in \mathbb{R} \longmapsto \cos(x)^p \text{ et } v_p : x \in \mathbb{R} \longmapsto \cos(x)^p \sin(x),\ \text{avec } p \in \mathbb{N}.$$

b) Pour le calcul de primitive de u_p rendez-vous à l'exercice 377.
Pour v_p, remarquons que $\cos'(x) = -sin(x)$, on a alors

$$\int \cos^p(x)\sin(x)dx = -\frac{\cos^{p+1}(x)}{p+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

c)

$$\begin{aligned}\cos(x)^3 \sin(x)^5 &= \cos(x)^3(1-\cos^2(x))^2 \sin(x)\\ &= (\cos^7(x) - 2\cos^5(x) + \cos^3(x))\sin(x)\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int \cos(x)^3 \sin(x)^5 dx &= \int (\cos^7(x) - 2\cos^5(x) + \cos^3(x))\sin(x)dx\\ &= -\frac{cos^8(x)}{8} + \frac{cos^6(x)}{3} - \frac{cos^4(x)}{4} + C, \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}\cos(x)^3 \sin(x)^4 &= \cos(x)^3(1-\cos^2(x))^2\\ &= \cos^7(x) - 2\cos^5(x) + \cos^3(x)\end{aligned}$$

la linéarisation est laissé au lecteur

$$= \frac{\cos(7x) - cos(5x) - 3cos(3x) + 3cos(x)}{64}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int \cos(x)^3 \sin(x)^4 dx &= \int (\cos^7(x) - 2\cos^5(x) + \cos^3(x))dx\\ &= \int \frac{\cos(7x) - cos(5x) - 3cos(3x) + 3cos(x)}{64}dx\\ &= \frac{3\sin(x)}{64} - \frac{1}{64}\sin(3x) - \frac{1}{320}\sin(5x) + \frac{1}{448}\sin(7x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Exercice 380 (④) par Antonin (Formule de Leibniz *).

Soient f et g deux fonctions n fois dérivables sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$. Montrer que la dérivée n-ièmes du produit fg est donnée par la formule de Leibniz :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

Démontrons ce résultat par récurrence.
Initiatilisation.

$$(fg)^{(1)} = f'g + fg'$$

Hérédité. Supposons la formule démontrée pour les fonctions dérivable n fois (noté D^n).
Soient f, g D^{n+1}, elles sont D^n.
Par hypothèse de récurrence :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}\right]' \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(n-k)} g^{(k)}\right)' \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k+1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n+1-k)} g^{(k)}
\end{aligned}$$

On pose l=k+1

$$\begin{aligned}
&= \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n}{l-1} f^{(n+1-l)} g^{(l)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n+1-k)} g^{(k)} \\
&= fg^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]}_{\binom{n+1}{k}} f^{(n-k+1)} g^{(k)} + f^{(n+1)} g
\end{aligned}$$

La formule voulu

10.8 Complément : technique de l'arc moitié

Exercice 381 (②) par Antonin D

Soient α et β deux réels, $Z = e^{i\alpha} + e^{i\beta}$.

a) en factorisant par$e^{i\alpha}$ dans Z, trouver le module de Z et, si Z est non nul, un argument de Z

b) Retrouver les formules donnant $\cos(\alpha) + \cos(\beta)$ et $\sin(\alpha) + \sin(\beta)$.

a)

$$\begin{aligned}
|Z| &= \left|e^{i\alpha} + e^{i\beta}\right| \\
&= \left|1 + e^{i(\beta-\alpha)}\right| \left|e^{i\alpha}\right| \\
&= \left|2cos(\frac{\beta-\alpha}{2})e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}}\right| \left|e^{i\alpha}\right| \\
&= \left|2cos(\frac{\beta-\alpha}{2})e^{i\frac{\beta+\alpha}{2}}\right| \\
&= \left|2cos(\frac{\beta-\alpha}{2})\right|
\end{aligned}$$

Si $|Z| \neq 0$:

$$\begin{aligned}
arg(Z) &= arg(e^{i\alpha} + e^{i\beta}) \\
&= arg((1 + e^{i(\beta-\alpha)})e^{i\alpha}) \\
&= arg((2cos(\frac{\beta-\alpha}{2})e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}})e^{i\alpha}) \\
&= arg(2cos(\frac{\beta-\alpha}{2})e^{i\frac{\beta+\alpha}{2}}) \\
&= \frac{\beta+\alpha}{2}[2\pi]
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha) + \cos(\beta) + i(\sin(\alpha) + \sin(\beta)) &= e^{i\alpha} + e^{i\beta} \\
&= 2\cos(\frac{\beta-\alpha}{2})e^{i\frac{\beta+\alpha}{2}} \\
&= 2\cos(\frac{\beta-\alpha}{2})\cos(\frac{\beta+\alpha}{2}) + 2i\cos(\frac{\beta-\alpha}{2})\sin(\frac{\beta+\alpha}{2})
\end{aligned}$$

On identifie partie réelle et partie imaginaire. Ce qui nous donne :

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos(\frac{\beta-\alpha}{2})\cos(\frac{\beta+\alpha}{2})$$

et

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\cos(\frac{\beta-\alpha}{2})\sin(\frac{\beta+\alpha}{2}).$$

Exercice 382 (③) par Antonin D

Soient n dans $\mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$.En appliquant la formule du binôme à $(1 + e^{ix})^n$ et en utilisant la technique de l'arc moitié, établir les formules

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} cos(kx) = 2^n (cos(x/2))^n cos(nx/2), \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} sin(kx) = 2^n (cos(x/2))^n sin(nx/2)$$

$$
\begin{aligned}
(1+e^{ix})^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ikx} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(cos(kx)+isin(x)) \\
&= \underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}cos(kx)}_{\text{partie réelle}}+i\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}sin(x)}_{\text{partie imaginaire}} \\
(1+e^{ix})^n &= (e^{i\frac{x}{2}}(e^{-i\frac{x}{2}}+e^{i\frac{x}{2}}))^n \\
&= e^{i\frac{nx}{2}}(2cos(\frac{x}{2})^n \\
&= (cos(\frac{nx}{2})+isin(\frac{nx}{2}))(2cos(\frac{x}{2}))^n \\
&= \underbrace{2^n cos(\frac{nx}{2})cos(\frac{x}{2})^n}_{\text{partie réelle}}+\underbrace{i2^n sin(\frac{nx}{2})cos(\frac{x}{2})^n}_{\text{partie imaginaire}}
\end{aligned}
$$

On en déduit alors que

$$
\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}cos(kx) = 2^n(cos(x/2))^n cos(nx/2)
$$
$$
\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}sin(kx) = 2^n(cos(x/2))^n sin(nx/2).
$$

Exercice 383 (③) par Antonin D

Pour x dans $\mathbb{R}$, donner une expression simple de $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k e^{ikx}$. En déduire des expressions simples de

$$
\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k cos(kx), \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k sin(kx)
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k e^{ikx} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k(cos(kx)+isin(x)) \\
&= \underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k cos(kx)}_{\text{partie réelle}}+i\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k sin(x)}_{\text{partie imaginaire}} \\
\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k e^{ikx} &= (e^{ix}-1)^n \\
&= (e^{i\frac{x}{2}}(e^{i\frac{x}{2}}-e^{-i\frac{x}{2}}))^n \\
&= e^{i\frac{nx}{2}}(2isin(\frac{x}{2}))^n \\
&= (cos(\frac{nx}{2})+isin(\frac{nx}{2}))(2isin(\frac{x}{2}))^n \\
&= (2i)^n cos(\frac{nx}{2})cos(\frac{x}{2})^n+i(2i)^n sin(\frac{nx}{2})cos(\frac{x}{2})^n
\end{aligned}
$$

Si n est paire :

$$
\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k cos(kx) = (2i)^n cos(\frac{nx}{2})cos(\frac{x}{2})^n, \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k sin(kx) = (2i)^n sin(\frac{nx}{2})cos(\frac{x}{2})^n
$$

Si n est impaire :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k cos(kx) = (2i)^n sin(\frac{nx}{2})cos(\frac{x}{2})^n, \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k sin(kx) = (2i)^n cos(\frac{nx}{2})cos(\frac{x}{2})^n$$

EXERCICE 384 (③) Par Lancelot

Soit f l'application de $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\forall z \in \mathbb{U}, \quad f(z) = \frac{1}{1-z}.$$

On fixe $z \in \mathbb{U}\backslash\{1\}$, ainsi il existe $\theta \in]0;\pi/2[$ permettant d'écrire $z = e^{i\theta}$. On utilise alors l'arc moitié :

$$f(z) = f(e^{i\theta}) = \frac{1}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{i\theta/2}}{e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}},$$

c'est à dire :

$$\frac{\cos(\theta/2) + i\sin(\theta)}{-2i\sin(\theta/2)} = \frac{i}{2}\cot(\theta/2) + \frac{1}{2}.$$

Or,

- la fonction $\theta \in]0;\pi/2[\mapsto \theta/2$ est une bijection de $]0;\pi/2[$ dans $]0;\pi[$,
- la fonction cot est une bijection de $]0;\pi[$ dans $\mathbb{R}$,
- et la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{x}{2}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit finalement que la fonction $\theta \in]0;\pi/2[\mapsto \frac{i}{2}\cot(\theta/2)$ est une bijection de $]0;\pi/2[$ dans $i\mathbb{R}$ par composition des bijections. On en déduit que :

$$f(\mathbb{U}) = i\mathbb{R} + \frac{1}{2} := \{ix + \frac{1}{2} : \ x \in \mathbb{R}\}.$$

10.9 Complément : calcul de sommes trigonométriques

EXERCICE 385 (③) Par Lancelot

Soient $x \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(x) \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}$. Simplifier les sommes :

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)} \quad \text{et} \quad V_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(kx)}{\cos^k(x)}.$$

A l'aide de la formule de De Moivre, on écrit :

$$U_n(x) + iV_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{e^i x}{\cos(x)}\right)^k,$$

qui est une progression géométrique. On connait alors sa valeur :

$$\begin{aligned}
\frac{1 - \left(\frac{e^{ix}}{\cos(x)}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{e^{ix}}{\cos(x)}\right)} &= \frac{\cos^{n+1}(x) - e^{i(n+1)x}}{\cos^{n+1}(x) - \cos^n(x)e^{ix}} \\
&= \frac{1}{\cos^n(x)} \frac{\cos^{n+1}(x) - \cos((n+1)x) - i\sin((n+1)x)}{-i\sin(x)} \\
&= \frac{\sin((n+1)x)}{\cos^n(x)\sin(x)} + i\frac{\cos^{n+1}(x) - \cos((n+1)x)}{\cos^n(x)\sin(x)}.
\end{aligned}$$

On conclut en identifiant parties réelles et imaginaires.

Exercice 386 (④) Par Lancelot

Si $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, donner une expression simple de

$$\sum_{k=0}^{n} C_k(x).$$

Remarquons que, pour tout réels x et y :

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y)),$$

ce résultat se laisse démontrer par l'utilisation des formules de duplications. Ainsi, pour x un réel tel que $x \not\equiv 0 \mod 2\pi$ (on traitera ce cas à la fin car beaucoup plus simple) et k un entier naturel :

$$C_k(x) = \cos\left(\frac{kx}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{k+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{2k+1}{2}x\right)\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{2k+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Par conséquent :

$$\sum_{k=0}^{n} C_k(x) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{2k+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = \frac{n+1}{2} + \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\sum_{k=0}^{n}\sin\left(\frac{2k+1}{2}x\right).$$

Posons :

$$S_n(x) := \sum_{k=0}^{n}\cos\left(\frac{2k+1}{2}x\right) \quad \text{et} \quad T_n(x) := \sum_{k=0}^{n}\sin\left(\frac{2k+1}{2}x\right),$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} S_n + iH_n &= \sum_{k=0}^{n}\left(\cos\left(\frac{2k+1}{2}x\right) + i\sin\left(\frac{2k+1}{2}x\right)\right) \\ &= e^{\frac{ix}{2}}\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = e^{\frac{ix}{2}}\frac{1-e^{(n+1)x}}{1-e^{ix}}, \end{aligned}$$

et en utilisant l'arc moitié on obtient que :

$$\begin{aligned} e^{\frac{x}{2}}\frac{1-e^{i(n+1)nx}}{1-e^{ix}} &= e^{\frac{x}{2}}\frac{e^{\frac{(n+1)x}{2}}(e^{-\frac{(n+1)x}{2}} - e^{\frac{(n+1)x}{2}})}{e^{\frac{x}{2}}(e^{-\frac{x}{2}} - e^{\frac{x}{2}})} \\ &= \frac{\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + i\frac{\sin^2\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}, \end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on déduit que :

$$S_n(x) = \frac{\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \text{et} \quad T_n(x) = \frac{\sin^2\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Donc finalement :

$$\sum_{k=0}^{n} C_k(x) = \frac{n+1}{2} + \frac{T_n(x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{n+1}{2} + \frac{\sin^2\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Si $x \equiv 0 \mod 2\pi$, alors $C_k(x) = k+1$ et donc :

$$\sum_{k=0}^{n} C_k(x) = \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Exercice 387 (④) Par Lancelot

Soient x un nombre réel, n un élément de $\mathbb{N}^*$. Simplifier la somme

$$K_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right)$$

et montrer que

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) K_n(x) \geq 0$$

On suppose que $x \not\equiv 0 \mod 2\pi$ car il n'y a rien à simplifier ni montrer dans ce cas. Posons :

$$H_n(x) := \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right),$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} H_n(x) + iK_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2k+1}{2}x} &= e^{\frac{x}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ikx} \\ &= e^{\frac{x}{2}} \frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}. \end{aligned}$$

En utilisant l'arc moitié on obtient que :

$$e^{\frac{x}{2}} \frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} = e^{\frac{x}{2}} \frac{e^{\frac{nx}{2}}(e^{-\frac{nx}{2}} - e^{\frac{nx}{2}})}{e^{\frac{x}{2}}(e^{-\frac{x}{2}} - e^{\frac{x}{2}})} = \frac{\cos\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + i\frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)},$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on déduit que :

$$H_n(x) = \frac{\cos\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \text{et} \quad K_n(x) = \frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

De surcroît, il vient que :

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) K_n(x) = \sin^2\left(\frac{nx}{2}\right) \geq 0.$$

ce qu'il fallait montrer.

10.10 Racines n-ièmes de l'unité, racines n-ièmes d'un nombre complexe

Exercice 388 (①) Par Lancelot Écrire sous forme algébrique les racines sixième de 1, puis les racines huitièmes de 1.

On commence par les racines sixièmes. On rappelle que :

$$\mathbb{U}_6 = \{e^{\frac{2ik\pi}{6}} : k \in [\![0;5]\!]\} = \left\{\cos\left(\frac{2ik\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{2ik\pi}{6}\right) : k \in [\![0;5]\!]\right\},$$

on fait alors le calcul à la main pour aboutir à :

$$\mathbb{U}_6 = \left\{1;\ \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};\ -1;\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

De même pour les racines huitièmes. On rappelle que :

$$\mathbb{U}_8 = \{e^{\frac{2ik\pi}{8}} : k \in [\![0;7]\!]\} = \left\{\cos\left(\frac{2ik\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{2ik\pi}{8}\right) : k \in [\![0;7]\!]\right\},$$

on fait alors le calcul à la main pour aboutir à :

$$\mathbb{U}_8 = \left\{1;\ \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2};\ i;\ -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2};\ -1;\ -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2};\ -i;\ \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$$

Exercice 389 (②) par Antonin D

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme des éléments de $\mathbb{U}_n$

Pour $n \neq 1$
on pose $z = e^{\frac{2i\pi}{n}}$

$$\sum_{x \in \mathbb{U}_n} x = \sum_{k=1}^{n} z^k = \frac{z^n - 1}{z - 1} = 0$$

Pour $n = 1$

$$\sum_{x \in \mathbb{U}_1} x = 1$$

Exercice 390 (③) par Antonin D

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme des puissances p-ièmes des éléments de $\mathbb{U}_n$

Pour $n \neq 1$ et $n \nmid p$
on pose $z = e^{\frac{2i\pi}{n}}$

$$\sum_{x \in \mathbb{U}_n} xp = \sum_{k=1}^{n} z^{pk} = \frac{z^{pn} - 1}{z^p - 1} = 0$$

Pour $n = 1$

$$\sum_{x \in \mathbb{U}_1} x = 1$$

Pour $n|p$

$$\underbrace{\sum_{x \in \mathbb{U}_n} x^p}_{\text{somme de 1}} = n$$

Exercice 391 (⑤) par Octave

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $(z_0, \ldots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, on pose

$$\forall k \in \{0, \ldots, n-1\}, \qquad Z_k = \sum_{j=0}^{n-1} z_j \exp\left(-\frac{2ijk\pi}{n}\right).$$

Démontrer les formules suivantes qui expriment $(z_0, \ldots, z_{n-1})$ en fonction de $(Z_0, \ldots, Z_{n-1})$:

$$\forall p \in \{0, \ldots, n-1\}, \qquad z_p = \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} Z_\ell \exp\left(\frac{2i\ell p\pi}{n}\right).$$

$$\forall \ell \in \{0, \ldots, n-1\}, \qquad Z_\ell = \sum_{j=0}^{n-1} z_j \exp\left(-\frac{2ij\ell\pi}{n}\right).$$

$$\implies Z_\ell \exp\left(\frac{2i\ell p\pi}{n}\right) = \sum_{j=0}^{n-1} z_j \exp\left(\frac{2i\ell\pi}{n}(p-j)\right).$$
$$\implies \frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1} Z_\ell \exp\left(\frac{2i\ell p\pi}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} z_j \exp\left(\frac{2i\ell\pi}{n}(p-j)\right).$$
$$\implies \frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1} Z_\ell \exp\left(\frac{2i\ell p\pi}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1} z_j \exp\left(\frac{2i\ell\pi}{n}(p-j)\right).$$
$$\implies \frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1} Z_\ell \exp\left(\frac{2i\ell p\pi}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{j=0}^{p-1}\sum_{\ell=0}^{n-1} z_j \exp\left(\frac{2i\ell\pi(p-j)}{n}\right) + \sum_{l=0}^{n-1} z_p + \sum_{j=p+1}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1} z_j \exp\left(\frac{2i\ell\pi(p-j)}{n}\right)\right).$$

Or, puisque n ne divise pas $p-j$, $n \neq 0$ et que donc le dénominateur est non nul :

$$z_j \sum_{\ell=0}^{n-1} \exp\left(\frac{2i\ell\pi(p-j)}{n}\right) = z_j \frac{\exp\left(2i\pi(p-j)\right) - 1}{\exp\left(\frac{2i\pi(p-j)}{n}\right) - 1} = 0.$$

Donc
$$\frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1} Z_\ell \exp\left(\frac{2i\ell p\pi}{n}\right) = \frac{1}{n}(0 + nz_p + 0).$$

Soit
$$\frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1} Z_\ell \exp\left(\frac{2i\ell p\pi}{n}\right) = z_p.$$

Exercice 392 (③) par Ylan

Montrer pour x réel et n entier ≥ 2 :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(x + \frac{2k\pi}{n}\right) = 0$$

Nous avons :
$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(x + \frac{2k\pi}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Re}\left(\exp\left(i\left(x + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{ix + i\frac{2k\pi}{n}}\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(e^{ix}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(e^{ix}\frac{1-\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^n}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}}\right) \quad \text{car } e^{i\frac{2\pi}{n}} \neq 1, \text{ puisque } n \geq 2. \\
&= \operatorname{Re}\left(e^{ix}\frac{1-1}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}}\right) \quad \text{car } e^{2i\pi} = 1 \\
&= \operatorname{Re}\left(e^{ix} \times 0\right) = \operatorname{Re}(0) = 0
\end{aligned}$$

Exercice 393 (①) par Antonin D

Calculer le produit des éléments de $\mathbb{U}_n$

$$\prod_{z\in\mathbb{U}_n} z = \prod_{k=1}^{n} \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} k\right) = e^{(n+1)i\pi} = (-1)^{n+1}$$

Exercice 394 (③) par Wéline

Soit n un entier ≥ 3. On note P_n et A_n le périmètre et l'aire du polygone (régulier) dont les sommets sont les racines n-ièmes de 1. Donner une expression simple de P_n et de A_n. Déterminer les limites des suites $(P_n)_{n\geq 3}$ et $(A_n)_{n\geq 3}$.

L'air d'un polygone est égale à la somme de la longueur de tous ses côtés. Comme ce polygone est régulier tous ses côtés font la même longueur donc commençons par trouver la longueur d'un des côtés.
Comme les sommets sont les racines n-ièmes de l'unité. On sait que l'abscisse de ses sommets vont être de la forme :

$$\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}, \quad k \in \{0, ..., n-1\}$$

Les côtés du polygone vont être formé par deux racines successives et comme $n \geq 3$, on sait que les racines pour $k = 0$ et $k = 1$ existe toujours. Notons c la longueur d'un des côtés du polygone.

$$\begin{aligned}
c &= |\mathrm{e}^{i\frac{2\times 1\pi}{n}} - \mathrm{e}^{i\frac{2\times 0\pi}{n}}| \\
&= |\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}} - \mathrm{e}^{0}| \\
&= |\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}} - 1| \\
&= \sqrt{\left(\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) - 1\right)^2 + \sin^2\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \\
&= \sqrt{\cos^2\left(\frac{2\pi}{n}\right) - 2\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + 1^2 + 1 - \cos^2\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \\
&= \sqrt{2\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)} \\
&= \sqrt{2} \times \sqrt{1 - \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)}
\end{aligned}$$

Le polygone a n racines donc n côtés, ce qui nous permet de déduire la forme $(P_n)_{n\geq 3}$.

$$\begin{aligned}
P_n &= n \times c \\
&= n \times \sqrt{2} \times \sqrt{1 - \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \\
&= n \times \sqrt{2} \times \sqrt{1 - \left(2\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right) - 1\right)} \\
&= n \times \sqrt{2} \times \sqrt{2 - 2\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)} \\
&= n \times \sqrt{2} \times \sqrt{2\left(1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)} \\
&= n \times \sqrt{2} \times \sqrt{2\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)} \\
&= n \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \\
&= n \times 2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)
\end{aligned}$$

On va chercher la limite de $2n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ quand n tend vers plus l'infinie.

$$\begin{aligned}2n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) &= 2\frac{\pi}{\pi}\times n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\\ &= 2\pi\times\frac{n}{\pi}\times\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\\ &= 2\pi\times\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}}\end{aligned}$$

On pose $x=\frac{\pi}{n}$.

$$n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)=2\pi\times\frac{\sin x}{x}$$

On sait que :

$$\lim_{n\to+\infty}x=0$$

Nous pouvons maintenant déterminer la limite grâce au taux d'accroissement, en effet : Donc :

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{x} &= \frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0}\\ \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} &= \lim_{x\to0}\frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0}\\ \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} &= \cos(0)\\ \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} &= 1\end{aligned}$$

Grâce à cela on peut trouver la limite de P_n.

$$\lim_{n\to+\infty}P_n=\lim_{x\to0}2\pi\times\frac{\sin x}{x}=2\pi$$

On peut calculer la formule de l'aire d'un polygone régulier, on peut utiliser la formule qui multiplie le nombre de côté par la mesure d'un côté et par l'apothème et qui divise le tout par deux. On connaît déjà le nombre de côté n et la mesure d'un côté qui est c. Calculons l'apothème. L'apothème est la distance entre le milieu d'un des côtés du polygone et du centre. Grâce au plan complexe, on sait que le centre de la figure a l'affixe 0 et le milieu du côté dont nous avons calculer la longueur tout à l'heure à pour affixe : $\frac{e^{i\frac{\pi}{n}}+1}{2}$. Notons a l'apothème.

$$\begin{aligned}a &= \left|\frac{e^{i\frac{\pi}{n}}+1}{2}\right|\\ &= \left|\frac{\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)+1}{2}\right|\\ &= \sqrt{\left(\frac{\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)+1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{2}\right)^2}\\ &= \sqrt{\frac{\cos^2\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{4}+\frac{\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{\cos^2\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{4}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\times\sqrt{\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)+1}\end{aligned}$$

On peut donc déduire la formule de l'aire du polygone et trouver la suite $(A_n)_{n\geq 3}$.

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{c \times n \times a}{2} \\
&= \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{1-\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \times n \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)+1}}{2} \\
&= \frac{n \times \sqrt{\left(1-\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right) \times \left(\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)+1\right)}}{2} \\
&= \frac{n \times \sqrt{1-\cos^2\left(\frac{2\pi}{n}\right)}}{2} \\
&= \frac{n \times \sqrt{\sin^2\left(\frac{2\pi}{n}\right)}}{2} \\
&= \frac{n \times \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{2} \\
&= \frac{n \times 2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2} \\
&= n \times \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \\
&= \pi\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \times \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}}
\end{aligned}$$

On remplaçant $\frac{\pi}{n}$ par x comme dans la formule précédente, on obtient :

$$A_n = \pi\cos(x) \times \frac{\sin(x)}{x}$$

Ce qui nous permet de trouver la limite de A_n.

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \lim_{x\to 0} \pi\cos(x) \times \frac{\sin(x)}{x} = \pi$$

EXERCICE 395 (④) par Martin

Soit $m \leq 2$ un entier.

a) Donner une expression simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} e^{\frac{ik\pi}{m}}$.

b) On note $A_0, ..., A_{2m-1}$ les sommets successifs (selon le sens trigonométrique) d'un polygone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1. Donner une expression simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{m-1} A_kA_{2m-k}$.

Soit $m \geq 2$ un entier.

a) $$\sum_{k=1}^{m} e^{\frac{ik\pi}{m}} = \sum_{k=1}^{m} (e^{\frac{i\pi}{m}})^k = \frac{1-\exp(\frac{i(m+1)\pi}{m})}{1-\exp(\frac{i\pi}{m})} - 1 = \frac{1+\exp(\frac{i\pi}{m})}{1-\exp(\frac{i\pi}{m})} - 1$$

D'où, en utilisant la technique de l'arc moitié,

$$\sum_{k=1}^{m} e^{\frac{ik\pi}{m}} = \frac{\exp(\frac{i\pi}{2m})(\exp(\frac{-i\pi}{2m}) + \exp(\frac{i\pi}{2m}))}{\exp(\frac{i\pi}{2m})(\exp(\frac{-i\pi}{2m}) - \exp(\frac{i\pi}{2m}))} - 1 = -\frac{2\cos(\frac{\pi}{2m})}{2i\sin(\frac{\pi}{2m})} - 1 = -1 + i\cot(\frac{\pi}{2m})$$

b) On considère ici un polygone régulier de $2m$ sommets inscrit dans un cercle de rayon 1. On s'intéresse donc aux racines $2m$-ièmes de l'unité puisque les distances entre les sommets du polygone sont conservées lors d'une rotation. Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{m-1} A_kA_{2m-k} = \sum_{k=1}^{m-1} |e^{\frac{2ik\pi}{2m}} - e^{\frac{2i(2m-k)\pi}{2m}}| = \sum_{k=1}^{m-1} |e^{\frac{ik\pi}{m}} - e^{\frac{-ik\pi}{m}}| = \sum_{k=1}^{m-1} |2i\sin(\frac{k\pi}{m})|$$

Or, pour tout entier m supérieur à 2 et pour tout k dans $\{1, ..., m-1\}$, $0 < \frac{k\pi}{m} < \pi$ donc $\sin(\frac{k\pi}{m}) > 0$. Par conséquent, on peut établir que :

$$\sum_{k=1}^{m-1} A_k A_{2m-k} = 2 \sum_{k=1}^{m-1} \sin(\frac{k\pi}{m})$$

On peut alors utiliser (a) puisque $\displaystyle\sum_{k=1}^{m-1} \sin(\frac{k\pi}{m}) = \mathfrak{Im}(\sum_{k=1}^{m} e^{\frac{ik\pi}{m}} - e^{\frac{im\pi}{m}}) = \cot(\frac{\pi}{2m})$

Ainsi donc,

$$\sum_{k=1}^{m-1} A_k A_{2m-k} = 2\cot(\frac{\pi}{2m})$$

EXERCICE 396 (⑤) par Daniel

On se propose de déterminer les rationnels r tels que $\cos(\pi r)$ soit un nombre rationnel. on considère un tel rationnel r. On écrit :

$$2\cos(\pi r) = \frac{a}{b}.$$

où a est dans $\mathbb{Z}$, b dans $\mathbb{N}^*$ et où la fraction a/b est irréductible. Pour k dans $\mathbb{N}$, on pose :

$$u_k = 2\cos(2^k \pi r).$$

a) Pour k dans $\mathbb{N}$, exprimer u_{k+1} en fonction de u_k.
b) Montrer que, pour tout $k$ans $\mathbb{N}$ u_k est rationnel. Si on écrit $u_k = a_k/b_k$ où $a_k$est dans $\mathbb{Z}$, b_k dans $\mathbb{N}^*$, la fraction a_k/b_k irréductible , exprimer b_{k+1} en fonction de b_k.
c) On écrit $r = p/q$ avec p dans $\mathbb{Z}$, q dans $\mathbb{N}^*$. En remarquant que, pour k dans $\mathbb{N}$, $\exp(i2^k\pi r)$ est une racine $2q$-ième de 1, montrer que l'ensemble

$$\{u_k, k \in \mathbb{N}\}$$

est fini. En déduire que l'on peut choisir k_0 dans $\mathbb{N}^*$ tel que b_{k_0} est maximal.
d) En utilisant $k_0 + 1$, montrer que b_{k_0} vaut 1 puis que $2\cos(2^k\pi r)$ est entier. Conclure.

a) On a
$$u_{k+1} = 2\cos(2 \times 2^k \pi r) = 4\cos^2(2^k \pi r) - 2 = u_k^2 - 2 \qquad (1).$$

b) u_0 est rationnel par définition. Et d'après l'expression (1), u_k est rationnel, ce qui implique que u_{k+1} est rationnel car $u_{k+1} = u_k^2 - 2$. Par récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_k \in \mathbb{Q}$.
Si $u_k = \dfrac{a_k}{b_k}$, alors $u_{k+1} = \dfrac{a_k^2 - 2b_k^2}{b_k^2}$ d'après (1).
Montrons que $\dfrac{a_k^2 - 2b_k^2}{b_k^2}$ est une fraction irréductible.
D'après le théorème de Bézout :

$$\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2, \quad ua_k + vb_k = 1.$$

Donc
$$u^3a_k^3 + 3u^2a_k^2vb_k + 3ua_kv^2b_k^2 + v^3b_k^3 = 1.$$

En factorisant, on obtient

$$(u^3a_k + 3u^2vb_k)a_k^2 + (3ua_kv^2 + v^3b_k)b_k^2 = 1.$$

$$(u^3a_k + 3u^2vb_k)(a_k^2 - 2b_k^2) + (3ua_kv^2 + v^3b_k + 2u^3a_k + 6u^2vb_k)b_k^2 = 1$$

Soit
$$\gcd(a_k^2 - 2b_k^2; b_k^2) = 1$$

Ce qui permet de conclure que $b_{k+1} = b_k^2$.

c) On remarque que :

$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N}, u_k &= 2\Re(\exp(i2^k\pi r)) \\ &= 2\Re\left(\exp\left(i2^k\pi\frac{p}{q}\right)\right) \\ &= 2\Re\left(\exp\left(i2^k 2\pi\frac{p}{2q}\right)\right).\end{aligned}$$

Comme remarqué dans l'énoncé , $\exp\left(i2^k \times 2\pi\dfrac{p}{2q}\right) \in U_{2q}$.
Or $Card(U_{2q}) = 2q$, donc $Card(\{u_k,\, k \in \mathbb{N}\}) \leq 2q$.
Donc $\{u_k,\, k \in \mathbb{N}\}$ est fini, ce qui veut dire que $\{b_k,\, k \in \mathbb{N}^*\}$ l'est également. Donc cet ensemble admet un plus grand élément b_{k_0} avec $k_0 \in \mathbb{N}^*$.

d) Supposons $b_{k_0} > 1$. Or $b_{k_{0+1}} = {b_k}^2$. Donc $b_{k_{0+1}} > b_{k_0}$, ce qui entre en contradiction avec le résultat précédent. Donc

$$b_{k_0} = 1.$$

Or $\forall k \in \mathbb{N}, \quad b_{k-1} = \sqrt{b_k}$. Ce qui implique que $b_0 = 1$ et que donc $u_0 = a_k$.
Ainsi, $2\cos(\pi r)$ est un entier. Les rationnels r tels que $\cos(\pi r)$ soit rationnel sont tels que $2\cos(\pi r)$ soit un entier. Donc

$$\cos(\pi r) \in \{-1; -\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 1\}.$$

On en conclut que

$$r \in \{k + \alpha, \quad k \in \mathbb{Z},\ \alpha \in \{0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\}\}.$$

Exercice 397 (④) par Samy Clementz

Soient m et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$. À quelle condition a-t-on l'inclusion $\mathbb{U}_m \subset \mathbb{U}_n$?

Montrons

$$\mathbb{U}_m \subset \mathbb{U}_n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*, n = km.$$

$\Leftarrow$ Soit $z \in \mathbb{U}_m$. Alors

$$\begin{aligned}z^n &= z^{mk} \\ &= (z^m)^k \\ &= 1^k \\ &= 1.\end{aligned}$$

Donc $z \in \mathbb{U}_n$.

$\Rightarrow$ Posons $\omega = e^{\frac{2i\pi}{m}}$. Comme $\omega^n = 1$, on a

$$e^{2i\pi\frac{n}{m}} = 1.$$

ce qui implique $\frac{n}{m} \in \mathbb{Z}$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = km$. Comme n, m sont des entiers strictement positifs, k est aussi strictement positif.

Exercice 398 (③) par Matei .Calcul de $\cos(\frac{2\pi}{5})$. Soient $z = exp(\frac{2i\pi}{5}), x = 2\cos(\frac{2\pi}{5})$

a) Montrer que $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$.
b) Vérifier l'égalité $x = z + \frac{1}{z}$
c) Exprimer x^2 en fonction de z. En utilisant a), trouver alors une équation du second degré-vérifiée par x. En déduire une expression simple du nombre $\cos(\frac{2\pi}{5})$.
d) Calculer $\sin(\frac{2\pi}{5})$.

a) On reconnaît la somme des 5 premiers termes de la suite géométrique de raison z et de premier terme $z^0 = 1$.
Ainsi, $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 1 \times \frac{1-z^5}{1-z}$(z est bien différent de 1).
En remplaçant z par sa valeur, on obtient :

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = \frac{1 - (e^{i\frac{2\pi}{5}})^5}{1 - e^{i\frac{2\pi}{5}}} = \frac{1 - e^{i2\pi}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{5}}}$$

Or, $e^{i2\pi} = e^{i0} = 1$.
Donc, on a 0 au numérateur, on a bien prouvé que :

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$$

b) $z + \frac{1}{z} = e^{i\frac{2\pi}{5}} + \frac{1}{e^{i\frac{2\pi}{5}}} = e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{-i\frac{2\pi}{5}}$
On sait que $e^{i\alpha}$ est la notation d'un nombre complexe sous forme trigonométrique, et que $e^{-i\alpha}$ est le conjugué de ce nombre complexe.
Ainsi, $e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{-i\frac{2\pi}{5}} = \cos(\frac{2\pi}{5}) + i\sin(\frac{2\pi}{5}) + \cos(\frac{2\pi}{5}) - i\sin(\frac{2\pi}{5}) = 2\cos(\frac{2\pi}{5})$
On a vérifié l'égalité, $x = z + \frac{1}{z}$.

c) D'après la question précédente, $x = z + \frac{1}{z} \Leftrightarrow x^2 = (z + \frac{1}{z})^2$
Soit $x^2 = (\frac{z^2+1}{z})$
On développe : $x^2 = \frac{z^4+2z^2+1}{z^2}$
On va maintenant utiliser le résultat à la question a) : $1+z+z^2+z^3+z^4 = 0 \Leftrightarrow \frac{1+z+z^2+z^3+z^4}{z^2} = 0$ (on peut en effet diviser des deux côtés de l'égalité par un nombre différent de 0).
On peut ajouter et soustraire x^2 au membre de gauche : $x^2 + \frac{1+z+z^2+z^3+z^4}{z^2} - \frac{z^4+2z^2+1}{z^2} = 0$
Soit : $x^2 + \frac{z-z^2+z^3}{z^2} = 0$
$\Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{z} - 1 + z = 0$
On reconnaît à nouveau x : $x^2 + x - 1 = 0$.
On a une équation du second degré qui fait intervenir des puissances de $x = 2\cos(\frac{2\pi}{5})$ On résout l'équation du second degré : $\Delta = 1 + 4 = 5$
Cette équation possède donc deux racines : $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, et $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
$\frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$ donc $2\cos(\frac{2\pi}{5}) = x > 0$. Ainsi, seule x_2 convient.
On a donc $x = 2\cos(\frac{2\pi}{5}) = x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

d) $\cos^2(x) + sin^2(x) = 1$, donc $\sin(\frac{2\pi}{5}) = \sqrt{1 - (\frac{-1+\sqrt{5}}{4})^2} = \sqrt{1 - \frac{6-2\sqrt{5}}{16}}$

EXERCICE 399 (⑤) par Daniel

Pour $0 \leq k \leq 4$, soit A_k le point d'affixe $\exp\left(\frac{2ik\pi}{5}\right)$. Soit O le point d'affixe 0.

a) On note I le point d'affixe i, J le point d'affixe $-\frac{1}{2}$, $\mathcal{C}$ le cercle de centre J passant par I. Montrer que $\mathcal{C}$ coupe l'axe réel en deux points M et N, où l'abscisse M (resp. N) est strictement positive (resp. strictement négative).
b) Soit H le milieu de $[OM]$. Déterminer l'affixe de H.
c) Montrer que la perpendiculaire à l'axe réel passant par H coupe le cercle unité en les points A_1 et A_4.
d) En déduire une construction des points A_k, $1 \leq k \leq 4$, à la règle et au compas une fois connus O et A_0.

a) Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow |z - \left(-\frac{1}{2}\right)| = |-\frac{1}{2} - i| \Leftrightarrow |z + \frac{1}{2}| = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

On cherche z dans $\mathbb{R}$. L'équation devient :

$$z + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{ou} \quad z + \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Soit
$$z = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{-\sqrt{5}-1}{2}.$$

On a donc bien deux intersections au point M et N, d'affixes respectives $z_M = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et $z_N = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$.

b) L'affixe z_H de H vaut :
$$z_H = \frac{z_M}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

c) Les affixes z des intersections du cercle unité et de la perpendiculaire en H vérifient :
$$\begin{cases} \Re(z) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4} \\ |z| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (S)$$

Or, comme démontré à l'exercice précédent, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Donc
$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \arg(z) = \dfrac{2\pi}{5}[2\pi] \quad \text{ou} \quad \arg(z) = -\dfrac{2\pi}{5}[2\pi] \\ |z| = 1 \end{cases}$$

Il s'agit donc bien des affixes des points A_1 et A_4.

d) La construction se fait comme suit :
-Tracer la droite passant par O et A_0, puis le cercle de centre O passant par A_0. Placer le point K d'affixe -1 à la seconde intersection de la droite et du cercle.
-Tracer le cercle de centre O passant par K puis le cercle de centre K passant par O. Relier les deux intersections de ces cercles pour former la médiatrice du segment $[OK]$. Placer le point J à l'intersection de cette médiatrice et de $[OK]$.
-Selon cette même méthode, tracer la médiatrice de $[kA_0]$. Placer le point I à l'intersection supérieure de cette médiatrice et du cercle unité.
-Tracer le cercle de centre J passant par I. Placer le point M à l'intersection de ce cercle et de $[OA_0]$.
-Selon la méthode vue, tracer la médiatrice de $[OM]$. Placer les points A_1 et A_4 aux intersections avec le cercle unité, respectivement en haut et en bas de la figure.
-Tracer 2 cercles de centres respectifs A_1 et A_4 passant par A_0. Les intersections de ces cercles avec le cercle unité différente de A_0 seront respectivement A_2 et A_3.

Exercice 400 (④) par Matei
Soit $x = 2cos(\frac{2\pi}{7})$. En utilisant la méthode de l'exercice précédent, trouver des entiers relatifs a, b, c tels que $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

a) Expression de x en fonction d'un nombre complexe z.
On remarque tout d'abord que les nombres complexes $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$ et $z' = e^{-i\frac{2\pi}{7}}$ font intervenir $\cos(\frac{2\pi}{7})$ et qu'on peut exprimer x comme combinaison de ceux-ci.
En effet, $z = e^{i\frac{2\pi}{7}} = \cos(\frac{2\pi}{7}) + i\sin(\frac{2\pi}{7})$, et $z' = e^{-i\frac{2\pi}{7}} = \cos(\frac{2\pi}{7}) - i\sin(\frac{2\pi}{7})$. Ainsi,
$$z + z' = 2\cos(\frac{2\pi}{7}) = x$$

De plus, $z' = e^{-i\frac{2\pi}{7}} = \frac{1}{e^{i\frac{2\pi}{7}}} = \frac{1}{z}$
$$\Leftrightarrow x = z + \frac{1}{z}$$

Remarque. On va maintenant chercher une somme de puissances de z successives, telle qu'on puisse les remplacer de manière à trouver l'équation de type $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

b) Somme nulle de puissances successives de z.
On cherche maintenant un n entier tel que $z^0 + z^1 + z^2 + ... + z^n = 0$.
On reconnaît la somme des $n+1$ premiers termes de la suité géométrique de raison z et de premier terme 1.
Ainsi, $z^0 + z^1 + z^2 + ... + z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ (z est différent de 1)

$$
\begin{aligned}
z^0 + z^1 + z^2 + ... + z^n &= 0 \\
\Leftrightarrow \frac{1-z^{n+1}}{1-z} &= 0 \\
\Leftrightarrow 1 - z^{n+1} &= 0 \\
\Leftrightarrow z^{n+1} &= 1 = e^{i\alpha} \text{avec} \alpha \equiv 0 \mod 2\pi \\
\Leftrightarrow (e^{i\frac{2\pi}{7}})^{n+1} &= e^{i\alpha} \text{avec} \alpha \equiv 0 \mod 2\pi
\end{aligned}
$$

Et, $(e^{i\frac{2\pi}{7}})^{n+1} = e^{i\frac{2(n+1)\pi}{7}}$ De plus, si $n = 6$, on a $\frac{2(6+1)\pi}{7} = 2\pi$ Ainsi, si $n = 6$, on trouve le résultat voulu, à savoir :

$$1 + z^1 + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = 0$$

c) Subsitution de z par x :
On sait que $x = z + \frac{1}{z} = \frac{z^2+1}{z}$. De cette égalité on peut trouver les deux suivantes :

$$x^2 = \frac{z^4 + 2z^2 + 1}{z^2}$$

$$x^3 = \frac{z^6 + 3z^4 + z^2 + 1}{z^3}$$

on repart de l'égalité précédemment trouvée : $1 + z^1 + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = 0$, qui est équivalente à

$$\frac{1 + z^1 + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6}{z^3} = 0 (z^3 \text{est différent de } 0)$$

On peut ajouter et soustraire x^3 au membre de gauche :

$$x^3 + \frac{1 + z^1 + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6}{z^3} - \frac{z^6 + 3z^4 + z^2 + 1}{z^3} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 + \frac{z - 2z^2 + z^3 - 2z^4 + z^5}{z^3} = 0$$

On ajoute et soustrait ax^2 au membre de gauche :

$$x^3 + ax^2 + \frac{z - 2z^2 + z^3 - 2z^4 + z^5}{z^3} - \frac{az^4 + 2az^2 + a}{z^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 + ax^2 + \frac{1-a}{z^2} - \frac{2}{z} + (1-2a) - 2z + (1-a)z^2 = 0$$

On ajoute et soustrait bx au membre de gauche :

$$x^3 + ax^2 + bx + \frac{1-a}{z^2} - \frac{2}{z} + (1-2a) - 2z + (1-a)z^2 - bz - \frac{b}{z} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 + ax^2 + bx + \frac{1-a}{z^2} - \frac{2+b}{z} - 1 - (2+b)z + (1-a)z^2$$

On veut faire disparaître tous les termes qui contiennent des puissances de z. Or, si on prend $a = 1$ et $b = -2$, on obtient juste ce que l'on veut :

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$$

On a l'équation demandée. Si on résout cette équation, on pourra éventuellement trouver la valeur exacte de $\cos(\frac{2\pi}{7})$.

Exercice 401 (③)

Soit n un entier ≥ 2. Déterminer les complexes z tels que :

$$(z-i)^n = (z+i)^n.$$

On pourra noter qu'une solution de z de cette équation est nécessairement différente de i et réécrire l'équation sous la forme :

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1.$$

On remarque que si $z = i$, alors $0^n = 0 = (2i)^n$, ce qui est absurde. On peut donc faire

$$\begin{aligned}\frac{(z+i)^n}{(z-i)^n} &= \frac{(z-i)^n}{(z-i)^n} \\ \implies \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n &= 1.\end{aligned}$$

Car $z \neq 1$. On pose $Z = \dfrac{z+i}{z-i}$. Les solutions de $Z^n = 1$ appartiennent à l'ensemble $\mathbb{U}_n$, soit $Z = \exp\left(\dfrac{2k\pi i}{n}\right)$, où $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.
On cherche z, et on rappelle que $z \neq 1$.

$$Z = \frac{z+i}{z-i} \Leftrightarrow Z(z-i) = z+i \Leftrightarrow Zz - iZ - z - i = 0.$$

Soit

$$z(Z-1) = i(Z+1) \Leftrightarrow z = \frac{i(Z+1)}{Z-1} = -\frac{i(Z+1)}{1-Z} = -i\left(\frac{1+\exp\left(\frac{2k\pi i}{n}\right)}{-\exp\left(\frac{2k\pi i}{n}\right)+1}\right).$$

De plus, $Z \neq 0$ et $Z \neq 1$ car 0 et 1 ne sont pas solutions, donc on a $n \geq 2$ et $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.
En utilisant la formule de l'arc moitié mentionnée en 10.8, on obtient

$$-i\left(\frac{1+\exp\left(\frac{2k\pi i}{n}\right)}{-\exp\left(\frac{2k\pi i}{n}\right)+1}\right) = \left(\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\right).$$

En remarquant que $\cot = \dfrac{1}{\tan} = \dfrac{\cos}{\sin}$, on trouve

$$z = \cot\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad k \in \{1, \ldots, n-1\}.$$

Exercice 402 (②) par Matei
Si Z est un nombre complexe non nul, placer les racines carrées de Z dans le plan complexe.

Z étant un nombre complexe, on peut l'exprimer sous la forme suivante : $Z = re^{i\phi}$
On cherche les nombres d'affixe z tels que $z^2 = Z$
Comme z est aussi un nombre complexe, $z = r'e^{i\phi'}$, avec :
$\Leftrightarrow (r'e^{i\phi'})^2 = re^{i\phi}$
$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} r'^2 = r \\ 2\phi' \equiv \phi \mod 2\pi \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} r' = \sqrt{r} \\ \phi' = \frac{\phi}{2} \quad \text{ou} \quad \phi' = \frac{\phi}{2} + \pi \end{cases}$$

Ainsi, les racines carrées du point complexe Z sont les points d'intersection entre le cercle qui a pour centre l'origine du repère et pour rayon $\sqrt{r}$, et la droite qui passe par l'origine du repère et qui a pour coefficient directeur $k = \frac{\sin(\frac{\phi}{2})}{\cos(\frac{\phi}{2})} = \tan(\frac{\phi}{2})$.

> EXERCICE 403 (②) par Matei
> Exprimer les racines carrées de $2ie^{-i\pi/4}$ sous forme trigonométrique.

On commence par exprimer le nombre complexe sous forme exponentielle (un module + un argument). On peut tout d'abord réécrire i comme étant $e^{i\pi/2}$. On a donc une multiplication de nombres complexes sous forme exponentielle : $2 \times e^{i\pi/2} \times e^{-i\pi/4}$.
Les modules se multiplient et les arguments s'additionnent, ce qui donne donc : $2e^{i(\pi/2-\pi/4)} = 2e^{i\pi/4}$
On peut appliquer le résultat trouvé à l'exercice précédent, pour trouver directement les deux racines carrées de $2ie^{-i\pi/4}$: $\sqrt{2}e^{i\pi/8}$ et $\sqrt{2}e^{i9\pi/8}$.
Mises sous formes trigonométrique, on trouve $\sqrt{2}(\cos(\pi/8)+i\sin(\pi/8))$ et $\sqrt{2}(\cos(9\pi/8)+i\sin(9\pi/8))$

> EXERCICE 404 (①) par Matei
> Déterminer, en utilisant la forme trigonométrique, les nombres complexes z tels que $z^2 = i$.

Mise sous forme trigonométrique de i : $i = 0 + 1i$.
On cherche donc l'angle α tel que $\cos(\alpha) = 0$ et $\sin(\alpha) = 1$. Cet angle existe et il s'agit de $\frac{\pi}{2}$. Ainsi, $i = \cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}) = e^{i\frac{\pi}{2}}$
On peut s'aider de l'exercice 402 pour trouver les racines carrées de i : $r_1 = \sqrt{1}e^{i\frac{\frac{\pi}{2}}{2}}$ et $r_2 = \sqrt{1}e^{i\frac{\frac{\pi}{2}}{2}+\pi}$µ

$$\Leftrightarrow r_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}, r_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

Réecrits sous forme trigonométrique :

$$r_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, r_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

> EXERCICE 405 (②) par Matei
> Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $z^4 = 2i$, $z^4 = 5-2i$, $z^7-(1+i)z^2 = 0$. On donnera les solutions sous forme trigonométrique et, pour les deux premières, également sous forme algébrique.

Dans l'exercice, on notera z l'inconnue $re^{i\phi}$
<u>$z^4 = 2i$:</u>
$z^4 = 2i \Leftrightarrow z^4 = 2e^{i\pi/2}$
Ainsi,

$$r = \sqrt[4]{2}$$

Et

$$\phi = \frac{\pi/2}{4} \text{ ou bien } \frac{\pi/2}{4} + \pi/2 \text{ ou bien } \frac{\pi/2}{4} + \pi \text{ ou bien } \frac{\pi/2}{4} + 3\pi/2$$

Donc,

$$z_1 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{8}} = \sqrt[4]{2}(\cos(\frac{\pi}{8}) + i\sin(\frac{\pi}{8}))$$

$$z_2 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{8}+\pi/2} = \sqrt[4]{2}(\cos(\frac{\pi}{8} + \pi/2) + i\sin(\frac{\pi}{8} + \pi/2)) = \sqrt[4]{2}(-\sin(\frac{\pi}{8}) + i\cos(\frac{\pi}{8}))$$

$$z_3 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{8}+\pi} = \sqrt[4]{2}(-\sin(\frac{\pi}{8} + \pi/2) + i\cos(\frac{\pi}{8} + \pi/2)) = \sqrt[4]{2}(-\cos(\frac{\pi}{8}) - i\sin(\frac{\pi}{8}))$$

$$z_4 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{8}+3\pi/2} = \sqrt[4]{2}(-\cos(\frac{\pi}{8} + \pi/2) - i\sin(\frac{\pi}{8} + \pi/2)) = \sqrt[4]{2}(\sin(\frac{\pi}{8}) - i\cos(\frac{\pi}{8}))$$

Si l'on veut mettre ces nombres complexes sous forme algébrique, il nous faut connaître les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{8})$ et de $\sin(\frac{\pi}{8})$.

Or (formule d'addition),

$$\cos(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{8}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{8})^2 - \sin(\frac{\pi}{8})^2$$

$$\Leftrightarrow \cos(\frac{\pi}{4}) = -1 + 2\cos(\frac{\pi}{8})^2$$

$$\cos(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{2}} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}+2}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

Ainsi,

$$z_1 = \frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2}$$

$$z_2 = -\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2} + i\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}$$

$$z_3 = -\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2} - i\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2}$$

$$z_4 = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2} - i\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}$$

$\underline{z^4 = 5-2i}$:
(je pense qu'il y a une erreur dans le sujet comme la valeur de l'argument de ce nombre complexe n'est pas connue, on ne peut pas le mettre sous forme trigonométrique)
$\underline{z^7 - (1+i)z^2 = 0}$

$$\Leftrightarrow z^5 = 1 + i = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

$$r_1 = \sqrt[7]{2}e^{i\pi/20} = \sqrt[7]{2}(\cos(\pi/20) + isin(\pi/20))$$

$$r_2 = \sqrt[7]{2}e^{i9\pi/20} = \sqrt[7]{2}(\cos(9\pi/20) + isin(9\pi/20))$$

$$r_3 = \sqrt[7]{2}e^{i17\pi/20} = \sqrt[7]{2}(\cos(17\pi/20) + isin(17\pi/20))$$

$$r_4 = \sqrt[7]{2}e^{i5\pi/4} = \sqrt[7]{2}(\cos(5\pi/4) + isin(5\pi/4))$$

$$r_2 = \sqrt[7]{2}e^{i33\pi/20} = \sqrt[7]{2}(\cos(33\pi/20) + isin(33\pi/20))$$

Exercice 406 (②) par Matei
Montrer que si z appartient à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}-$, alors z admet une unique racine carrée dont la partie réelle est strictement positive.

Comme $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}-$, $z = re^{\phi}$ avec $\phi \not\equiv \pi \pmod{2\pi}$
(à noter que z est nécéssairement différent de 0)
Ainsi, $\phi \in]-\pi;\pi[$
Z est la racine de $z \Leftrightarrow Z_1 = \sqrt{r}e^{i\phi/2}$ ou $Z_2 = \sqrt{r}e^{i\frac{\phi}{2}+\pi}$
Or, $\frac{\phi}{2} \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$
Ainsi, par définition, $\cos(\frac{\phi}{2}) > 0$
Or, $Re(Z_1) = \sqrt{r} \times \cos(\frac{\phi}{2})$
De plus, $r > 0$ comme $z \neq 0$.
Donc, on a bien

$$Re(Z_1) > 0$$

EXERCICE 407 (④) par Matei
Trouver les nombres complexes z tels que

$$(z-1)^3 = i(z+1)^3.$$

On déterminera d'abord les racines cubiques de i.

Soit Z un nombre complexe tel que $Z^3 = i$.

$$(z-1)^3 = i(z+1)^3 \Leftrightarrow z-1 = Z(z+1)$$

(on peut prendre les racines cubiques de chaque membre car la fonction cube admet un seul antécédent par image)

$$\Leftrightarrow z-1 = Zz+Z$$

$$\Leftrightarrow z(1-Z) = Z+1$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{Z+1}{1-Z}$$

On doit donc d'abord déterminer les racines cubiques de i :

$$i = e^{i\pi/2} \Leftrightarrow Z = e^{i\frac{\pi}{6}} \text{ ou } Z = e^{i\frac{5\pi}{6}} \text{ ou } Z = e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

1) $Z = e^{i\frac{\pi}{6}}$

$$\Leftrightarrow z = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}}+1}{1-e^{i\frac{\pi}{6}}}$$

Et, $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$. Donc,

$$z = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}+1}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{3}+2+i}{2-\sqrt{3}-i} = (2+\sqrt{3})i$$

2)Z=$e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$$\Leftrightarrow z = \frac{e^{i\frac{5\pi}{6}}+1}{1-e^{i\frac{5\pi}{6}}}$$

Et, $\cos(\frac{5\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\frac{5\pi}{6}) = \frac{1}{2}$. Donc,

$$z = \frac{-\sqrt{3}+2+i}{2+\sqrt{3}-i} = (2-\sqrt{3})i$$

3)$Z = e^{i\frac{3\pi}{2}}$

$$\Leftrightarrow z = \frac{e^{i\frac{3\pi}{2}}+1}{1-e^{i\frac{3\pi}{2}}}$$

Pareillement, on trouve :

$$z = \frac{1-i}{1+i} = -i$$

Ainsi, les 3 solutions à cette équation sont : $S = \{(2+\sqrt{3})i; (2-\sqrt{3})i; -i\}$

10.11 Complément : inégalité triangulaire

Exercice 408 (③) Par Samy Clementz

a) Soient a, b, c, d quatre nombres complexes. Vérifier que
$$(a-c)(b-d) = (b-a)(d-c) + (b-c)(a-d).$$
b) Soient A, B, C, D quatre points du plan. Montrer que
$$AC.BD \leq AB.CD + BC.DA.$$

a) Il suffit de développer les deux membres de l'égalité, et de constater qu'ils sont égaux.

b) On note $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ les affixes des points A, B, C, D. Alors d'après a), on a
$$\begin{aligned}|(a-c)(b-d)| &= |(b-a)(d-c) + (b-c)(a-d)| \\ &\leq |(b-a)(d-c)| + |(b-c)(a-d)|. \quad \text{(inégalité triangulaire)}\end{aligned}$$
Donc
$$|c-a||d-b| \leq |b-a||d-c| + |c-b||a-d|,$$
ce qui revient à dire
$$AC.BD \leq AB.CD + BC.DA.$$

Exercice 409 (③) Par Lancelot Démontrer la seconde partie du théorème 15.

On raisonne par double implication. Pour le sens directe : soit $(z_j)\_1 \leq j \leq n \subset \mathbb{C}$ une famille de complexes issus d'une même demi droite issue de 0. Par conséquent, il existe $z_0 \in \mathbb{U}$ tel que :
$$\forall i \in [\![1; n]\!], \quad z_i = |z_i| z_0.$$
L'inégalité triangulaire devient :
$$|z_0| \left| \sum_{j=1}^{n} |z_j| \right| \leq \sum_{j=1}^{n} |z_j||z_0|,$$
c'est à dire :
$$\left| \sum_{j=1}^{n} |z_j| \right| \leq \sum_{j=1}^{n} |z_j|,$$
qui est naturellement une égalité. Pour le sens réciproque : on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ la propriété "Si pour $(z_j)_{1\leq j\leq n} \subset \mathbb{C}$, l'inégalité triangulaire est une égalité, alors les $(z_j)_{1\leq j\leq n}$ sont sur une même droite issue de 0" que l'on montrer par récurrence

— *Initialisation.* pour un seule complexe z, $\mathcal{P}_1$ est immédiatement établi (c'est la forme exponentielle de z).

— *Hérédité.* on fixe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Soit z_{n+1} un complexe. On suppose que :
$$\left| \sum_{j=0}^{n+1} z_j \right| = \sum_{j=0}^{n+1} |z_j|$$
donc :
$$\left| \sum_{j=0}^{n} z_j + z_{n+1} \right| = \sum_{j=1}^{n} |z_j| + |z_{n+1}|.$$
Par conséquent, en vertu du cas d'égalité de l'inégalité triangulaire à deux membres, on déduit que $\sum_{j=1}^{n}$ et z_{n+1} sont sur la même droite issue de 0, en particulier, sur la même droite issue de 0 que les $(z_j)_{1\leq j\leq n}$, ce qui est exactement $\mathcal{P}_{n+1}$.

Du principe de récurrence, on déduit alors que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui achève l'exercice.

11 Polynômes et équations algébriques

11.1 Polynômes

Exercice 410 (①) par Antonin D

Que dire du degré de la somme de deux fonctions polynomiales

Soit P et Q deux fonctions polynomiales

$$\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$$

Exercice 411 (③) par Ylan (Fonctions polynômiales périodiques *)

Soit T un élément de $\mathbb{R}_+^*$. Quelles sont les fonctions polynômiales à coefficients réels P telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x+T) = P(x)$$

Soit P une (éventuelle) fonction polynômiale vérifiant la condition de l'énoncé. Comme 0 est réel, nous avons alors : $P(0) = P(0+T) = P(T)$, puis comme T est réel, $P(0) = P(T) = P(T+T) = P(2T)$, puis en itérant le procédé nous obtenons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(nT) = P(0)$$

On pose alors Q la fonction polynômiale définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = P(x) - P(0)$$

Nous avons alors $Q(0) = 0$, et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Q(nT) = 0$$

Or, nous avons, d'après l'énoncé, $T > 0$, donc pour tout entiers naturels i et j distincts, $iT \neq jT$, et donc Q a une infinité de racines. D'après le théorème 20, Q est donc le polynôme nul, et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = P(0), \text{ et donc } P \text{ est un polynôme constant.}$$

Réciproquement, soit P un polynôme constant. Nous avons alors, comme P est constant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x+T) = P(x) \quad \text{ et donc } P \text{ vérifie la condition de l'énoncé.}$$

Les fonctions polynômiales à coefficients réels vérifiant la condition de l'énonce sont donc les fonctions polynômiales constantes.

Exercice 412 (②) par Samy Clementz

Soit P une fonction polynomiale à coefficients dans $\mathbb{C}$:

$$\forall x \in \mathbb{C}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
- si $k \in \{0, \ldots, n\}$ n'est pas multiple de 3, a_k est nul ;
- pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(jz) = P(z)$, où $k = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$.

$\Rightarrow$ Si les a_k sont nuls pour k non multiple de 3, alors le degré n de P est un multiple de 3. On note n_0 l'entier défini par $n = 3n_0$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n_0} a_{3k} z^{3k}.$$

Par conséquent, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} P(jz) &= \sum_{k=0}^{n_0} a_{3k}(jz)^{3k} \\ &= \sum_{k=0}^{n_0} a_{3k} j^{3k} z^{3k} \\ &= \sum_{k=0}^{n_0} a_{3k} (j^3)^k z^{3k} \\ &= \sum_{k=0}^{n_0} a_{3k} z^{3k} \quad (\text{car } j^3 = 1) \\ &= P(z). \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ L'égalité $P(z) = P(jz)$ s'écrit

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} a_k z^k &= \sum_{k=0}^{n} a_k (jz)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k j^k z^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} b_k z^k, \end{aligned}$$

en posant $b_k = a_k j^k$. Notons Q la fonction polynômiale définie par $z \mapsto \sum_{k=0}^{n} b_k z^k$. On a montré que P et Q coïncident sur $\mathbb{C}$. Par conséquent, les coefficients de P et Q coïncident. En particulier, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$ on a $a_k = b_k = j^k a_k$. Mais j^k est différent de 1 si k n'est pas multiple de 3. Pour ces valeurs de k, a_k doit être nul.

EXERCICE 413 (④) par Tristan

Soit P une fonction polynomiale à coefficients dans $\mathbb{K}$. Montrer l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :

- il existe une fonction polynomiale Q à coefficients dans $\mathbb{K}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad P(x) = Q\left(x^2 - x\right)$$

- pour tout $x \in \mathbb{K}$, $P(x) = P(1 - x)$

On commence par montrer l'implication directe (i.e s'il existe une fonction polynomiale Q à coefficients dans $\mathbb{K}$ et telle que pour tout $x \in \mathbb{K}$, $P(x) = Q\left(x^2 - x\right)$ alors $P(x) = P(1 - x)$).

Supposons qu'une telle fonction Q existe.

On a alors pour tout $x \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} P(x) &= Q\left(x^2 - x\right) \\ &= Q\left(x^2 + 1 - 2x - 1 + x\right) \\ &= Q\left((1 - x)^2 - (1 - x)\right) \\ &= P(1 - x) \end{aligned}$$

L'implication directe est ainsi démontrée.

On s'intéresse maintenant à l'implication réciproque (i.e si pour tout $x \in \mathbb{K}$, $P(x) = P(1 - x)$ alors il existe une fonction polynomiale Q à coefficients dans $\mathbb{K}$ et telle que pour tout $x \in \mathbb{K}$, $P(x) = Q\left(x^2 - x\right)$).

Supposons que pour tout $x \in \mathbb{K}$, $P(x) = P(1 - x)$. On remarque immédiatement que P admet

$r \leq n$ racines que l'on note, pour $i \in [\![1, r]\!]$, λ_i. On associe également à chacune de ces racines la multiplicité α_i.

Rappelons ensuite que tout polynôme P, peut se factoriser comme produit de ses racines selon la formule

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad P(x) = \prod_{i=1}^{r} (x - \lambda_i)^{\alpha_i} F(x) \quad \text{où } F \text{ est un polynôme tel que } \deg(F) = \deg(P) - r$$

On remarque ensuite que d'après notre égalité de départ, si λ_i est une racine de P alors $1 - \lambda_1$ en est également une. On en déduit que ces deux racines ont également la même multiplicité.

Écrivons alors la factorisation de P pour tout $x \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} P(x) &= \prod_{i=1}^{r} \left((x - \lambda_i)(x - (1 - \lambda_i))\right)^{\alpha_i} F(x) \\ &= \prod_{i=1}^{r} \left(x^2 - x + \lambda_i (1 - \lambda_i)\right)^{\alpha_i} F(x) \\ &= \prod_{i=1}^{r} \left(x^2 - x - \lambda_i (\lambda_i - 1)\right)^{\alpha_i} F(x) \end{aligned}$$

Or, on remarque en posant $X = x^2 - x$ et $\Lambda_i = \lambda_i (\lambda_i - 1)$ que le produit

$$\prod_{i=1}^{r} (X - \Lambda_i)^{\alpha_i} F(x)$$

est l'expression factorisée d'un polynôme Q et tel que

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad P(x) = Q(X) \Longleftrightarrow P(x) = Q\left(x^2 - x\right)$$

On a ainsi démontré l'implication réciproque.

D'après ces deux démonstrations, l'équivalence entre les deux propriétés est montrée.

EXERCICE 414 (④) par Salmo

Établir la formule de l'exemple 3 *par un raisonnement combinatoire.*

Considérons un sac de perles où l'on a $2n$ perles au total, on a alors n perles noires et n perles blanches. Dénombrons maintenant le nombre de sous groupes comportant n perles, pour ceci il suffit de prendre n perles parmi les $2n$ existantes, donc $\binom{2n}{n}$ choix.

Soit $k \in [\![0; n]\!]$, on souhaite dénombrer le nombre de groupes à n perles contenant k perles blanches ce qui vaut :

$$\binom{n}{k} \times \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} \times \binom{n}{k} = \binom{n}{k}^2$$

(on a ici le nombre de façons de prendre k perles parmi les blanches et le nombre de façons de prendre $n - k$ perles parmi les noires).

In fine, on souhaite dénombrer le nombre de groupes avec n perles blanches et 0 noires puis $n - 1$ perles blanche et 1 noire ... jusqu'à 0 perles blanches et n noires, on peut alors conclure que :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

ce qui termine la preuve.

(On réutilise ici le résultat du premier paragraphe qui nous donne le nombre de façons de réaliser des groupes de n perles avec 2 couleurs)

Exercice 415 (⑤) par Aghilas

a) Généraliser l'exemple 3 en calculant le coefficient de x^k dans $(1+x)^{m+n} = (1+x)^m(1+x)^n$ de deux manières.

b) Retrouver le résultat obtenu par une démonstration combinatoire.

a) Soit $m, n \in \mathbb{N}$, $k \leq m+n$ et $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\sum_{k=0}^{m+n} \binom{m+n}{k} x^k = (1+x)^{m+n} = (1+x)^m \cdot (1+x)^n = \left(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\right)$$

Dans le membre de gauche, le coefficient de x^k est $\binom{m+n}{k}$. Dans celui de droite, le coefficient de x^k est la somme coefficients obtenus en le développant. C'est-à-dire que c'est la somme des produit des coefficients de x^i dans le facteur de droite et celui de x^j dans celui de gauche où $i+j=k$. Ce qui nous donne :

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i+j=k} \binom{m}{i}\binom{n}{j}.$$

On effectue un changement d'indice, en prenant i allant de 0 à k, et en remplaçant j, par $k-i$. Ainsi, la somme de i et j reste k et on a :

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i}.$$

b) On cherche maintenant a obtenir le même résultat par un raisonnement combinatoire. Le raisonnement employé est appelé double dénombrement ou double comptage. Il consiste à démontrer l'égalité de deux formules en montrant qu'elles permettent de compter le nombre d'éléments d'un même ensemble.
Soient $m, n \in \mathbb{N}$ et $k \leq m, n$. On considère le nombre de sous-ensembles de k éléments de l'ensemble $S = \{1; 2; \cdots; m+n-1; m+n\}$. Une première façon de dénombrer cet ensemble est grâce à un coefficient binomiale : $|S| = \binom{n+m}{r}$. C'est le membre gauche de l'identité. On peut aussi choisir 0 éléments parmi les entiers entre 1 et m et k parmi $m+1$ et $n+m$, ce qui fait $\binom{m}{0}\binom{n}{k}$ sous-ensembles. Puis, on peut choisir 1 élément entre 1 et m et $k-1$ entre $m+1$ et $n+m$, ce qui fait $\binom{m}{1}\binom{n}{k-1}$ sous-ensembles. On applique le même raisonnement jusqu'à prendre k éléments entre 1 et m et 0 entre $m+1$ et $n+m$, ce qui fait $\binom{m}{k}\binom{n}{0}$ sous-ensembles. En sommant le tout, on obtient le membre de gauche de l'identité. Ces deux expressions correspondant au cardinal du même ensemble, elles sont, donc, égales.

11.2 Complément : polynômes de Bernoulli

Exercice 416 (①) par Alexandre

Pour $x \in R$, calculer $B_2(x)$ et $B_3(x)$.

On sait que $B_0(x) = 1$, $B_p' = pB_{p-1}$ et $\int_0^1 B_p(t)dt = 0$. On calcule d'abord $B_1(x)$.
On a $B_1'(x) = 1 \times B_0(x) = 1$, d'où $B_1(x) = x + k$
On détermine k :

$$\int_0^1 B_1(t)dt = 0 \implies [\frac{1}{2}x^2 + kx]_0^1 = 0 \implies k + \frac{1}{2} = 0 \implies k = -\frac{1}{2}$$

On trouve $B_1(x) = x - \dfrac{1}{2}$

On détermine ensuite $B_2(x)$. On a :

$$B_2'(x) = 2 \times B_1(x) = 2x - 1 \implies B_2(x) = x^2 - x + k$$

On détermine k :

$$\int_0^1 B_2(t)dt = 0 \implies [\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + kx]_0^1 = 0 \implies \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + k = 0 \implies k = \frac{1}{6}$$

On trouve $B_2(x) = x^2 - x + \dfrac{1}{6}$

On détermine enfin $B_3(x)$. On a :

$$B_3'(x) = 3 \times B_2(x) = 3x^2 - 3x + \frac{1}{2} \implies B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + k$$

On détermine k :

$$\int_0^1 B_3(t)dt = 0 \implies [\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + kx]_0^1 = 0 \implies \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + k = 0 \implies k = 0$$

On trouve $B_3(x) = x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x$

Exercice 417 (①) par Alexandre

Si $p \geq 2$, montrer que $B_p(1) = B_p(0)$.

On a, d'après le cours :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, B_{p+1}(x+1) - B_{p+1}(x) = (p+1)x^p$$

Ce qui nous donne :

$$\forall p \geq 2, B_p(1) - B_p(0) = p.0^{p-1}$$
$$B_p(1) = B_p(0)$$

Exercice 418 (②) par Alexandre

Montrer que, si $p \in \mathbb{N}$, B_p est à coefficients rationnels, de degré p, de coefficient dominant 1.

On le démontre par récurrence sur p.
Initialisation. Pour $p = 0$, $B_p(x) = 1$, donc B_p est bien à coefficients rationnels, de degré 0, et de coefficient dominant 1.

Hérédité. On suppose que la propriété est vraie pour p quelconque fixé. On cherche à démontrer que B_{p+1} est à coefficients rationnels, de degré $p+1$, de coefficient dominant 1

$$B_p(x) = x^p + c_{p-1}x^{p-1} + ... + c_1x + c_0, \forall i \in [\![0, p-1]\!], c_i \in \mathbb{Q}(\text{HR})$$
$$B_{p+1}'(x) = (p+1)(x^p) + (p+1)(c_{p-1}x^{p-1} + ... + c_1x + c_0)$$

B_{p+1} est donc de la forme :

$$x^{p+1} + \frac{(p+1)c_{p-1}x^p}{p} + ... + c_0x + k$$

B_{p+1} est donc de degré $p+1$ et de coefficient dominant 1. Il suffit de montrer que k est rationnel afin de montrer que B_{p+1} est à coefficients rationnels.
On note :

$$B_{p+1}(x) = x^{p+1} + d_px^p + ... + d_1x + k, d_i \in \mathbb{Q}$$

On a :

$$\int_0^1 B_{p+1}(t)dt = 0 \implies [\frac{1}{p+2}x^{p+2} + \frac{d_p}{p+1}x^{p+1} + ... + \frac{d_1}{2}x^2 + kx]_0^1 = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{p+2} + \frac{d_p}{p+1} + ... + \frac{d_1}{2} + k = 0$$
$$\Longrightarrow k = -(\frac{1}{p+2} + \frac{d_p}{p+1} + ... + \frac{d_1}{2})$$
$$\Longrightarrow k \in \mathbb{Q}$$

EXERCICE 419 (④)

Montrer que
$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, B_p(1-x) = (-1)^p B_p(x).$$

EXERCICE 420 (③) par Alexandre

Si $p \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, que vaut $\displaystyle\int_x^{x+1} B_p(t)dt$?

On sait que B_{p+1} est une primitive de $(p+1)B_p$ et que $B_{p+1}(x+1) - B_{p+1}(x) = (p+1)x^p$.
On a alors :
$$\int_x^{x+1} B_p(t)dt = \frac{1}{p+1}(\int_x^{x+1} (p+1)B_p(t)dt)$$
$$\int_x^{x+1} B_p(t)dt = \frac{1}{p+1}(B_{p+1}(x+1) - B_{p+1}(x))$$
$$\int_x^{x+1} B_p(t)dt = x^p$$

EXERCICE 421 (⑤) par Adrien

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ un nombre impair. Montrer qu'il existe un polynôme Q_p à coefficients réels tels que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_p(n) = Q_p\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

11.3 Racines d'une équation polynomiale

EXERCICE 422 (④) par Léo

a) Si n est un entier pair, donner un exemple de polynôme à coefficients réels n'admettant pas de racine réell.

b) Si n est un entier impair, et P un polynôme à coefficients réels de degré n, montrer que P admet au moins une racine réelle. On pourra utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

a) Le polynôme $x^2 + x + 1$ n'admet pas de racine réelle. En effet, il suffit de calculer $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ pour s'en assurer.

b) Soit $P = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i x^i$ un polynôme de degré n impair.
On a $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$, donc $\lim_{x\to+\infty}(-x)^n = \lim_{x\to+\infty}(-1)^n x^n = -\infty$.

Par conséquent, $\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$.

Puisqu'un polynôme est continu (car dérivable) sur $\mathbb{R}$, d'après le TVI, il existera nécessairement $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(\lambda) = 0$, ce qui achève la preuve

Exercice 423 (④) par Samy Clementz

On se donne deux dés. Pour $1 \leq i \leq 6$, on note p_i (resp. q_i) la probabilité d'obtenir i en lançant le premier dé (resp. le second). Les lancers sont supposés indépendants. On note S la variable aléatoire donnant la somme des deux lancers. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$P(t) = \sum_{i=1}^{6} p_i t^i, \quad Q(t) = \sum_{i=1}^{6} q_i t^i.$$

a) Si $t \in \mathbb{R}$, montrer que

$$E(t^S) = P(t)Q(t).$$

b) On suppose que S suit la loi uniforme sur $\{2, \ldots, 12\}$. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R} \backslash \{1\}, \quad E(t^S) = \frac{t^2(t^{11}-1)}{11(t-1)}.$$

c) En considérant les racines réelles des polynômes considérées, montrer que S ne peut suivre la loi uniforme sur $\{2, \ldots, 12\}$.

On note X le résultat du dé 1 et Y le résultat du dé 2. Ainsi $S = X + Y$.

a)

$$\begin{aligned} E(t^S) &= E(t^{(X+Y)}) \\ &= E(t^X t^Y) \\ &= E(t^X)E(t^Y). \quad \text{(car } X \text{ et } X \text{ sont indépendantes)} \end{aligned}$$

Montrons que $E(t^X) = P(t)$. Calculons la loi de t^X. Comme $X \in \{1, \ldots, 6\}$, on a $t^X \in \{t, t^2, \ldots, t^6\}$. De plus $t^X = t^i \Leftrightarrow X = i$, donc $P(t^X = t^i) = P(X = i)$. On peut alors calculer l'espérance de t^X :

$$\begin{aligned} E(t^X) &= \sum_{i=1}^{6} t^i P(t^X = t^i) \\ &= \sum_{i=1}^{6} t^i P(X = i) \\ &= \sum_{i=1}^{6} t^i p_i \\ &= P(t). \end{aligned}$$

De la même manière on montre que $E(t^Y) = Q(t)$.

b) Soit $t \neq 1$. Pour tout $k \in \{2, \ldots, 12\}$, on a

$$t^S = t^k \Leftrightarrow S = k.$$

D'où

$$\begin{aligned} P(t^S = t^k) &= P(S = k) \\ &= \frac{1}{11}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
E(t^S) &= \sum_{k=2}^{12} t^k P(t^S = t^k) \\
&= \frac{1}{11}\sum_{k=2}^{12} t^k \\
&= \frac{1}{11}\sum_{i=0}^{10} t^{i+2} \quad \text{(changement d'indice } k = i+2\text{)} \\
&= \frac{t^2}{11}\sum_{i=0}^{10} t^i \\
&= \frac{t^2}{11}\frac{t^{11}-1}{t-1}. \quad \text{(somme géométrique, et } t \neq 1\,!\text{)}
\end{aligned}$$

c) Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\{1, \dots, 6\}$, indépendantes, telles que $S = X + Y$.
Alors, d'après ce qui précède, on a pour tout $t \neq 1$

$$\begin{aligned}
\frac{t^2(t^{11}-1)}{11(t-1)} &= \Big(\sum_{i=1}^{6} p_i t^i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{6} q_i t^i\Big) \\
&= t^2\Big(\sum_{i=0}^{5} p_{i+1} t^i\Big)\Big(\sum_{i=0}^{5} q_{i+1} t^i\Big),
\end{aligned}$$

où l'on a factorisé chaque polynôme par t. Ainsi pour tout $t \notin \{0,1\}$, on a

$$\frac{t^{11}-1}{11(t-1)} = \Big(\sum_{i=0}^{5} p_{i+1} t^i\Big)\Big(\sum_{i=0}^{5} q_{i+1} t^i\Big)$$

On note $\tilde{P}$ la fonction polynômiale $t \mapsto \sum_{i=0}^{5} p_{i+1} t^i$ sur $\mathbb{R}$. Notons que $p_6 > 0$, car

$$\begin{aligned}
P(S = 12) &= \frac{1}{12} \\
&= P(X = 6)P(Y = 6) \\
&= p_6 q_6.
\end{aligned}$$

Par conséquent $\tilde{P}$ est de degré 5. Ce degré est impair, $\tilde{P}$ admet donc une racine réelle. On note t_0 une de ces racines. En faisant tendre t vers 0 dans cette égalité, on trouve $\frac{1}{11} = p_1 q_1$. En particulier, $p_1 > 0$, ce qui implique que $\tilde{P}$ ne s'annule pas en 0. (notons qu'on aurait pu montrer $p_1 > 0$ de la même manière que l'on a montré $p_6 > 0$) De plus $\tilde{P}(1) = \sum_{k=1}^{6} p_i = 1$. Par conséquent, $t_0 \notin \{0,1\}$. En évaluant cette égalité en t_0 on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{{t_0}^{11}-1}{11(t_0-1)} &= \tilde{P}(t_0)\Big(\sum_{i=0}^{5} q_{i+1} {t_0}^i\Big) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

ce qui implique que ${t_0}^{11} = 1$, et donc que $t_0 = 1$, ce qui est absurde.

EXERCICE 424 (②) par Loïse

Soient P une fonction polynomiale à coefficients réels, z dans $\mathbb{C}$ une racine de P. Montrer que $\overline{z}$ est racine de P.

z est une racine de de P, soit :

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i = 0.$$

Or, si deux nombres complexes sont égaux, alors leurs conjugués sont égaux. Le conjugué d'un réel est égal à ce nombre. Soit :

$$\overline{\sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i} = 0.$$

Or le conjugué d'une somme est égal à la somme des conjugués. Alors :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \overline{a_i z^i} = 0.$$

Or le conjugué d'un produit est égal au produit des conjugués. Et a est un réel, alors :

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i \overline{z^i} = 0.$$

Conclusion : $\overline{z}$ est une racine de P.

EXERCICE 425 (④) par Ylan (Majoration du module des racines d'un polynôme *).

Soient n dans $\mathbb{N}^*$, $a_0, ..., a_{n-1}$ des nombres complexes, P le polynôme défini par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = z^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i$$

a) Pour $0 \leq i \leq n-1$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$, montrer que $|z^i| \leq |z^{n-1}|$

b) Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de P. Montrer, en utilisant l'inégalité triangulaire, que

$$|z| \leq \max\left(1, \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|\right)$$

a) Soit $i \in \{0, ..., n-1\}$, soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| > 1$. Nous avons alors $0 \leq i \leq n-1$, donc : $n-1-i \geq 0$. On a également : $|z| > 1$, donc par croissance de la fonction $x \longmapsto x^{n-1-i}$ sur $\mathbb{R}_+$, nous avons :

$$|z|^{n-1-i} \geq 1^{n-1-i} = 1, \text{ puis comme } |z| \geq 0, \text{ on a :}$$

$$|z|^{n-1-i}|z|^i \geq |z|^i, \text{ d'où :}$$

$$|z|^{n-1} \geq |z|^i, , \text{ d'où :}$$

$$|z^i| \leq |z^{n-1}|$$

b) On raisonne par disjonction de cas et on considère les 2 cas suivants :$|z| \leq 1$ et $|z| > 1$.

<u>Premier cas :</u> $|z| \leq 1$

On a alors immédiatement : $|z| \leq \max\left(1, \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|\right)$.

<u>Deuxième cas :</u> $|z| > 1$

On a alors z racine de P, donc :

$$z^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i = 0, \text{ d'où :}$$

$$z^n = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i, \text{ et donc :}$$

$$|z^n| = \left|\sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i\right|$$

Par inégalité triangulaire, il vient ensuite :

$$|z^n| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \left|z^i\right|, \text{ puis comme, d'après la question a, } \left|z^i\right| \leq \left|z^{n-1}\right|, \text{ on a :}$$

$$|z^n| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \left|z^{n-1}\right|, \text{ d'où :}$$

$$|z|^n \leq |z|^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|, \text{ puis comme } z^{n-1} \geq 0, \text{ il vient :}$$

$$|z| \leq \sum_{i=0}^{n-1} a_i, \text{ et donc :}$$

$$|z| \leq \max\left(1, \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|\right)$$

Nous avons donc pour toute racine $z \in \mathbb{C}$ de P :

$$|z| \leq \max\left(1, \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|\right)$$

EXERCICE 426 (②) par Loïse

a) Vérifier que 4 est racine de l'équation

$$x^3 - 15x - 4 = 0$$

puis résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante, après en avoir déterminé une "racine évidente" :

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

.

a) Vérifions que 4 est racine de l'équation :

$$4^3 - 15 \cdot 4 - 4 = 64 - 60 - 4 = 0.$$

4 est racine de l'équation. A l'aide de cette racine évidente, on factorise le polynôme, en posant a, b et c trois réels tels que :

$$(x-4)(ax^2 + bx + c) = 0 \Leftrightarrow ax^3 + (b-4a)x^2 + (c-4b)x - 4c = 0.$$

Par identification des coefficients constants on en déduit :

$$x^3 - 15x - 4 = ax^3 + (b-4a)x^2 + (c-4b)x - 4c \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = a \\ 0 = b - 4a \\ -15 = c - 4b \\ -4 = -4c \end{cases}$$

On résout donc le système pour achever la factorisation du polynôme de degré 3 :

$$\begin{cases} 1 = a \\ 0 = b - 4a \\ -15 = c - 4b \\ -4 = -4c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 1 \end{cases}$$

Ainsi :

$$x^3 - 15x - 4 = (x-4)(x^2+4+1).$$

Soit :

$$x^3 - 15x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-4) = 0 \quad ou \quad (x^2+4x+1) = 0.$$

Il ne reste plus qu'à résoudre l'équation du second degré. On commence par calculer le discriminant :

$$\Delta = 16 - 4 = 12.$$

Comme le discriminant est strictement positif, le trinôme du second degré admet exactement deux racines réelles distinctes, à savoir :

$$x_1 = \frac{-4+2\sqrt{3}}{2} = -2+\sqrt{3},$$

et

$$x_2 = \frac{-4-2\sqrt{3}}{2} = -2-\sqrt{3}.$$

On conclut donc la résolution de l'équation :

$$S = \left\{-2+\sqrt{3}, -2-\sqrt{3}, 4\right\}.$$

b) De façon évidente, 1 est solution de l'équation $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ car :

$$1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6 = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$$

A l'aide de cette racine évidente, on factorise le polynôme, en posant a, b et c trois réels tels que :

$$(x-1)(ax^2+bx+c) = 0 \Leftrightarrow ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c = 0.$$

Par identification des coefficients constants on en déduit :

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = a \\ -6 = b-a \\ 11 = c-b \\ -6 = -c \end{cases}$$

On résout donc le système pour achever la factorisation du polynôme de degré 3 :

$$\begin{cases} 1 = a \\ -6 = b-a \\ 11 = c-b \\ -6 = -c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \\ c = 6 \end{cases}$$

Ainsi :

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x^2-5+6).$$

Soit :

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x-1) = 0 \quad ou \quad (x^2-5x+6) = 0.$$

Il ne reste plus qu'à résoudre l'équation du second degré. On commence par calculer le discriminant :

$$\Delta = 25 - 24 = 1.$$

Comme le discriminant est strictement positif, le trinôme du second degré admet exactement deux racines réelles distinctes, à savoir :

$$x_1 = \frac{5+\sqrt{1}}{2} = 3,$$

et

$$x_2 = \frac{5-\sqrt{1}}{2} = 2.$$

On conclut donc la résolution de l'équation :

$$S = \{1, 2, 3\}.$$

Exercice 427 (③) Par Lancelot

Soit n un entier ≥ 2.

1. justifier la formule :
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \sum_{k=0}^{n-1} z^k = \prod_{\ell=1}^{n-1} \left(z - e^{\frac{2i\ell\pi}{n}}\right).$$
2. En appliquant la formule précédente en $z = 1$, calculer le produit
$$P_n = \prod_{\ell=1}^{n-1} \sin\left(\frac{\ell\pi}{n}\right).$$

1. On calcule :
$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{z^n - 1}{z - 1} = \frac{1}{z-1} \prod_{\ell=0}^{n-1} \left(z - e^{\frac{2i\ell\pi}{n}}\right) = \prod_{\ell=1}^{n-1} \left(z - e^{\frac{2i\ell\pi}{n}}\right).$$
2. On doit avoir que :
$$n = \prod_{\ell=1}^{n-1} \left(1 - e^{\frac{2i\ell\pi}{n}}\right),$$
et en utilisant l'arc moitié on obtient que :
$$\begin{aligned} n = \prod_{\ell=1}^{n-1} \left(e^{\frac{i\ell\pi}{n}} \left(e^{-\frac{i\ell\pi}{n}} - e^{\frac{i\ell\pi}{n}}\right)\right) &= \prod_{\ell=1}^{n-1} e^{\frac{i\ell\pi}{n}} \left(-2i \sin\left(\frac{\ell\pi}{n}\right)\right) \\ &= (2i)^{n-1} P_n \prod_{\ell=1}^{n-1} e^{\frac{i\ell\pi}{n}} \\ &= (-2i)^{n-1} e^{\frac{i(n-1)}{2}} = 2^{n-1} P_n, \end{aligned}$$
dont il s'ensuit alors que :
$$P_n = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Exercice 428 (③) par Alexandre C.

Soient n un entier $\geqslant 3$, $A_0, ..., A_{n-1}$ les sommets d'un polygone régulier du plan. On note O le centre de ce polygone, R le rayon de cercle passant par les A_k. Montrer que, si M est un point du plan, alors :
$$\prod_{k=0}^{n-1} A_k M \leqslant OM^n + R^n$$
On commencera par le cas où les A_k sont les racines n-ièmes de l'unité (et donc $R = 1$) ; on utilisera alorsla factorisation de $z^n - 1$

• Commençons par traiter le cas où les A_k sont les racines n-iemes de l'unité. On suppose que pour tout $k \in [|0, n-1|]$, A_k a pour affixe $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$
Soit M un point du plan d'affixe $z \in \mathbb{C}$.
Alors :
$$\prod_{k=0}^{n-1} A_k M = \prod_{k=0}^{n-1} \left|z - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right| = \left|\prod_{k=0}^{n-1} \left(z - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\right| = |z^n - 1|$$
L'inégalité triangulaire permet d'affirmer que :
$$\prod_{k=0}^{n-1} A_k M = |z^n - 1| \leqslant |z^n| + |-1| = |z|^n + 1 = OM^n + 1$$
Ce que l'on voulait démontrer

• Dans le cas général, il existe $R \in R^{+*}$ et $\theta \in R$ tels que :
$\forall k \in [|0, n-1|], A_k$ a pour affice $Re^{i\left(\frac{2k\pi}{n}+\theta\right)}$
On adopte un raisonnement analogue.
Alors, pour tout point M d'affixe z on a :

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1} A_k M &= \prod_{k=0}^{n-1} \left| z - Re^{i\left(\frac{2k\pi}{n}+\theta\right)} \right| \\ &= R^n \prod_{k=0}^{n-1} \left| \frac{z}{R} - e^{i\left(\frac{2k\pi}{n}+\theta\right)} \right| \\ &= R^n \prod_{k=0}^{n-1} \left| \frac{e^{-i\theta}}{R} - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right| \\ &= R^n \left| \left(\frac{e^{-i\theta}}{n} \cdot z \right)^n - 1 \right|\end{aligned}$$

Or, d'après l'inégalité triangulaire :

$$R^n \left| \left(\frac{e^{-i\theta}}{n} \cdot z \right)^n - 1 \right| \leqslant R^n \left(\frac{|z|^n}{R^n} + 1 \right) = |z|^n + R^n = OM^n + R^n$$

On a donc bien : $\prod_{k=0}^{n-1} A_k M \leqslant OM^n + R^n$

EXERCICE 429 (4) Par Lancelot

Soit P une fonction polynomiale de degré ≥ 2 à coefficients réels. Montrer que le graph de P ne peut contenir $n+1$ points distincts alignés.

On raisonne par l'absurde. On suppose que les points $M_1, \dots, M_{n+1}$ du graphe de P sont alignés. Par conséquent ils forment une droite Δ non-parallèle à l'axe des ordonnées et donc de la forme :

$$\Delta(x) = mx + p, \qquad (m, p) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R},$$

Qui est un polynôme de degré 1. Par suite, examinons le polynôme $Q := P - \Delta$. Le degré de Q est donc n, donc Q admet au plus n racines d'après le Théorème 20. Remarquons que par hypothèse, Q admet $n+1$ racines qui sont les abscisses des points alignés, ce qui est absurde, et la conclusion s'ensuit.

11.4 Complément : l'équation du second degré dans $\mathbb{C}$

EXERCICE 430 (2) par Térence

Déterminer sous forme algébrique les racines carrées de $3+4i$, $3-3i$, $5-2i$ dans $\mathbb{C}$.

On pose $\delta = a + ib$ tel que $\delta^2 = 3 + 4i$. Avec a et b dans $\mathbb{R}$,

on a : $|\delta^2| = |\delta|^2 = a^2 + b^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ puis $\delta^2 = (a+ib)^2 = a^2 - b^2 + 2abi = 3 + 4i$

Ainsi, par unicité des modules partie réelle et imaginaire d'un complexe, on a les 3 égalités du système suivant :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 &= 3 \\ a^2 + b^2 &= 25 \\ 2ab &= 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 &= 28 \\ 2b^2 &= 22 \\ ab \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 &= 14 \\ b^2 &= 11 \\ ab \geq & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{14} \text{ ou } a = -\sqrt{14} \\ b = \sqrt{11} \text{ ou } b = -\sqrt{11} \\ ab \geq 0 \end{cases}$$

Or, $ab \geq 0 \implies (a \geq 0$ et $b \geq 0)$ ou $(a \leq 0$ et $b \leq 0)$.
Les solutions du système sont :

$$S = \left\{ (\sqrt{14}; \sqrt{11}), (-\sqrt{14}; -\sqrt{11}) \right\}.$$

Les racines de $3+4i$ dans $\mathbb{C}$ sont donc :

$$\sqrt{14}+\sqrt{11}i \text{ et } -\sqrt{14}-\sqrt{11}i.$$

En procédant exactement de la même manière, on pose $\delta = a+ib$ tel que $\delta^2 = 3-3i$. Avec a et b dans $\mathbb{R}$,

on a : $|\delta^2| = |\delta|^2 = a^2+b^2 = 3^2+3^2 = 18$ et $\delta^2 = (a+ib)^2 = a^2-b^2+2abi = 3-3i$.

Trouver a et b revient alors à résoudre le système suivant, :

$$\begin{cases} a^2+b^2 & = 18 \\ a^2-b^2 & = 3 \\ 2ab & = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 & = 21 \\ 2b^2 & = 15 \\ ab \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{\frac{21}{2}} \text{ ou } a = -\sqrt{\frac{21}{2}} \\ b = \sqrt{\frac{15}{2}} \text{ ou } b = -\sqrt{\frac{15}{2}} \\ ab \leq 0 \end{cases}$$

Or, $ab \leq 0 \implies (a \geq 0$ et $b \leq 0)$ ou $(a \leq 0$ ou $b \geq 0)$.
Les solutions du système sont :

$$S = \left\{ (\sqrt{\frac{21}{2}}; -\sqrt{\frac{15}{2}}), (-\sqrt{\frac{21}{2}}; \sqrt{\frac{15}{2}}) \right\}.$$

Les racines de $3-3i$ dans $\mathbb{C}$ sont donc :

$$\sqrt{\frac{21}{2}} - i\sqrt{\frac{15}{2}} \text{ et } -\sqrt{\frac{21}{2}} + i\sqrt{\frac{15}{2}}.$$

En procédant encore une fois de la même manière, on pose $\delta = a+ib$ tel que $\delta^2 = 5-2i$. Avec a et b dans $\mathbb{R}$,

on a : $|\delta^2| = |\delta|^2 = a^2+b^2 = 5^2+2^2 = 29$ et $\delta^2 = (a+ib)^2 = a^2-b^2+2abi = 5-4i$.

Trouver a et b revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} a^2+b^2 & = 29 \\ a^2-b^2 & = 5 \\ 2ab & = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 & = 34 \\ 2b^2 & = 24 \\ ab \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{17} \text{ ou } a = -\sqrt{17} \\ b = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ ou } b = -2\sqrt{3} \\ ab \leq 0 \end{cases}$$

Or, $ab \leq 0 \implies (a \geq 0$ et $b \leq 0)$ ou $(a \leq 0$ et $b \geq 0)$.

Les solutions du système sont :

$$S = \left\{ (\sqrt{17}; -2\sqrt{3}), (-\sqrt{17}; 2\sqrt{3}) \right\}.$$

Les racines de $3+4i$ dans $\mathbb{C}$ sont donc :

$$\sqrt{17} - 2\sqrt{3}i \text{ et } -\sqrt{17} + 2\sqrt{3}i.$$

Exercice 431 (①) par Elies

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 + 10z + 169 = 0.$$

L'équation $z^2+10z+169 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ a pour discriminant $10^2 - 4 \times 1 \times 169 = -576$ strictement négatif. Elle possède donc 2 racines complexes distinctes, à savoir $12i-5$ et $-12i-5$.

Remarque. Si a, b, c sont réels et $\Delta = b^2-4ac$ avec $\Delta < 0$, l'équation $az^2+bz+c = 0$ admet deux racines complexes disctinctes dans $\mathbb{C}$, $z_1 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

EXERCICE 434 (③) Par Lancelot Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, Soit E_λ l'équation d'inconnue complexe z :

$$z^2 - 2\lambda z + 1 = 0.$$

Décrire l'ensemble des solutions de E_λ, lorsque λ parcourt $\mathbb{R}$.

On écrit le discriminant du polynôme concerné par E_λ, $\Delta = 4\lambda^2 - 4$, qui est un polynôme du second degré en λ. On distingue trois cas :

— Lorsque $|\lambda| = 1$, il n'y a qu'une seule racine, λ.

— Lorsque $|\lambda| > 1$, il y a deux racines réelles :

$$x_1(\lambda) = \lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1} \quad \text{et} \quad x_2(\lambda) = \lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1},$$

dont x_1 parcourt $]1;+\infty[$ et x_2 parcourt $]0;1[$, lorsque λ parcourt $]1;+\infty[$. Remarquons que x_1 et x_2 sont des expressions impaire de λ. Par conséquent x_1 parcourt $]-\infty;-1[$ et x_2 parcourt $]-1;0[$ lorsque λ parcourt $]-\infty;-1[$.

— Lorsque $0 \leq |\lambda| < 1$, il y a deux racines complexes :

$$z_1 = \lambda + i\sqrt{1-\lambda^2} \quad \text{et} \quad z_2 = \lambda - i\sqrt{1-\lambda^2}.$$

Puisque $\lambda \in]-1;1[$, il existe $\theta \in]-\pi;\pi[$, tel que $\lambda = \cos(\theta)$. Ainsi :

$$z_1 = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \quad \text{et} \quad z_2 = \cos(\theta) - i\sin(\theta),$$

donc z_1 et z_2 parcourent $\mathbb{U}$, lorsque λ parcourt $]-1;1[$.

Finalement, l'ensemble parcourut est donc $\mathbb{R}^* \cup \mathbb{U}$.

EXERCICE 435 (④) Par Lancelot

Adapter les exercices **11** et **12** de **1.4** aux suites complexes.

Les méthodes qu'il faut employer sont en réalité hautement similaires, par conséquent, on reprend le contenu de la solution des exercices 11 et 12 avec quelques modifications.

On cherche donc à déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des suites complexes vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

On rappelle que le polynôme caractéristique d'une telle suite est :

$$P(X) := X^2 - aX - b,$$

dont on suppose dans un premier temps que les racines sont deux complexes conjuguées. On considère la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_n := \alpha\lambda^n + \beta\mu^n,$$

avec α et β deux complexes. On montre que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on calcule :

$$\begin{aligned} aW_{n+1} + bW_n &= a(\alpha\lambda^{n+1} + \beta\mu^{n+1}) + b(\alpha\lambda^n + \beta\mu^n) \\ &= \alpha\lambda^n(a\lambda + b) + \beta\mu^n(a\mu + b) \\ &= \alpha\lambda^{n+2} + \beta\mu^{n+2} \\ &= W_{n+2} \end{aligned}$$

Puisque $W_0 = \alpha + \beta$, et que $W_1 = \alpha\lambda + \beta\mu$, on se demande si quelque soit les complexes z et z", il soit possible de déterminer une solution au système suivant

$$\begin{cases} \alpha + \beta = z \\ \alpha\lambda + \beta\mu = z" \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{z\mu - z'}{\mu - \lambda} \\ \beta = \frac{z' - z\lambda}{\mu - \lambda} \end{cases}$$

De sorte que si, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}$ tel que $u_0 = z$ et $u_1 = z'$, alors on peut peut construire $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}$ d'une manière analogue à $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On veut donc montrer la propriété, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n :=$

"$u_n = \alpha\lambda^n + \beta\mu^n$", où α et β sont les solutions du système ci-dessus.On raisonne par récurrence double.
Initialisation. L'assertion voulue découle directement des identités vérifiées par α, β et λ, μ. Par conséquent, $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vérifiées. *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ soit vraies

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= au_{n+1} + bu_n \\ &= a(\alpha\lambda^{n+1} + \beta\mu^{n+1}) + b(\alpha\lambda^n + \beta\mu^n) \\ &= \alpha\lambda^n(a\lambda + b) + \beta\mu^n(a\mu + b) \\ &= \alpha\lambda^{n+2} + \beta\mu^{n+2} \end{aligned}$$

le résultat voulu, la conclusion suit du principe de récurrence.

Supposons désormais que le polynôme de départ admet une racine double que l'on notera λ. On procède de la même manière. On considère la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_n := \alpha\lambda^n + n\beta\lambda^n,$$

pour α et β deux complexes. On montre que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on calcule :

$$\begin{aligned} aW_{n+1} + bW_n &= a(\alpha\lambda^{n+1} + \beta(n+1)\lambda^{n+1}) + b(\alpha\lambda^n + \beta n\lambda^n) \\ &= \alpha\lambda^n(a\lambda + b) + \beta\lambda^n a\lambda + n\beta\lambda^n(a\lambda + b) \\ &= \alpha\lambda^{n+2} + \beta(n+2)\lambda^{n+2} \qquad = W_{n+2} \end{aligned}$$

On se demande une nouvelle fois quelque soit les complexes z et z', il soit possible de déterminer une solution au système suivant :

$$\begin{cases} \alpha = z \\ \alpha\lambda + \beta\lambda = z' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = z \\ \beta = \frac{z' - z\lambda}{\lambda} \end{cases}$$

De sorte que si, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}$ tel que $u_0 = z$ et $u_1 = z'$, alors on peut peut construire $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}$ d'une manière analogue à $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On veut donc montrer la propriété, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n :=$ "$u_n = \alpha\lambda^n + n\beta\lambda^n$", où α et β sont les solutions du système ci-dessus. On raisonne par récurrence double. *Initialisation.* L'assertion voulue découle directement des identités vérifiées par α, β et λ, μ. Par conséquent, $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vérifiées.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ soit vraies

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= au_{n+1} + bu_n \\ &= a(\alpha\lambda^{n+1} + \beta(n+1)\lambda^{n+1}) + b(\alpha\lambda^n + \beta n\lambda^n) \\ &= \alpha\lambda^n(a\lambda + b) + \beta\lambda^n a\lambda + n\beta\lambda^n(a\lambda + b) \\ &= \alpha\lambda^{n+2} + \beta(n+2)\lambda^{n+2} \end{aligned}$$

le résultat voulu, la conclusion suit du principe de récurrence.

EXERCICE 436 (④) Par Lancelot

1. Déterminer à l'aide de l'exercice précédent, les suites réelles $(u_n)_{n\geq 0}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{6}{5}u_{n+1} - u_n.$$

2. Montrer que ces suites sont bornées

1. D'après l'exercice précédent, il nous faut déterminer les racines du polynôme caractéristique qui ici se trouve être :

$$P(X) := X^2 - \frac{6}{5}X + 1.$$

Son discriminant est $-\frac{64}{5}$, il admet donc deux racines complexes conjuguées qui sont :

$$\lambda := \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \quad \text{et} \quad \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i =: \mu.$$

D'après l'exercice précédent, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\alpha\lambda^n + \beta\mu^n)_{n\in\mathbb{N}}$ conviennent, pour α et β deux complexes, mais on exige ici qu'elles soient à valeurs réelles. On cherche donc à imposer une certaine forme à α et β. Remarquons que $|\lambda| = |\mu| = 1$. Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\lambda = e^{i\theta} \quad \text{et} \quad \mu = e^{-i\theta}.$$

Comme les suites sont à valeurs réelles, on doit avoir que :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a \\ \alpha e^{i\theta} + \beta e^{-i\theta} = b \end{cases}$$

où a et b sont des réels et sont les valeurs d'une suite au rang 0 et 1. On déduit alors que :

$$\alpha = \frac{b - e^{-i\theta}a}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{b - e^{i\theta}a}{e^{-i\theta}} - e^{i\theta} = \overline{\alpha}.$$

Toujours en utilisant l'exercice précédent, on obtient que :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n &= \alpha e^{in\theta} + \beta e^{-in\theta} \\ &= \alpha e^{in\theta} + \overline{\alpha} e^{-in\theta} \\ &= 2\Re\left(\alpha e^{in\theta}\right). \end{aligned}$$

Soit finalement que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2\Re(\alpha)\cos(n\theta) - 2\Im(\alpha)\sin(\theta).$$

D'où l'ensemble recherché est :

$$\mathcal{E} := \left\{ (2\Re(\alpha)\cos(n\theta) - 2\Im(\alpha)\sin(\theta))_{n\in\mathbb{N}} : \quad \alpha = \frac{b - e^{-i\theta}a}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}, \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

avec θ fixé.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}$. on a que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| = |2\Re(\alpha)\cos(n\theta) - 2\Im(\alpha)\sin(\theta)|$$

avec α un certain complexe. Par l'inégalité triangulaire on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq |2\Re(\alpha)\cos(n\theta)| + |2\Im(\alpha)\sin(\theta)|,$$

et puisque sin et cos sont bornés par 1 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq 2(|\Re(\alpha)| + |\Im(\alpha)|)$$

qui ne dépend pas de n. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ce qu'il fallait montrer.

11.5 Complément : les équations du degré 3 et 4

Exercice 437 (4) par Daniel

Soient p et q des nombres complexes et P le polynôme défini par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = z^3 + pz + q$$

Nous allons expliquer comment résoudre l'équation

$$P(z) = 0 \tag{1}$$

a) Soit z un nombre complexe. Expliquer pourquoi il existe deux nombres complexes u et v (éventuellement égaux) tels que

$$z = u + v \quad 3uv = -p$$

b) On écrit le nombre complexe z sous la forme $u+v$, où $3uv = -p$. Montrer que l'équation(1) se réécrit : $u^3 + v^3 = -q$

c) À partir des relations

$$3uv = -p, \quad u^3 + v^3 = -q$$

déterminer une équation du second degré dont u^3 et v^3 sont racinces

d) Montrer que l'on peut exprimer les solutions de (1) à partir des coefficients p et q par des formules faisant intervenir les opérations usuelles et l'exraction de racines carrées et cubiques

1. $\left\{ \begin{array}{l} z = u + v \\ 3uv = -p \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} z = u + \dfrac{-p}{3u} \\ v = z - u \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} u^2 - uz - \dfrac{p}{3} = 0 \\ v = z - u \end{array} \right.$

   L'équation $u^2 - uz - \dfrac{p}{3} = 0$ admet nécessairement une solution dans $\mathbb{C}$, donc il existe bien $(u, v) \in \mathbb{C}^3$ satisfaisant le système.

2.

$$\begin{aligned} (1) &\iff (u+v)^3 + (u+v)p + q = 0 \\ &\iff u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + (u+v)p + q = 0 \\ &\iff u^3 + v^3 + (3uv + p)(u+v) = -q \end{aligned}$$

   Or, $3uv + p = 0$, on obtient donc bien $u^3 + v^3 = -q$

3. $\left\{ \begin{array}{l} 3uv = -p \\ u^3 + v^3 = -q \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} u^3v^3 = -\dfrac{p^3}{27} \\ u^3 + v^3 = -q \end{array} \right.$

   Les coefficients a, b, c de l'équation de la forme $aX^2 + bX + c = 0$ dont u^3 et v^3 sont racines vérient :

   $\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{-b}{a} = -q \\ \dfrac{c}{a} = -\dfrac{p^3}{27} \end{array} \right.$ En fixant $a = 1$, on obtient : $\left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = q \\ c = -\dfrac{p^3}{27} \end{array} \right.$

   En conclusion, l'équation recherchée est $X^2 + qX - \dfrac{p^3}{27}$

4. On pourra donc trouver les solutions de u^2 et v^2 à l'aide des opérations usuelles et de l'extraction de racines carrées, puis celles de u et v par loi de z à l'aide de l'extraction de racines cubiques (pour plus de détails voir l'exercice suivant.)

EXERCICE 438 (⑤) par Daniel On reprend les notations de l'exercice précédent. On suppose p et q réels et on note $\Delta = -4p^3 - 27q^2$

a) On sait depuis l'exercice 163 de **6.3.1** que si $\Delta < 0$ alors l'équation (1) a une unique racine réelle. Expliciter cette racine en fonction de p et q en utilisation les fonctions racine carrée et racine cubique ainsi que les opérations usuelles.

b) On sait depuis l'exercice 163 de **6.3.1** que si $\Delta > 0$ alors l'équation (1) admet trois racines réelles. Reprendre la question a)

a) Calculons le discriminant δ du polynôme trouvé à l'exercice précédent.
$\delta = q3 + \dfrac{4p^3}{27}$. On remarque que $\delta = -\dfrac{\Delta}{27}$
Par conséquent, si $\Delta < 0$ alors l'équation vérifiée par u^3 et $v3$ admet deux racines réelles :

$$u^3 = \frac{-q - \sqrt{\delta}}{2} \quad v^3 = \frac{-q + \sqrt{\delta}}{2}$$

On note u_0 et v_0 les racines cubiques réelles respectivement de u^3 et v^3. L'équation (1) admet donc une solution réelle $z = u_0 + v_0$, soit :

$$z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^3}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^3}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

b) De même, si $\Delta > 0$ alors l'équation de l'exercice précédent admet deux racines u^3 et v^3 complexes conjuguées. Il y a trois valeurs possibles de u et v dans $\mathbb{C}$ On choisit un couple de ces valeurs respectant l'équation $3uv = -p$ que l'on note (u_0, v_0). On a donc déjà une première solution z_0 de (1) : $z_0 = u_0 + v_0$

Les autres valeurs possibles de u et v sont donc de la forme $j^k u_0$ et $j^k v_0$ avec $0 \leqslant k \leqslant 2$ et $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ (cf. chapitre 10.10)
Les deux autres solutions z_1 et z_2 seront donc :

$$\begin{aligned} z_1 &= ju_0 + j^2 v_0 \\ z_2 &= j^2 u_0 + jv_0 \qquad \text{afin de respecter } 3uv = 3u_0v_0 = -p \end{aligned}$$

Par conséquent, les trois solutions sont :

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^3}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^3}{4} + \frac{p^3}{27}}} \\ z_1 &= j \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^3}{4} + \frac{p^3}{27}}} + j^2 \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^3}{4} + \frac{p^3}{27}}} \\ z_2 &= j^2 \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^3}{4} + \frac{p^3}{27}}} + j \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^3}{4} + \frac{p^3}{27}}} \end{aligned}$$

EXERCICE 439 (③) par Adrien

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 - 6z - 40 = 0$. En déduire que

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}.$$

11.6 Complément : rigidité des polynômes

EXERCICE 441 (③) Par Lancelot On se propose d'indiquer comment résoudre une équation de degré 4 peut être ramenée à une équation de degré 3.

1. En adaptant le raisonnement fait au début de ce paragraphe, montrer que l'on peut se borner au cas d'une équation de la forme $P(z) = 0$ où :
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = z^4 + pz^2 + qz + r, \qquad \text{avec} \quad (p, q, r) \in \mathbb{C}^3.$$
2. Soit λ un nombre complexe. Expliciter un polynôme complexe T_λ de degré au plus 2 tel que :
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = \left(z^2 + \frac{\lambda}{2}\right) - T_\lambda(z).$$
3. Montrer que T_λ est le carré d'un polynôme de degré au plus 1 si et seulement si λ vérifie une équation de degré 3 que l'on précisera.
4. En déduire une méthode de résolution d'une équation du quatrième degré. Constater que les solutions peuvent s'exprimer à partir des coefficients à l'aide d'opérations usuelles et de racines carrées et cubiques de nombres complexes.

1. On part du polynôme $P(X) := X^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$. On se sert de la méthode du début du paragraphe et on calcule, pour $(z, h) \in \mathbb{C}^2$:
$$\begin{aligned} P(z+h) = &(h4 + 4h3z + 6h^2z^2 + 4hz^3 + z^4) + \\ &b(h^3 + 2h^2z + 3hz^2 + z^3) + \\ &c(z^2 + 2hz + h^2) + \\ &d(z+h) + e. \end{aligned}$$

Pour se ramener à un polynôme sans monôme de degré 3, il suffit alors de choisir $h = \frac{-b}{4}$. Par identification, on choisit $p := 6h^2 + 3bh^2 + c$, $q := 4h^3 + 3bh^2 + 2ch + d$ et $r := h^4 + bh^3 + ch^2 + dh + e$.

2. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. Pour $z \in \mathbb{C}$, on calcule :

$$\left(z^2 + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - az^2 - bz^2 - c = z^4 - z^2(\lambda + a) - bz - d + \frac{\lambda^2}{4}.$$

Pour que l'expression obtenue soit égale à $P(z)$, il faut alors déterminer la valeur de (a, b, c), soit le système :

$$\begin{cases} p = -\lambda - a \\ -b = q \\ r = \dfrac{\lambda^2}{4} - d \end{cases} \iff \begin{cases} a = -\lambda - p \\ b = -q \\ d = \dfrac{\lambda^2}{4} - r \end{cases}$$

En posant :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad T_\lambda(z) := (-\lambda - p)z^2 - qz + \frac{\lambda^2}{4} - r,$$

on obtient un polynôme qui convient.

3. Un polynôme du second degré est le carré d'un polynôme de degré 1 si et seulement si il admet une racine double, soit un discriminant nul. On calcule alors ce dernier noté $\Delta(\lambda)$:

$$\Delta(\lambda) = q^2 + (\lambda + p)(\lambda^2 - 4r) = \lambda^3 + p\lambda^2 - 4r\lambda - 4pr,$$

autrement dit, λ doit être solution du polynôme de degré 3, $\Delta(\lambda)$.

4. Pour étudier les racines d'un polynôme de degré 4, on se ramène à l'étude d'un polynôme sans monôme de degré 3, qui peut alors s'exprimer comme somme de polynôme de degré 4 et 2, tout deux exprimable comme carré parfait. Obtenir une racine de P revient donc à résoudre des équations polynomiales de degré 2. Enfin, l'ensemble des manipulations algébriques n'a fait qu'utiliser les opérations arithmétiques standards, et la résolution entraîne l'utilisation de radicaux.

Remarque. Il s'avère qu'Abel et Ruffini ont eu l'intuition qu'au delà du degré 4, il n'était pas possible de déterminer des formules générales pour exprimer les racines des polynômes en fonction des coefficients, en utilisant les opérations arithmétiques élémentaires ainsi que les radicaux. Ce résultat fut montré un peu plus tard, d'une manière satisfaisante et transformant radicalement l'étude des algébriste, par Galois et avec lui, la naissante Théorie des groupes.

EXERCICE 442 (④) par Teiki (Formule d'interpolation de Lagrange)

Soient $n \in \mathbb{N}$, $x_0, ..., x_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts. Pour $j \in \{0, ..., n\}$, on pose :

$$\forall x \in \mathbb{K}, L_j(x) = \prod_{\substack{0 \leq i \leq n \\ i \neq j}} \left(\frac{x - x_i}{x_j - x_i}\right)$$

a) Montrer que, pour j et k dans $\{0, ..., n\}$, $L_j(x_k)$ vaut 0 si $j \neq k$,1 si $j = k$.

b) Soit P une fonction polynômiale à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré au plus n. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{K}, P(x) = \sum_{i=0}^{n} P(x_i)L_i(x)$$

a) Soit $k \in \{0, ..., n\}$.
Si $j \neq k$:

$$L_j(x_k) = \frac{x_k - x_k}{x_j - x_k} \prod_{\substack{0 \leq i \leq n \\ i \neq j \\ i \neq k}} \left(\frac{x_k - x_i}{x_j - x_i}\right) = 0$$

Si $j = k$:

$$L_j(x_j) = \prod_{\substack{0 \leq i \leq n \\ i \neq j}} \left(\frac{x_j - x_i}{x_j - x_i}\right) = 1$$

b) Ainsi, pour tout k dans $\{0,...,n\}$:

$$\sum_{i=0}^{n} P(x_i)L_i(x_k) = P(x_k)L_k(x_k) = P(x_k)$$

. D'où la coïncidence de P de degré au plus n avec un autre polynôme en n+1 points distincts. Ainsi, par rigidité des polynômes :

$$\forall x \in \mathbb{K}, P(x) = \sum_{i=0}^{n} P(x_i)L_i(x)$$

Remarque. Ce résultat sera redémontré en sup.

EXERCICE 443 (④) Par Lancelot

1. Soient $n \in \mathbb{N}$, P un polynôme de degré n à coefficients complexes. On suppose qu'il existe $n+1$ nombres rationnels distincts $x_0, \ldots, x_n$ tels que :

$$\forall k \in \{0, \ldots, n\}, \quad P(x_k) \in \mathbb{Q}.$$

   Montrer que P est à coefficients dans $\mathbb{Q}$.

2. Réciproquement, soient $n \in \mathbb{N}$, $x_0, \ldots, x_n$ des nombres rationnels distincts, $y_0, \ldots, y_n$ des nombres rationnels. Montrer qu'il existe un polynôme de degré au plus n à coefficients rationnels tel que :

$$\forall k \in \{0, \ldots, n\}\}, \quad P(x_k) = y_k.$$

1. On exprime P dans la base $(L_j)_{0\leq j\leq n}$ aux points $x_0, \ldots, x_k$:

$$\forall x \in \mathbb{C}, \quad P(x) = \sum_{j=0}^{n} P(x_j)L_j(x).$$

   Il reste à vérifier que les $(L_j)_{0\leq j\leq n}$ sont à coefficients rationnels. Pour cela, on fixe $j \in [\![0;n]\!]$, et observons que :

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \quad \forall i \in [\![0;n]\!]\backslash\{j\} = \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \in \mathbb{Q},$$

   par conséquent L_j est bien à coefficients rationnels et le résultat suit.

2. Il suffit de considérer le polynôme :

$$P(X) := \sum_{j=0}^{n} y_j L_j(x),$$

   où les $(L_j)_{0\leq j\leq n}$ sont les polynômes de Lagrange aux points $x_0, \ldots, x_k$.

EXERCICE 444 (④) Par Lancelot Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et P un polynôme complexe de degré au plus $n-1$.

1. Montrer que

$$P(0) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P\left(\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)\right).$$

   On pourra utiliser l'exercice 390 de **10.10**.

2. En déduire que, si $a \in \mathbb{C}^*$, alors

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = \sum_{k=0}^{n-1} P\left(z + a\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)\right).$$

1. On écrit :
$$\forall z\in\mathbb{C},\quad P(z)=\sum_{k=0}^{n-1}a_kz^k,$$
avec $(a_k)_{0\leq k\leq n-1}$ une certaine famille de complexes. Ainsi, $P(0)=a_0$. On calcule alors :
$$\sum_{j=0}^{n-1}P\left(\exp\left(\frac{2ij\pi}{n}\right)\right)=\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}a_k\exp\left(\frac{2ij\pi}{n}\right)^k=\sum_{k=0}^{n-1}a_k\sum_{j=0}^{n-1}\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)^j,$$
qui, avec l'exercice 390 donne na_0 et le résultat en découle.
2. Fixons $z\in\mathbb{C}$ et posons $Q(Z):=P(z+aZ)$, de sorte que $P(z)=Q(0)$. La question a. donne alors que :
$$Q(0)=\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}Q\left(\exp\left(\frac{2ij\pi}{n}\right)\right),$$
d'où l'on tire que :
$$P(z)=\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n}P\left(z+a\exp\left(\frac{2ij\pi}{n}\right)\right),$$
ce qu'il fallait obtenir.

11.7 Complément : polynômes de Tchebychev

Exercice 445 (②) par Ylan

Montrer que la fonction polynomiale T_p est paire si p est pair, impaire si p est impair.

Soit p un entier pair. Soit $x\in\mathbb{R}$. Nous avons d'après le théorème 24 :
$$T_p(-x)=\sum_{l=0}^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor}\binom{p}{2l}(-x)^{p-2l}(x^2-1)^l$$
$$=\sum_{l=0}^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor}(-1)^{p-2l}\binom{p}{2l}x^{p-2l}(x^2-1)^l$$
Comme p et $-2l$ sont pairs, $p-2l$ est pair également et donc $(-1)^{p-2l}=1$, d'où :
$$T_p(-x)=\sum_{l=0}^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor}\binom{p}{2l}x^{p-2l}(x^2-1)^l=T_p(x),\text{ donc :}$$
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad T_p(-x)=T_p(x),\text{ et donc }T_p\text{ est paire}$$

De même, soit p un entier impair. Soit $x\in\mathbb{R}$. Nous avons d'après le théorème 24 :
$$T_p(-x)=\sum_{l=0}^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor}\binom{p}{2l}(-x)^{p-2l}(x^2-1)^l$$
$$=\sum_{l=0}^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor}(-1)^{p-2l}\binom{p}{2l}x^{p-2l}(x^2-1)^l$$
Comme p est impair et $-2l$ est pair, $p-2l$ est impair et donc $(-1)^{p-2l}=-1$, d'où :
$$T_p(-x)=\sum_{l=0}^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor}-\binom{p}{2l}x^{p-2l}(x^2-1)^l=-\sum_{l=0}^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor}\binom{p}{2l}x^{p-2l}(x^2-1)^l=-T_p(x),\text{ donc :}$$
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad T_p(-x)=-T_p(x),\text{ et donc }T_p\text{ est impaire}$$

Exercice 446 (③) par Ylan

a) Montrer que
$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad T_p(x) + T_{p+2}(x) = 2xT_{p+1}(x).$$
b) Retrouver à l'aide de la question a) le degré et le coefficient dominant de T_p si $p \in \mathbb{N}^*$

a) Soit $p \in \mathbb{N}$, soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a :
$$\begin{aligned}
T_p(\cos(\theta)) + T_{p+2}(\cos(\theta)) &= \cos(p\theta) + \cos((p+2)\theta)\\
&= \cos(p\theta) + \cos(p\theta + 2\theta), \text{ puis en développant :}\\
&= \cos(p\theta) + \cos(p\theta)\cos(2\theta) - \sin(p\theta)\sin(2\theta)\\
&= \cos(p\theta)\left(1 + \cos(2\theta)\right) - \sin(p\theta)\sin(2\theta)\\
&= 2\cos^2(\theta)\cos(p\theta) - 2\sin(p\theta)\sin(\theta)\cos(\theta)\\
&= 2\cos(\theta)\left(\cos(p\theta)\cos(\theta) - \sin(p\theta)\sin(\theta)\right), \text{ puis en réduisant :}\\
&= 2\cos(\theta)\cos(p\theta + \theta)\\
&= 2\cos(\theta)\cos\left((p+1)\theta\right)\\
&= 2\cos(\theta)T_{p+1}(\cos(\theta))
\end{aligned}$$

Comme tout élément de $[-1;1]$ admet au moins un antécédent par cos :
$$\forall x \in [-1;1], \quad T_p(x) + T_{p+2}(x) = 2xT_{p+1}(x)$$
T_p, T_{p+2} et $2xT_{p+1}$ sont des fonctions polynômiales qui coïncident sur $[-1;1]$ qui est un ensemble infini, donc d'après le théorème 23, elles sont égales et donc :
$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad T_p(x) + T_{p+2}(x) = 2xT_{p+1}(x)$$

b) D'après la question a, nous avons :
$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad T_{p+2}(x) = 2xT_{p+1}(x) - T_p(x)$$
Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :
$$\mathcal{P}_n : \quad T_n \text{ est de degré } n \text{ et de coefficient dominant } 2^{n-1}$$
Montrons par récurrence double que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Initialisation.
On a : $T_1(x) = x$, donc T_1 a pour coefficient dominant $1 = 2^0 = 2^{1-1}$ et pour degré 1, et donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.
On a : $T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1$, donc T_2 a pour coefficient dominant $2 = 2^1 = 2^{2-1}$ et pour degré 2 et donc $\mathcal{P}_2$ est également vraie.

Hérédité.
Supposons $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ vraies pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On a alors T_{n+1} de degré $n+1$ et de coefficient dominant 2^n et T_n de degré n. Nous avons donc :
$$T_{n+1}(x) = 2^n x^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \text{ et :}$$
$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k, \text{ avec } a_0, ..., a_n \text{ et } b_0, ..., b_n \text{ des réels. On a donc :}$$
$$\begin{aligned}
T_{n+2}(x) &= 2xT_{n+1}(x) + T_n(x)\\
&= 2x\left(2^n x^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) + \sum_{k=0}^{n} b_k x^k
\end{aligned}$$

$$= 2^{n+1}x^{n+2} + \sum_{k=1}^{n+1} 2a_{k-1}x^k + \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$$

Cela correspond à un polynôme de degré $n+2$ et de coefficient dominant $2^{n+1} = 2^{n+2-1}$. Ainsi, $\mathcal{P}_{n+2}$ est alors vraie.

Conclusion.
$\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont vraies et $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ impliquent $\mathcal{P}_{n+2}$, donc par récurrence double, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et donc T_p a pour degré p et pour coefficient dominant 2^{p-1} si $p \in \mathbb{N}^*$.

EXERCICE 447 (①) par Ylan

Expliciter les fonctions polynômiales T_3 et T_4.

D'après l'exercice 446, nous avons :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad T_{p+2}(x) = 2xT_{p+1}(x) - T_p(x)$$

Nous avons de plus : $T_0(x) = 1$, et $T_1(x) = x$. On a donc :

$$T_2(x) = 2x \times x - 1 = 2x^2 - 1, \text{ puis :}$$

$$T_3(x) = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 2x - x = 4x^3 - 3x, \text{ et :}$$

$$T_4(x) = 2x(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1) = 8x^4 - 6x^2 - 2x^2 + 1 = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

EXERCICE 448 (③) par Ylan

a) Pour p dans $\mathbb{N}^*$, déterminer les réels θ tels que $\cos(p\theta) = 0$

b) Pour p dans $\mathbb{N}^*$, établir la factorisation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T_p(x) = 2^{p-1} \prod_{k=0}^{p-1} \left(x - \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2p} \right) \right)$$

a) Sur $[-\pi; \pi]$, les solutions de l'équation $\cos(x) = 0$ sont $\frac{-\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.
Or, cos est 2π-périodique, donc les solutions de l'équation $\cos(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$ sont $\frac{-\pi}{2} + 2k\pi$ et $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ où k varie dans $\mathbb{Z}$, ce qui s'écrit plus simplement $\frac{\pi}{2} + k\pi$ où k varie dans $\mathbb{Z}$.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(p\theta) = 0$. On a alors $k \in \mathbb{Z}$, tel que $p\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$. On a donc :

$$2p\theta = \pi + 2k\pi = \pi(2k+1), \text{ d'où :}$$

$$\theta = \frac{(2k+1)\pi}{2p}$$

Réciproquement, soit $k \in \mathbb{Z}$. On a alors :

$$\cos\left(p\frac{(2k+1)\pi}{2p} \right) = \cos\left(k\pi + \frac{\pi}{2} \right) = 0$$

Les réels θ tels que $\cos(p\theta) = 0$ sont donc les réels de la forme $\theta = \frac{(2k+1)\pi}{2p}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

b) Soit $k \in \{0, ..., p-1\}$. Nous avons alors :

$$T_p\left(\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2p} \right) \right) = \cos\left(p\frac{(2k+1)\pi}{2p} \right) = 0, \text{ d'après la question a.}$$

Pour tout $k \in \{0, ..., p-1\}$, $\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2p} \right)$ est donc racine de T_p/

Montrons que ces racines sont distinctes.

Soit $m, j \in \{0, ..., p-1\}$, avec $m \neq j$. On peut alors supposer sans perte de généralité $m > j$. Nous avons donc :

$$0 \leq j < m \leq p-1, \text{ d'où :}$$

$$0 \leq 2j+1 < 2m+1 \leq 2p-1 < 2p. \text{ On a donc :}$$

$$0 \leq \frac{(2j+1)\pi}{2p} < \frac{(2m+1)\pi}{2p} < \pi, \text{ puis par décroissance stricte de cos sur } [0;\pi] :$$

$$-1 < \cos\left(\frac{(2m+1)\pi}{2p}\right) < \cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{2p}\right) \leq 1$$

On a donc plus spécifiquement : $\cos\left(\frac{(2m+1)\pi}{2p}\right) \neq \cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{2p}\right)$, et donc $\cos\left(\frac{\pi}{2p}\right)$, $\cos\left(\frac{3\pi}{2p}\right)$,..., $\cos\left(\frac{(2p-1)\pi}{2p}\right)$ sont p racines distinctes de T_p.

Or, T_p est de degré p et de coefficient dominant 2^{p-1}, donc d'après les théorèmes 19 et 20, les racines de T_p sont les $\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2p}\right)$, avec $k \in \{0, ..., p-1\}$, et T_p admet la factorisation suivante :

$$T_p(x) = 2^{p-1} \prod_{k=0}^{p-1} \left(x - \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2p}\right)\right)$$

EXERCICE 449 (②) Par Lancelot Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les éléments de $[-1;1]$ tels que $|T_p| = 1$ et les ranger par ordre croissant.

On part de l'identité circulaire vérifiée par T_p :

$$T_p(\cos(\theta)) = \cos(p\theta),$$

puisque, lorsque θ parcours $[-\pi;\pi]$, $\cos(\theta)$ parcours $[-1;1]$. Ainsi, il nous faut résoudre :

$$\cos(p\theta) = 1,$$

dont les solutions sont les :

$$\cos\left(\frac{k\pi}{p}\right), \quad k \in [\![0;p]\!].$$

On les range par ordre croissant (attention cos est décroissant sur $[0;\pi]$) :

$$\cos(\pi) < \cos\left(\frac{(p-1)\pi}{p}\right) < \cdots < \cos\left(\frac{\pi}{p}\right) < \cos(0).$$

EXERCICE 450 (④) Par Lancelot

1. Soit $p \in \mathbb{N}$. En dérivant l'égalité qui définit T_p, montrer qu'il existe une unique fonction polynômiale U_p telle que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \sin(\theta) U_p(\cos(\theta)) = \sin(p\theta).$$

   Préciser le degré, le coefficient dominant, et la parité de U_p.
2. Pour quels $p \in \mathbb{N}$ existe-t-il une fonction polynomiale P telle que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \sin(p\theta) = P(\cos(\theta))?$$

1. Par définition de T_p, on a que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_p(\cos(\theta)) = \cos(p\theta),$$

   En dérivant cette relation on obtient :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \sin(\theta) T_p'(\cos(\theta)) = p \sin(p\theta).$$

En posant, pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad U_p(x) := \frac{1}{p} T_p'(x)$, on obtient un polynôme vérifiant la relation demandée.

surcroît, Il est unique par construction.

On a vu avec l'exercice 446 que T_p est de degré p et de coefficient dominant 2^{n-1}. On en déduit que le degré de U_p est $p-1$ et son coefficient dominant est 2^{n-1}.

Enfin, on a vue que dans l'exercice 445 que si p est pair, alors T_p est pair, et que si p est impair,T_p est impair. Grâce à l'exercice 151, on conclue que si p est pair, alors U_p est impair, et que si p est impair, alors U_p est pair.

2. Commençons par une remarque, puisqu'il est possible d'exprimer toute fonction comme somme de fonctions paires et impaires, on peut déterminer, pour tout polynôme une condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme soit pair (resp. impair) : le degré des monômes qui le constituent doivent être pair (resp. impair). Par suite, on effectue une disjonction de cas :
   — Soit n est impair, auquel cas U_n est pair. D'après notre remarque, il existe donc un polynôme Q vérifiant :
   $$U_n(X) = Q(X^2),$$
   de sorte que :
   $$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \sin(\theta) U_n(\cos(\theta)) = \sin(\theta) R(1 - \sin^2(\theta)) = \sin(n\theta).$$
   Il suffit alors de poser $P(X) := XQ(1 - X^2)$.
   — Soit n est pair, auquel cas U_n est impair. D'après notre remarque, il existe donc un polynôme R vérifiant :
   $$U_n(X) = XR(X^2),$$
   de sorte que :
   $$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \sin^2(\theta) R(1 - \sin^2(\theta)) = \sin(n\theta),$$
   donc :
   $$\frac{\sin^2(\theta)}{t} R(1 - \sin^2(\theta)) = \frac{\sin(nt)}{t}.$$
   Observons alors que le membre de gauche tend vers 0 quand t tend vers 0, et que le membre de droite tend vers n lorsque t tend vers 0, ce qui est absurde. Lorsque n est pair il n'existe donc pas de polynôme satisfaisant la relation voulue.

EXERCICE 451 (⑤) par Ylan (Équations réciproques.)

Soit P un polynôme de degré n $\in \mathbb{N}^*$ à coefficients complexes :

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

On suppose que P est un polynôme réciproque, ce qui signifie que :

$$\forall k \in \{0, ..., n\}, a_k = a_{n-k}$$

a) Montrer que les racines de P dans $\mathbb{C}$ sont non nulles et que si z est racine de P, il en est de même de $\frac{1}{z}$.

b) Si $p \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}^*$, montrer que :

$$T_p\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(z^p + \frac{1}{z^p}\right).$$

c) En déduire que, si n est pair égal à 2m et si on pose $Z = z + \frac{1}{z}$, l'équation $P(z) = 0$ équivaut à une équation de degré m en Z.

d) Que se passe-t-il si n est impair ?

a) Nous avons $P(0) = a_0 = a_n \neq 0$ car P est de degré n, donc 0 n'est pas racine de P.
Soit z une racine de P. Nous avons alors : $z \neq 0$, et :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z^k = 0, \text{ d'où :}$$

$$\frac{1}{z^n} \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = 0, \text{ d'où :}$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z^{k-n} = 0, \text{ donc :}$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} \left(\frac{1}{z}\right)^{n-k} = 0, \text{ puis en posant } i = n-k, \text{ on obtient :}$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \left(\frac{1}{z}\right)^{i} = 0, \text{ d'où } P\left(\frac{1}{z}\right) = 0, \text{ et donc } \frac{1}{z} \text{ est bien racine de } P.$$

b) Nous avons d'après l'exercice 446 :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad T_p(x) + T_{p+2}(x) = 2xT_{p+1}(x).$$

$T_p + T_{p+2}$ et $2xT_{p+1}$ sont des polynômes qui coïncident sur $\mathbb{R}$ qui est un ensemble infini. Ils sont donc égaux sur $\mathbb{C}$ d'après le théorème 23, et donc :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, \quad T_p(z) + T_{p+2}(z) = 2zT_{p+1}(z)$$

Nous avons donc :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, \quad T_{p+2}(z) = 2zT_{p+1}(z) - T_p(z).$$

Soit $\mathcal{Q}_p$ la propriété définie pour tout $p \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{Q}_p : \forall z \in \mathbb{C}^*, \quad T_p\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(z^p + \frac{1}{z^p}\right)$$

Montrons par récurrence double que $\mathcal{Q}_p$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Initialisation.
Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a $T_0 = 1$, donc :

$$T_0\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) = 1 = \frac{1}{2} \times 2 = \frac{1}{2}\left(z^0 + \frac{1}{z^0}\right)$$

On a $T_1 = X$, donc :

$$T_1\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}\left(z^1 + \frac{1}{z^1}\right)$$

Ainsi, $\mathcal{Q}_0$ et $\mathcal{Q}_1$ sont bien vraies.

Hérédité.
Supposons $\mathcal{Q}_p$ et $\mathcal{Q}_{p+1}$ vraies pour un certain $p \in \mathbb{N}$ fixé. On a alors :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad T_p\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(z^p + \frac{1}{z^p}\right), \text{ et :}$$

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad T_{p+1}\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(z^{p+1} + \frac{1}{z^{p+1}}\right)$$

On a :

$$T_{p+2}\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) = 2\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) T_{p+1}\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) - T_p\ \left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right), \text{ d'où :}$$

$$T_{p+2}\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^{p+1}+\frac{1}{z^{p+1}}\right) - \frac{1}{2}\left(z^{p}+\frac{1}{z^{p}}\right), \text{ par hypothèse de récurrence}$$

$$= \frac{1}{2}\left(z^{p+2}+z^{p}+\frac{1}{z^{p}}+\frac{1}{z^{p+2}}\right) - \frac{1}{2}\left(z^{p}+\frac{1}{z^{p}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(z^{p+2}+\frac{1}{z^{p+2}}\right), \text{ et donc } \mathcal{Q}_{p+2} \text{ est alors vraie.}$$

Conclusion.
$\mathcal{Q}_0$ et $\mathcal{Q}_1$ sont vraies et $\mathcal{Q}_p$ et $\mathcal{Q}_{p+1}$ vraies impliquent $\mathcal{Q}_{p+2}$, donc par récurrence double, $\mathcal{Q}_p$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$, et donc :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}^*, \quad T_p\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(z^p+\frac{1}{z^p}\right)$$

c) On note (S), l'équation suivante d'inconnue z :

$$(S): \quad a_m + 2\sum_{k=1}^{m} a_{m-k} T_k\left(\frac{1}{2}z\right) = 0$$

Pour tout $k \in \{1;...;m\}$, T_k est de degré k donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_{m-k} T_k\left(\frac{1}{2}z\right)$ est de degré m en z, et donc (S) correspond à une équation de degré m.

Soit z une racine de P. On a alors $z \neq 0$ d'après la question a, et :

$$\sum_{k=0}^{2m} a_k z^k = 0, \text{ puis comme } z \neq 0 :$$

$$z^{-m}\sum_{k=0}^{2m} a_k z^k = 0, \text{ d'où :}$$

$$\sum_{k=0}^{2m} a_k z^{k-m} = 0, \text{ puis en séparant les sommes :}$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} a_k z^{k-m} + a_m + \sum k = m+1^{2m} a_k z^{k-m} = 0$$

Comme P est un polynôme réciproque, on a :

$$\sum_{k=0}^{m-1} a_k \left(\frac{1}{z}\right)^{m-k} + a_m + \sum_{k=m+1}^{2m} a_{2m-k} z^{k-m} = 0, \text{ puis en posant } i = 2m-k \text{ dans la seconde somme, on obtient :}$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} a_k \left(\frac{1}{z}\right)^{m-k} + a_m + \sum_{i=0}^{m-1} a_i z^{m-i} = 0, \text{ d'où :}$$

$$a_m + \sum_{k=0}^{m-1} a_k \left(z^{m-k} + \left(\frac{1}{z}\right)^{m-k}\right) = 0$$

Nous avons alors d'après la question b :

$$a_m + 2\sum_{k=0}^{m-1} a_k T_{m-k}\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right) = 0, \text{ puis en posant } i = m-k, \text{ on obtient :}$$

$$a_m + 2\sum_{i=1}^{m} a_{m-i} T_i\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right) = 0, \text{ d'où :}$$

$$a_m + 2\sum_{i=1}^{m} a_{m-i} T_i\left(\frac{1}{2}Z\right) = 0, \text{ et donc } Z \text{ est alors solution de } (S).$$

Réciproquement, si Z est solution de (S), alors on a :

$$a_m + 2\sum_{k=1}^{m} a_{m-k}T_k\left(\frac{1}{2}Z\right) = 0, \text{ d'où :}$$

$$a_m + 2\sum_{k=0}^{m-1} a_kT_{m-k}\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right) = 0, \text{ d'où :}$$

$$a_m + \sum_{k=0}^{m-1} a_k\left(z^{m-k} + \left(\frac{1}{z}\right)^{m-k}\right) = 0, \text{ puis par réciprocité de } P \text{ :}$$

$$a_m + \sum_{k=0}^{m-1} a_{2m-k}z^{m-k} + \sum_{k=0}^{m-1} a_kz^{k-m} = 0, \text{ puis en posant } i = 2m-k \text{ dans la 1ère somme :}$$

$$a_mz^0 + \sum_{i=m+1}^{2m} a_iz^{i-m} + \sum_{k=0}^{m-1} a_kz^{k-m} = 0, \text{ d'où :}$$

$$\sum_{k=0}^{2m} a_kz^{k-m} = 0, \text{ d'où :}$$

$$z^{-m}\sum_{k=0}^{2m} a_kz^k = 0, \text{ d'où :}$$

$$z^{-m}P(z) = 0, \text{ puis comme } z^{-m} \neq 0,\ P(z) = 0, \text{ et donc } z \text{ est racine de } P.$$

L'équation $P(z) = 0$ équivaut donc à une équation de degré m en Z.

d) On considère n impair. On a alors $n = 2m+1$, avec m un entier.
Montrons que -1 est racine de P. Nous avons :

$$P(-1) = \sum_{k=0}^{2m+1} a_k(-1)^k = \sum_{k=0}^{m} a_k(-1)^k + \sum_{k=m+1}^{2m+1} a_k(-1)^k, \text{ puis par réciprocité de } P \text{ :}$$

$$P(-1) = \sum_{k=0}^{m} a_k(-1)^k + \sum_{k=m+1}^{2m+1} a_{2m+1-k}(-1)^k, \text{ puis en posant } i = 2m+1-k, \text{ dans la 2ème somme, on obtient :}$$

$$P(-1) = \sum_{k=0}^{m} a_k(-1)^k + \sum_{i=0}^{m} a_i(-1)^{2m+1-i} = \sum_{k=0}^{m} a_k\left((-1)^k + (-1)^{2m+1-k}\right)$$

Nous avons k et -k de même parité donc k et $2m+1-k$ de parité différente et donc $(-1)^k + (-1)^{2m+1-k} = 0$, d'où :

$$P(-1) = \sum_{k=0}^{m} a_k \times 0 = 0$$

-1 est donc bien racine de P

Il existe donc, d'après le théorème 18, un polynôme Q de degré $2m$ tel que :

$$P(z) = (z+1)Q(z)$$

On note $Q(z) = \sum_{k=0}^{2m} b_kz^k$, avec $b_0, ..., b_{2m}$, des complexes.

Montrons que Q est un polynôme réciproque.
Nous avons : $P(z) = (z+1)Q(z)$, donc : $P(z) = zQ(z) + Q(z)$, d'où :

$$\sum_{k=0}^{2m+1} a_kz^k = \sum_{k=1}^{2m+1} b_{k-1}z^k + \sum_{k=0}^{2m} b_kz^k, \text{ puis en considérant } b_{-1} = b_{2m+1} = 0, \text{ on obtient :}$$

$$\sum_{k=0}^{2m+1} a_k z^k = \sum_{k=0}^{2m+1} (b_k + b_{k-1})\, z^k$$

On a alors d'après le théorème 16 :

$$\forall k \in \{0, ..., 2m+1\}, \quad a_k = b_{k-1} + b_k, \text{ avec } b_0 = a_0 \text{ et } b_{2m} = a_{2m+1}$$

Soit $\mathcal{R}_p$ la propriété définie pour tout $p \in \{0, ..., 2m\}$ par :

$$\mathcal{R}_p : \quad b_p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} a_k$$

Montrons par récurrence que $\mathcal{R}_p$ est vraie pour tout $p \in \{0, ..., 2m\}$

Initialisation.
On a : $b_0 = a_0$, et : $\sum_{k=0}^{0} (-1)^{0-k} a_k = a_0$, donc : $b_0 = \sum_{k=0}^{0} (-1)^{0-k} a_k$, et donc $\mathcal{R}_0$ est vraie.

Hérédité.
Supposons $\mathcal{R}_p$ vraie pour un certain $p \in \{0, ..., 2m-1\}$ fixé. On a alors :

$$b_p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} a_k$$

Nous avons par ailleurs $p+1 \in \{0, ..., 2m\}$, donc :

$$a_{p+1} = b_{p+1} + b_p, \text{ d'où :}$$

$$b_{p+1} = a_{p+1} - b_p = a_{p+1} - \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} a_k$$

$$= (-1)^{p+1-(p+1)} a_{p+1} + \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p+1-k} a_k$$

$$= \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^{p+1-k} a_k, \text{ et donc } \mathcal{R}_{p+1} \text{ est alors vraie.}$$

Conclusion.
$\mathcal{R}_0$ est vraie et $\mathcal{R}_p$ est héréditaire donc par récurrence, est vraie pour tout $p \in \{0, ..., 2m\}$, et donc :

$$\forall p \in \{0, ..., 2m\}, \quad b_p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} a_k$$

Montrons que :

$$\forall p \in \{0, ..., 2m\}, \quad b_{2m-p} = b_p$$

On peut se limiter sans perte de généralité à $p \leq m-1$, le cas $p = m$ étant immédiat et le cas $p > m$ pouvant se ramener par symétrie au cas $p \leq m-1$.
Soit $p \in \{0, ..., m-1\}$. Nous avons :

$$b_{2m-p} - b_p = \sum_{k=0}^{2m-p} (-1)^{2m-p-k} a_k - \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} a_k.$$

Comme p et $-p$ sont de même parité et que $2m$ est pair, $2m-p-k$ et $p-k$ sont de même parité, donc $(-1)^{2m-p-k} a_k = (-1)^{p-k} a_k$, et donc :

$b_{2m-p} - b_p = \sum_{k=p+1}^{2m-p} (-1)^{2m-p-k} a_k$, puis en séparant les sommes et en utilisant la réciprocité de P :

$$b_{2m-p} - b_p = \sum_{k=p+1}^{m} (-1)^{2m-p-k} a_k + \sum_{k=m+1}^{2m-p} (-1)^{2m-p-k} a_{2m+1-k}$$

On pose $i = 2m+1-k$ dans la 2ème somme. On a alors :

$$\begin{aligned} b_{2m-p} - b_p &= \sum_{k=p+1}^{m} (-1)^{2m-p-k} a_k + \sum_{i=p+1}^{m} (-1)^{i-p-1} a_i \\ &= \sum_{k=p+1}^{m} a_k \left((-1)^{2m-p-k} + (-1)^{k-p-1} \right) \end{aligned}$$

Nous avons k et $-k$ de même parité donc comme $2m$ est pair et -1 impair, $2m-p-k$ et $k-p-1$ sont de parité différente, et donc $(-1)^{2m-p-k} + (-1)^{k-p-1} = 0$, d'où $b_{2m-p} - b_p = 0$, et donc :

$$\forall p \in \{0, ..., 2m\}, \quad b_{2m-p} = b_p$$

Q est donc un polynôme réciproque de degré $2m$, donc en utilisant la question c, l'équation $Q(z) = 0$ équivaut à (R), une équation de degré m en Z.
Comme $P(z) = (z+1)Q(z)$, l'équation $P(z) = 0$ équivaut donc à $z = -1$ ou à Z est solution de (R).

11.8 Complément : vers les formules de Viète

Exercice 452 (②) par Antonin D

On conserve les notations précédentes. Exprimer $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ en fonction de a,b,c,d.

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) = \frac{b^2}{a^2} + \frac{2c}{a} = \frac{b^2 + 2ac}{a^2}$$

Exercice 453 (③) Par Lancelot En utilisant l'exercice 400, de **10.10**, calculer la somme et le produit des trois réels,

$$\cos\left(\frac{2k\pi}{7}\right), \quad k \in \{1, 2, 3\}.$$

On reprend le polynôme de l'exercice 400 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) := x^3 + x^2 - 2x - 1.$$

La méthode utilisée dans l'exercice 400 laisse remarquer que les nombres :

$$2\cos\left(\frac{k\pi}{7}\right), \quad k \in [\![1; 3]\!],$$

sont racines de P. en particuliers, les nombres :

$$\cos\left(\frac{k\pi}{7}\right), \quad k \in [\![1; 3]\!],$$

sont racines du polynôme $Q(X) := P(\frac{1}{2}X)$. Par conséquent, on déduit des formules de Viète que :

$$\sum_{k=1}^{3} \cos\left(\frac{k\pi}{7}\right) = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^{3} \cos\left(\frac{k\pi}{7}\right) = \frac{1}{8}.$$

Exercice 454 (③) par Antonin D

Soient x_1, x_2, x_3, trois nombres complexes. On note P le polynôme unitaire défini par :

$$\forall x \in \mathbb{C}, \quad P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

On note aussi

$$\forall x \in \mathbb{C}, \quad P(x) = x^3 - sx^2 + ux - p.$$

En sommant les égalités

$$x_i^3 = sx_i^2 - ux_i + p \quad \text{ pour } i \in \{1, 2, 3\},$$

obtenir une identité remarquable à

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3x_1x_2x_3.$$

On a

$$p = x_1x_2x_3,\ u = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3\ et\ s = x_1 + x_2 + x_3$$

Première formule

$$\underbrace{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3}_{\text{en remplaçant par les données de l'énoncer}} = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)$$

Deuxième formule

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3)[(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2]$$

Exercice 455 (④) Par Lancelot On reprend les notations de l'exercice précédent et on suppose que x_2, x_2, x_3 sont dans $\mathbb{R}_+^*$, que $x_1x_2, x_3 = 1$ et que

$$x_1 + x_2 + x_3 > \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}.$$

Montrer que l'un exactement des trois réels x_1, x_2, x_3 est strictement supérieur à 1.

D'après l'exercice précédent, on a que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + x(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - x_1x_2x_3.$$

En évaluant ces expressions en 1 il vient que :

$$(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 - x_1 - x_2 - x_3.$$

Utilisons maintenant nos hypothèses. De l'inégalité vérifiée par les réels x_1, x_2, x_3, on déduit que :

$$0 > x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 - x_1 - x_2 - x_3,$$

donc :

$$0 > (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3).$$

Il y a donc deux cas :

— Soit l'un des réels x_1, x_2, x_3 est strictement plus grand que 1.

— Soit les trois réels x_1, x_2, x_3 sont strictement plus grand que 1. Auquel cas $x_1x_2x_3 > 1$ ce qui est absurde.

Par conséquent, on en déduit que exactement l'un des trois réels x_1, x_2, x_3 est strictement plus grand que 1, ce qu'il fallait montrer.

Exercice 456 (②) Par Lancelot Écrire les formules de Viète pour un polynôme de degré 4.

Pour résoudre cet exercice, on considère le polynôme $P(X) := (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)(X - x_4)$, et on développe son expression pour obtenir :

$$\begin{aligned} P(x) =& X^4 - X^3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + \\ & X^2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_3x_4) + \\ & X(-x_1x_2x_3 - x_1x_2x_4 - x_1x_3x_4 - x_2x_3x_4) + \\ & x_1x_2x_3x_4, \end{aligned}$$

ce qui permet d'obtenir les relations de Viète.

Exercice 457 (③) Par Lancelot

1. Déterminer le coefficient de x^{n-2} dans le membre de droite de (1).
2. Exprimer la somme $\sum_{j=1}^{n} x_j$ en fonction de a_n, a_{n-1} et a_{n-2}.

1. En essayant de développer le produit, on se rend compte que :

$$a_{n-2} = a_n \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ i \neq j}} x_i x_j,$$

d'où :

$$\frac{a_{n-2}}{a_n} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ i \neq j}} x_i x_j.$$

(pour mieux s'en rendre compte on peut regarder l'exercice précédent)

2. On calcule que :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2 &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} x_i x_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} x_i x_j. \end{aligned}$$

Observons alors que :

$$\sum_{j=1}^{i-1} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} x_i x_j = 2 \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ i \neq j}} x_i x_j,$$

dont il découle que :

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) - 2 \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ i \neq j}} x_i x_j,$$

qui, combinée avec a. et les formules de Viète, donne :

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^2 = \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^2 - 2\frac{a_{n-2}}{a_n}.$$

Exercice 458 (②) Par Lancelot Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme et le produit des racines n-ièmes de 1 à partir de la factorisation :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(z - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right).$$

En utilisant les formules de Viète, il vient que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = -\frac{0}{1} = 0,$$

et que :

$$\prod_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = -1^n \frac{-1}{1} = (-1)^{n+1}.$$

11.9 Problème : un second calcul de $\zeta(2)$

PROBLÈME 2 (5) par Octave

1. Démontrer que pour tout t dans $]0, \pi/2]$, les inégalités :

$$\operatorname{cotan}(t) \leqslant \frac{1}{t}, \quad \frac{1}{t^2} - 1 \leqslant \operatorname{cotan}^2(t) \leqslant \frac{1}{t^2}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$
   a) Pour $z \in \mathbb{C}$, établir la formule :

$$(z+i)^n - (z-i)^n = 2ni \prod_{k=1}^{n-1} \left(z - \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)$$

   b) Soit $m \in \mathbb{N}$. Pour z dans $\mathbb{C}$, montrer :

$$(z-i)^{2m+1} - (z-i)^{2m+1} = (4m+2)i \prod_{k=1}^{m} \left(z^2 - \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\right)$$

3. a) Soit m dans $\mathbb{N}^*$. En utilisant la formule du binôme, calculer le coefficient de z^{2m-2} dans le développement de

$$(z+i)^{2m-1} - (z-i)^{2m-1}$$

   b) Soit m dans $\mathbb{N}^*$. Déduire des questions 3.a) et 2.b) la formule :

$$\sum_{k=1}^{m} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right) = \frac{m(2m-1)}{3}$$

   On pourra utiliser le polynôme Q_m défini par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Q_m(t) = \prod_{k=1}^{m} \left(t - \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\right)$$

4. Déduire des questions 1. et 3.b) la valeur de $\zeta(2)$

1. Soit Δ la droite d'équation $y = x$
Δ est tangente à la courbe représentative de la fonction sinus en 0.
Par concavité et positivité de sinus sur $[0, \pi/2]$ on a :

$$\begin{aligned} &\forall t \in]0, \pi/2], \sin(t) \leqslant t \\ &\implies \frac{1}{\sin^2(t)} \geqslant \frac{1}{t^2} \quad \text{et} \quad \cos^2(t) \geqslant 1 - t^2 \\ &\implies \operatorname{cotan}^2(t) \geqslant \frac{1}{t^2} - 1 \end{aligned}$$

De plus, Δ est tangente à la courbe représentative de la fonction tangente en 0.
Par convexité et positivité de la tangente sur $[0;\pi/2[$, on a :

$$\begin{aligned}&\forall t \in]0,\pi/2[, \tan(t) \leqslant t \implies \text{cotan}^2(t) \leqslant \frac{1}{t^2}\\ &\text{et cotan}^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \implies \text{cotan}^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \leqslant \frac{1}{\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

D'où : $\forall t \in]0,\pi/2], \dfrac{1}{t^2} - 1 \leqslant \text{cotan}^2(t) \leqslant \dfrac{1}{t^2}$

2.a) On note $(z+i)^n - (z-i)^n = P_n(z)$
D'après le résultat de l'exercice 400, P_n a pour racine les éléments de l'ensemble S tel que

$$S = \left\{-\text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2}\right) : k \in [\![1; n-1]\!]\right\}$$

On utilise la formule du binôme de Newton pour déterminer le coefficient de z^n et z^{n-1} de $P_n(z)$
Le coefficient de z^n vaut 0 et celui de de z^{n-1} vaut $2ni$
On en déduit que $P_n(z)$ est de degré $n-1$ et de coefficient dominant $2ni$
C'est pratique puisque cela nous dispensera de nous occuper de la multiplicité des racines dans la forme factorisée (le cardinal de S valant $n-1$)
Ecrivons $P_n(z)$ sous forme factorisée :

$$P_n(z) = 2ni\prod_{k=1}^{n-1}\left(z - \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)$$

On a établi la formule souuhaitée.

2.b) Soit a un réel. On démontre sans difficulté que si cotan(a) est défini, alors :

$$\begin{cases}\text{cotan}(\pi - a) & = -\text{cotan}(a)\\ \text{cotan}(\pi + a) & = \text{cotan}(a)\end{cases}$$

Ceci étant dit, continuons :

$$\begin{aligned}P_{2m+1}(z) &= 2(2m+1)i\prod_{k=1}^{2m}\left(z - \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\right)\\ &= (4m+2)i\prod_{k=1}^{m}\left(z - \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\right)\prod_{k=m+1}^{2m}\left(z - \text{cotan}\left(\pi - \frac{k\pi}{2m+1}\right)\right)\\ &= (4m+2)i\prod_{k=1}^{m}\left(z + \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\right)\prod_{k=m+1}^{2m}\left(z - \text{cotan}\left(\frac{(2m+1-k)\pi}{2m+1}\right)\right)\end{aligned}$$

En effectuant un changement d'indice sur le second produit on obtient :

$$\begin{aligned}&= (4m+2)i\prod_{k=1}^{m}\left(z - \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\right)\prod_{k=1}^{m}\left(z + \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\right)\\ &= (4m+2)i\prod_{k=1}^{m}\left(z - \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\right)\left(z + \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\right)\\ &= (4m+2)i\prod_{k=1}^{m}\left(z^2 - \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\right)\end{aligned}$$

3.a) En utilisant la formule du binôme on montre que le coefficient (noté c_1) de z^{2m-2} de P_{2m+1} vaut :

$$\begin{aligned}c_1 &= \binom{2m+1}{2m-2}\cdot\left(i^3 - (-i)^3\right)\\ &= -i\frac{(2m-1)2m(2m+1)}{3}\\ &= -i\frac{(2m+1)m(4m+2)}{3}\end{aligned}$$

3.b)

$$\begin{aligned}
Q_m(t) &= \prod_{k=1}^{m}\left(t-\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\right)\\
&= t\prod_{k=2}^{m}\left(z-\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\right)-\operatorname{cotan}^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right)\prod_{k=2}^{m}\left(z-\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\right)
\end{aligned}$$

Or le polynôme $\operatorname{cotan}^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right)\prod_{k=2}^{m}\left(z-\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\right)$ est de degré $m-1$ et de coefficiant dominant $\operatorname{cotan}^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right)$ et :

$$t\prod_{k=2}^{m}\left(z-\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\right)=t^2\prod_{k=3}^{m}\left(z-\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\right)-t\operatorname{cotan}^2\left(\frac{2\pi}{2m+1}\right)\prod_{k=3}^{m}\left(z-\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\right)$$

En répétant $m-1$ fois cette opération et en remarquant à chaque fois que

$$-t^n\operatorname{cotan}^2\left(\frac{n\pi}{2m+1}\right)\prod_{k=n+1}^{m}\left(z-\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\right)$$

est le polynôme de degré $m-1$ et de coefficient $-\operatorname{cotan}^2\left(\frac{n\pi}{2m+1}\right)$ on obtient, en notant c_2 le coefficient de t^{m-1} dans $Q_m(t)$:

$$c_2=-\sum_{k=1}^{m}\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)$$

En considérant $Q_m(z^2)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
c_1 &= c_2\times(4m+2)i\\
\implies -c_2 &= -\frac{c_1}{(4m+2)i}\\
\implies \sum_{k=1}^{m}\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right) &= \frac{m(2m+1)}{3}
\end{aligned}$$

4. De la question 1. découle directement l'inégalité $\forall t\in]0,\pi/2], \operatorname{cotan}^2(t)\leqslant\frac{1}{t^2}\leqslant 1+\operatorname{cotan}^2(t)$ Cela implique (en reprenant les notations des questions précédentes) :

$$\begin{aligned}
&\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\leqslant\frac{(2m+1)^2}{k^2\pi}\leqslant 1+\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\\
\implies &\sum_{k=1}^{m}\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\leqslant\frac{(2m+1)^2}{k^2\pi^2}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}\leqslant\sum_{k=1}^{m}\left(1+\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\right)\\
\implies &\frac{m(2m-1)}{3}\leqslant\frac{(2m+1)}{\pi^2}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}\leqslant\frac{m(2m-1)+3m}{3}\\
\implies &\frac{\pi^2}{3}\frac{m(2m+1)}{(2m+1)^2}\leqslant\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}\leqslant\frac{\pi^2}{3}\frac{m(2m+2)}{(2m+1)^2}
\end{aligned}$$

Or, $\frac{m(2m-1)}{(2m+1)^2}$ et $\frac{m(2m+2)}{(2m+1)^2}$ tendent vers $\frac{1}{2}$ quand m tend vers $+\infty$, donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$$

12 Arithmétique

12.1 Divisibilité, division euclidienne, congruences

Exercice 459 (②) par Macéo

Déterminer les couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $x^2 - y^2 = 12$.

On cherche les couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que

$$x^2 - y^2 = 12 \Leftrightarrow (x+y)(x-y) = 12.$$

On en déduit que $(x+y)$ et $(x-y)$ sont des diviseurs de 12 de mêmes signes.
De plus :

$$\frac{(x+y)+(x-y)}{2} = x \in \mathbb{Z}.$$

La somme $(x+y)+(x-y)$ est paire donc $(x+y)$ et $(x-y)$ sont de même parité.
Donc :

$$((x+y),(x-y)) \in \{(-2,-6),(-6,-2),(2,6),(6,2)\}.$$

D'où :

$$(x, y) \in \{(4,2),(-4,-2),(4,-2),(-4,2)\}.$$

Exercice 460 (②) par Alexandre

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, n^2$ divise $(n+1)^n - 1$.

$$\begin{aligned}(n+1)^n - 1 &= (n+1-1)((n+1)^{n-1} + (n+1)^{n-2} + ... + (n+1) + 1) \\ &= n\left(\sum_{k=0}^{n-1}(n+1)^k\right)\end{aligned}$$

On regarde le facteur de droite modulo n.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}(n+1)^k &\equiv \sum_{k=0}^{n-1} 1^k [n] \\ &\equiv 0[n]\end{aligned}$$

Ainsi, les deux facteurs sont divisibles par n, donc leur produit est divisible par n^2.

Exercice 461 (②) par Alexandre

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, a et b dans $\mathbb{Z}$.

a) Montrer que $a - b$ divise $a^n - b^n$.
b) On suppose que n est impair. Montrer que $a + b$ divise $a^n + b^n$.

a) $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1}) \implies a - b \mid a^n - b^n$
b) On a $(-b)^n = -b^n$.
$a^n - (-b)^n = (a-(-b))(a^{n-1} - a^{n-2}b + ... - ab^{n-2} + b^{n-1})$
$\iff a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + ... - ab^{n-2} + b^{n-1})$
$\implies a + b \mid a^n + b^n$

Exercice 462 (③) par Alexandre

Soient m et n deux éléments de $\mathbb{N}^*, a \geq 2$ un entier.

a) Montrer que, si m divise $n, a^m - 1$ divise $a^n - 1$.

b) On suppose que le reste de la division euclidienne de n par m est r. Montrer que le reste de la division euclidienne de $a^n - 1$ par $a^m - 1$ est $a^r - 1$. On écrira explicitement une identité mettant en évidence la division euclidienne.

a) On note $q = \dfrac{n}{m}$.
On a alors :

$$\begin{aligned} a^n - 1 &= a^{mq} - 1 \\ &= (a^m)^q - 1 \\ &= (a^m - 1)\left(\sum_{k=0}^{q-1}(a^m)^k\right) \implies a^m - 1 \mid a^n - 1 \end{aligned}$$

b) On note q le quotient de la division euclidienne de n par m. On a $n = qm + r$, $0 \leq r < m$.
On a alors :

$$\begin{aligned} a^n - 1 &= a^{mq+r} - 1 \\ &= (a^m)^q \times a^r - 1 \end{aligned}$$

Afin de trouver le reste de la division euclidienne par $a^m - 1$, on peut regarder l'expression modulo $a^m - 1$. On note que $a^m \equiv 1[a^m - 1]$.

$$a^n - 1 \equiv 1^q \times a^r - 1[a^m - 1]$$

$$a^n - 1 \equiv a^r - 1[a^m - 1]$$

$r < m \implies a^r - 1 < a^m - 1$, donc $a^r - 1$ est bien le reste de la division euclidienne de $a^n - 1$ par $a^m - 1$.

Exercice 463 (②) par Alexandre

Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la factorisation $(n+1)(n-1) = n^2 - 1$, montrer que $n+1$ divise $n^2 + 1$ si et seulement si $n+1$ divise 2 . En déduire l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ tels que $n+1$ divise $n^2 + 1$

$$n + 1 \mid n^2 + 1 \iff n + 1 \mid (n+1)(n-1) + 2$$

$$n + 1 \mid n^2 + 1 \iff n + 1 \mid 2$$

Ainsi, l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ tels que $n+1$ divise $n^2 + 1$ est $\{0, 1\}$.

Exercice 464 (③) par Alexandre

En adaptant la méthode de l'exercice précédent, déterminer les $n \in \mathbb{Z}$ tels que $n + 3$ divise $n^3 + 3$.

$$n + 3 \mid n^3 + 3 \iff n + 3 \mid (n+3)(n^2 - 3n + 9) - 24$$

$$n + 3 \mid n^3 + 3 \iff n + 3 \mid -24$$

L'ensemble des diviseurs supérieurs ou égaux à 3 de -24 est $\{3, 4, 6, 8, 12, 24\}$, donc l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ tels que $n + 3$ divise $n^3 + 3$ est $\{0, 1, 3, 5, 9, 21\}$.

Exercice 465 (④) par Alexandre

En utilisant l'exercice 30 de 2.1, déterminer les $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ tels que

$$x + y + z = 3 \quad \text{et} \quad x^3 + y^3 + z^3 = 3.$$

L'exercice 30 nous dit que $(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)=3(x+y)(y+z)(z+x)$.
En substituant, on a :

$$\begin{aligned}
&3(x+y)(y+z)(z+x)=24\\
\iff &(x+y)(y+z)(z+x)=8\\
\implies &(x+y)(3-x)(3-y)=8\\
\implies &(x+y)(xy-3(x+y)+9)=8\\
\implies &(x+y)xy-3(x+y)^2+9(x+y)=8\\
\implies &-3(x+y)^2+(x+y)(xy+9)-8=0\\
\implies &\Delta=(xy+9)^2-96
\end{aligned}$$

EXERCICE 466 (3) par Alexandre

a) Montrer par un raisonnement arithmétique que le produit de trois entiers relatifs consécutifs est divisible par 6 .
b) Montrer que, si $k\in\mathbb{N}^*$, le produit de k entiers relatifs consécutifs est divisible par $k!$. On utilisera les coefficients binomiaux.

a) Parmi trois entiers consécutifs, il y a exactement un entier qui est divisible par 3 et au moins un entier qui est pair, donc leur produit est divisible par 2 et par 3, donc par 6.
b) On sait que pour tout n naturel et pour tout k inférieur ou égal à n,

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}$$

est entier. Ainsi, cela implique que $k!$ divise $\dfrac{n!}{(n-k)!}$. Or, $\dfrac{n!}{(n-k)!}=(n-k+1).(n-k+2)...(n-1).n$ peut désigner n'importe quel produit de k entiers consécutifs, ce qui conclut.

EXERCICE 467 (1) par Alexandre

Déterminer, selon la valeur de n modulo 6, le reste de la division euclidienne de $n(n+1)$ par 6 .

On regarde le tableau de congruence mod 6 suivant :

n	0	1	2	3	4	5
n(n+1)	0	2	0	0	2	0

EXERCICE 468 (1) par Alexandre

Soit $x\in\mathbb{Z}$. Quelles sont les valeurs possibles de x^2 modulo 4 ? modulo 8 ?

Modulo 4 : 0 et 1
Modulo 8 : 0, 1, et 4

EXERCICE 469 (1) par Alexandre

Quels sont les $x\in\mathbb{Z}$ tels que $x^2\equiv x[10]$?

$\iff x^2-x\equiv 0 \iff x(x-1)\equiv 0[10]$ On regarde un par un dans cette expression et on trouve que l'ensemble des solutions modulo 10 est $\{0,1,5,6\}$. L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des entiers congrus à $0,1,5,6$ mod 10

Exercice 470 (②) par Alexandre

Quel est le reste de la division de 5^{2022} par 8 ?

On regarde $5^{2022}[8]$. Or, $5^2 \equiv 1[8]$. Donc, $5^{2022} = (5^2)^{1011} \equiv 1[8]$. Le reste de la division euclidienne de 5^{2022} par 8 est 1.

Exercice 471 (②) par Alexandre

Montrer que, si $x \in \mathbb{Z}, 11|2x+3 \iff 11|5x+2$.

$$\begin{aligned} 11|2x+3 &\iff 2x+3 \equiv 0[11] \\ &\iff 2x \equiv 8[11] \\ &\iff 12x \equiv 48[11] \\ &\iff x \equiv 4[11] \\ &\iff 5x \equiv 9[11] \\ &\iff 5x+2 \equiv 0[11] \\ &\iff 11|5x+2 \end{aligned}$$

Exercice 472 (②) par Alexandre

Quels sont les $x \in \mathbb{Z}$ tels que 12 divise x^2-1 ? tels que 12 divise x^2-2 ?

$$12|x^2-1 \iff x^2 \equiv 1[12]$$

L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des entiers congrus à $1, 5, 7$ et 11 mod 12.

$$12|x^2-2 \iff x^2 \equiv 2[12]$$

Il n'y a aucune solution.

Exercice 473 (②) par Alexandre

Trouver le dernier chiffre de l'écriture décimale de 3^{2022}.

On regarde $3^{2022}[10]$. Or, $3^4 \equiv 1[10]$. Donc, $3^{2022} = (3^4)^{505} \times 3^2 \equiv 9[10]$. Le reste de la division euclidienne de 3^{2022} par 10 est 9.

Exercice 474 (②) par Matei
Retrouver l'exercice 461 en utilisant les congruences modulo $a-b$ et $a+b$.

a) Prouvons que $a^n - b^n \equiv 0 \pmod{a-b}$
Or,
$$a^n = (a-b)(a^{n-1} + ba^{n-2} + b^2a^{n-3} + \ldots + b^{n-2}a + b^{n-1}) + b^n$$
En effet, si on développe le membre de droite, on trouve :
$$(a^n - ba^{n-1} + ba^{n-1} - b^2a^{n-2} + b^2a^{n-2} + \ldots - b^{n-1}a + b^{n-1}a - b^n) + b^n = a^n$$
Ainsi,
$$a^n \equiv b^n \pmod{a-b}$$
$$\Leftrightarrow a^n - b^n \equiv 0 \pmod{a-b}$$

b) Prouvons que si n est impair, $a^n + b^n \equiv 0 \pmod{a+b}$
Or,

$$a^n = (a+b)(a^{n-1} - ba^{n-2} + b^2a^{n-3} + \ldots + (-1)^{n-2}b^{n-2}a + (-1)^{n-1}b^{n-1}) - (-1)^n b^n$$

$$= (a+b)(\sum_{i=0}^{n}(-1)^n a^{n-1-i}b^i) + (-1)^n b^n$$

En effet, si on développe le membre de droite, on trouve :

$$(a^n + ba^{n-1} - ba^{n-1} - b^2a^{n-2} + b^2a^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2}b^{n-1}a + (-1)^{n-1}b^{n-1}a + (-1)^{n-1}b^n) + (-1)^n b^n = a^n$$

Ainsi,

$$a^n \equiv (-1)^n b^n \pmod{a+b}$$

De plus, n est impair, donc $(-1)^n = -1$.

$$\Leftrightarrow a^n \equiv -b^n \pmod{a+b}$$

$$\Leftrightarrow a^n + b^n \equiv 0 \pmod{a+b}$$

Exercice 475 (②) par Matei
a) Vérifier que, si $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+3)^n \equiv n^3 \pmod 9 \text{ et } 7^{n+3} \equiv 7^n \pmod 9$$

b) Quel est le reste de la division euclidienne de $7^n + n^3$ par 9.

a) $(n+3)^3 = n^3 + 9n^2 + 27n + 27 = n^3 + 9(n^2 + 3n + 3)$
Donc,

$$(n+3)^3 \equiv n^3 \pmod 9$$

$7^{n+3} = 7^n \times 7^3 = 7^n \times 343 = 7^n(9 \times 38 + 1) = 7^n + 9 \times 7^n \times 38$
Donc,

$$7^{n+3} \equiv 7^n \pmod 9$$

b) On peut faire un tableau de congruences pour répondre à cette question

$n \equiv \ldots \pmod 3$	0	1	2
$n^3 \equiv \ldots \pmod 9$	0	1	8
$7^n \equiv \ldots \pmod 9$	1	7	4
$7^n + n^3 \equiv \ldots \pmod 9$	1	8	3

Exercice 476 (③) par Matei . Soit $(F_n)_{n\geq 0}$ la suite de Fibonacci. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer le reste de la division euclidienne de F_n par 8.

La suite de Fibonacci est définie par $\forall n \in \mathbb{N}\ F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$, et$F_0 = 0$, et$F_1 = 1$
Ainsi, par définition, $F_{n+2} \equiv F_n + F_{n+1} \pmod 8$ On peut calculer les congruences modulo 8 des premiers termes de la suite de Fibonacci pour chercher un motif récurrent :
$F_0 \equiv 0 \pmod 8$
$F_1 \equiv 1 \pmod 8$
$F_2 \equiv 1 \pmod 8$
$F_3 \equiv 2 \pmod 8$
$F_4 \equiv 3 \pmod 8$
$F_5 \equiv 5 \pmod 8$
$F_6 \equiv 0 \pmod 8$
$F_7 \equiv 5 \pmod 8$
$F_8 \equiv 5 \pmod 8$
$F_9 \equiv 2 \pmod 8$
$F_{10} \equiv 7 \pmod 8$
$F_{11} \equiv 1 \pmod 8$
$F_{12} \equiv 0 \pmod 8$

$F_{13} \equiv 1 \pmod 8$
On remarque que $F_{12} \equiv F_0 \pmod 8$ et $F_{13} \equiv F_1 \pmod 8$. On peut donc émettre la conjecture que $F_{n+12} \equiv F_n \pmod 8$ et initialiser la preuve par récurrence qui aura pour objet de démontrer cette récurrence.
Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on note P_n la propriété

$$F_{n+12} \equiv F_n \pmod 8$$

Initialisation. On vient de montrer que $F_{12} \equiv F_0 \pmod 8$ et $F_{13} \equiv F_1 \pmod 8$
(on a besoin de vérifier pour F_0 et F_1 car on veut faire une récurrence forte et que (F_n) est elle-même définie par récurrence double.)
Hérédité. Supposons qu'il existe un $k \in \mathbb{N}, k > 1$ tel que, $\forall k' \leq k$, $F_{k'+12} \equiv F_{k'} \pmod 8$
Montrons que,

$$F_{k+1+12} \equiv F_{k+1} \pmod 8$$

Or, par définition,

$$F_{k+13} \equiv F_{k+11} + F_{k+12} \pmod 8$$

Et par hypothèse de récurrence forte,

$$F_{k+11} \equiv F_{k-1} \pmod 8$$

$$F_{k+12} \equiv F_k \pmod 8$$

Donc,

$$F_{k+13} \equiv F_{k-1} + F_k \equiv F_{k+1} \pmod 8$$

Ce qui est exactement P_{k+1}
Conclusion. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$F_{n+12} \equiv F_n \pmod 8$$

On peut donc répondre à la question par un tableau de congruences :

$n \equiv \dots \pmod{12}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$F_n \equiv \dots \pmod 8$	0	1	1	2	3	5	0	5	5	2	7	1

EXERCICE 477 (③) par Léo

Soit a et b dans $\mathbb{Z}$. On suppose que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, il existe $x \in \mathbb{Z}$ tel que $ax + B \equiv 0 \pmod m$. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{Z}$ tel que $ax + b = 0$

Il suffit d'observer en particulier que pour $m = a$, $ax + b \equiv 0 \pmod a \iff b \equiv 0 \pmod a$
On a donc $b = ak$, et $ax + b = 0 \iff a(x + k) = 0 \iff x = -k$, ce qui est toujours possible !

EXERCICE 478 (①) Par Lancelot

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que Montrer que n est divisible par 2 si et seulement si son dernier chiffre en base 10 est pair
2. Montrer que n est divisible par 5 si et seulement si son dernier chiffre en base 10 est 0 ou 5

On écrit n en base 10 :

$$n = \sum_{k=0}^{m} a_k 10^k, \quad \text{où } \forall k \in [\![0; m]\!], \quad a_k \in [\![0; 9]\!].$$

1. On remarque que toutes les puissances de 10 non-nulles sont des multiples de 2. Par conséquent :
$$n \equiv \sum_{k=0}^{m} a_k 10^k \equiv a_0 \mod 2.$$
Donc n est divisible par 2 si et seulement si son chiffre des unités est divisible par 2.

2. On remarque que toutes les puissances de 10 non-nulles sont des multiples de 5. Par conséquent :

$$n \equiv \sum_{k=0}^{m} a_k 10^k \equiv a_0 \mod 5.$$

Donc n est divisible par 5 si et seulement si son chiffre des unités est soit 0 soit 5.

EXERCICE 479 (②) Par Lancelot

Soient n un entier naturel que l'on écrit en base 10 :

$$n = \sum_{k=0}^{m} a_k 10^k, \quad \text{où } \forall k \in \{0, \ldots, m\}, \quad a_k \in \{0, \ldots, 9\}.$$

1. Montrer que

$$n \equiv \sum_{k=0}^{m} a_k [9].$$

2. Montrer de même que :

$$n \equiv \sum_{k=0}^{m} a_k (-1)^k [11].$$

1. Remarquons que $10 \equiv 1 \mod 9$, donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $10^k \equiv 1 \mod 9$. Des propriétés des congruences il découle alors que :

$$n \equiv \sum_{k=0}^{m} a_k 10^k \equiv \sum_{k=0}^{m} a_k \mod 9.$$

2. De même remarquons que $10 \equiv -1 \mod 11$, donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $10^k \equiv (-1)^k \mod 11$. Il suit alors des propriétés des congruences que :

$$n \equiv \sum_{k=0}^{m} a_k 10^k \equiv \sum_{k=0}^{m} a_k (-1)^k \mod 11.$$

EXERCICE 480 (④) par Teiki

Montrer que l'équation $x^2 + y^2 = 3z^2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}^3$ autre que (0,0,0). On commencera par montrer que, si (x,y,z) est une solution, alors x,y,z sont divisibles par 3.

Soit (x, y, z) une solution de l'équation.
On a alors $x^2 + y^2 \Leftrightarrow 0 \pmod 3$.
Or, les carrés modulo 3 étant exactement 0 et 1, on a $x^2 \Leftrightarrow y^2 \Leftrightarrow 0 \pmod 3$, d'où $x \Leftrightarrow y \Leftrightarrow 0 \pmod 3$.
Ainsi, **x et y sont divisibles par 3**, donc $x^2 + y^2$ est divisible par 9, donc $3z^2$ est divisible par 9, donc z^2 est divisible par 3, donc z **est divisible par 3**.
Si z = 0, il est clair que la seule solution est (0,0,0) par positivité d'un carré.
Supposons maintenant qu'il existe une solution de l'équation avec $z \neq 0$.
Soit alors une telle solution tel que $|z|$ soit minimal.
Alors, on dispose de $(x', y', z') \in (\mathbb{Z}^*)^3$ tels que x = 3x', y=3y' et z = 3z'.
Ainsi, $9x'^2 + 9y'^2 = 3 * 9z'^2$, d'où $x'^2 + y'^2 = 3z'^2$.
Or, $|z'| < |z|$, et $z' \neq 0$, ce qui contredit la minimalité de $|z|$: c'est absurde.
Ainsi, la seule solution de l'équation est (0,0,0).

EXERCICE 481 (④) par Wéline

Soit n un entier qui peut s'écrire comme somme de trois carrés d'entiers.

a) Montrer que n n'est pas congru à 7 modulo 8.

b) Montrer que n n'est pas de la forme $4^a(8b + 7)$ avec $(a; b) \in \mathbb{N}^2$

a) Soit $a \in \mathbb{Z}$, trouvons par disjonction de cas que a^2 ne peut être congrus qu'à 0, 1 et 4.
Soit $a \equiv 0[8]$:

$$a \equiv 0[8] \Longrightarrow a^2 \equiv 0^2[8] \Longrightarrow a^2 \equiv 0[8]$$

Soit $a \equiv 1[8]$:

$$a \equiv 1[8] \Longrightarrow a^2 \equiv 1^2[8] \Longrightarrow a^2 \equiv 1[8]$$

Soit $a \equiv 2[8]$:

$$a \equiv 2[8] \Longrightarrow a^2 \equiv 2^2[8] \Longrightarrow a^2 \equiv 4[8]$$

Soit $a \equiv 3[8]$:

$$a \equiv 3[8] \Longrightarrow a^2 \equiv 3^2[8] \Longrightarrow a^2 \equiv 9[8] \Longrightarrow n^2 \equiv 1[8]$$

Soit $a \equiv 4[8]$:

$$a \equiv 4[8] \Longrightarrow a^2 \equiv 4^2[8] \longrightarrow a^2 \equiv 16[8] \Longrightarrow a^2 \equiv 0[8]$$

Soit $a \equiv 5[8]$:

$$a \equiv 5[8] \Longrightarrow a^2 \equiv 5^2[8] \Longrightarrow a^2 \equiv 25[8] \Longrightarrow a^2 \equiv 1[8]$$

Soit $a \equiv 6[8]$:

$$a \equiv 6[8] \Longrightarrow a^2 \equiv 6^2[8] \Longrightarrow a^2 \equiv 36[8] \Longrightarrow a^2 \equiv 4[8]$$

Soit $a \equiv 7[8]$:

$$a \equiv 7[8] \Longrightarrow a^2 \equiv 7^2[8] \Longrightarrow a^2 \equiv 49[8] \Longrightarrow a^2 \equiv 1[8]$$

Le carré d'un entier n'est donc bien congrus qu'à 0, 1 et 4. Si n est la somme de trois carrés entiers, n ne peut être congrus qu'à : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. On ne peut pas obtenir 7 par addition de trois entiers égales soit à 0 soit à 1 soit à 4.

$$n \not\equiv 7[8]$$

b) Montrons que n n'est pas de la forme $4^a(8b+7)$. Soit trois entiers naturels x, y et z tel que $n = x^2 + y^2 + z^2$. Supposons que 4^a divise n. Montrons par récurrence, pour tout a de $\mathbb{N}$, la propriété (P_a) : « si 4^a divise $x^2 + y^2 + z^2$, alors 4^a divise aussi x^2, y^2 et z^2 ».
Initialisation. pour $a = 0$.
$4^a = 1$ et 1 divise forcément x^2, y^2 et z^2.
Donc (P_0) est vraie.
Hérédité.
Supposons (P_a) vraie pour un rang a fixée, c'est-à-dire « si 4^a divise $x^2+y^2+z^2$, alors 4^a divise aussi x^2, y^2 et z^2 ».
Montrons qu'alors (P_{a+1}) est vraie.
On sait, par hypothèse de récurrence, que $4^a \mid x^2 + y^2 + z^2$ et que $4^a \mid x^2$, $4^a \mid y^2$ et $4^a \mid z^2$. Il existe donc quatre entiers naturels : k, x', y' et z', tel que $x^2 + y^2 + z^2 = 4^a k$, $x^2 = 4^a(x')^2$, $y^2 = 4^a(y')^2$ et $z^2 = 4^a(z')^2$.

$$\begin{aligned} &4^a(x')^2 + 4^a(y')^2 + 4^a(z')^2 = 4^a k \\ \Longleftrightarrow\ &4 \times \left(4^a(x')^2 + 4^a(y')^2 + 4^a(z')^2\right) = 4 \times 4^a k \\ \Longleftrightarrow\ &4^{a+1}(x')^2 + 4^{a+1}(y')^2 + 4^{a+1}(z')^2 = 4^{a+1}k \\ \Longleftrightarrow\ &(2^{a+1})^2(x')^2 + (2^{a+1})^2(y')^2 + (2^{a+1})^2(z')^2 = 4^{a+1}k \\ \Longleftrightarrow\ &(2^{a+1}x')^2 + (2^{a+1}y')^2 + (2^{a+1}z')^2 = 4^{a+1}k \end{aligned}$$

On a donc que 4^{a+1} divise le carré de trois entiers, $4^{a+1} \mid (2^{a+1}x')^2 + (2^{a+1}y')^2 + (2^{a+1}z')^2$, donc, d'après la troisième ligne de calcul, on a aussi que 4^{a+1} divise $(2^{a+1}x')^2$, $(2^{a+1}y')^2$ et $(2^{a+1}z')^2$.
Donc (P_{a+1}) est vraie.
Conclusion.
La propriété (P_a) est vraie au rang 0 et héréditaire, donc (P_a) est vraie quelque soit a un entier naturel.

Montrons par l'absurde que n ne peut pas s'écrire $4^a(8b+7)$, pour cela on va supposer le contraire.

$$\begin{aligned} n &= 4^a(8b+7) \\ \iff x^2+y^2+z^2 &= 4^a(8b+7) \\ \iff 4^a(x')^2+4^a(y')^2+4^a(z')^2 &= 4^a(8b+7) \\ \iff 4^a\left((x')^2+(y')^2+(z')^2\right) &= 4^a(8b+7) \\ \iff (x')^2+(y')^2+(z')^2 &= 8b+7 \end{aligned}$$

Si la dernière affirmation est vraie alors $(x')^2+(y')^2+(z')^2$ et $8b+7$ sont congru au même entier modulo 8.

$$8b \equiv 0[8] \iff 8b+7 \equiv 7[8]$$

Ce qui est absurde car $(x')^2+(y')^2+(z')^2$ est la somme de trois carrés d'entiers or on a montré à la question précédente que la somme des carrés de trois entiers ne pouvais pas être congru à 7 modulo 8.
Pour conclure n ne peut pas s'écrire sous la forme $4^a(8b+7)$.

12.2 Nombres premiers

Exercice 482 (①) par Wéline

Soient a et b deux entiers naturels non premiers entre eux. Montrer que l'ensemble $E_{a,b} = \{ka+b \; ; \; k \in \mathbb{N}\}$ contient au plus un nombre premier.

Comme a et b ne sont pas premier entre eux, il existe un nombre premier p et deux entiers naturels a' et b' tel que : $a = pa'$ et $b = pb'$. Soit c un entier naturel appartenant à l'ensemble $E_{a,b}$.

$$\begin{aligned} c &= ka+b \\ &= kpa'+pb' \\ &= p(ka'+b') \end{aligned}$$

Pour que c soit premier, il faut donc que $ka'+b'$ soit égale à un.

$$\begin{aligned} ka'+b' &= 1 \\ \iff ka' &= 1-b' \\ \iff k &= \frac{1-b'}{a'} \end{aligned}$$

Il n'y a qu'une seul solution à l'équation, donc c est premier si et seulement si $\frac{1-b'}{a'}$ est un entier naturel.
On a bien que l'ensemble $E_{a,b}$ contient au plus un nombre premier.

Exercice 483 (②) par Antoine Montrer que, pour tout nombre premier $p \geq 5$, 24 divise p^2-1.

Pour cette exercice il faut remarquer deux choses. Dans $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$, un nombre premier ne peut être congru à un multiple de 2 ni à un multiple de 3. Effectivement, supposons par l'absurde que ce soit possible. On aurait respectivement :$p = 2\cdot(12k+1)$ ou $p = 3\cdot(8k+1)$ ce qui est impossible comme p est premier. En écartant donc ces multiples on retrouve bien le résultat voulu à l'aide d'un tableau de congruence.

Exercice 484 (③) par Léo

Soient a et n deux entiers $\geqslant 2$. On suppose que l'entier naturel a^n-1 est premier.

a) Montrer que $a=2$

b) Montrer que n est premier

c) Montrer que $2^{11}-1$ n'est pas premier.

1. On a la factorisation $a^n - 1 = (a-1) \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} a^i\right)$.

Or, $\sum_{i=0}^{n-1} a^i$ est un entier, donc $a^n - 1$ est premier ssi $(a-1) = 1$, donc ssi $a = 2$ (sinon il y aurait deux facteurs différents et $a^n - 1$ ne serait pas premier.

2. Supposons par l'absurde que n ne soit pas premier. On a alors $n = 1$, ce qui est évidemment absurde puisque $2 - 1 = 1$ n'est pas premier, soit $n = pq$, avec $(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$.
Si $n = pq$, alors $2^n - 1 = 2(pq) - 1 = (2^q)^p - 1 = (2^q - 1) \cdot \left(\sum_0^{n-1} 2^{q(p-i)}\right)$, qui n'est évidemment pas premier. On a donc montré une contradiction et prouvé que n est premier.

3. $2^{11} - 1 = 2048 - 1$ (les amateurs de 2048 seront familiers avec cela). Donc, $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$ n'est pas premier !

EXERCICE 485 (③) par Léo

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^n + 1$ soit premier. Montrer que n est une puissance de 2

On rappelle la formule suivante, si n est un nombre impair, alors $a^n + 1 = (a+1) \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i a^i\right)$

Par l'absurde, on suppose que n n'est pas une puissance de 2, c'est-à-dire que $n = 2^q \cdot p$, où p est impair et > 1.

On a donc

$$2^n + 1 = \left(2^{2^q}\right)^p + 1 = (2^{2^q} + 1) \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \cdot 2^{2^q(p-i)}\right)$$

qui n'est absolument pas premier. C'est donc une contradiction et on a prouvé le résultat souhaité.

EXERCICE 486 (④) par Adrien I

Déterminer parmi les nombres 101, 10101, 1010101, ... ceux qui sont premiers.

On définit la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ par $a_n = \sum_{k=0}^n 100^k$. Remarquons que cette suite représente la séquence étudiée. Or, $\sum_{k=0}^n 100^k$ représente la somme des termes d'une suite géométrique de raison 100 donc $\sum_{k=0}^n 100^k = \frac{1-100^{n+1}}{1-100} = \frac{(10^{n+1}-1)(10^{n+1}+1)}{99}$, par factorisation.

Dans un premier temps, étudions a_1. On a $a_1 = \frac{(10^{1+1}-1)(10^{1+1}+1)}{99} = \frac{99 \cdot 101}{99} = 101$. Il est aisé de constater que 101 est premier, donc a_1 est premier. Tâchons de montrer que c'est le seul premier de la liste de nombres.

Montrons à l'aide d'une disjonction de cas sur la parité de n que si $n \geq 2$, alors a_n n'est pas premier.

— Si n est impair, montrons par récurrence la propriété P_k définie pour tout entier naturel k non-nul : "$99 \mid (10^{(2k+1)+1} - 1)$".
Initialisation. Pour $k = 1$ $10^{5+1} - 1 = 10^6 - 1 = 999\,999 = 99 \cdot 10101$. Donc, $99 \mid (10^6 - 1)$ et P_1 est vérifiée.
Hérédité. Soit k un entier naturel non-nul. On suppose P_k vraie pour cet entier et l'on souhaite montrer que cela implique P_{k+1} vraie.
Par hypothèse de récurrence, $99 \mid (10^{(2k+1)+1} - 1)$, c'est-à-dire $99 \mid (10^{2(k+1)} - 1)$. Car 99 divise toutes les combinaisons linéaires de 99 et de $(10^{2(k+1)} - 1)$, nous avons $99 \mid (100 \cdot (10^{2(k+1)} - 1) + 1 \cdot 99)$, c'est-à-dire $99 \mid (10^{2(k+2)} - 1)$. Donc $99 \mid 10^{(2(k+1)+1)+1)} - 1$ et P_{k+1} est vérifiée.
Conclusion. La propriété a été initialisée au rang 1 et est héréditaire à paritr de ce rang donc par principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel non-nul.

Ainsi, si n est impair (et supérieur à $n \geq 2$), alors $99 \mid (10^{n+1} - 1)$ et car $10^{n+1} - 1 \neq 99$ (toujours car $n \geq 2$), nous pouvons en déduire que a_n est le produit de deux entiers différents de 1. Donc, si n est impair, a_n est composite.

— Si n est pair, montrons par récurrence la propriété P_k définie pour tout entier naturel k non-nul : "$11 \mid (10^{2k+1} + 1)$ et $9 \mid (10^{2k+1} - 1)$".
Initialisation. Pour $k = 1$ $10^3 + 1 = 1001 = 11 \cdot 91$. Donc, $11 \mid (10^3 + 1)$. De même, $10^3 - 1 = 999 = 9 \cdot 111$. Donc, $9 \mid (10^3 - 1)$ et P_1 est vérifiée.
Hérédité. Soit k un entier naturel non-nul. On suppose P_k vraie pour cet entier et l'on souhaite montrer que cela implique P_{k+1} vraie.
Par hypothèse de récurrence, $11 \mid (10^{2k+1}+1)$. Or, 11 divise toutes les combinaisons linéaires de 11 et de $10^{2k+1} + 1$. Donc, $11 \mid 100(10^{2k+1} + 1) - 9 \cdot 11$, c'est-à-dire $11 \mid (10^{2k+3} + 1)$. Donc, $11 \mid (10^{2(k+1)} + 1)$ et la première partie de la propriété est bien vérifiée.
Traitons la seconde partie : par hypothèse de récurrence, $9 \mid (10^{2k+1} - 1)$. Or, 9 divise toutes les combinaisons linéaires de 9 et de $10^{2k+1} - 1$. Donc, $9 \mid 100(10^{2k+1} - 1) - 11 \cdot 9$, c'est-à-dire $9 \mid (10^{2k+3} - 1)$. Donc, $9 \mid (10^{2(k+1)} - 1)$
Donc P_{k+1} est vraie.
Conclusion. La propriété a été initialisée au rang 1 et est héréditaire à partir de ce rang donc par principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel non-nul.

Ainsi, si n est pair (et supérieur à $n \geq 2$), alors $11 \mid (10^{n+1} + 1)$ et $9 \mid (10^{n+1} - 1)$. Car $10^{n+1} + 1 \neq 11$ et $10^{n+1} - 1 \neq 9$ (toujours car $n \geq 2$), nous pouvons en déduire que a_n est le produit de deux entiers différents de 1. Donc, si n est pair, a_n est composite.

EXERCICE 487 (②) par Adrien I.

En utilisant l'exercice *32* de **2.1**, montrer que si m et n sont dans $\mathbb{N}^*$, $m^4 + 4n^4$ est premier si et seulement si $m = n = 1$.

On rappelle la factorisation établie dans l'exercice 32 *: si x et y sont deux nombres réels, alors $x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy)$*

On raisonne par double implication.

$\Longrightarrow$ Supposons $m^4 + 4n^4$ premier et montrons que cela implique $m = n = 1$.

Premièrement, si $m^4 + 4n^4$ est premier, alors il n'est divisible que par 1 et lui-même (supérieur ou égal à 1).

Or, pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$, $2mn > -2mn$ donc $m^2 + 2n^2 + 2mn > m^2 + 2n^2 - 2mn$. Ainsi, $m^2 + 2n^2 - 2mn = 1$.

Si $m = n = 1$, alors $m^2 + 2n^2 - 2mn = 1 + 2 - 2 = 1$. Dans le cas contraire, nous savons que $m^2 + 2n^2 - 2mn = (m - n)^2 + n^2$. Ainsi, si $n = 1$, alors $m \neq 1$ et donc, $(m - n)^2 \geq 1$ et $n^2 = 1$. Donc, $m^2 + 2n^2 - 2mn > 1$. Sinon, si $n \neq 1$, $n^2 > 1$. Or $(m - n)^2 \geq 0$, donc $m^2 + 2n^2 - 2mn > 1$.

$\Longleftarrow$ Supposons désormais que $m = n = 1$. Alors $m^4 + 4n^4 = 1 + 4 \cdot 1 = 5$, et 5 est premier.

En conclusion, nous avons réussi à montrer que $m^4 + 4n^4$ est premier si et seulement si $m = n = 1$.

EXERCICE 488 (③) Par Alexandre

Montrer que, si $n \geq 2$, aucun des nombres $n! + k, 2 \leq k \leq n$, n'est premier.
Il existe donc des suites d'entiers consécutifs de longueur arbitraire dont aucun n'est premier.

$$\forall n \geq 2, \forall k \text{ tq } 2 \leq k \leq n, n! \equiv 0[k] \implies n! + k \equiv 0[k].$$

On a alors $k \mid n! + k$, $2 \leq k < n! + k$, ce qui implique que $n! + k$ n'est pas premier.

Exercice 489 (③) Par Paul P

Quels sont les $k \in \mathbb{N}$ tels que l'ensemble des entiers n tels que $k+1 \leq n \leq k+10$ contienne le plus grand nombre de nombres premiers ? On s'intéressera aux nombres pairs et aux nombres impairs divisible par 3.

Étant donné qu'un nombre sur 2 est pair, parmi 10 entiers consécutifs, exactement 5 sont pairs. De plus, les nombres impairs divisibles par 3 sont de la forme $3(2k+1) = 6k+3$ avec $k \in \mathbb{Z}$, donc il y a un nombre impair divisible par 3 tout les 6 nombres. Ainsi, parmi 10 nombres entiers consécutifs, au moins un des nombres est impair et est divisibles par 3.

Pour $k \geq 3$, chacun de nos 10 nombres sera strictement plus grand que 3 et donc ni les 5 nombres pairs, ni le nombre impair divisible par 3 ne pourra être premier. Donc, parmi les 10 nombres, il y a au plus $10-5-1=4$ nombres premiers.
Pour $k=2$, il y a 4 nombres premiers dans l'ensemble $\{3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$: $3,5,7,11$.
Pour $k=1$, il y a 5 nombres premiers dans l'ensemble $\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$: $2,3,5,7,11$.
Pour $k=0$, il y a 4 nombres premiers dans l'ensemble $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$: $2,3,5,7$.

Ainsi, le seul $k \in \mathbb{N}$ tel que l'ensemble des entiers n tels que $k+1 \leq n \leq k+10$ contienne le plus grand nombre de nombres premiers est $k=1$.

Exercice 490 (④) Par Lancelot

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ congru à 3 modulo 4. Montrer que n admet au moins un diviseur premier congru à 3 modulo 4.
2. En adaptant la démonstration du Théorème 27, en déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4.

1. Soit n un entier naturel congru à 3 modulo 4. On raisonne par l'absurde. Supposons donc que n n'admet aucun diviseur premier congru à 3 modulo 4. Par conséquent, on écrit n sous forme factorisée :
$$n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}.$$
Ainsi :
$$n \equiv \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i} \equiv \prod_{i=1}^{r} 1^{\alpha_i} \mod 4,$$
ce qui est absurde, donc au moins l'un des diviseurs premiers de n est congru à 3 modulo 4.
2. On raisonne une nouvelle fois par l'absurde. Supposons que $\mathbb{M}$ soit l'ensemble fini des nombres premiers congrus à 3 modulo 4. Considérons l'entier :
$$N := 4 \prod_{p \in \mathcal{M}} p + 3.$$
Ainsi, N est congru à 3 modulo 4, il admet donc, d'après a. au moins un diviseur premier congru à 3 modulo 4. Remarquons que :
$$N \equiv 3 \mod p, \quad \forall p \in \mathcal{M}.$$
D'où, quelque soit $p \in \mathcal{M}$, p ne divise pas N. Soit alors q un diviseur premier de N. Puisque n est impair, q l'est nécessairement, et donc il ne peut qu'être congru à 1 modulo 4 sinon il serait un élément de $\mathcal{M}$ et ne diviserait pas N. Ainsi, quelque soit le diviseur premier q de N, il est congru à 1 modulo 4, ce qui est absurde. Donc il existe une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4.

Exercice 491 (④) par Teiki

Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$

a) Montrer que :
$$\forall(k,m,n)\in\mathbb{Z}^3, P(n+km)\Leftrightarrow P(n) \pmod m$$

b) En déduire que :
$$\forall(k,n)\in\mathbb{Z}^2, P(n)|P(n+kP(n))$$

c) Conclure que, si P n'est pas constant et si $n\in\mathbb{N}$est tel que $P(n)$ soit premier, l'ensemble des $k\in\mathbb{Z}$ tels que $P(n+kP(n))$ soit premier est fini.

a) Commençons par montrer le résultat pour les monômes.
Soient $(k,m,n,p)\in\mathbb{N}^4$.
Alors $(n+km)^p = n^p + km\sum_{i=1}^{p} km^{i-1}n^{p-i} \Leftrightarrow n^p \pmod m$.
Ainsi, la propriété étant vraie pour tout monôme, elle est vraie pour tout polynôme par combinaison linéaire.

b) Ainsi, $P(n+kP(n))\Leftrightarrow P(n)\Leftrightarrow 0 \pmod P)(n)$, soit exactement :
$$\forall(k,n)\in\mathbb{Z}^2, P(n)|P(n+kP(n))$$

c) Soit alors un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{Z}$ tel qu'il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit premier et tel que l'ensemble des $k\in\mathbb{Z}$ tels que $P(n+kP(n))$ soit premier est infini.

D'après b),
$$\forall(k,n)\in\mathbb{Z}^2, P(n)|P(n+kP(n))$$
.
D'où, si $P(n+kP(n))$ est premier, $P(n+kP(n)) = P(n)$.
Ainsi, P prend la valeur $P(n)$ sur une infinité de points, donc P est constant.
D'où le résultat par contraposée.

12.3 PGCD de deux entiers, théorème de Bézout

Exercice 492 (①) par Loïse

Écrire l'algorithme d'Euclide pour $a = 1771$ et $b = 276$. Déterminer $a\wedge b$, ainsi qu'un couple de Bézout.

On écrit l'algorithme d'Euclide pour déterminer $a\wedge b$:
$$1771 = 6\cdot 276 + 115$$
$$276 = 2\cdot 115 + 46$$
$$115 = 2\cdot 46 + 23$$
$$46 = 2\cdot 23 + 0.$$
Ainsi :
$$a\wedge b = 23.$$
Remontons l'algorithme d'Euclide pour déterminer un couple de Bézout :
$$23 = 115 - 2\cdot 46$$
$$23 = 115 - 2(276 - 2\cdot 115)$$
$$23 = -2\cdot 276 + 5\cdot 115$$
$$23 = -2\cdot 276 + 5(1771 - 6\cdot 276)$$
$$23 = -32\cdot 276 + 5\cdot 1771$$
Un couple de Bézout est donc $(-32;5)$.

Exercice 493 (②) par Matilde
Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que les nombres entiers $14n+3$ et $21n+4$ sont premiers entre eux. On explicitera une relation de Bézout.

$$3 \cdot (14n+3) = 42n+9$$
$$2 \cdot (21n+4) = 42n+8$$

Ainsi :
$$3 \cdot (14n+3) - 2 \cdot (21n+4) = 1$$

Il existe donc un couple $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ (ici, $(3;-2)$) tel que :

$$a(14n+3) + b(21n+4) = 1$$

D'après la réciproque du théorème de Bézout, les entiers $14n+3$ et $21n+4$ sont premiers entre eux.

Exercice 494 (②) Par Lancelot

Soit $(F_n)_{n\geq 0}$ la suite de Fibonacci (**1.3**, exemple 1). Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $F_n \wedge F_{n+1}$

On donne les premières valeurs de la suite de Fibonacci, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34. On remarque que deux nombres consécutifs sont premiers entre eux. On peut alors tenter de le montrer par récurrence. On note alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ la propriété $F_n \wedge F_{n+1} = 1$.

— *Initialisation.* Compte tenu de la remarque qui nous a mené à effectuer ce raisonnement, $\mathcal{P}_0$ est naturellement vérifiée.
— *Hérédité.* On fixe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. On a que :

$$F_{n+2} \wedge F_{n+1} = (F_{n+1} + F_n) \wedge F_{n+1},$$

qui part les propriétés du PGCD est $F_n \wedge F_{n+1}$ qui vaut 1 par hypothèse de récurrence. Finalement $F_{n+2} \wedge F_{n+1} = 1$ ce qui est exactement $\mathcal{P}_{n+1}$.

Du principe de récurrence, on déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+1} \wedge F_n = 1.$$

Exercice 495 (②) Par Lancelot

Soient a et b deux éléments de $\mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Montrer que x^a et x^b sont des nombres rationnels si et seulement si $x^{a\wedge b}$ est un nombre rationnel.

D'après le Théorème 28, il existe deux rationnels (p,q) tels que :

$$a \wedge b = ap - qb.$$

On raisonne par double implication. Pour le sens directe : supposons que x^a et x^b sont rationnels. On raisonne par équivalence. Par hypothèse :

$$x^a \in \mathbb{Q} \Longleftrightarrow x^{ap} \in \mathbb{Q}, \quad \text{et} \quad x^b \in \mathbb{Q} \Longleftrightarrow x^{bq} \in \mathbb{Q}.$$

D'où :
$$\mathbb{Q} \ni \frac{x^{ap}}{x^{bq}} = x^{ap-qb} = x^{a\wedge b}.$$

Réciproquement, supposons que $x^{a\wedge b}$ est rationnel. Par définition du PGCD, il existe k et l deux entiers tels que $a = ka \wedge b$ et $b = la \wedge b$. Par conséquent on a que :

$$x^a = (x^{a\wedge b})^k \in \mathbb{Q}, \quad \text{et} \quad x^b = (x^{a\wedge b})^l \in \mathbb{Q},$$

ce qui achève l'exercice.

Exercice 496 (③) Par Alexandre C

Soient a et b deux éléments de $\mathbb{N}^*$. Montrer que a et b sont premiers entre eux si et seulement si $a+b$ et ab sont premiers entre eux.

Montrons dans un premier temps l'implication directe. Supposons que a et b sont premiers entre eux. D'après le théorème de Bézout, il existe des entiers u et v tels que $au+bv=1$. Or, $au+bv=(a+b)u+b(v-u)=a(u-v)+(a+b)v$ donc le théorème de Bézout nous permet d'affirmer que $a+b$ et a ainsi que $a+b$ et b sont également premiers entre eux.
Le théorème 30 nous indique alors que $a+b$ et ab sont premiers entre eux, ce qu'on voulait démontrer.
Réciproquement, remarquons que si d est un nombre entier tel que d divise a et d divise b, alors d divise ab et d divise $a+b$ donc d divise $ab \wedge (a+b)$. Ainsi, $a \wedge b$ divise $ab \wedge (a+b)$ si bien que $ab \wedge (a+b) = 1$ implique que $a \wedge b = 1$, ce qui démontre l'implication réciproque.

Exercice 497 (③) Par Lancelot

Soient a et b deux entiers relatifs premiers entre eux, $(k,\ell) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

1. Montrer que a^k et b sont premiers entre eux. On déduira d'une relation de Bézout entre a et b une relation de Bézout entre a^k et b.
2. Montrer que a^k et b^ℓ sont premiers entre eux.

1. Par hypothèse, d'après le Théorème 29, il existe un couple (p,q) d'entiers relatifs tel que :
$$ap+bq=1,$$
donc :
$$1=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(bq)^j(ap)^{k-j}=a^kp^k+b\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}b^{j-1}q^j(ap)^{k-j}.$$
Observons que :
$$\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}b^{j-1}q^j(ap)^{k-j}\in\mathbb{Z},$$
car somme d'entiers relatifs. Donc, d'après le Théorème 29, on conclut que a^k et b sont premiers entre eux.
2. Puisque a^k et b sont premiers entre eux, on peut appliquer l'exact même raisonnement que la question précédente pour obtenir que a^k et b^ℓ sont premiers entre eux.

Exercice 498 (③) Par Lancelot

Soient m et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n = \mathbb{U}_{n\wedge m}$.

Soient m et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$. On raisonne par double inclusion pour montrer que $\mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n = \mathbb{U}_{n\wedge m}$.

— On a clairement que $\mathbb{U}_{n\wedge m} \subseteq \mathbb{U}_m$ et $\mathbb{U}_{n\wedge m} \subseteq \mathbb{U}_m$ (cf. Exercice 397), donc $\mathbb{U}_{n\wedge m} \subseteq \mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n$.
— Remarquons que $\mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n$ n'est pas vide car 1 en est un élément. Soit alors $z \in \mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n$. On a que :
$$z^m = z^n = 1.$$
La relation de Bézout du Théorème 28 donne qu'il existe a et b dans $\mathbb{Z}$ vérifiant :
$$m \wedge n \mid am+bn \iff \exists k \in \mathbb{Z},\quad k(m\wedge n) = am+bn$$
On a alors que :
$$z^{k(m\wedge n)} = (z^{m\wedge n})^k = z^{am+bn} = (z^m)^a(z^n)^b = 1,$$
d'où il suit que :
$$z^{m\wedge n} = 1,$$
autrement dit $z \in \mathbb{U}_{m\wedge n}$. On a donc que $\mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n \subseteq \mathbb{U}_{m\wedge n}$.

Par double inclusion on déduit que $\mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n = \mathbb{U}_{n\wedge m}$.

EXERCICE 499 (③) par Térence

Soient m et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$ premiers entre eux. Montrer que tout élément de z de $\mathbb{U}_{mn}$ s'écrit $z = uv$ avec $e \in \mathbb{U}_m$ et $v \in \mathbb{U}_n$.

Soit $z \in \mathbb{C}$, montrons que $(z \in \mathbb{U}_{mn}) \implies (\exists (u,v) \in \mathbb{U}_m \times \mathbb{U}_n,\, z = uv)$

Tout d'abord, d'après le théorème de Bézout, $m \wedge n = 1 \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{Z}^2, am + bn = 1$.

Puis, $z \in \mathbb{U}_{mn}$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow z^{mn} = 1\\
&\Leftrightarrow z = e^{\frac{2ik\pi}{mn}\times 1}; k \in [\![0; -mn-1]\!]\\
&\Leftrightarrow z = e^{\frac{2ik\pi}{mn}(am+bn)} \quad \text{car } 1 = am + bn\\
&\Leftrightarrow z = e^{\frac{2ika\pi}{n}} e^{\frac{2ikb\pi}{m}}
\end{aligned}$$

On pose $u = e^{\frac{2ikb\pi}{m}}$ et $v = e^{\frac{2ika\pi}{n}}$, on a alors $z = uv$.

Il nous reste cependant à montrer que $u \in \mathbb{U}_m$ et $v \in \mathbb{U}_n$, ainsi :

$$(u)^n = (e^{\frac{2ikb\pi}{m}})^n = e^{2ikb\pi} = (z^{mn})^b = 1^b = 1$$

donc $u \in \mathbb{U}_m$.

De même :

$$(v)^n = e^{2ika} = (z^{mn})^a = 1$$

donc $v \in \mathbb{U}_n$.

On a donc trouvé $(u,v) \in \mathbb{U}_m \times \mathbb{U}_n$, $z = uv$.

EXERCICE 500 (③) Par Lancelot

Soient u et v deux entiers supérieurs ou égaux à 2 et premiers entre eux. Montrer que le nombre $\frac{\ln(v)}{\ln(u)}$ est irrationnel.

'est une généralisation de l'exercice 19, alors on procède de la même manière. Soient u et v deux entiers supérieurs ou égaux à 2. On raisonne par l'absurde et on suppose que $\frac{\ln(v)}{\ln(u)}$ est rationnel. Par conséquent, il existe $(p,q) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\frac{\ln(v)}{\ln(u)} = \frac{p}{q}$$

donc :

$$q\ln(v) = \ln(u)p,$$

un passage à l'exponentielle donne que :

$$v^q = u^p.$$

Or d'après l'exercice 497, comme u est premier avec v, alors v^q et u^p sont premiers entre eux. C'est égalité est donc absurde puisque p et q sont différents de 0.

EXERCICE 501 (④) par Alexandre C.

En utilisant l'exercice 462, montrer que si $a \geq 2$ est un entier, m et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$, alors $a^m - 1$ et $a^n - 1$ ont pour pgcd $a^{m\wedge n} - 1$.

Démontrons par récurrence forte sur $k \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathcal{P}(k)$ suivante :

$$\text{"}\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \quad \text{Si} \quad \max(m,n) = k \quad \text{alors} \quad (a^m - 1) \wedge (a^n - 1) = a^{m \wedge n} - 1\text{"}$$

$\mathcal{P}(1)$: Si $\max(m,n) = 1$ on a nécessairement $m = n = 1$ (car $m, n \in \mathbb{N}^*$) donc

$(a^m - 1) \wedge (a^n - 1) = (a - 1) \wedge (a - 1) = a - 1 = a^{1 \wedge 1} - 1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est bien vérifée.

$\mathcal{P}(1), \mathcal{P}(2), \ldots, \mathcal{P}(k) \Rightarrow \mathcal{P}(k+1)$:

Supposons $\mathcal{P}(1), \mathcal{P}(2), \ldots, \mathcal{P}(k)$ vérifiées et montrons $\mathcal{P}(k+1)$.

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\max(m,n) = k+1$.

• Si $m = n = k+1$ on a évidemment :

$$(a^m - 1) \wedge (a^n - 1) = a^{k+1} - 1 = a^{m \wedge n} - 1$$

et la propriété est vérifiée.

• Sinon, m et n jouant des rôles symétriques, on peut supposer sans perte de généralité que $m = k+1 > n$.

D'après l'exercice 462 on sait que si r désigne le reste de la division euclidienne de m par n on a :

$$(a^m - 1) \wedge (a^n - 1) = (a^n - 1) \wedge (a^r - 1).$$

Par définition de r, on a $r < n < k+1$ si bien que $n = \max(r,n) < k+1$ et $\mathcal{P}(n)$ étant vraie on sait que :

$$(a^n - 1) \wedge (a^r - 1) = a^{n \wedge r} - 1.$$

Or, comme r est le reste de la division euclidienne de m par n, on sait que $m \wedge n = n \wedge r$ (c'est ainsi que fonctionne l'algorithme d'Euclide) donc finalement :

$$(a^m - 1) \wedge (a^n - 1) = (a^n - 1) \wedge (a^r - 1) = a^{n \wedge r} - 1 = a^{m \wedge n} - 1$$

donc $(a^m - 1) \wedge (a^n - 1) = a^{m \wedge n} - 1$, ce qu'on voulait démontrer. Ainsi $\mathcal{P}(k+1)$ est vérifiée.

Conclusion : Quelque soit $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(k)$ est vérifiée donc :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \quad (a^m - 1) \wedge (a^n - 1) = a^{m \wedge n} - 1.$$

Rédaction alternative :

On raisonne par double divisibilité.

• Montrons d'abord que $a^{m \wedge n} - 1$ divise $(a^m - 1) \wedge (a^n - 1)$. Pour cela, on remarque que si $k \mid n$, disons $n = k\ell$, on a

$$a^n \equiv (a^k)^\ell \equiv 1 \pmod{a^k - 1}.$$

Comme $m \wedge n$ divise m et n, $a^{m \wedge n} - 1$ divise donc bien $a^m - 1$ et $a^n - 1$, c'est-à-dire qu'il divise $(a^m - 1) \wedge (a^n - 1)$.

• Posons désormais $d = (a^m - 1) \wedge (a^n - 1)$ de sorte que d divise $a^m - 1$ et $a^n - 1$ et montrons que d divise $a^{m \wedge n} - 1$. Modulo d, on a $a^m \equiv 1$ et $a^n \equiv 1$ donc $a^{um+vn} \equiv 1 \pmod d$ pour tous $u, v \in \mathbb{Z}$. (Ici, le calcul de puissance est fait modulo d, et a^{-1} désigne l'inverse de a modulo d.) En particulier, pour $um + vn = m \wedge n$ (théorème de Bézout), on trouve

$$a^{m \wedge n} \equiv 1 \pmod d$$

c'est-à-dire $d \mid a^{m \wedge n} - 1$.

En conclusion, on a montré que d divisait et était divisible par $a^{m \wedge n} - 1$, donc les deux sont égaux, étant des nombres entiers positifs.

12.4 Lemme de Gauss, inversion modulaire

Exercice 503 (③) par Térence Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Vérifier que

$$(2n+1)\binom{2n}{n} = (n+1)\binom{2n+1}{n}.$$

b) Montrer que $n+1$ divise $\binom{2n}{n}$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+1)\binom{2n+1}{n} = \frac{(n+1)(2n+1)!}{n!(2n+1-n)!} = \frac{(n+1)(2n+1)(2n)!}{n!(n+1)n!} = (2n+1)\frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} = (2n+1)\binom{2n}{n}$$

donc $(n+1)\binom{2n+1}{n} = (2n+1)\binom{2n}{n}$.

b) $(n+1)\binom{2n+1}{n} = (2n+1)\binom{2n}{n}$ et $\binom{2n+1}{n} \in \mathbb{N}$

alors $n+1 \mid (2n+1)\binom{2n+1}{n}$. De plus, $2(n+1)-(2n+1)=1$,

donc, $\exists (a,b) \in \mathbb{Z}^2$, $a(n+1)+b(2n+1)=1$.

D'après le théorème de Bezout $n+1$ et $2n+1$ sont premiers entre eux.

$n+1 \mid (2n+1)\binom{2n}{n}$ et $n+1$ et $2n+1$ sont aussi premiers entre eux.

Ainsi, d'après le théorème de Gauss, $n+1$ divise $\binom{2n}{n}$.

Exercice 504 (②) par Wéline

On se propose de déterminer l'ensemble E des couples $(x;y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $6x-15y=3$

a) Montrer que, si $(x;y) \in \mathbb{Z}^2$, on a :

$$(x;y) \in E \iff 2(x-3) = 5(y-1)$$

b) En utilisant le lemme de Gauss, montrer que :

$$E = \{(5t+3; 2t+1)\ ;\ t \in \mathbb{Z}\}$$

a)

$$(x;y) \in E \iff 6x-15y=3$$
$$(x;y) \in E \iff 3(2x-5y-1)=0$$
$$(x;y) \in E \iff 2x-5y-1=0$$
$$(x;y) \in E \iff 2x-5y-6+5=0$$
$$(x;y) \in E \iff 2(x-3)-5(y-1)=0$$
$$(x;y) \in E \iff 2(x-3)=5(y-1)$$

b) Grâce à la question précédente, nous déduisons que :

$2 \mid 5(y-1)$ et 2 ne divise pas 5 donc
d'après le lemme de Gauss $2 \mid y-1$

Il existe donc $t \in \mathbb{Z}$ tel que $y-1=2t$ donc $y=2t+1$.

$5 \mid 2(x-3)$ et 5 ne divise pas 2 donc
d'après le lemme de Gauss $5 \mid x-3$

Il existe donc $t' \in \mathbb{Z}$ tel que $x - 3 = 5t'$ donc $x = 5t' + 3$.
Montrons maintenant que si $(x;y)$ sont solutions de E alors $t = t'$:

$$6\,(2t+3) - 15\,(2t'+1) = 3$$
$$\Longleftrightarrow 30t + 18 - 30t' - 15 = 3$$
$$\Longleftrightarrow 30\,(t - t') = 0$$
$$\Longleftrightarrow t - t' = 0$$
$$\Longleftrightarrow t = t'$$

Pour conclure on a bien vérifier l'égalité suivante :

$$E = \{(5t+3; 2t+1)\ ;\ t \in \mathbb{Z}\}$$

Exercice 505 (④) par Wéline

Soit a et b deux élèments de $\mathbb{N}^*$ et $c \in \mathbb{Z}$. On note δ le pgcd de a et b. On se propose de déterminer l'ensemble E des couples $(x;y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $ax + by = c$. On écrit $a = \delta a'$ et $b = \delta b'$ où a' et b' sont deux entiers premiers entre eux.

a) Montrer que E est non vide si et seulement si $\delta \mid c$.

On suppose dans la suite que $\delta \mid c$. On fixe un élément $(x_0; y_0)$ de E.

b) Pour $(x;y) \in \mathbb{Z}^2$, vérifier que :

$$(x;y) \in E \Longleftrightarrow a'\,(x - x_0) = b'\,(y_0 - y)$$

.

c) Montrer que :

$$E = \{(y_0 + tb'; y_0 - ta')\ ;\ t \in \mathbb{Z}\}$$

a)

$$ax + by = c$$
$$\Longleftrightarrow \delta a'x + \delta b'y = c$$
$$\Longleftrightarrow \delta\,(a'x + b'y) = c$$

Comme δ et $a'x + b'y$ appartiennent à $\mathbb{Z}$, on peut donc dire que : $\delta \mid c$ et $a'x + b'y \mid c$. Donc on a bien l'équivalence :

$$E \neq \emptyset \Longleftrightarrow \delta \mid c$$

.

b) Comme $(x_0; y_0) \in E$, on sait que $ax_0 + by_0 = c$.

$$(x;y) \in E \Longleftrightarrow ax + by = c$$
$$(x;y) \in E \Longleftrightarrow ax + by = ax_0 + by_0$$
$$(x;y) \in E \Longleftrightarrow \delta\,(a'x + b'y) = \delta\,(a'x_0 + b'y_0)$$
$$(x;y) \in E \Longleftrightarrow \delta\,(a'x + b'y) - \delta\,(a'x_0 + b'y_0) = 0$$
$$(x;y) \in E \Longleftrightarrow \delta\,(a'x + b'y - a'x_0 - b'y_0) = 0$$
$$(x;y) \in E \Longleftrightarrow a'x + b'y - a'x_0 - b'y_0 = 0$$
$$(x;y) \in E \Longleftrightarrow a'\,(x - x_0) + b'\,(y - y_0) = 0$$
$$(x;y) \in E \Longleftrightarrow a'\,(x - x_0) = -b'\,(y - y_0)$$
$$(x;y) \in E \Longleftrightarrow a'\,(x - x_0) = b'\,(y_0 - y)$$

c) Grâce à la question précédente, nous déduisons que :
$a' \mid b'\,(y_0 - y)$ et a' ne divise pas b' donc
d'après le lemme de Gauss $a' \mid y_0 - y$.

Il existe donc $t \in \mathbb{Z}$ tel que $y_0 - y = a't$ donc $y = -a't + y_0$.

$b' \mid a'(x - x_0)$ et b' ne divise pas a' donc
d'après le lemme de Gauss $b' \mid x - x_0$.

Il existe donc $t' \in \mathbb{Z}$ tel que $x - x_0 = b't'$ donc $x = b't' + x_0$. Montrons maintenant que si $(x; y)$ sont solutions de E alors $t = t'$:

$$\begin{aligned} & ax + by = c \\ \Longleftrightarrow\ & a(b't' + x_0) + b(-a't + y_0) = c \\ \Longleftrightarrow\ & ab't' + ax_0 - ba't + by_0 = c \\ \Longleftrightarrow\ & ab't' - ba't + c = c \\ \Longleftrightarrow\ & ab't' - ba't = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & \delta a'b't' - \delta b'a't = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & \delta a'b'(t' - t) = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & t' - t = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & t' = t \end{aligned}$$

Pour conclure on a bien vérifié l'égalité suivante :

$$E = \{(y_0 + tb'; y_0 - ta')\ ;\ t \in \mathbb{Z}\}$$

Exercice 506 (5) par Daniel

Soient a et b deux éléments de $\mathbb{N}^*$ premiers entre eux.

a) Montrer que $ab - a - b$ n'est pas de la forme $au + bv$ avec u et v dans $\mathbb{N}$.

b) Montrer que si n est un entier $\geq ab - a - b + 1$ alors n s'écrit $au + bv$ où $(u, v) \in \mathbb{N}^2$. On pourra remarquer que les $n - au$ pour $u \in \{0, \dots, b-1\}$ sont supérieurs ou égaux à $1 - b$ et ont des classes modulo b distinctes.

a) On suppose :

$$\begin{aligned} & \exists (u, v) \in \mathbb{N}^2, ab - a - b = au + bv \\ \Longleftrightarrow\ & au + bv - ab + a + b = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & a(u + 1 - b) = -b(v + 1) \end{aligned}$$

Donc $a \mid b(v + 1)$, donc, d'après le lemme de Gauss, $a \mid v + 1$.
De même, $b \mid a(u + 1 - b)$, donc $b \mid u + 1 - b$ donc $b \mid u + 1$.
Donc $v \geq a - 1$ et $u \geq b - 1$.
Donc $ab - a - b \geq a(b - 1) + b(a - 1)$.
Donc $ab - a - b \geq 2ab - a - b$ ce qui est absurde car $ab > 0$.

b) Démontrons d'abord la remarque de l'énoncé :
La plus petite valeur possible d'un $n - au$ est pour $n = ab - a - b + 1$ et $u = b - 1$. Alors :

$$n - au = ab - a - b + 1 - a(b - 1) = 1 - b$$

Les $n - au$ sont donc supérieurs ou égaux à $1 - b$.
Montrons que les $n - au$ ont des classes modulo b distinctes. On raisonne par l'absurde. Supposons :

$$\exists (u, u') \in [\![0, b - 1]\!]^2, n - au \equiv n - au'[b]$$

Donc $au \equiv au'[b]$. Donc :

$$\exists (q, q') \in \mathbb{N}^2, \exists r \in [\![0, b - 1]\!], \begin{cases} bq + r = au \\ bq' + r = au' \end{cases}$$

Donc $b(q - q') = a(u - u')$.
Donc $b | a(u - u')$.
Donc $b | (u - u')$ d'après le lemme de Gauss.
Donc $b \leq |(u - u')|$.

Donc $b \leq b-1$ ce qui est absurde.
Les b entiers $n-au$ ont donc tous des classes modulo b distinctes. Or il n'y a que b classes possibles. Donc :

$$\forall r \in [\![0, b-1]\!], \exists u \in [\![0, b-1]\!], n-au \equiv r[b].$$

Et notamment :

$$\exists u \in [\![0, b-1]\!], n-au \equiv 0[b].$$

C'est-à-dire : $\exists v \in \mathbb{Z}, n-au = bv$.
Or $bv \geq 1-b$.
Donc $bv \geq 0$.
Donc $v \in \mathbb{N}$.
Donc $\forall n \geq ab-a-b+1, \exists (u,v) \in \mathbb{N}^2, n = au+bv$.

EXERCICE 507 (⑤) par Adrien R et Daniel

Les notations sont celles de l'exercice précédent.

a) Montrer que si l'entier $n \leq ab-a-b$ s'écrit $au+bv$ avec u et v dans $\mathbb{N}$, alors cette écriture est unique.
b) Dénombrer l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{N}^2; ax+by \leq n\}$.
c) Déterminer le nombre d'entiers naturels qui ne peuvent pas s'écrire sous la forme $au+bv$ avec $(u,v) \in \mathbb{N}^2$.

a) On remarque que, si $n \leq ab-a-b$, alors $u \leq b-1$. A partir de cette remarque, on va pouvoir raisonner par l'absurde. Supposons que l'écriture de n n'est pas unique, c'est à dire :

$$\exists (u,u') \in [\![0, b-1]\!]^2, \exists (v,v') \in \mathbb{N}^2, n = au+bv = au'+bv'.$$

Donc $a(u-u') = b(v'-v)$. Donc $b|a(u-u')$. Donc, d'après le lemme de Gauss, $b|(u-u')$. Donc $b \leq u-u'$, donc $b \leq b-1$ d'après la remarque, ce qui est absurde.
Une autre démonstration est possible, en partant de la même remarque, et en utilisant la résolutions équations diophantiennes : en effet, l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ de $ax+by=n$ est $S = \{(u+kb, v-ka), k \in \mathbb{Z}\}$. Ici seul $k=0$ satisfait $u \in [\![0, b-1]\!]$.

b) On pose $N = ab-a-b$. On veut dénombrer $E = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2, ax+by \leq N\}$.

Soit n un entier, on pose $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $n = au+bv$ et $0 \leq u \leq b-1$. (En effet, l'existence d'un couple (u_0, v_0) tel que $au_0 + bu_0 = n$ est garantie par le théorème de Bézout. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ de $ax+by=n$ étant $S = \{(u_0+kb, v_0-ka), k \in \mathbb{Z}\}$, si on pose la division euclidieunne de u_0 par b, $u_0 = bq+r$, r est solution et appartient à $[\![0, b-1]\!]$.)

On suppose $n \leq N$. On note P_n le nombre de couple $(x,y) \in \mathbb{N}^2$ tel que $ax+by=n$. On sait d'après le a) que $P_n \leq 1$ et d'après l'exercice précédent que $P_N = 0$

On veut montrer que $P_n = 0 \Leftrightarrow P_{N-n} = 1$.

Supposons $P_n = P_{N-n} = 1$, alors il existe $(x,y) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n = ax+by$ et $(x', y') \in \mathbb{N}^2$ tel que $N-n = ax'+by'$, alors N=$a(x+x')+b(y+y')$, absurde. Ainsi $P_{N-n} = 1 \Rightarrow P_n = 0$.

Supposons $P_n = 0$. On a $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $n = au+bv$ et $0 \leq u \leq b-1$. On a alors $v < 0$. Ainsi :

$$N-n = ab-a-b-(au+bv) = a(b-u-1)+b(-v-1)$$

.
Or, $-b+1 \leq -u \leq 0$ donc $0 \leq b-u-1$ et $v < 0$ donc $-v-1 \geq 0$ donc $N-n$ s'écrit sous la forme $au'+bv'$ où u' et v' sont des naturels. On a $P_n = 0 \Rightarrow P_{N-n} = 1$.
Dès lors pour tout $0 \leq n \leq N$, on a :

$$P_n + P_{N-n} = 1$$

$|E| = \sum_{n=0}^{N} P_n = \sum_{n=0}^{N} P_{N-n}$ Ainsi, $2|E| = \sum_{n=0}^{N} (P_n + P_{N-n}) = \sum_{n=0}^{N} 1$.

On a donc $|E| = \dfrac{N+1}{2} = \dfrac{(a-1)(b-1)}{2}$

c) On sait d'après l'exercice précédent que tout nombre supérieur à N peut s'écrire $au+bv$ donc l'ensemble des nombres ne pouvant pas s'écrire sous la forme $au+bv$ est $\{0, \cdots, N\} \backslash E$ de cardinal $N+1-|E| = \dfrac{(a-1)(b-1)}{2}$

EXERCICE 508 (①) par Wéline

Déterminer l'inverse de 7 modulo 100, puis résoudre dans $\mathbb{Z}$ la congruence $7x \equiv 54\,[100]$

On sait que 7 et 100 sont premiers entre eux, on peut donc dire qu'il existe un entier naturel k tel que $k \in [\![0;99]\!]$ et vérifie :

$$7k \equiv 1\,[100]$$

Si on prend $k = 43$, on obtient :

$$43 \times 7 \equiv 43 \times 7\,[100]$$

$$\iff 43 \times 7 \equiv 301\,[100]$$

Et $301 \equiv 1\,[100]$, ce qui nous permet d'affirmer que :

$$43 \times 7 \equiv 1\,[100]$$

Maintenant que nous avons pu trouver l'inverse de 7 modulo 100, nous pouvons résoudre la congruence :

$$7x \equiv 54\,[100]$$

$$\implies 43 \times 7x \equiv 43 \times 54\,[100]$$

$$\implies x \equiv 2322\,[100]$$

$$\implies x \equiv 22\,[100]$$

Vérifions ensuite la réciprocité :

$$x \equiv 22\,[100]$$

$$\implies 7x \equiv 7 \times 22\,[100]$$

$$\implies 7x \equiv 154\,[100]$$

$$\implies 7x \equiv 54\,[100]$$

Donc les solutions de la $7x \equiv 54\,[100]$ sont les x tel que
$x \equiv 22\,[100]$.

EXERCICE 509 (①) Par Alexandre C

1. Calculer les inverses modulo 8 des entiers de $\{0, \ldots, 7\}$ premiers à 8.
2. Calculer les inverses modulo 10 des entiers de $\{0, \ldots, 9\}$ premiers à 10.

1. Les entiers de $\{0, \ldots, 7\}$ premiers à $8 = 2^3$ sont les entiers impairs c'est-à-dire 1 ;3 ;5 ;7. On trouve que
   - L'inverse de 1 modulo 8 est 1 (car $1 \times 1 \equiv 1\ [8]$).
   - L'inverse de 3 modulo 8 est 3 (car $3 \times 3 \equiv 9 \equiv 1\ [8]$.)
   - L'inverse de 5 modulo 8 est 5 (car $5 \times 5 \equiv 25 \equiv 1\ [8]$).
   - L'inverse de 7 modulo 8 est 7 (car $7 \times 7 \equiv (-1) \times (-1) \equiv 1\ [8]$).
2. Les entiers de $\{0, \ldots, 9\}$ premiers à $10 = 2 \times 5$, sont les entiers impairs de $\{0, \ldots, 9\}$ sauf 5, c'est-à-dire 1 ;3 ;7 ;9. On trouve que
   - L'inverse de 1 modulo 10 est 1 (car $1 \times 1 \equiv 1\ [10]$).
   - L'inverse de 3 modulo 10 est 7 (car $3 \times 8 \equiv 21 \equiv 1\ [10]$).
   - L'inverse de 7 modulo 10 est 3.
   - L'inverse de 9 modulo 10 est 9 (car $9 \times 9 \equiv 81 \equiv 1\ [10]$).

Exercice 510 (②) par Wéline

Soit $n \geq 2$ un entier. Montrer que n est premier si et seulement si tout élément de $\{1;...;n-1\}$ admet un inverse modulo n.

Le fait que n soit premier est équivalent au fait que n'est que 1 comme diviseur dans $[\![1;n-1]\!]$. Donc le seul diviseur commun entre n et un entier dans $[\![1;n-1]\!]$ est 1, on a donc que n est premier avec tous les entiers de $[\![1;n-1]\!]$. Or si on prend $a \in [\![1;n-1]\!]$, comme a et n sont premier entre eux, on a qu'il existe un entier x tel que :

$$ax \equiv 1\,[n]$$

Donc x est l'inverse de a modulo n. On peut donc bien conclure que le fait que n soit premier est équivalent à ce que tous les entiers compris entre 1 et $n-1$ admettent un inverse modulo n.

Exercice 511 (④) par Léo

Soit p un nombre premier

a) Justifier que tout $a \in \{1,...,p-1\}$ admet un unique inverse modulo p, que l'on note $i(a)$

b) Montrer que les seuls $a \in \{1,...,p-1\}$ tels que $i(a) = a$ sont 1 et $p-1$ (qui sont égaux si $p = 2$ et distincts sinon).

c) En regroupant judicieusement les facteurs du produit $\displaystyle\prod_{a=1}^{p-1} a$, établir le théorème de Wilson :

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod p$$

d) On suppose que $n \geqslant 2$ est un entier tel que $(n-1)! \equiv -1 \pmod n$. Montrer que tout élément de $\{1,...,n-1\}$ admet un inverse modulo n et en déduire que n est premier.

a) Puisque p est premier et que tous les éléments de $\{1,...,p-1\}$ sont strictement inférieurs à p ils sont tous inversibles, donc admettent au moins un inverse. De plus, d'après le **Théorème 33.**, ces inverses sont tous uniques modulo p, ce qui justifie la proposition.

b)

$$\begin{aligned} i(a) = a &\iff a^2 \equiv 1 \pmod p \\ &\iff (a-1)(a+1) \equiv 0 \pmod p \\ &\iff a \equiv 1 \pmod p \text{ ou } a \equiv -1 \pmod p \\ &\iff a = 1 \text{ ou } a = p-1 \end{aligned} \tag{2}$$

c) Puisque tous les éléments de $\{1;...;p-1\}$ admettent un unique inverse dans $\{1,...,p-1\}$, il suffit de les regrouper à l'intérieur du produit :

$$\prod_{a=1}^{p-1} a \equiv 1 \cdot \left(\underbrace{2 \cdot i(2)}_{\equiv 1[p]}\right) \cdot \left(\underbrace{3 \cdot i(2)}_{\equiv 1[p]}\right) \cdot ... \cdot p-1 \pmod p \equiv p-1 \equiv -1 \pmod p$$

d) Il suffit de remarquer que

$$\forall a \in \{1,...,n-1\}, \quad -a \cdot \prod_{i \in \{1,...,n-1\} \setminus \{a\}} i \equiv 1 \pmod n$$

Par conséquent, tous les éléments de cet ensemble sont inversibles modulo n, i.e. ; ils sont tous premiers avec n, donc n est premier.

Exercice 512 (④) par Quentin

Soit $n \geq 6$ un entier non premier. Montrer que n divise $(n-1)!$.

Distinguons deux cas :

-Cas 1 : si $n = ab$ avec a et b dans $[\![2, n-1]\!]$ où $a < b$ alors $(n-1)! = 1 \times ... \times a \times ... \times b \times ... \times (n-1) \Rightarrow n|(n-1)!$

-Cas 2 : $n = ab$ avec a et b dans $[\![2, n-1]\!]$ où $a = b$ pour tout couple de diviseurs associés stricts. Alors $n = p^2$ où p est premier puisque sinon on peut se rapporter au premier cas. Comme $p > 2$ on a $n = p^2 > 2p > p$ et $(n-1)! = 1 \times ... \times p \times ... \times 2p \times ... \times (n-1) \Rightarrow n|(n-1)!$.

12.5 Complément : racines rationnelles d'un polynôme

EXERCICE 513 (②) Par Alexandre C

On a montré en **6.3.1** que l'équation $x^5 - 5x + 7 = 0$ admet une unique solution réelle. Déduire du théorème 34 que cette solution est un nombre irrationnel.

On raisonne par l'absurde. On suppose que l'unique solution réelle de l'équation

$$x^5 - 5x + 7 = 0$$

soit rationnelle. D'après le Théorème 34, cette solution, notée n, est entière. Ainsi on a :

$$n^5 - 5n + 7 = 0, \quad n \in \mathbb{Z}$$

donc $n(n^4 - 5) = -7$. Comme 7 est premier, on en déduit que

$$(n, n^4 - 5) \in \{(1, -7);\ (-1, 7);\ (7, -1);\ (-7, 1)\}.$$

Or,
- Si $n = 1$ on a $n^4 - 5 = -4 \neq -7$.
- Si $n = -1$ on a $n^4 - 5 = -4 \neq -7$.
- Si $n = 7$ on a $n^4 - 5 > 1$ donc $n^4 - 5 \neq 1$.
- Si $n = 7$ on a $n^4 - 5 > 1$ donc $n^4 - 5 \neq 1$.

donc il n'existe aucun $n \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$(n, n^4 - 5) \in \{(1, -7);\ (-1, 7);\ (7, -1);\ (-7, 1)\}$$

ce qui est absurde et conclut.

EXERCICE 514 (②) Par Lancelot

Déduire du théorème 34 que, si $k \geq 2$ est un entier et $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre $\sqrt[k]{n}$ est un rationnel si et seulement s'il est entier, i.e. si et seulement si n est puissance k-ième d'un entier.

Soient $k \geq 2$ un entier et n un entier naturel non nul. On considère le polynôme :

$$P(X) := X^k - n.$$

On raisonne par double implication (notons que le sens réciproque ne pose aucun problème). Pour le sens direct Supposons que $\sqrt[k]{n}$ soit un rationnel que l'on écrit $\frac{p}{q}$ avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Ainsi, $\sqrt[k]{n}$ est une racine rationnelle du polynôme P. En vertu du Théorème 34, on a donc que q divise 1, d'où $q = 1$. Par suite, $\sqrt[k]{n} = p$, soit que n est la puissance k-ième d'un entier ce qui était voulu.

EXERCICE 515 (③) Par Alexandre C

Trouver un polynôme unitaire de degré 4 à coefficients dans $\mathbb{Z}$ sont $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ soit racine et en déduire que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel, ce que l'on a établit autrement dans l'exercice 21 de **1.4**.

On a : $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$.
$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^4 = (5 + 2\sqrt{6})^2 = 25 + 4 \times 6 + 20\sqrt{6} = 49 + 20\sqrt{6}$.
Si bien que $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^4 - 10(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 + 1 = 0$.

Ainsi, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ est racine de $X^4 - 10X^2 + 1$ qui est un polynôme unitaire à coefficients entiers.
Alors, d'après le théorème 34, si par l'absurde $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ était rationnel, il serait entier.
Or, on peut vérifier facilement que $3 < \sqrt{2}+\sqrt{3} < 4$ donc $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ne peut pas être entier, ce qui est donc absurde.

C'est pourquoi, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ est irrationnel.

EXERCICE 516 (④) par Alexandre C

a) Soient x_1 et x_2 deux nombres rationnels tels que $x_1 + x_2$ et x_1x_2 soient entiers. Montrer que x_1 et x_2 sont entiers.
b) Donner deux nombres réels irrationnels x_1 et x_2 tels que $x_1 + x_2$ et x_1x_2 soient entiers
c) Soient x_1, x_2 et x_3 trois nombres rationnels tels que $x_1+x_2+x_3$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$ soient entiers. Montrer que x_1, x_2 et x_3 sont entiers

a) x_1 et x_2 sont des rationnels racines du polynôme unitaire à coefficients entiers $(x-x_1)(x-x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2$ donc sont entiers en vertu du théorème 34.

b) En posant $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ on a :

$$x_1 + x_2 = 1 \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad x_1x_2 = \frac{(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}{2 \cdot 2} = -1 \in Z$$

c) En faisant l'hypothèse que $x_1x_2x_3$ est entier, alors :
Le polynôme

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - x_1x_2x_3$$

est un polynôme unitaire à coefficients entiers qui s'annule en x_1, x_2 et x_3 donc x_1, x_2, x_3 sont des entiers d'après le théorème 34.

EXERCICE 517 (④) Par Lancelot

1. Montrer que, si $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme P_n à coefficients réels tels que
$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad P_n(2\cos(\theta)) = 2\cos(n\theta).$$
2. Expliciter, P_0, P_1, P_2, P_3.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
4. Montrer que, si $n \geq 1$, P_n est unitaire.
5. En utilisant la question c. de l'exercice précédent, montrer que si r est un nombre rationnel tel que $\cos(\pi r)$ soit rationnel, alors $2\cos(\pi r)$ est entier : c'est le résultat de l'exercice 396.

1. Soit n un entier naturel. Alors on a :
$$2\cos(n\theta) = 2T_n(\cos(\theta)),$$
Il suffit alors de poser :
$$P_n(X) := 2T_n\left(\frac{X}{2}\right).$$
Observons que son unicité provient du fait que si un autre polynôme existait, alors il coïnciderait sur $[-2; 2]$ qui est un intervalle infini.

2. En se servant des premiers polynômes de Tchebychev, on a que :

$$\begin{aligned}P_0 &= 1\\ P_1 &= X\\ P_2 &= X^2 - 1\\ P_3 &= X^3 - 3X.\end{aligned}$$

3. On montre ce résultat par récurrence double sur n.
   — *Initialisation.* Question précédente.
   — *Hérédité.* On fixe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et tel que P_n et P_{n-1} soient à coefficients entiers. En utilisant la relation de récurrence vérifiée par les polynômes de Tchebychev on obtient que :
   $$T_{n+2}\left(\frac{X}{2}\right) = XT_{n+1}\left(\frac{X}{2}\right) - T_n\left(\frac{X}{2}\right),$$
   soit :
   $$2T_{n+2}\left(\frac{X}{2}\right) = 2XT_{n+1}\left(\frac{X}{2}\right) - 2T_n\left(\frac{X}{2}\right),$$
   ce qui est également :
   $$P_{n+2}(X) = XP_{n+1}(X) - P_n(X),$$
   d'où P_{n+2} est à coefficients entiers, puisque somme de polynômes qui le sont.

   Du principe de récurrence on déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_n est à coefficients entiers.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que T_n est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1} (cf exercice 446). Par suite :
   $$\operatorname{dom}(P_n) = 2\operatorname{dom}(T_n)\frac{1}{2^n} = 1,$$
   d'où P_n est unitaire.
5. Dans l'hypothèse où r est un rationnel tel que $\cos(\pi r)$ soit rationnel, alors on écrit $2\cos(\pi r)$ qui est un rationnel $\frac{p}{q}$ avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. On a alors que :
   $$P_{2q}(2\cos(\pi r)) - 2 = 0,$$
   autrement dit, $2\cos(\pi r)$ est racine d'un polynôme à coefficients entiers, donc en vertu du Théorème 34, $q = 1$ car P_{2q} est unitaire en raison de la question d. Donc $2\cos(\pi r)$ est entier ce qu'il fallait démontrer.

12.6 Décomposition en facteurs premiers

EXERCICE 518 (②) par Quentin LEPINE

Déduire le théorème 30 de l'énoncé précedent et de la remarque 2 de **12.3**.

Soient a, b, n, des entiers relatifs, on veut montrer que si n n'est pas premier à ab, alors n n'est pas premier à a ou à b.

On a n qui n'est pas premier à ab donc d'après la remarque 2 de **12.3** il existe p premier tel que $p \mid n$ et $p \mid ab$.

Or, d'après le théorème 35, si $p \mid ab$ alors $p \mid a$ ou $p \mid b$.

On a donc $p \mid n$ et $p \mid a$ ou $p \mid n$ et $p \mid b$. Alors p est un diviseur premier de n et a ou p est un diviseur premier de n et b.
Ainsi, d'après la remarque 2, n n'est pas premier à a ou n n'est pas premier à b.

On a donc montré que si n n'est pas premier à ab, alors n n'est pas premier à a ou b.
Par contraposée, si n est premier à a et b, alors n est premier à ab.

Plus généralement, soient $r \geq 2$ entier, $a_1, \ldots a_r$ entiers relatifs et n entier relatif, on veut montrer que si n n'est pas premier à $\prod_{i=1}^{r} a_i$, alors n n'est pas premier à au mois un des a_i, $1 \leq i \leq r$.

Puisque n n'est pas premier à $\prod_{i=1}^{r} a_i$, d'après la remarque 2 il existe p premier tel que $p \mid \prod_{i=1}^{r} a_i$ et $p \mid n$.

Or, d'après le théorème 35, si p divise $\prod_{i=1}^{r} a_i$, alors p divise au moins un des a_i.

Donc p est un diviseur premier d'au moins un des $n \wedge a_i$.
Alors d'après la remarque 2, n n'est pas premier à au moins un des a_i.

On a donc montré que si n n'est pas premier à $\prod_{i=1}^{r} a_i$, alors n n'est pas premier à au moins un des a_i.
Par contraposée, si n est premier à chacun des a_i, alors n est premier à $\prod_{i=1}^{r} a_i$.

On retrouve donc bien le théorème 30.

Exercice 519 (1) par Axolotl

a) Déterminer les diviseurs 75000. Quel est leur nombre ?
b) Même question pour 2022

a) Les diviseurs de $75000 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^5$ sont :
$1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 25, 30, 40, 50, 60, 75, 100, 120, 125, 150, 200, 250, 300, 375, 500, 600, 625, 750, 1000, 1250, 1$

Nous pouvons tous les compter, mais une manière plus élégante et moins chronophage pour déterminer le nombre de diviseurs est de faire le raisonnement suivant :
Soit $a_1, a_2, ...a_n$ les exposants des n facteurs premier d'un nombre N. Pour chaque facteur premier, on peut choisir jusqu'à $a_i + 1$ exposants possibles. Il ya donc $(a_1 + 1)(a_2 + 1)...(a_n + 1)$ diviseurs de N.
En l'occurence, il y a $(3 + 1)(1 + 1)(5 + 1) = 48$ diviseurs de 75000

b) $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$, ses diviseurs sont au nombre de $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ et sont :
$1, 2, 3, 6, 337, 674, 1011$ et 2022

Exercice 520 (2) par Adrien

Déterminez les couples (x, y) d'éléments de $\mathbb{N}^*$ tels que $x \wedge y = 5$ et $xy = 300$.

Analyse : Soient x et y', deux naturels non-nuls. Car $x \wedge y = 5$, il existe deux naturels non-nuls x' et y' tel que $x = 5x'$ et $y = 5y'$. Ainsi, $25x'y' = 300$, c'est-à-dire $x'y' = 12$.

Notons $\mathcal{D}(n)$ l'ensemble des diviseurs (positifs) d'un naturel non n. On a $\mathcal{D}(12) = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$.

Ainsi, les potentiels couples solutions, (x', y') sont : $(1; 12)$; $(2; 6)$; $(3; 4)$; $(4; 3)$; $(6; 2)$ et $(12; 1)$.
C'est-à-dire que les potentiels couples solutions (x, y) sont : $(5; 60)$; $(10; 30)$; $(15; 20)$; $(20; 15)$; $(30; 10)$ et $(60; 5)$.

Synthèse : Il est facile de vérifier que chaque produit $x \cdot y$ est bien égal à 300. Il faut désormais vérifier que $x \wedge y = 5$. Car $x \wedge y = y \wedge x$, nous pouvons nous contenter de ne vérifier que les 3 premiers couples.

Nous avons : $5 \wedge 60 = 5$; $15 \wedge 25 = 5$ mais $10 \wedge 30 = 10$.

Ainsi, les couples solutions sont $(5; 60)$; $(15; 25)$; $(25; 15)$ et $(60; 5)$.

Exercice 521 (②) Par Paul

Quels sont les entiers naturels n pouvant s'écrire sous la forme ab où a et b sont deux entiers supérieurs ou égaux à 2 ?

Prouvons qu'il s'agit de tous les entiers non premier plus grand que 2 (1 ne peut évidement pas s'écrire sous cette forme).

Raisonnons par l'absurde pour montrer qu'un entier n premier ne peut pas s'écrire sous cette forme : Si n est premier et $n = ab$ avec a et b deux entiers supérieurs ou égaux à 2. Alors on a a qui divise n, de plus $a \neq 1$ car $a \geq 2$ et $a \neq n$ car $a = \frac{n}{b} \leq \frac{n}{2} < n$. Ainsi, n a au moins 3 diviseurs positifs (1, a et lui-même) et donc n n'est pas premier, ce qui contredit la supposition.

Prouvons maintenant que tout entier naturel non premier (et différent de 1) peut s'écrire sous cette forme : Soit $n \geq 2$ un entier non premier. n a donc au moins 3 diviseurs et donc en a forcément 1 différent de 1 et de n, notons a ce diviseurs. On a $a \leq n$ car $a \mid n$ d'où $a \in 2, 3, \cdots, n-1$ car $a \neq 1$ et $a \neq n$. Notons $b = \frac{n}{a}$, b est bien entier car a divise n. De plus, comme $a < n$, on a $b = \frac{n}{a} > 1$ et comme b est entier, $b \geq 2$. Ainsi, pour tout $n \geq 2$ non premier, il existe a et b deux entiers supérieurs ou égaux à 2 tels que $ab = n$.

Exercice 522 (②) par Adrien I

Déterminer les $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \vee 6 = 96$

Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse : D'après l'énoncé, il existe deux naturels non-nuls k, k' tel que $96 = 6k$ et $96 = nk'$.

Notons $\mathcal{D}(n)$ l'ensemble des diviseurs (positifs) d'un naturel non n.

On a $\mathcal{D}(96) = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 16; 24; 32; 48; 96\}$. Ainsi, $n \in \mathcal{D}(96)$.

Synthèse : Nous devons désormais calculer le ppcm de chaque potentiel n avec 6. Il n'est pas nécessaire d'utiliser la formule du ppcm dépendant du pgcd.

— Dans un premier temps, il est aisé de remarquer que $1 \vee 6 = 2 \vee 6 = 3 \vee 6 = 6 \vee 6 = 6$.
— De plus, 12 apparait, et dans la table de multiplication de 4, et dans celle de 6. Donc $4 \vee 6 = 12$, car 6 n'est pas multiple de 4.
— 12 est un multiple de 6, donc $12 \vee 6 = 12$. De même, $24 \vee 6 = 24$, $48 \vee 6 = 48$ et $96 \vee 6 = 96$.
— On remarque que 6 n'est ni diviseur de 8, ni de 16, mais de 24. Donc $8 \vee 6 = 24$. De même, $16 \vee 6 = 48$. Finalement $32 \vee 6 = 96$.

Ainsi, $n \in \{32; 96\}$.

Exercice 523 (②) par Adrien I

Quel est le plus petit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $d(n) = 10$.

Remarquons que $10 = 2 \cdot 5 = 1 \cdot 10$. Ainsi, d'après la remarque 1 du cours, le nombre que nous cherchons peut s'écrire de deux manières : si p et q sont deux nombres premiers distincts, alors $n = p^{2-1}q^{5-1} = pq^4$ ou $n = p^{1-1}q^{10-1} = p^0q^9$.

Car la fonction $f : x \mapsto x^n$, avec n un entier naturel non-nul, est croissante, nous essayons de minimiser p et q. Ainsi, $p = 2$ et $q = 3$ ou l'inverse.

Dans le premier cas, on trouve que $n = 2 \cdot 3^4 = 158$ ou $n = 3 \cdot 2^4 = 54$. Donc le plus petit n est ici 54. Dans le second cas, on trouve que le plus petit n possible est $n = 2^9 = 512$.

Nous avons donc montré que le plus petit n tel que $d(n) = 10$ est 54.

Exercice 524 (②) Par Lancelot

Soient a et b dans $\mathbb{N}^*$ Montrer que a divise b si et seulement si a^2 divise b^2.

On raisonne par doubles implications. Pour le sens direct. Supposons que a divise b. Alors il existe un entier k tel que : $ka = b$. Donc $k^2a^2 = b^2$. Donc a^2 divise b^2 par définition. Pour le sens réciproque. Supposons que a^2 divise b^2. On écrit a et b à l'aide de leur décomposition en facteur premier :

$$a = \prod_{i=1}^{p} p_i^{\alpha_i} \quad \text{et} \quad b = \prod_{i=1}^{q} p_i^{\beta_i}.$$

Ainsi, par hypothèse de divisibilité :

$$\frac{b^2}{a^2} = \prod_{i=r+1}^{q} p_i^{2\beta_i} \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{2\beta_i}}{p_i^{2\alpha_i}} = \prod_{i=r+1}^{q} p_i^{2\beta_i} \prod_{i=1}^{r} p_i^{2(\beta_i-\alpha_i)}, \quad \text{avec : } \forall i \in [\![1;r]\!], \ \ 2(\beta_i - \alpha_i) \geq 0.$$

Un passage à la racine carrée dans l'égalité obtenue donne que :

$$\frac{b}{a} = \prod_{i=r+1}^{q} p_i^{\beta_i} \prod_{i=1}^{r} p_i^{\beta_i-\alpha_i}, \quad \text{avec : } \forall i \in [\![1;r]\!], \ \ \beta_i - \alpha_i \geq 0,$$

Observons que alors que les deux produits sont entiers, donc a divise b, ce qui achève l'exercice.

EXERCICE 525 (③) Par Mathieu B

Soient a et b dans $\mathbb{N}^*$ tels que, pour tout entier n ≥ 1, a^n divise b^{n+1}. Montrer que a divise b.

En sachant l'équivalence suivante, avec m et n dans $\mathbb{N}^*$:

$$m \mid n \iff \forall p \in \mathcal{P}, \, v_p(m) \leq v_p(n)$$

Alors soient a et b dans $\mathbb{N}^*$, avec un entier n ≥ 1 et p $\in \mathcal{P}$

$$v_p(a^n) \leq v_p(b^{n+1})$$

Cela donne alors,

$$n \cdot v_p(a) \leq (n+1) \cdot v_p(b)$$

Nous obtenons ainsi,

$$v_p(a) \leq (1 + \frac{1}{n}) \cdot v_p(b)$$

En sachant que le membre de droite est une suite convergente vers $v_p(b)$, par passage à la limite,

$$v_p(a) \leq v_p(b)$$

Cela conclut qu'avec a et b dans $\mathbb{N}^*$:

$$a \text{ divise } b$$

EXERCICE 526 (③) Par Paul

Soient a et b deux éléments de $\mathbb{N}^*$ tels que $a^2 = b^3$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{N}^*$ tel que $a = c^3$ et $b = c^2$.

Pour tout p premier tel que $p \mid a$, on a $p \mid a^2 = b^3 \Rightarrow p \mid b$. De même, pour tout p premier tel que $p \mid b$, on a $p \mid b^3 = a^2 \Rightarrow p \mid a$. Ainsi, a et b ont les mêmes facteurs premiers dans leurs décomposition en facteurs premier. On peut donc écrire :

$$a = p_1^{e_1} \times \cdots \times p_n^{e_n} \quad \text{et} \quad b = p_1^{f_1} \times \cdots \times p_n^{fn}$$

Or,

$$\forall i \in 1, \cdots, n, \ \ Vp_i(a^2) = Vp_i(b^3) \Rightarrow 2e_i = 3f_i$$

d'où par le théorème de Gauss :

$$3 \mid e_i \quad \text{et} \quad 2 \mid f_i.$$

On peut donc écrire $e_i = 3e_i'$ et $f_i = 2f_i'$ mais comme $2e_i = 3f_i$, on a $e_i' = f_i'$. Notons alors $\forall i \in 1, \cdots, n$, $a_i = e_i' = f_i'$. Prenons le nombre $c \in \mathbb{N}^*$ tel que $c = p_1^{a_1} \times \cdots \times p_n^{a_n}$. On a bien

$$c^3 = p_1^{3a_1} \times \cdots \times p_n^{3a_n} = p_1^{e_1} \times \cdots \times p_n^{e_n} = a$$

et

$$c^2 = p_1^{2a_1} \times \cdots \times p_n^{2a_n} = p_1^{f_1} \times \cdots \times p_n^{f_n} = b.$$

Exercice 527 (③) Par Paul.P

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer en fonction de la décomposition de n en facteurs premier de n le nombre de couples $(x, y) \in \mathbb{N}^{*2}$

Soit $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{e_i}$, la décomposition en facteurs premiers de n. Trouvons une condition nécessaire et suffisante sur de tels x et y :
Comme $n = xy$, on a $n \mid xy$ soit $\forall i \in \{1, 2, ..., l\}$, $p_i^{e_i} \mid xy$. Or, $x \wedge y = 1$ donc d'après le théorème de Gauss soit $p_i^{e_i} \mid x$ soit $p_i^{e_i} \mid y$ (de plus p_i^h avec $h > e_i$ ne divise ni x ni y, on peut le démontrer, par l'absurde si p_i^h divise x alors p_i^h divise n ce qui est absurde car le plus grand a tel que p_i^a divise n est e_i par définition de la décomposition en facteurs premiers.) De plus comme $xy \mid n$ il n'existe pas de p premier tel que $p \mid x$ ou $p \mid y$ mais $p \nmid n$.
Donc les décompositions en facteurs premiers de x et de y sont de la forme :

$$x = \prod_{i \in A} p_i^{e_i} \text{ et } y = \prod_{i \in \bar{A}} p_i^{e_i}$$

avec A un sous ensemble de $\{1, 2, ..., l\}$

De plus on vérifie facilement que de tels x et y vérifient les conditions de l'énoncé.

Il existe donc une bijection entre les couples (x, y) vérifiant l'énoncé et les sous ensembles $\{1, 2...k\}$, il y en a donc le même nombre.
Or on sait qu'il existe 2^k sous ensembles de $\{1, 2...k\}$ (pour chaque élément il existe 2 possibilités, soit ce dernier appartient au sous ensemble soit il n'y appartient pas), on en déduit qu'il existe donc 2^k de tels couples (x, y) .

Exercice 528 (②) par Adrien I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que n est le carré d'un nombre entier si et seulement si $d(n)$ est impair.

Raisonnons par double implication :

$\Longrightarrow$ Supposons que n est le carré d'un nombre entier m. Alors, d'après le théorème fondamental de l'arithmétique, il existe des nombres premiers $p_1, p_2, ..., p_r$ et des entiers naturels non-nuls $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ tel que $m = \Pi_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$. D'où $n = m^2 = \Pi_{i=1}^r p_i^{2\alpha_i}$. Ainsi, $d(m^2) = \Pi_{i=1}^r (2\alpha_i + 1)$. Or, le produit de nombres impairs est impair, donc $d(n)$ est impair. L'implication est vraie.

$\Leftarrow$ Supposons $d(n)$ impair. Alors, il existe $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ tel que $d(n) = \Pi_{i=1}^r (\alpha_i + 1)$. Car $d(n)$ est impair, pour tout $1 \leq i \leq r$, $(\alpha_i + 1)$ est impair, donc α_i est pair. Il existe donc des entiers naturels $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r$ tel que pour tout $1 \leq i \leq r$, $\alpha_i = 2\beta_i$.

On obtient donc $d(n) = \Pi_{i=1}^r (2\beta_i + 1)$. Ainsi, il existe des nombres premiers $p_1, p_2, ..., p_r$ et un entier m tel que $n = \Pi_{i=1}^r p_i^{2\beta_i}$. D'où $n = (\Pi_{i=1}^r p_i^{\beta_i})^2$. La réciproque est vraie, donc n est le carré d'un entier si et seulement si $d(n)$ est impair.

Exercice 529 (③) par Alexandre C.

a) Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$. Quel est le minimum de la fonction

$$x \in [1, +\infty[\mapsto \frac{1 + ax}{1 + x}?$$

b) Soient $n \geq 2, k \geq 2$ et $r \geq 1$ des entiers. On suppose que n admet r diviseurs premiers. Montrer que

$$d(n^k) \geq \left(\frac{1 + k}{2}\right)^r d(n).$$

a) Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et soit $f : x \in [1, +\infty[\mapsto \dfrac{1+ax}{1+x} \in \mathbb{R}$.

f est dérivable sur $[1, +\infty[$ et quelque soit $x \in [1, +\infty[$ on a :

$$f'(x) = \frac{a(1+x) - (1+ax)}{(1+x)^2} = \frac{a-1}{(1+x)^2}$$

Ainsi :

• Si $a < 1$, f est décroissante sur $[1, +\infty[$ et son image admet pour borne inférieure sa limite quand $x \longrightarrow +\infty$ c'est-à-dire a.

• Si $a > 1$, f est croissante sur $[1, +\infty[$ donc atteint son minimum en 1 qui vaut $\dfrac{1+a}{2}$.

b) Posons $n = \displaystyle\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ la décomposition en facteurs premiers de n.

On a $d(n^k) = \displaystyle\prod_{i=1}^{r}(k\alpha_i + 1)$ donc $\dfrac{d(n^k)}{d(n)} = \displaystyle\prod_{i=1}^{r}\left(\frac{k\alpha_i+1}{\alpha_i+1}\right) \geq \left(\frac{1+k}{2}\right)^r$ ce qui conclut.

Exercice 530 (③) par Adrien R.

Soit $E = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*;\ m^2 - 1 = 2^n\}$

a) Montrer que si $(m,n) \in E$, $m-1$ et $m+1$ sont de la formes 2^k avec $k \in \mathbb{N}$

b) Déterminer E

a) Si $(m,n) \in E$, alors $(m-1)(m+1) = 2^n$ donc $(m-1)$ et $(m+1)$ sont diviseurs associés de 2^n donc sont de la forme 2^k, $k \in \mathbb{N}$

b) On pose $(k,k') \in \mathbb{N}^2$, $k \leq k'$ tel que $m-1 = 2^k$ et $m+1 = 2^{k'}$. On procède par disjonction de cas en supposant $(m;n) \in E$:
Si $k = 0$, $m-1 = 1$ et $m+1 = 3$ donc $2^n = 3$ ce qui est absurde.
Si $k = 1$, $m-1 = 2$ et $m+1 = 4$ donc $2^n = 8$ c'est-à-dire $(m,n) = (3,3)$. Réciproquement $(3,3) \in E$
Si $k \geq 2$, $m+1 = (m-1)+2 = 2^k + 2$ et $m+1 = 2^{k'}$ donc $2^{k'-1} = 2^{k-1} + 1$ or $2^{k'-1}$ est pair et $2^{k-1}+1$ est impair ce qui est absurde.
Ainsi, E est un singleton : $E = \{(3;4)\}$

Exercice 531 (④) par Adrien R.

Soit $E = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*;\ 3^m - 1 = 2^n\}$

a) Montrer que si $(m,n) \in E$ et $n \geq 3$, alors m est pair. On pourra utiliser une congruence avec un module bien choisi.

b) Déterminer E

a) On étudie les congruences de 3^m modulo 8
Pour $m = 0$, $3^m \equiv 1\ [8]$, pour $m = 1$, $3^m \equiv 3\ [8]$ et pour $m = 2$, $3^m \equiv 1\ [8]$
Pour tout m pair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $m = 2k$ donc $3^m \equiv (3^2)^k\ [8]$ donc $3^m \equiv 1^k[8]$. Donc, si m est pair, 8 divise $3^m - 1$. Si m impair, on pose $k \in \mathbb{N}$ tel que $m = 2k+1$.
$3^m \equiv 3 \cdot 3^{2k}\ [8]$ donc $3^m \equiv 3\ [8]$. Donc si m est impair, 8 ne divise pas $3^m - 1$.
Par contraposée, si $(m,n) \in E$, $n \geq 3$, alors m est pair car 8 divise 2^n donc divise $3^m - 1$.

b) Si $n \geq 3$, on pose $k \in \mathbb{N}$ tel que $m = 2k$. $(m,n) \in E \Longrightarrow (3^k)^2 - 1 = 2^n$. On se ramène à l'exercice précédent. Le couple solution doit satisfaire $3^k = 3$ et $n = 3$.
Réciproquement le couple $(m,n) = (2,3)$ est solution
Il reste à étudier le cas où $0 \leq n \leq 2$: il n'y a pas de solution pour $n = 0$, pour $n = 1$, on a $3^m = 3$ donc $m = 1$, le couple $(1,1)$ est solution
Il n'y a pas de solution pour $n = 2$
On a donc $E = \{(1,1);(2,3)\}$

Exercice 532 (②)

Soit p un nombre premier, a et $-nulb$ d. On a $\mathcal{D}(12) = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$.

Ainsi, les solutionseux éléments de $\mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$v_p(a+b) \geqslant \min(v_p(a); v_p(b))$$

On pose m et n de $\mathbb{N}$ tels que $v_p(a) = m$ et $v_p(b) = n$
il existe donc $(r, s) \in \mathbb{N}^2$ tels que $a = p^m r$ et $b = p^n s$
On suppose sans perte de généralité que $m \geqslant n$, on a alors :

$$a + b = p^n \left(p^{m-n} + s\right)$$

Si $m = n$, alors $a + b = p^m(r + s)$ donc $v_p(a + b) \geqslant \min(m, n)$ comme voulu
Si $m > n$ alors $a + b = p^n \left(p^{m-n} + s\right)$ donc $v_p(a + b) = n$
En effet, si $v_p(a + b) > n$ on aurait $p \mid s$ ce qui est faux.

Conclusion : $v_p(a + b) \geqslant \min\left(v_p(a), v_p(b)\right)$ avec égalité ssi $v_p(a) > v_p(b)$

Exercice 533 (③)

Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n^2+n+1}$ est un nombre irrationnel. On pourra appliquer la remarque 7.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $n^2 < n^2 + n + 1 < (n + 1)^2$
Donc, $n^2 + n + 1$ n'est pas une puissance 2-ième d'un élément de $\mathbb{N}^*$.
Ainsi, $\sqrt{n^2 + n + 1}$ est irrationnel d'après la remarque 7.

Exercice 534 (③) par Mathieu B

Soient k ≥ 2 un entier, a et b deux éléments de $\mathbb{N}^*$ premiers entre eux, c $\in \mathbb{N}^*$. On suppose que $ab = c^k$. Montrer qu'il existe a' et b' dans $\mathbb{N}^*$ tels que a $= a'^k$ et b $= b'^k$

Soient k ≥ 2 un entier, a et b deux éléments de $\mathbb{N}^*$ premiers entre eux, c $\in \mathbb{N}^*$.
On suppose que $ab = c^k$ et on sait que $a \wedge b = 1$
Ainsi d'après la *caractérisation des puissances k-ièmes* avec p premier :

$$k \mid v_p(ab)$$

Donc :

$$k \mid v_p(a) + v_p(b)$$

Raisonnons désormais par disjonction de cas :
• **Si p | a :**

$$p \nmid b \text{ donc } v_p(b) = 0$$

Ainsi :

$$v_p(a) + v_p(b) = v_p(a)$$

De ce fait :

$$k \mid v_p(a) \text{ et } k \mid v_p(b)$$

• **Si p | b :**

$$p \nmid a \text{ donc } v_p(a) = 0$$

Ainsi :

$$v_p(a) + v_p(b) = v_p(b)$$

De ce fait :

$$k \mid v_p(a) \text{ et } k \mid v_p(b)$$

• **Si p ∤ a et p ∤ b :**

$$v_p(a) = 0 \text{ et } v_p(b) = 0$$

De ce fait :

$$k \mid v_p(a) \text{ et } k \mid v_p(b)$$

Nous venons de démontrer par disjonction de cas que pour tout nombre premier p :

$$k \mid v_p(a) \text{ et } k \mid v_p(b)$$

Ainsi d'après la *caractérisation des puissances k-ièmes* :
Il existe a' et b' $\in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$a = a'^k \text{ et } b = b'^k$$

EXERCICE 535 (④) par Mathieu B

Soient k ≥ 2 un entier, n $\in \mathbb{N}^*$.
a)Montrer que $n(n+1)$ n'est pas de la forme m^k avec m $\in \mathbb{N}^*$. On utilisera l'exercice précédent.
b)Montrer que $n(n+1)(n+2)$ n'est pas de la forme m^k avec m $\in \mathbb{N}^*$. On utilisera l'exercice précédent.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$
Démontrons tout d'abord que $n \wedge (n+1) = 1$:
Étant donné que l'on peut écrire :

$$(n+1)\cdot(1) + (-1)\cdot(n) = 1$$

Nous en déduisons, d'après le théorème de Bezout, que n et n+1 sont premiers entre eux, n $\in \mathbb{N}^*$.

Par contraposée de l'exercice précédent :
Avec n et n+1 premiers entre eux, nous savons que soit k $\geq$ 2 un entier, s'il n'existe pas de a et b dans $\mathbb{N}^*$ tels que $n = a^k$ et $n+1 = b^k$ alors n(n+1) n'est pas de la forme m^k avec m $\in \mathbb{N}^*$:

Nous allons alors démontrer par l'absurde qu'il n'existe pas de a et b dans $\mathbb{N}^*$ tels que $n = a^k$ et $n+1 = b^k$
Supposons qu'il existe a et b deux éléments de $\mathbb{N}^*$ tels que $n = a^k$ et $n+1 = b^k$

Sachant :

$$n < n+1$$

Nous avons alors :

$$a^k < b^k$$

Alors avec $k \geq 2$,

$$a < b$$

Donc :

$$a+1 \leq b$$

Ainsi :

$$(a+1)^k \leq b^k = n+1$$

Or

$$(a+1)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^{k-i} = 1 + a^k + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} a^{k-i}$$

Conséquemment, avec $a^k = n$:

$$n+1+\sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} a^{k-i} \leq n+1$$

Cela est absurde, car a $\in \mathbb{N}^*$ et k un entier ≥ 2.

Alors il n'existe pas de a et b dans $\mathbb{N}^*$ tels que $n = a^k$ et $n+1 = b^k$

Ainsi d'après la contraposée de l'exercice précédent, avec n $\in \mathbb{N}^*$, k un entier ≥ 2 et n et n+1 premiers entre eux : $n(n+1) \neq m^k$, $m \in \mathbb{N}^*$

b)Soit $n \in \mathbb{N}^*$
Nous savons que :

$$n(n+2) = n^2 + 2n$$

Nous pouvons alors écrire que :

$$(n^2 + 2n) \cdot (-1) + (n+1) \cdot (n+1) = 1$$

Nous en déduisons d'après le théorème de Bezout que (n+1) et n(n+2) sont premiers entre eux.

Raisonnons par contraposée de l'exercice précédent :
Avec (n+1) et n(n+2) premiers entre eux, nous savons que soit k ≥ 2 un entier, s'il n'existe pas de a et b dans $\mathbb{N}^*$ tels que $n+1 = a^k$ et $n(n+2) = b^k$ alors n(n+1)(n+2) n'est pas de la forme m^k avec m $\in \mathbb{N}^*$:

Nous allons alors démontrer par l'absurde qu'il n'existe pas de a et b dans $\mathbb{N}^*$ tels que $n+1 = a^k$ et $n(n+2) = b^k$
Supposons qu'il existe a et b deux éléments de $\mathbb{N}^*$ tels que $n+1 = a^k$ et $n(n+2) = b^k$

Nous avons :

$$a^{2k} = (n+1)^2 = n(n+2) + 1 = b^k + 1$$

Ainsi,

$$a^{2k} - b^k = 1$$

Donc,

$$(a^2 - b) \sum_{i=0}^{k-1} a^{2i} b^{k-1-i} = 1$$

Alors,

$$(a^2 - b) \mid 1$$

Ainsi,

$$(b - a^2) \mid 1$$

Conséquemment,

$$b - a^2 = 1$$

Donc,

$$a^2 + 1 = b$$

Ainsi,

$$a^2 < b$$

Donc avec $k \geq 2$,

$$a^{2k} < b^k$$

Pour finir,

$$b^k + 1 < b^k$$

Nous aboutissons à une absurdité car $b \in \mathbb{N}^*$ et k ≥ 2.

Il n'existe alors pas de a et b dans $\mathbb{N}^*$ tels que, avec k un entier ≥ 2, $n+1 = a^k$ et $n(n+2) = b^k$.

D'après la contraposée de l'exercice précédent, avec n $\in \mathbb{N}^*$, k un entier ≥ 2 et (n+1) et n(n+2) premiers entre eux, le produit n(n+1)(n+2) $\neq m^k$, m $\in \mathbb{N}^*$.

Exercice 536 (④) par Alexandre C (Triplets pythagoriciens).

Les triplets pythagoriciens sont les (x, y, z) de $\mathbb{N}^{*3}$ tels que

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Le triplet pythagoricien (x, y, z) est dit primitif si le seul diviseur commun de x, y et z dans $\mathbb{N}^*$ est 1. Exemple : $(3, 4, 5)$.
Le but de l'exercice est de décrire les triplets pythagoriciens.

a) Montrer que tout triplet pythagoriciens s'écrit (du, dv, dw) où $d \in \mathbb{N}^*$ et où (u, v, w) est un triplet pythagoricien primitif.
Dans les questions b) à d), (x, y, z) est un triplet pythagoricien primitf.

b) Montrer que x et y n'ont pas la même parité et que z est impair.

c) Montrer qu'il existe deux éléments u et v de $\mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que

$$z + x = 2u \text{ et } z - x = 2v.$$

d) Montrer qu'il existe r et s dans $\mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que $r > s$ et que

$$(x, y, z) = (r^2 - s^2, 2rs, r^2 + s^2).$$

e) Soient r et s deux éléments premiers entre eux de $\mathbb{N}^*$ tels que $r > s$ et que r ou s soit pair. Montrer que

$$(x, y, z) = (r^2 - s^2, 2rs, r^2 + s^2)$$

est un triplet pythagoricien primitif.

a) Soit (x, y, z) un triplet pythagoricien et d le plus grand entier naturel supérieur à 0 tel que $d \mid x$, $d \mid y$ et $d \mid z$.
Il existe $u, v, w \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$x = du \qquad y = dv \qquad z = dw.$$

Comme (x, y, z) est un triplet pythagoricien on a :

$$x^2 + y^2 = z^2 \text{ donc } d^2u^2 + d^2v^2 = d^2w^2 \text{ alors (puisque } d \neq 0\text{), } u^2 + v^2 = w^2$$

ainsi (u, v, w) est un triplet pythagoricien.
En outre, il n'existe aucun diviseur commun à u, v et w qui est strictement supérieur à 1 (dans le cas contraire, la maximalité de d serait contredite) donc on a bien trouvé $d \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$(x, y, z) = (du, dv, dw) \text{ avec } (u, v, w) \text{ un triplet pythagoricien primitif.}$$

b) x et y ne pouvent pas être tous les deux impairs. En effet, si c'était le cas (par l'absurde), on aurait

$$z^2 = x^2 + y^2 \equiv (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 \equiv 2[4]$$

donc on aurait $1 = v_2(z^2) = 2v_2(z)$ avec $v_2(z) \in \mathbb{N}$ donc $2 \mid 1$ ce qui est absurde.
Par l'absurde si x et y étaient pairs on aurait que $4 \mid x^2 + y^2 = z^2$ donc $2 \mid z$ donc z serait pair et le triplet (x, y, z) ne serait pas primitif ce qui est absurde.
Ainsi, x et y sont de parités différentes donc $z^2 = x^2 + y^2$ est impair alors z également.

c) Par symétrie entre x et y, quitte à échanger leurs rôles, on peut supposer que x est impair et y est pair. Comme z est impair et que $z > x$ (car $z \in \mathbb{N}^*$ et $z^2 = x^2 + y^2$) on a :

$$u = \frac{z + x}{2} \in \mathbb{N}^* \qquad \text{et} \qquad v = \frac{z - x}{2} \in \mathbb{N}^*.$$

Par l'absurde, supposons qu'il existe $p \in \mathbb{R}$ tel que $p \mid u$ et $p \mid v$. Alors :

$$p \mid u + v = z \qquad p \mid u - v = x \text{ donc } p \mid z^2 - x^2 = y^2 \text{ alors } p \mid y$$

donc (x, y, z) n'est pas pythagoricien primitif, ce qui est absurde.
Finalement u et v sont bien dans $\mathbb{N}^*$, premiers entre eux et vérifient $z + x = 2u$ et $z - x = 2v$.

d) (x, y, z) étant pythagoricien primitif, d'après la question précédente, il existe u et $v \in \mathbb{N}^*$ tels que $u \wedge v = 1$ et $\begin{cases} x &= u - v \\ z &= u + v \end{cases}$. Alors, on a : $y^2 = z^2 - x^2 = 4uv$ donc $(\dfrac{y}{2})^2 = uv$ et comme $u \wedge v = 1$, u et v sont des carrés parfaits. Il existe $r \in \mathbb{N}^*$ et $s \in \mathbb{N}^*$ tels que $u = r^2$ et $v = s^2$. Comme $u \wedge v = 1$ on a $r \wedge s = 1$.

On a alors : $y = \sqrt{4uv} = 2rs$ et $(x, y, z) = (r^2 - s^2, 2rs, r^2 + s^2)$ avec $r \wedge s = 1$ qui est le résultat désiré.

e) $(r^2 - s^2)^2 + (2rs)^2 = r^4 - 2(rs)^2 + s^4 + 4(rs)^2 = r^4 + 2(rs)^2 + s^4 = (r^2 + s^2)^2$
donc un triplet de cette forme est bien pythagoricien.
$r^2 - s^2$ étant supposé impair, supposons par l'absurde qu'il existe p premier tel que $p \mid 2rs$ et $p \mid r^2 - s^2$, alors $p \neq 2$ donc $p \mid rs$ et $p \mid r^2 - s^2$.
$p \mid rs$ entraîne $p \mid r$ ou $p \mid s$
Si $p \mid r$, comme $p \mid r^2 - s^2$, alors $p \mid s^2$ donc $p \mid s$, ce qui est absurde car $r \wedge s = 1$.
Si $p \mid s$, comme $p \mid r^2 - s^2$, alors $p \mid r^2$ donc $p \mid r$, ce qui est absurde car $r \wedge s = 1$.

Ainsi, $(2rs) \wedge (r^2 - s^2) = 1$ donc le triplet $(r^2 - s^2, 2rs, r^2 + s^2)$ est bien primitif.

Exercice 537 (④) par Daniel

Un entier naturel $n \geq 2$ est parfait si la somme des diviseurs de n autres que n dans $\mathbb{N}^*$ est égale à n, autrement dit si la somme des diviseurs de n dans $\mathbb{N}^*$ est égale à $2n$.

a) Vérifier que 6 et 28 sont des nombres parfaits.
b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $p := 2^n - 1$ soit premier (i.e. un nombre de Mersenne, exercice 484). On pose $N = 2^{n-1}(2^n - 1)$. Montrer que N est parfait.

a) $Div(6) \cap \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 6\}$. La somme vaut bien 12, donc 6 est parfait.
$Div(28) \cap \mathbb{N} = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$. La somme vaut bien 56, donc 28 est parfait.
b) D'après la remarque 1 du théorème 36, les diviseurs de N sont les $2^{\beta_1}(2^n - 1)^{\beta_2}$ avec $\beta_1 \in [\![0, n-1]\!]$ et $\beta_2 \in \{0, 1\}$. Donc la somme S des diviseurs de N dans $\mathbb{N}$ vaut :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=0}^{n-1} 2^i + \sum_{i=0}^{n-1} (2^n - 1)2^i \\ &= 2^n \sum_{i=0}^{n-1} 2^i \\ &= 2^n(2^n - 1) \text{ d'après la formule de la somme des termes d'une suite géométrique} \\ &= 2N \end{aligned}$$

Donc N est parfait.

Exercice 538 (⑤) par Daniel

Montrer que tout nombre parfait pair est de la forme décrite dans l'exercice précédent.

Soit N un nombre pair et parfait. On note $N = 2^n q$ avec $n \geq 1$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Montrons que q est premier et vaut $2^{n+1} - 1$
On note S la somme des diviseurs dans $\mathbb{N}$ de N et S' la somme des diviseurs dans $\mathbb{N}$ de q. On a :

$$S = \sum_{i=0}^{n} 2^i S'$$

Soit, selon la formule de la somme des termes d'une suite géométrique :

$$S = (2^{n+1} - 1)S'$$

Donc $2S' = q + \frac{S'}{2^n}$
S' est un nombre entier donc $\frac{S'}{2^n}$ l'est aussi. Donc $\exists k \in \mathbb{N}^*, S' = k2^n$
De plus, si N est parfait, alors $(2^{n+1}-1)k2^n = 2^{n+1}q$, donc :

$$q = \frac{k}{2}(2^{n+1}-1)$$

Donc k est pair. Donc $\exists k' \in \mathbb{N}^*, k = 2k'$ et :

$$S' = k'2^{n+1}, \quad q = k'(2^{n+1}-1)$$

On remarque que $S' - q = k'$ et $k'|q$
Donc $Div(q) \cap \mathbb{N} = \{k', q\}$
Donc q est premier et $k' = 1$. Donc $q = (2^{n+1}-1)$. C'est donc bien un nombre de Mersenne. N est donc bien de la forme décrite dans l'exercice précédent.

EXERCICE 539 (③) par Daniel

a) Soient $m \in \mathbb{N}^*$, p un diviseur premier de m. Montrer que

$$v_p(m) \leq \frac{\ln(m)}{\ln(p)}.$$

b) Soient $r \in \mathbb{N}^*, p_1 < \ldots < p_r$ des nombres premiers, A l'ensemble des éléments de $\mathbb{N}^*$ dont les diviseurs premiers appartiennent à $\{p_1, \ldots, p_r\}$. Montrer que

$$|A \cap [\![1, n]\!]| \leq \prod_{i=1}^{r} \left(1 + \frac{\ln(n)}{\ln(p_i)} \right).$$

a) On a :

$$p^{v_p(m)} \leq m.$$

Donc :

$$\begin{aligned} v_p(m) &\leq \log_p(m) \\ &\leq \frac{\ln(m)}{ln(p)} \end{aligned}$$

b) Soit $a \in A \cap [\![1, n]\!]$. D'après la question a), on sait que :

$$\forall i \in [\![1, r]\!], v_{p_i}(a) \leq \frac{\ln(a)}{\ln(p_i} \leq \frac{\ln(n)}{\ln(p_i}.$$

Par conséquent, il y a au plus $1 + \frac{\ln(n)}{\ln(p_i)}$ valeurs possibles pour chaque $v_{p_i}(a)$. a peut donc prendre au plus :

$$\prod_{i=1}^{r} \left(1 + \frac{\ln(n)}{\ln(p_i)} \right) \text{ valeurs différentes.}$$

EXERCICE 540 (⑤) par Daniel

Soit P un polynôme non constant à coefficients dans $\mathbb{Z}$. En utilisant éventuellement l'exercice précédent, montrer que l'ensemble des nombres premiers p tels qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $P(n) \neq 0$ et $p|P(n)$ soit infini, ce qui généralise en un certain sens l'exercice 491.

$\star_1$ On démontre tout d'abord qu'il existe N dans $\mathbb{N}^*$ tel que tous les $P(n)$, avec n un entier $\geq N$, sont distincts et différents de 0.

P change de sens de variation quand le polynôme dérivé P' vaut 0, c'est à dire un nombre fini de fois ($\leq deg(P) - 1$). De plus, P n'est pas constant, donc il existe $N' \in \mathbb{N}^*$ tel que la suite (u_n) de terme général $u_n = P(n)$ est strictement monotone à partir du rang N'.

De plus,

$$\lim_{n\to\infty} |P(n)| = \lim_{n\to\infty} |an^{deg(P)}| = +\infty \text{ où a est le coefficient dominant de } P.$$

Donc on a bien :

$$\exists N \in \mathbb{N}^*, \forall (a,b) \in \mathbb{N}^*/N \leq a < b, 0 < |P(a)| < |P(b)|$$

et on en tire le résultat.

On va maintenant raisonner par l'absurde. Supposons que l'ensemble des nombres premiers p tels qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $P(n) \neq 0$ et $p|P(n)$ soit fini. On note $p_1, \ldots, p_r \quad r \in \mathbb{N}^*$ les éléments de cet ensemble. D'après $\star_1$, on a :

$$\forall p \in \mathcal{P} \setminus \{p_1, \ldots, p_r\}, \forall n \geq N, p \nmid P(n).$$

$\star_2$ Donc, pour tout $n \geq N$, les diviseurs premiers de n appartiennent à $\{p_1, \ldots, p_r\}$.

Donc, d'après l'exercice précédent, il y a

$$\prod_{i=1}^{r} \left(1 + \frac{\ln(n)}{\ln(p_i)}\right) \text{ valeurs possibles de P(n).}$$

On va chercher à prouver qu'à partir d'un certain point, il n'est plus possible d'exprimer tous les $P(n)$ à l'aide des facteurs $p_1, \ldots, p_r$. Pour cela, on va étudier la limite de la suite (v_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{\prod_{i=1}^{r} \left(1 + \frac{\ln(n)}{\ln(p_i)}\right)}{n}$$

On remarque :

$$v_n = f(\ln(n)) \text{ avec } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \frac{\prod_{i=1}^{r} \left(1 + \frac{x}{\ln(p_i)}\right)}{e^x}$$

$\prod_{i=1}^{r} \left(1 + \frac{x}{\ln(p_i)}\right)$ est un polynôme de degré r, que l'on note $P'(x)$. Il peut s'écrire :

$$P'(x) = x^r \left(\sum_{i=0}^{r} \frac{a_i}{x^{r-i}}\right) \text{ avec } (a_1, \ldots, a_r) \in \mathbb{R}_+^r$$

$$\text{Donc } \lim_{x\to+\infty} \frac{P'(x)}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^r a_r}{e^x} = 0 \text{ par croissance comparée.}$$

De plus, $\lim_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$, donc par composée, $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Donc, d'après la définition de la limite :

$$\exists n \geq N, v_n < \frac{n-N}{n}$$

$$\iff \prod_{i=1}^{r} \left(1 + \frac{\ln(n)}{\ln(p_i)}\right) < n - N$$

Donc tous les entiers dans $[\![N, n]\!]$ ne peuvent pas s'écrire comme un produit de $p_1, \ldots, p_r$, ce qui contredit $\star_2$. Donc l'ensemble des nombres premiers p tels qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $P(n) \neq 0$ et $p|P(n)$ est infini.

12.7 Le petit théorème de Fermat

Exercice 541 (①) par Daniel

Soient p un nombre premier, $x \in \mathbb{Z}$, m et n deux entiers naturels tels que $m \equiv n[p-1]$. Montrer que $x^n \equiv x^m[p]$.

On a :

$$\left\{\begin{array}{lll} x^n & = & x^r x^{k(p-1)} \\ x^m & = & x^r x^{k'(p-1)} \end{array}\right. \quad \text{avec } (k,k') \in \mathbb{N}^2, r \in [\![0, p-2]\!].$$

On raisonne par disjonction des cas. Si p|x, alors il vient immédiatement :

$$x^n \equiv x^m \equiv 0[p]$$

Supposons maintenant que $p \nmid x$:

Donc, d'après le théorème 34, $x^{p-1} \equiv 1[p]$. Donc :

$$\left(x^{p-1}\right)^k \equiv \left(x^{p-1}\right)^{k'} \equiv 1[p].$$

Donc :

$$x^n \equiv x^m \equiv x^r[p].$$

Exercice 542 (②) Par Mathieu B

Quels sont les nombres premiers p tels que p divise $7^p + 8^p$?

Soit p un nombre premier tel que p divise $7^p + 8^p$. En d'autre termes, $7^p + 8^p \equiv 0[p]$.
Or d'après le petit théorème de Fermat, avec p premier :

$$7^p \equiv 7[p] \text{ et } 8^p \equiv 8[p]$$

Ainsi,

$$7^p + 8^p \equiv 0[p] \Leftrightarrow 7 + 8 \equiv 0[p] \Leftrightarrow 15 \equiv 0[p]$$

On cherche donc les diviseurs premiers de 15, à savoir : 3 et 5.
Réciproquement, on vérifie que 3 et 5 fonctionnent :

$$7^3 + 8^3 \equiv 855 \equiv 3 \times 285 \equiv 0[3]$$

$$7^5 + 8^5 \equiv 49575 \equiv 5 \times 9915 \equiv 0[5]$$

Pour conclure, $p \in \{3; 5\}$.

Exercice 543 (②) par Loïse

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $x^{11} \equiv x[33]$.

Soit x un entier relatif quelconque. D'après le petit théorème de Fermat, comme 3 est un nombre premier, il vient : $x^3 \equiv x \pmod 3$. Soit :

$$x^3 \equiv x[3] \rightarrow (x^3)^4 \equiv x^4[3].$$

Or, $x \equiv x[3]$, d'où, par produit de congruences :

$$x^4 \equiv x^2[3].$$

Soit :

$$x^{12} \equiv x^2[3] \Leftrightarrow x^{12} - x^2 \equiv 0[3] \Leftrightarrow x(x^{11} - x) \equiv 0[3].$$

On en déduit que 3 divise $x(x^{11} - x)$. Raisonnons par disjonction des cas.
Si x n'est pas un multiple de 3, 3 et x sont donc premiers entre eux. D'après le théorème de Gauss :

$$3 \mid x^{11} - x.$$

Si x est un multiple de 3, 3 divise x. Comme $x^{11} - x = x(x^{10} - 1)$, il vient :

$$3 \mid x^{11} - x.$$

On a établit que, pour tout $x \in \mathbb{Z}$,

$$3 \mid x^{11} - x.$$

Or, 11 est un nombre premier. D'après le petit théorème de Fermat, pour tout $x \in \mathbb{Z}$:

$$x^{11} \equiv x[11] \Leftrightarrow x^{11} - x \equiv 0[11] \Leftrightarrow 11 \mid x^{11} - x.$$

Ainsi, comme $3 \mid x^{11} - x$ et $11 \mid x^{11} - x$, 3 et 11 étant premiers entre eux, il vient, pour tout $x \in \mathbb{Z}$:

$$33 \mid x^{11} - x \Leftrightarrow x^{11} - x \equiv 0[33] \Leftrightarrow x^{11} \equiv x[33].$$

EXERCICE 544 (③) par Paul

a) Décomposer 2730 en facteurs premiers
b) Montrer que, pour tout nombre premier divisant 2730, $p-1$ divise 12
c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a $x^{13} \equiv x \pmod{2730}$

a) $2730 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$.

b) Pour $p \in \{2, 3, 5, 7, 13\}, p - 1 \in \{1, 2, 4, 6, 12\}$ et tous ces nombres divisent bien 12.

c)

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{Z}, x^{13} \equiv x \pmod{2730} &\iff 2730 \mid x^{13} - x \\
&\iff \begin{cases} 2 \mid x^{13} - x \\ 3 \mid x^{13} - x \\ 5 \mid x^{13} - x \\ 7 \mid x^{13} - x \\ 13 \mid x^{13} - x \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^{13} \equiv x \pmod{2} \\ x^{13} \equiv x \pmod{3} \\ x^{13} \equiv x \pmod{5} \\ x^{13} \equiv x \pmod{7} \\ x^{13} \equiv x \pmod{13} \end{cases}
\end{aligned}$$

Ceci est vrai car pour $p \in \{2, 3, 5, 7, 13\}$ si x divise p alors on a bien $x^{13} \equiv 0 \equiv x \pmod{p}$, et sinon, d'après la question précédente, pour $p \in \{2, 3, 5, 7, 13\}, \exists k \in \mathbb{Z}$ tq $k(p-1) = 12 \iff 13 = k(p-1) + 1$

Ainsi, d'après le petit théorème de Fermat, on a toujours $x^{13} \equiv x^{k(p-1)+1} \equiv x \times x^{k(p-1)} \equiv x \times \left(x^{p-1}\right)^k \equiv x \times 1^k \equiv x \pmod{p}$.

On a donc bien $\forall x \in \mathbb{Z}, x^{13} \equiv x \pmod{2730}$

EXERCICE 545 (③) par Paul

1. Décomposer $n = 561$ en produits de facteurs premiers et vérifier, que pour tout diviseur premier p de n, $p - 1$ divise $n - 1$
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{Z}$,

$$x^{561} \equiv x \pmod{561}$$

3. Plus généralement, soient $r \geqslant 2$ un entier, $p_1 < p_2 < ... < p_r$ des nombres premiers et $n \prod_{i=1}^{r}$. On suppose que, pour tout $i \in \{1, ..., r\}$, $p_i - 1$ divise $n - 1$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \quad x^n \equiv x \pmod{n}$$

a) $561 = 3 \times 11 \times 17$.
Pour $p \in \{3, 11, 17\}$ on a $p - 1 \in \{2, 10, 16\}$. De plus, ces trois nombres divisent bien 560

b) En appliquant la même méthode que dans l'exercice précédent, on a :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{Z}, x^{561} \equiv x \pmod{561} &\iff 561 \mid x^{561} - x \\
&\iff \begin{cases} 3 \mid x^{561} - x \\ 11 \mid x^{561} - x \\ 17 \mid x^{561} - x \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^{561} \equiv x \pmod{3} \\ x^{561} \equiv x \pmod{11} \\ x^{561} \equiv x \pmod{17} \end{cases}
\end{aligned}$$

Ceci est vrai car pour $p \in \{3, 11, 17\}$ si x divise p alors on a bien $x^{561} \equiv 0 \equiv x \pmod{p}$, et sinon, d'après la question précédente, pour $p \in \{3, 11, 17\}, \exists k \in \mathbb{Z}$ tq $k(p-1) = 560 \iff 561 = k(p-1)+1$

Ainsi, d'après le petit théorème de Fermat, on a toujours $x^{561} \equiv x^{k(p-1)+1} \equiv x \times x^{k(p-1)} \equiv x \times \left(x^{p-1}\right)^k \equiv x \times 1^k \equiv x \pmod{p}$.

On a donc bien $\forall x \in \mathbb{Z}, x^{561} \equiv x \pmod{561}$

c) Puisque $\forall i \in \{1, ..., r\}, p_i - 1$ divise $n - 1$, il existe $k_i \in \mathbb{Z}$ tel que $(p - 1)k_i = n - 1 \iff n = (p_i - 1)k_i + 1$

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{Z}, x^n \equiv x \pmod{n} &\iff n \mid x^n - x \\
&\iff \begin{cases} p_1 \mid x^n - x \\ p_2 \mid x^n - x \\ ... \\ p_r \mid x^n - x \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^{p_1} \equiv x \pmod{p_1} \\ ... \\ x^{p_r} \equiv x \pmod{p_r} \end{cases}
\end{aligned}$$

Ceci est vrai car pour $i \in \{3, 11, 17\}$ si x divise p_i alors on a bien $x^n \equiv 0 \equiv x \pmod{p_i}$, et sinon :

d'après le petit théorème de Fermat, on a toujours $x^n \equiv x^{k_i(p_i-1)+1} \equiv x \times x^{k_i(p_i-1)} \equiv x \times \left(x^{p_i-1}\right)^{k_i} \equiv x \times 1^{k_i} \equiv x \pmod{p}_i$.

On a donc bien $\forall x \in \mathbb{Z}, x^n \equiv x \pmod{n}$

Exercice 546 (③) par Paul

En utilisant éventuellement le théorème 38, montrer que :
si p est un nombre premier et $k \in \{0, ..., p - 1\}$, $\binom{p-1}{k} \equiv (-1)^k \pmod{p}$

Face à un tel exercice (avec des coefficients binomiaux modulo p) il faut directement penser au théorème 38. Avec celui ci et la relation de Pascal, une simple récurrence permet de résoudre l'exercice, à première vue difficile (utiliser la formule explicite des coefficients binomiaux serait une horreur).

Procédons par récurrence sur k :
Pour $k \in \{0, ..., p - 1\}$, soit la propriété $P(k)$: "$\binom{p-1}{k} \equiv (-1)^k \pmod{p}$"
Initialisation. Pour $k = 0$, on a $\binom{p-1}{0} = 1 \equiv 1 \pmod{p}$
Ainsi, $P(0)$ est vraie

Hérédité. Supposons que pour un certain $k \in \{0, ..., p-2\}$, on ait $\binom{p-1}{k} \equiv (-1)^l \pmod p$
Avec la relation de Pascal, on sait que $\binom{p-1}{k} + \binom{p-1}{k+1} = \binom{p}{k+1}$. Or d'après le théorème 38 : $\binom{p}{k+1} \equiv 0 \pmod p$.
Ainsi, $\binom{p-1}{k} \equiv -\binom{p-1}{k+1} \pmod p$
Donc, puisque par hypothèse, $\binom{p-1}{k} \equiv (-1)^k \pmod p$, on a :
$-\binom{p-1}{k+1} \equiv (-1)^k \pmod p$ d'où $-\binom{p-1}{k+1} \equiv (-1)^{k+1} \pmod p$.
Ainsi, si $P(k)$ est vraie, alors $P(k+1)$ l'est aussi

Conclusion. D'après le principe de récurrence, $\forall k \in \{0, ..., p-1\}, P(k)$ est vraie

EXERCICE 547 (④) par Daniel

Soit p un nombre premier. Si $x \in \mathbb{Z}$, on dit que x est un carré modulo p s'il existe $y \in \mathbb{Z}$ tel que $x \equiv y^2[p]$.

a) Vérifier que tout $x \in \mathbb{Z}$ est un carré modulo 2.
b) Quels sont les $x \in \mathbb{Z}$ qui sont des carrés modulo 3 ? 5 ? 7 ?
c) On suppose que $x \in \mathbb{Z}$ n'est pas divisible par p est un carré modulo p. Montrer que $x^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p]$.
d) On suppose que $p \equiv 3[4]$. Montrer que -1 n'est pas un carré modulo p.
e) On suppose que $p \equiv 1[4]$. En utilisant le théorème de Wilson (exercice 511), montrer que -1 est un carré modulo p.

a) Soit $x \in \mathbb{Z}$. D'après le petit théorème de Fermat, $x \equiv x^2[2]$

b)

$x \equiv \ldots [3]$	$x^2 \equiv \ldots [3]$
0	0
1	1
2	1

Donc les $x \in \mathbb{Z}$ qui sont des carrés modulo 3 sont les x congrus à 0 ou 1 modulo 3.

$x \equiv \ldots [5]$	$x^2 \equiv \ldots [5]$
0	0
1	1
2	4
3	4
4	1

Donc les $x \in \mathbb{Z}$ qui sont des carrés modulo 5 sont les x congrus à 0, 1 ou 4 modulo 5.

$x \equiv \ldots [7]$	$x^2 \equiv \ldots [7]$
0	0
1	1
2	4
3	2
4	2
5	4
6	1

Donc les $x \in \mathbb{Z}$ qui sont des carrés modulo 7 sont les x congrus à 0, 1, 2 ou 4 modulo 7.

c) Soit y un entier relatif tel que $x \equiv y^2[p]$. On a donc :

$$x^{\frac{p-1}{2}} \equiv y^{p-1}[p]$$

Or $p \nmid x$ donc $p \nmid y^2$. Donc $p \nmid y$. Donc, d'après le petit théorème de Fermat, $y^{p-1} \equiv 1[p]$, d'où on tire le résultat.

d) On raisonne par l'absurde. Supposons que -1 est un carré modulo p. Donc :

$$\exists y \in \mathbb{Z}, y^2 \equiv -1[p]$$

Donc :

$$y^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}}[p]$$

Or $\frac{p-1}{2} \equiv 1[2]$ car $p \equiv 3[4]$. Donc :

$$y^{p-1} \equiv -1[p]$$

Cependant, $p \nmid y$, donc, d'après le petit théorème de Fermat, $y^{p-1} \equiv 1[p]$. Donc $-1 \equiv 1[p]$. Donc $p = 2$, ce qui contredit l'hypothèse $p \equiv 3[4]$.

e) D'après le théorème de Wilson,

$$\begin{aligned} -1 &\equiv (p-1)![p] \\ &\equiv 1 \times 2 \times \ldots \times \frac{p-1}{2} \times \frac{-p+1}{2} \times \ldots \times (-2) \times (-1)[p] \\ &\equiv \left(\frac{p-1}{2}!\right)^2 (-1)^{\frac{p-1}{2}}[p] \\ &\equiv \left(\frac{p-1}{2}!\right)^2 [p] \text{ car } \frac{p-1}{2} \equiv 0[2] \end{aligned}$$

ce qui prouve que -1 est un carré modulo p.

Exercice 548 (④) par Daniel

Soient $n \geq 2$ un entier, p un diviseur premier de $(n!)^2 + 1$.

a) Montrer, en utilisant la question d) de l'exercice précédent, que $p \equiv 1[4]$.

b) Montrer que $p > n$.

c) Conclure que l'ensemble des nombres premiers congrus à 1 modulo 4 est infini.

a) On a : $(n!)^2 + 1 \equiv 0[p]$ donc -1 est un carré modulo p. Donc, d'après l'exercice précédent, $p \equiv 1[4]$.

b) On raisonne par l'absurde. Supposons que $p \leq n$. Donc $p|(n!)^2$. Donc, par combinaison linéaire $p|1$, ce qui est absurde car p est un nombre premier.

c) On note E l'ensemble des nombres premiers congrus à 1 modulo 4.
Pour tout entier $n \geq 2$, $(n!)^2 + 1$ admet nécessairement au moins un diviseur premier. Donc :

$$\forall n \geq 2, \exists p \in E, p > n$$

On peut désormais raisonner par l'absurde. Supposons que l'ensemble E est fini. Comme c'est un ensemble ordonné, il admet un élément maximal que l'on note a. D'après la proposition précédente, il existe $p \in E, p > a$ ce qui est absurde. Donc l'ensemble E est infini.

Exercice 549 (④) par Adrien R

Soient p un nombre premier, P le polynôme défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = \prod_{j=1}^{p-1}(x+j)$$

Le polynôme P est de degré p-1, unitaire, à coefficients entiers. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = x^{p-1} + \sum_{i=0}^{p-2} a_i x^i$$

a) On se propose de démontrer qu'il existe un polynôme Q à coefficients entiers divisibles par p tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = x^{p-1} - 1 + Q(x)$$

Montrer que ce résultat entraîne le petit théorème de Fermat et le théorème de Wilson (exercice 511 de **12.4**).

b) Vérifier que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (x+1)P(x+1) = (x+p)P(x)$$

c) En déduire, en raisonnant par récurrence sur i, que

$$\forall i \in \{2, \dots, p-1\}, \quad p \mid a_{p-i}$$

d) En déduire également, par examen des coefficients constants, que

$$1 + \sum_{j=0}^{p-2} a_j = pa_0$$

e) Conclure.

a) On suppose qu'il existe Q à coefficients entiers divisibles par p tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = x^{p-1} - 1 + Q(x)$$

On a alors pour tout $x \in \mathbb{Z}$,

$$x(P(x) - Q(x)) = x^p - x$$

Démontrer le petit théorème de Fermat revient alors à montrer que pour tout $x \in \mathbb{Z}$, p divise $x(P(x) - Q(x))$.

Soit $x \in \mathbb{Z}$, si p divise x, alors p divise bien $x(P(x) - Q(x))$.

Sinon, on pose la division euclidienne de x par p :

$$x = p \cdot q + r, \quad 1 \leq r \leq p - 1$$

. On a $1 \leq p - r \leq p - 1$ et $x + (p - r) = (p + 1) \cdot q$. Ainsi, p divise $x + p - r$ et $(x + p - r)$ intervient dans la forme factorisée de $P(x)$. Par transitivité, p divise $P(x)$.

Par ailleurs, p divise $Q(x)$ car on peut factoriser tous les coefficients de Q par p. Par combinaison linéaire, p divise $P(x) - Q(x)$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, p divise $x(P(x) - Q(x))$ donc $x^p \equiv x$ $[p]$.

On veut à présent montrer que si p est premier $(p - 1)! \equiv -1$ $[p]$.

$P(0) = (p - 1)!$. Par hypothèse, on a $P(0) = 0^{p-1} - 1 + Q(0) = -1 + p \cdot k$ où $k \in Z$ car Q(0) divisible par p.
On a donc bien $(p - 1)! \equiv -1$ $[p]$

b) Pour tout réel x,

$$(x + 1)P(x) = (x + 1)\left(\prod_{k=1}^{p-1}(x + 1 + k)\right) = \prod_{k=1}^{p}(x + k) = (x + p)P(x)$$

c) On pose A tel que pour tout réel x, $A(x) = (x + 1)P(x + 1)$ et B tel que pour tout réel x, $B(x) = (x + p)P(x)$.
A et B sont deux polynômes égaux donc on peut exploiter les égalités entre leurs coefficients. Pour ce faire, on exprime A et B sous leur forme développée. On pose $a_{p-1} = 1$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ A(x) = (x + 1)\sum_{i=0}^{p-1} a_i(x + 1)^i = \sum_{i=0}^{p-1} a_i(x + 1)^{i+1}$$

Or, avec la formule du binôme de Newton, on a $(x + 1)^{i+1} = \sum\limits_{j=0}^{i+1} \binom{i+1}{j} x^j = \sum\limits_{j=0}^{i} \binom{i+1}{j} x^j + x^{i+1}$, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ A(x) = \sum_{i=0}^{p-1}\left[a_i\left(\sum_{j=0}^{i}\binom{i+1}{j}x^j\right) + a_i \cdot x^{i+1}\right] = \sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=0}^{i} a_i\binom{i+1}{j}x^j + \sum_{i=0}^{p-1} a_i x^{i+1}$$

On pose $u_{i,j} = \binom{i+1}{j} a_i x^j$. On a :

$$\sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=0}^{i} u_{i,j} = \sum_{0\leq j\leq i\leq p-1} u_{i,j} = \sum_{j=0}^{p-1}\sum_{i=j}^{p-1} u_{i,j}$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ A(x) = \sum_{j=0}^{p-1}\sum_{i=j}^{p-1}\binom{i+1}{j} a_i x^j + \sum_{i=1}^{p} a_{i-1}x^i = \sum_{j=0}^{p-1}\left[x^j \cdot \sum_{i=j}^{p-1}\left(\binom{i+1}{j}a_i\right)\right] + \sum_{i=1}^{p} a_{i-1}x^i$$

.

Enfin, on peut exprimer A sous forme développée :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ A(x) = \sum_{j=1}^{p-1}\left[x^j \cdot \left(\left(\sum_{i=j}^{p-1}\binom{i+1}{j}a_i\right) + a_{i-1}\right)\right] + \sum_{i=0}^{p-1} a_i + a_{p-1}x^p$$

On exprime à présent B sous sa forme développée :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ B(x) = (x+p)\sum_{i=0}^{p-1}(a_i x^i) = \sum_{i=0}^{p-1}(a_i x^{i+1}) + \sum_{i=0}^{p-1}(a_i p x^i) = \sum_{i=1}^{p}(a_{i-1}x^i) + \sum_{i=1}^{p-1}(a_i p x^i) + pa_0$$

$$B(x) = \sum_{i=1}^{p-1}\left[(a_{i-1} + a_i p)\cdot x^i\right] + a_{p-1}x^p + pa_0$$

.

Pour tout réel x, $A(x) = B(x)$ donc par unicité de l'écriture d'un polynôme (théorème 16), les coefficients de la forme développée de A et de B sont égaux (pour un monôme de même degré). Ainsi, pour tout $1 \leq j \leq p-1$,

$$\sum_{i=j}^{p-1}\left(\binom{i+1}{j}a_i\right) + a_{i-1} = a_{i-1} + a_i p \iff \sum_{i=j}^{p-2}\left(\binom{i+1}{j}a_i\right) + \binom{p}{j} = a_j p$$

Pour tout $1 \leq j \leq p-1$, p divise donc $\sum\limits_{i=j}^{p-2}\left(\binom{i+1}{j}a_i\right) + \binom{p}{j}$.

Par ailleurs, p divise $\binom{p}{j}$ (théorème 38) donc p divise $\sum\limits_{i=j}^{p-2}\left(\binom{i+1}{j}a_i\right)$.

On procède par récurrence forte sur j pour montrer que p divise a_{p-j}.

On pose R_j la proposition : " p divise a_{p-j}".
Initialisation. À j=2, p divise $\binom{p-1}{p-2}a_{p-2} = (p-1)a_p$ et p est premier avec $(p-1)$ donc d'après le lemme de gauss p divise a_{p-2}. R_2 est donc vérifié.

Hérédité. On suppose R_j vraie pour tout $2 \leq j \leq n \leq p-1$.
p divise $\sum\limits_{i=p-n-1}^{p-2}\left(\binom{i+1}{p-n-1}a_i\right)$ et par hypothèse de récurrence, p divise $\sum\limits_{i=p-n}^{p-2}\left(\binom{i+1}{p-n-1}a_i\right)$.

Ainsi, p divise $\binom{p-n-1}{p-n}a_{p-n-1} = (p-n-1)a_{p-n-1}$ et p premier avec $p-n-1$ donc d'après le lemme de gauss p divise bien a_{p-n-1}. On a $R_n \implies R_{n+1}$ donc d'après le principe de récurrence, pour tout $2 \leq k \leq p-1$, p divise a_{p-k}.

d) Le terme constant de A est $\sum\limits_{i=0}^{p-1} a_i$ (où $a_{p-1} = 1$), le terme constant de B est pa_0. On a donc bien $\sum\limits_{i=0}^{p-2} a_i + 1 = pa_0$. Ainsi, $a_0 + 1 = pa_0 - \sum\limits_{i=1}^{p-2} a_i$. p divise donc $a_0 + 1$

e) On pose Q tel que pour tout réel x, $Q(x) = P(x) - x^{p-1} + 1 = \sum\limits_{i=0}^{p-2} a_i x^i + 1$. Pour tout $1 \leq i \leq p-2$, p divise a_i et p divise $a_0 + 1$ donc Q est bien un polynôme à coefficients entiers divisibles par p.

Exercice 550 (④) par Daniel

Soient p un nombre premier, $x \in \mathbb{Z}$ non divisible par p.

a) Montrer que l'application qui à $a \in \{1, \ldots, p-1\}$ associe le reste $r(a)$ de la division euclidienne de ax par p est une bijection de $\{1, \ldots, p-1\}$ sur lui-même.

b) En faisant le produit des congruences $ax \equiv r(a)[p]$ pour $a \in \{1, \ldots, p-1\}$, retrouver le théorème 37.

a) Montrons tout d'abord que $[\![1, p-1]\!]$ est bien l'ensemble d'arrivée de l'application r. On sait déjà que $r(a) \in [\![0, p-1]\!]$. Montrons que :

$$\forall a \in [\![1, p-1]\!], r(a) \neq 0.$$

On raisonne par l'absurde. Supposons :

$$\exists a \in [\![1, p-1]\!], p|ax.$$

Donc, d'après le lemme de Gauss, $p|a$ (car p est premier et ne divise pas x).
Donc $p \leq p-1$, ce qui est absurde.
Montrons maintenant que les $r(a)$ sont tous distincts. On raisonne à nouveau par l'absurde. On suppose :

$$\exists (a, a') \in [\![1, p-1]\!]^2, r(a) = r(a').$$

Soit :

$$\exists (k, k') \in \mathbb{N}^2, \left\{ \begin{array}{lll} ax & = & kp + r(a) \\ a'x & = & k'p + r(a) \end{array} \right.$$

Donc $x(a-a') = p(k-k')$.
Donc $p|x(a-a')$. Donc $p|a-a'$ d'après le lemme de Gauss. Donc $p \leq p-1$ ce qui est absurde.
r est donc injective, c'est à dire que tout élément de son ensemble d'arrivée admet, si il existe, un seul antécédent par r. L'ensemble d'arrivée ayant le même nombre d'éléments que l'ensemble de départ, on peut garantir que chaque élément de l'ensemble d'arrivée admet un antécédent, donc que r est bijective.

b) En faisant le produit des congruences, on obtient :

$$(p-1)!x^{p-1} \equiv (p-1)![p].$$

Soit, d'après le théorème de Wilson (exercice 511) :

$$x^{p-1} \equiv 1[p], \text{ ce qui est équivalent au théorème 37.}$$

Exercice 551 (④) par Daniel Soit $a \geq 2$ un entier. On se propose de montrer qu'il y a une infinité d'entiers n non premiers tels que $a^{n-1} \equiv 1[n]$. Dans les questions a) et b), p est un nombre premier ne divisant pas $a(a^2-1)$. On pose :

$$n_p = \frac{a^{2p}-1}{a^2-1}$$

a) Vérifier les congruences : $a^{2p} \equiv 1[n_p]$, $n_p \equiv 1[2p]$ et $a^{n_p-1} \equiv 1[n_p]$.

b) Montrer que n_p n'est pas premier, et conclure.

a) On a :

$$n_p(a^2-1) = a^{2p}-1.$$

D'où :

$$a2p \equiv 1[n_p]. \quad \star_1$$

D'après le petit théorème de Fermat, $a^p \equiv a[p]$. Donc $a^{2p}-1 \equiv a^2-1[p]$. Donc :

$$(a^2-1)n_p \equiv (a^2-1)[p].$$

Donc $p|(a^2-1)(n_p-1)$.

Or $p \nmid a(a^2-1)$ donc $p \nmid a^2-1$. Donc p et a^2-1 sont premiers entre eux. On peut donc appliquer le lemme de Gauss : $p|(n_p-1)$. Donc $n_p \equiv 1[p]$. Donc $n_p \equiv 1[2p]$ ou $n_p \equiv p+1[2p]$.

Montrons que $n_p \not\equiv p+1[2p]$. On va pour cela raisonner par l'absurde en étudiant la parité de n_p.

Montrons d'abord que p est impair, c'est-à-dire que $p \neq 2$.

Le produit $a(a^2-1)$ contient nécessairement un facteur pair. Or $p \nmid a(a^2-1)$ donc $p \neq 2$.

Montrons maintenant que n_p est impair. n_p correspond à la somme des p premiers termes d'une suite géométrique de raison a^2 et de premier terme 1. Si a est pair, il s'agit d'une somme de nombres pairs et d'un nombre impair, 1, elle est donc impaire. Si a est impair, il s'agit d'une somme de p nombres impairs, soit d'un nombre impair de nombres impairs. Elle est donc impaire.

Or $n_p \equiv p+1[2p]$ implique que n_p est pair. Donc $n_p \equiv 1[2p] \quad \star_2$.

D'après $\star_2$, $a^{n_p-1} = \left(a^{2p}\right)^k$ avec $k \in \mathbb{N}$. Or, d'après $\star_1$:

$$\left(a^{2p}\right)^k \equiv 1^k \equiv 1[n_p].$$

b) On raisonne par l'absurde. Supposons que n_p est premier.

On a :

$$(a^p-1)(a^p+1) = n_p(a^2-1). \quad \star$$

Montrons que $\begin{cases} n_p & | \quad a^p-1(1) \\ n_p & | \quad a^p+1(2) \end{cases}$.

On raisonne par l'absurde pour démontrer (1). Supposons que $n_p \nmid a^p-1$. n_p étant premier dans notre hypothèse, n_p et a^p-1 sont donc premiers entre eux. Or, d'après $\star$, $a^p-1|n_p(a^2-1)$. On peut donc appliquer le lemme de Gauss : $a^p-1|a^2-1$, donc $a^p-1 \leq a^2-1$, ce qui est absurde car $p>2$. On peut raisonner de la même manière pour démontrer (2).

Donc, par combinaison linéaire de (1) et (2), $n_p|2$, ce qui est absurde car n_p est impair comme démontré plus haut.

Il existe une infinité de nombre premiers. Par conséquent, pour tout entier $a \geq 2$, il existe une infinité de n_p non premiers vérifiant $a^{n_p-1} \equiv 1[n_p]$.

Exercice 552 (5) par Mathieu B et Quentin L

Soient $p \in \mathcal{P}\backslash\{2\}, x$ et y deux entiers relatifs. On suppose que p divise $y-x$, mais pas x (et donc pas y). Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_p(x^n-y^n) = v_p(x-y)+v_p(n).$$

Nous cherchons à démontrer que :

Soient $p \in \mathbb{P}\backslash\{2\}$, x et y $\in \mathbb{Z}^2$ et n $\in \mathbb{N}$:

$$v_p(x^n-y^n) = v_p(x-y)+v_p(n) \tag{1}$$

Nous allons tout d'abord démontrer que la propriété (1) est vraie avec n un nombre premier :

Nous savons que :

$$v_p(x^n-y^n) = v_p((x-y)(\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}))$$

De plus,

$$v_p((x-y)(\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k})) = v_p(x-y) + v_p(\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k})$$

Or on sait que :

$$p \mid (y-x) \Leftrightarrow y-x \equiv 0[p]$$

Conséquemment :

$$y \equiv x[p]$$

Donc :
$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k} \equiv \sum_{k=0}^{n-1} x^k x^{n-1-k} \equiv \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1}[p]$$
De ce fait :
$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k} \equiv nx^{n-1}[p]$$
Raisonnons désormais par disjonction de cas, avec p et n premiers :

• Si p $\neq$ n :
Nous savons que p $\nmid$ x, et p $\nmid$ n alors :
$$nx^{n-1} \not\equiv 0[p]$$
Alors :
$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k} \not\equiv 0[p]$$
D'où :
$$v_p(\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}) = 0 = v_p(n)$$
• Si p = n :
Nous avons alors :
$$\sum_{k=0}^{p-1} x^k y^{p-1-k} \equiv px^{p-1} \equiv 0[p]$$
De plus,
$$p \mid (y-x)$$
Donc on dispose d'un entier relatif q tel que :
$$x = y + qp,\ q \in \mathbb{Z}$$
De ce fait,
$$x^k y^{p-1-k} \equiv (y+qp)^k y^{p-1-k}\ [p^2]$$
Or d'après le binome de Newton,
$$(y+qp)^k y^{p-1-k} \equiv y^{p-1-k}(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (qp)^i y^{k-i})\ [p^2]$$
D'où :
$$x^k y^{p-1-k} \equiv y^{p-1-k}(y^k + kqpy^{k-1} + \sum_{i=2}^{k} \binom{k}{i} (qp)^i y^{k-i})\ [p^2]$$
De ce fait
$$x^k y^{p-1-k} \equiv y^{p-1} + kqpy^{p-2}\ [p^2]$$
Ce qui siginfie que :
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{p-1} x^k y^{p-1-k} &\equiv \sum_{k=0}^{p-1}(y^{p-1} + kqpy^{p-2})\ [p^2] \\ &\equiv py^{p-1} + \frac{p-1}{2} \cdot kqp^2 y^{p-2}\ [p^2] \\ &\equiv py^{p-1}\ [p^2]\ (\tfrac{p-1}{2} \text{ est entier car } p \in \mathbb{P}\backslash\{2\} \text{ donc impair})\end{aligned}$$

Or p $\nmid$ y, ainsi :
$$\sum_{k=0}^{p-1} x^k y^{p-1-k} \not\equiv 0\ [p^2]$$

Et on rapelle que :
$$\sum_{k=0}^{p-1} x^k y^{p-1-k} \equiv 0 \ [p]$$
On peut donc en déduire que, ayant n=p :
$$v_p(\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}) = 1 = v_p(n)$$
Pour conclure, d'après notre disjonction de cas, nous venons de démontrer que pour tout n $\in \mathbb{P}$:
$$v_p(\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}) = v_p(n)$$
Donc :
$$v_p(x^n - y^n) = v_p(x-y) + v_p(n)$$

Procédons maintenant par récurrence afin de prouver que cette propriété est vraie pour tout n $\in \mathbb{N}$:

Initialisation.
Le cas n=0 est dégénéré et trivial, on initialise à n=1, on a bien :
$$v_p(x-y) = v_p(x-y) + v_p(1)$$
La propriété est vérifiée au rang n=1.

Hérédité.
Soit n $\in \mathbb{N}$, supposons que la propriété est vraie au rang fixé n.

• Si n+1 est premier, la propriété est vérifiée d'après la précédente démonstration.

• Sinon, soient a et b deux entiers relatifs strictement compris entre 1 et n, n+1 = ab ainsi :
$$\begin{aligned} v_p(x^{ab} - y^{ab}) &= v_p((x^a)^b - (y^a)^b) \\ &= v_p(x^a - y^a) + v_p(b) \\ &= v_p(x-y) + v_p(b) + v_p(a) \\ &= v_p(x-y) + v_p(ab) \\ &= v_p(x-y) + v_p(n+1) \end{aligned}$$

Ce qui correspond à la propriété au rang n+1.

Conclusion.
Nous venons de démontrer, par le principe de récurrence, que soient $p \in \mathbb{P}\backslash\{2\}$, x et y $\in \mathbb{Z}^2$ et n $\in \mathbb{N}$:
$$v_p(x^n - y^n) = v_p(x-y) + v_p(n)$$

12.8 Complément : le théorème des restes chinois

EXERCICE 553 (①) par Léo

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système suivant : $x \equiv 3 \pmod 7$, $x \equiv 8 \pmod{13}$

Puisque 7 et 13 sont premiers entre eux, le théorème des restes chinois nous assure que :
$$x \equiv 3 \pmod 7, x \equiv 8 \pmod{13} \iff x \equiv w \pmod{91}$$

Il ne nous reste plus qu'à trouver ce w, ce que l'on peut faire facilement à partir de la démonstration du théorème des restes chinois : on reprend les notations de l'énoncé du théorème.

On cherche $w = u + ra = v + sb$, avec $u = 3, a = 7, v = 8, b = 13$.
On cherche maintenant r' et s' tels que $7r' - 13s' = 1$, et on trouve aisèment que $r' = 2$ et $s' = 1$ conviennent.
On a par conséquent : $r = (8 - 3) \cdot 2 = 10$, et donc, $w = 3 + 10 \cdot 7 = 73$

En définitive, l'ensemble des solutions à ce système est l'ensemble des x tels que $x \equiv 73 \pmod{91}$, à savoir :

$$x = 91k + 73, k \in \mathbb{Z}$$

Exercice 554 (①) par Léo

Montrer que le système $x \equiv 1 \pmod 4$, $x \equiv 2 \pmod 6$ n'a pas de solution

Il suffit de constater que $x = 4k + 1$ nous indique que x est impair, alors $x = 6k + 2 = 2(3k + 1)$ est pair, ce qui est une contradiction puisque aucun nombre n'est à la fois pair et impair.

Exercice 555 (①) par Léo

Pour $x \in \mathbb{Z}$, montrer que :

$$(x \equiv 2 \pmod 4, x \equiv 4 \pmod 6) \iff x \equiv 10 \pmod{12}$$

On notera que x est pair, posant $x = 2y$ on se ramènera à un système de deux congruences modulo 2 et 3

Soit $x = 2y$,
$x \equiv 2 \pmod 4 \implies x = 4k + 2 \implies x = 2(2k + 1) \implies y \equiv 2k + 1 \equiv 1 \pmod 2$
$x \equiv 4 \pmod 6 \implies x = 6k + 4 \implies y \equiv 3k + 2 \equiv 2 \pmod 3$

Puisque 2 et 3 sont premiers entre eux, d'après le théorème des restes chinois, il existe w tel que $y \equiv w \pmod 6$. En appliquant la méthode vue dans l'exercice **553**, on trouve $w = 5$.
On a donc $y \equiv 5 \pmod 6 \iff y = 6k + 5 \iff 2y = 12k + 10 \iff x = 12k + 10$.

En conclusion, on a bien $x \equiv 10 \pmod{12}$

Exercice 557 (④) par Adrien R

Généraliser les deux exercices précédents en résolvant, si a et b sont deux éléments de $\mathbb{N}^*$ et $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$, le système de congruences $x \equiv u[a]$ et $x \equiv v[b]$.

x est solution si, et seulement si il existe un couple d'entiers relatifs (k ;k') tel que $x = u + ka$ et $x = v + k'b$. Le système admet donc des solutions si, et seulement si l'équation diophantienne $ka - k'b = v - u$ admet un couple solution (k,k').

D'après l'exercice 505, le système a des solutions si, et seulement si $\delta = a \wedge b$ divise $v - u$.

On pose $(a', b') \in \mathbb{N}^2$ tel que $a = \delta a'$ et $b = \delta b'$

Si (k_0, k_0') est une solution particulière de l'équation diophantienne, l'ensemble des solutions est $S = \{(k_0 + tb'; k_0' + ta'), t \in \mathbb{Z}\}$

L'ensemble des solutions du système de congruences est donc l'ensemble vide si δ ne divise pas $v - u$ et $\{u + a(k_0 + tb'), t \in \mathbb{Z}\}$ si δ divise $v - u$.

Exercice 558 (③) Par Adrien R

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $6x^2+5x+1=0$ et montrer qu'elle n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$.
2. On fixe $m \geq 2$ un entier. On se propose de montrer la congruence $6x^2+5x+1 \equiv 0[m]$ admet une solution dans $\mathbb{Z}$. On écrit $m = 2^s t$ où $s \in \mathbb{N}$ et où t est un entier naturel impair. Justifier l'existence de $x \in \mathbb{Z}$ tel que
$$3x+1 \equiv 0[2^s] \quad \text{et} \quad 2x+1 \equiv 0[t].$$
Conclure.

1. On a
$$6x^2+5x+1=0 \iff (2x+1)(3x+1)=0.$$
Les solutions de l'équation sont donc $-\frac{1}{3}$ et $-\frac{1}{2}$ donc l'équation n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Z}$.
2. On a
$$\begin{aligned}\begin{cases}2x+1 \equiv 0 \ [t] \\ 3x+1 \equiv 0 \ [2^s]\end{cases} &\iff \exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2, \quad \begin{cases}2x+1 = v\cdot t \quad (1) \\ 3x+1 = u \cdot 2^s \quad (2)\end{cases} \\ &\iff \begin{cases}2x+1 = v \cdot t \\ x = u\cdot 2^s - v \cdot t \quad (2)-(1)\end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 2v\cdot t - u \cdot 2^s - 1 \quad (1)-(2) \\ x = u \cdot 2^s - v\cdot t\end{cases}\end{aligned}$$
On veut montrer qu'il existe un couple d'entiers relatifs $(u;v)$ tel que $2v\cdot t - u\cdot 2^s - 1 = u\cdot 2^s - v \cdot t$. Cette équation est équivalente à
$$(E): \quad u\cdot 2^{s+1} + 3v\cdot t = 1.$$
Or, 2^{s+1} et $3t$ sont premiers entre eux car x est impair donc n'admet pas de puissance de 2 dans sa décomposition en facteurs premiers. D'après le théorème de Bézout, un couple $(u;v) \in \mathbb{Z}^2$ vérifiant (E) existe donc en posant $x = u\cdot 2^s - v\cdot t$, t divise $2x+1$ et 2^s divise $3x+1$. Alors, $t\cdot 2^s$ divise $(2x+1)(3x+1)$, c'est-à-dire $6x^2+5x+1 \equiv 0 \ [m]$

Exercice 559 (④) par Daniel

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se propose de construire $Q \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $k \in \{1,\ldots,n\}$, kQ soit une puissance exacte, c'est-à-dire de la forme u^v où u et v sont deux entiers naturels strictement supérieurs à 2.

On se donne n éléments de $\mathbb{N}^*$ deux à deux premiers entre eux, notés $u_1,\ldots,u_n$. On pose $U = \prod_{i=1}^n u_i$.

a) Montrer qu'il existe des entiers naturels $a_1,\ldots,a_n$ tels que :
$$\forall k \in \{1,\ldots,n\}, \quad a_k \equiv -1[u_k], \quad a_k \equiv 0[\frac{U}{u_k}].$$
b) On pose $Q = \prod_{i=1}^n i^{a_i}$. Montrer que, pour tout $k \in \{1,\ldots,n\}$, kQ est de la forme $m_k^{u_k}$ où m_k est un entier.

a) u_k est premier avec tous les u_i, $i \in [\![1,n]\!] \backslash \{k\}$. Par conséquent, u_k est premier avec $\prod_{i\in[\![1,n]\!]\backslash\{k\}} u_i$, c'est-à-dire avec $\frac{U}{u_k}$.
Donc, d'après le théorème de Bézout :
$$\exists (r,s) \in \mathbb{Z}^2, r u_k - s\frac{U}{u_k} = 1.$$
Donc $-1 + ru_k = s\frac{U}{u_k} = a_k$.

b) Soit $k \in [\![1,n]\!]$. D'après la question précédente, on a :

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \setminus \{k\}, a_i \equiv 0[u_k], \text{ soit } a_i = q_i u_k \text{ avec } q_i \in \mathbb{N}$$

Donc :

$$Q = \prod_{i \in [\![1,n]\!] \setminus \{k\}} (i^{q_i})^{u_k} \times k^{a_k}.$$

Or $a_k \equiv -1[u_k]$ donc il existe $q_k \in \mathbb{N}$ tel que $a_k + 1 = q_k u_k$. Donc :

$$kQ = \prod_{i \in [\![1,n]\!] \setminus \{k\}} (i^{q_i})^{u_k} \times k^{q_k u_k} = m_k^{u_k} \text{ où } m_k = \prod_{i \in [\![1,n]\!]} i^{q_i}.$$

Exercice 560 (②) par Adrien I

Trouvez tous les $x \in \mathbb{Z}$ vérifiant simultanément les trois congruences :

$$x \equiv 1 \pmod 2; x \equiv 0 \pmod 3; x \equiv 2 \pmod 5$$

Même si ce n'est pas utile, nous pouvons vérifier l'existence d'une telle solution : d'après le théorème des restes chinois, si a_1, a_2, a_r sont des éléments de $\mathbb{N}^2$ deux à deux premiers entre eux, et $u_1, u_2, ..., u_r$ des entiers relatifs, alors il existe un unique x modulo $\Pi_{i=1}^r$ vérifiant les r congruences. Ici, $2; 3; 5$ sont premiers deux à deux, et il existe donc une telle solution modulo 30.

Trouvons cette solution, en reprenant l'idée donnée dans la démonstration de l'existence d'une telle solution.

Notons a le produit $2 \cdot 3 \cdot 5$. Ainsi, $a = 30$.

On cherche l'inverse, noté y_1, de $\frac{a}{2}$ modulo 2. Nous avons $\frac{a}{2} \equiv 15 \equiv 1 \pmod 2$. Un inverse est donc $y_1 = 1$.

De même, on cherche l'inverse, noté y_2, de $\frac{a}{3}$ modulo 3. Nous avons $\frac{a}{3} \equiv 1 \pmod 3$. D'où $y_2 = 1$.

Finalement, on trouve que l'inverse, noté y_3 de $\frac{a}{5}$ modulo 5 est 1.

Ainsi, $x \equiv 1 \cdot 15 \cdot 1 + 1 \cdot 10 \cdot 0 + 1 \cdot 6 \cdot 2 \equiv 27 \pmod{30}$.

Exercice 561 (④) par Adrien I

Soient $r \in \mathbb{N}^*$, $p_1, ..., p_r$ des nombres premiers distincts.
a) Montrer l'existence de $x \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\forall i \in \{1, ..., r\}, x \equiv p_i - i \pmod{p_i^2}$$

b) En déduire l'existence de r entiers naturels consécutifs dont aucun n'est une puissance exacte.

a) D'après le théorème des restes chinois, si pour tout i appartenant à $\{1, ..., r\}$ $p_i - i$ est un entier relatif et les p_i^2 sont premiers deux à deux, alors il existe un tel x.

Tout d'abord, il est aisé de remarquer que pour tout i appartenant à $\{1, ..., r\}$, $p_i - i$ est un entier relatif. En effet, d'un côté, p_i est un nombre premier et est donc un entier naturel. D'un autre côté i est un entier naturel. Donc leur différence est un entier relatif (plus précisement, un entier naturel, mais il est plus dur de le montrer).

Montrons désormais que pour tout i, j appartenant à $\{1, ..., r\}$ tel que $i \neq j$, p_i^2 est premier avec p_j^2. On sait que $p_i \wedge p_j = 1$. Donc d'après le théorème de Bézout, il existe des entiers u et v tel que $p_i u + p_j v = 1$. En mettant chaque membre au cube, nous obtenons $p_i^3 u^3 + 3p_i^2 u^2 v p_j + 3p_i u v^2 p_j^2 + p_j^3 v^3 = 1^3$, c'est-à-dire $p_i^2(p_i u^3 + 3u^2 v p_j) + p_j^2(p_j v^3 + 3p_i u v^2) = 1$. Il existe donc deux entiers relatifs $a = p_i u^3 + 3u^2 v p_j$ et $b = p_j v^3 + 3p_i u v^2$ tel que $p_i^2 a + p_j^2 b = 1$ et d'après le théorème de Bézout, p_i^2 et p_j^2 sont premiers entre eux.

Il existe donc un tel x.

b) On sait que pour tout i appartenant à $\{1, ..., r\}$, $x \equiv p_i - i \pmod{p_i^2}$. Ainsi, $x + i \equiv p_i \pmod{p_i^2}$, c'est-à-dire qu'il existe un entier k tel que $(x + i - p_i) = kp_i^2$. Donc, $\frac{x+i}{p_i} = kp_i$ et l'on conclut que $p_i \mid x + i$. Car p_i est premier, il apparait dans la décomposition en facteurs premiers de $x + i$. Or si un nombre est un carré parfait, l'exposant de chaque facteur dans la décomposition en facteurs premiers du nombre doit être un multiple de 2. Ce n'est pas le cas ici car $p_i^2 \not| x + i$ donc, il existe r entiers naturels consécutifs dont aucun n'est un carré parfait.

Le problème n'est pas finit, nous avons ici montré qu'il existe une telle séquence pour $k = 2$ (avec les notations de l'énoncé). Traitons le cas avec k quelconque. La démonstration est très similaire.

Dans un premier temps, montrons qu'il existe un entier x tel que pour tout i appartenant à $\{1, ..., r\}$, $x \equiv p_i - i \pmod{p_i^k}$. De la même manière que pour le cas $k = 2$, d'après le théorème des restes chinois, un tel x existe car :

- $p_i - i \in \mathbb{Z}$
- pour tout i et j appartenant à $\{1, ..., r\}$ tel que $i \neq j$, $p_i^k \wedge p_j^k = 1$. En effet, $p_i \wedge p_j = 1$. Donc, d'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers u et v tel que $p_i u + p_j v = 1$. En élevant chaque membre à l'exposant $2k - 1$, nous montrons la propriété souhaitée. En effet, $(p_i u + p_j v)^{2k-1} = \sum_{a=0}^{2k-1} \binom{2k-1}{a} \cdot (p_i u)^a \cdot (p_j v)^{n-a} = \sum_{a=0}^{\frac{2k-1}{2}} \binom{2k-1}{a} \cdot (p_i u)^a \cdot (p_j v)^{n-a} + \sum_{b=\frac{2k-1}{2}+1}^{2k-1} \binom{2k-1}{b} \cdot (p_i u)^b \cdot (p_j v)^{n-b}$. Donc, il existe deux entiers relatifs (que nous n'expliciterons pas par soucis de simplicité, mais qui découle de la formule précédente), notés w et y tel que $p_i^k w + p_j^k y = 1$. Donc, d'après le théorème de Bézout, $p_i \wedge p_j = 1$.

Il existe donc un tel x.

De la même manière que précédemment, on sait que $p_i \mid x + i$. Car p_i est premier, il apparait dans la décomposition en facteurs premiers de $x + i$. Or si un nombre est une puissance de k, l'exposant de chaque facteur dans la décomposition en facteurs premiers du nombre doit être un multiple de k. Ce n'est pas le cas ici car $p_i^k \not| x + i$ donc, il existe r entiers naturels consécutifs dont aucun n'est une k-puissance.

Cela conclut donc l'exercice.