

## Développements limités, équivalents et calculs de limites

Exercice 1.

Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre  $n$  des fonctions suivantes :

$$1. f(x) = \frac{e^x}{(1+x)^3} \quad n = 2$$

$$2. g(x) = \frac{\sin(x)}{1+\ln(1+x)} \quad n = 3$$

$$3. h(x) = e^{\frac{\operatorname{sh}(x)}{x}} \quad n = 1$$

$$4. i(x) = \sin(x^2) \quad n = 6$$

Allez à : [Correction exercice 1](#)

Exercice 2.

1. Ecrire le développement limité de  $\frac{1}{1+x}$  au voisinage de 0, à l'ordre 3.

2. En déduire le développement limité de  $\frac{1}{1+e^x}$  au voisinage de 0, à l'ordre 3.

3. Soit  $f(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ . En utilisant ce qui précède, déterminer l'asymptote au graphe de  $f$  pour  $x \rightarrow +\infty$ .

Allez à : [Correction exercice 2](#)

Exercice 3.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 6, au voisinage de 0, de :

$$f(x) = \ln(1+x) \sin(x)$$

2. Déterminer le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de 0, de :

$$f(x) = \frac{e^x}{\cos(x)}$$

Allez à : [Correction exercice 3](#)

Exercice 4.

Soient  $u, v$  et  $f$  définies par :

$$u(x) = (x^3 + x^2 + x + 1)^{\frac{1}{3}}, v(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$$

$$f(x) = (x^3 + x^2 + x + 1)^{\frac{1}{3}} - \sqrt{x^2 + x + 1}$$

1. Donner le développement limité de  $u, v$  et  $f$  au voisinage de 0 à l'ordre 2.

2. En déduire l'équation d'une droite asymptote au graphe de  $f$  en  $+\infty$ .

3. En déduire l'équation d'une droite asymptote au graphe de  $f$  en  $-\infty$  et positionner  $f$  par rapport à cette asymptote.

Allez à : [Correction exercice 4](#)

Exercice 5.

Soit  $f$  la fonction pour tout  $x \in \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \sqrt{1+x+x^2}$

1. Déterminer le développement limité de  $f$ , à l'ordre 2 au voisinage de 0.

2. En déduire l'équation de la tangente au point d'abscisse  $x = 0$  et la position de la tangente par rapport à la courbe.

3. Déterminer une équation de l'asymptote en  $+\infty$  ainsi que la position de cette asymptote par rapport à la courbe.

Allez à : [Correction exercice 5](#)

## Exercice 6.

Soit  $f$  l'application de  $U = ]-1, 1[ \cup ]1, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$ , définie pour tout  $x \in U$  par :

$$f(x) = (x^2 - 1) \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$$

1. Donner le développement limité de  $f$ , à l'ordre 3, dans un voisinage de 0.  
En déduire que le graphe de  $f$  admet une tangente ( $T$ ) au point d'abscisse 0. Donner une équation cartésienne de ( $T$ ) et préciser la position du graphe par rapport à ( $T$ ).
2. En utilisant un développement asymptotique de  $f$  en  $+\infty$ , démontrer que le graphe de  $f$  admet une asymptote ( $A$ ).  
Donner une équation cartésienne de ( $A$ ) et préciser la position du graphe de  $f$  par rapport à ( $A$ ).

Allez à : [Correction exercice 6](#)

## Exercice 7.

1. Soit  $f$  la fonction définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par

$$f(x) = \arctan(x)$$

En calculant le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de 0 de la fonction dérivée  $f'$ , en déduire le développement limité de  $f$  à l'ordre 5.

2. Calculer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0 de la fonction  $g$  définie par

$$g(x) = \frac{\arctan(x) - x}{\sin(x) - x}$$

Allez à : [Correction exercice 7](#)

## Exercice 8.

Déterminer le développement limité à l'ordre 6, au voisinage de 0, de la fonction :

$$f(x) = \arccos(x^2)$$

Allez à : [Correction exercice 8](#)

## Exercice 9.

Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \arctan(x + 1)$$

1. Calculer le développement limité à l'ordre 3 de la fonction dérivée  $f'$  au voisinage de 0.
2. En déduire le développement limité à l'ordre 4 de  $f$  au voisinage de 0.

Allez à : [Correction exercice 9](#)

## Exercice 10.

Déterminer le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0 de la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\operatorname{ch}(x) \ln(1+x)}{\cos(x)}$$

Allez à : [Correction exercice 10](#)

## Exercice 11.

Déterminer le développement limité en  $x = a$  à l'ordre  $n$  de

1.  $f(x) = e^{\cos(x)}$ ,  $a = \frac{\pi}{2}$ ,  $n = 2$ .
2.  $g(x) = \frac{\frac{\pi}{4} - \arctan(x)}{\ln(x)}$ ,  $a = 1$ ,  $n = 1$ .

Allez à : [Correction exercice 11](#)

Exercice 12.

Déterminer le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de  $\frac{\pi}{3}$ , de la fonction :

$$f(x) = \cos(x)$$

Allez à : [Correction exercice 12](#)

Exercice 13.

Déterminer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 1 de la fonction

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{x^2}$$

Allez à : [Correction exercice 13](#)

Exercice 14.

Déterminer le développement limité à l'ordre 1, au voisinage de 1 de la fonction définie par :

$$f(x) = x^{\frac{1}{x-1}}$$

Allez à : [Correction exercice 14](#)

Exercice 15.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de  $\frac{\pi}{2}$ , de :

$$f(x) = e^{\sin(x)}$$

2. Donner un équivalent de  $f(x) - e$ , en  $\frac{\pi}{2}$ .

3. En déduire

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - e}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}$$

Allez à : [Correction exercice 15](#)

Exercice 16.

Justifier l'existence et calculer le développement limité à l'ordre 3, relatif à  $\frac{\pi}{2}$ , des applications suivantes :

1.

$$f(x) = \ln(\sin(x))$$

2.

$$f(x) = (1 + \cos(x))^{\frac{1}{x}}$$

Allez à : [Correction exercice 16](#)

Exercice 17.

1. Calculer un développement limité à l'ordre 2 en  $x = 2$  de  $f(x) = \ln(x)$  et de  $g(x) = x^3 - x^2 - x - 2$ .

2. En déduire

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x) - \ln(2)}{x^3 - x^2 - x - 2}$$

Allez à : [Correction exercice 17](#)

Exercice 18.

1. Calculer un développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

2. En déduire qu'on peut prolonger cette fonction par continuité en  $x = 0$  et que la fonction ainsi prolongée admet une dérivée première en  $x = 0$ .
3. Calculer un développement limité à l'ordre 4 au voisinage de  $x = 0$  de :

$$g(x) = \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$$

Allez à : [Correction exercice 18](#)

Exercice 19.

Justifier l'existence et calculer le développement limité à l'ordre 4, relatif à 0, de l'application suivante :

$$f(x) = \frac{x}{\sin(x)}$$

Allez à : [Correction exercice 19](#)

Exercice 20.

Déterminer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de :

$$f(x) = \frac{\ln(\operatorname{ch}(x))}{x \ln(1+x)}$$

Allez à : [Correction exercice 20](#)

Exercice 21.

Déterminer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de :

$$f(x) = \frac{\ln(\cos(x))}{x \ln(1-x)}$$

Allez à : [Correction exercice 21](#)

Exercice 22.

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :

$$f(x) = \frac{\ln(\operatorname{ch}(x))}{\operatorname{sh}(x)}$$

1. Déterminer le développement limité de  $f$ , au voisinage de 0, à l'ordre 3.
2. Montrer que  $f$  est prolongeable par continuité en 0 et que ce prolongement est dérivable en 0 (on donnera la valeur de  $f'(0)$ ).

Allez à : [Correction exercice 22](#)

Exercice 23.

Déterminer le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0 de la fonction

$$f(x) = \frac{\cos(x) - 1}{\ln(1+x) \operatorname{sh}(x)}$$

Allez à : [Correction exercice 23](#)

Exercice 24.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de :

$$f(x) = \ln(1 + \operatorname{sh}(x))$$

2. Déterminer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de :

$$g(x) = \frac{\ln(1 + \operatorname{sh}(x))}{\sin(x)}$$

3. Montrer que  $g$  est prolongeable par continuité en  $x = 0$ .

Allez à : [Correction exercice 24](#)

Exercice 25.

Soit  $f$  la fonction réelle définie par :

$$f(x) = 9 \sin(x) - 11x \cos(x) + 2x \cos(2x)$$

1. Donner les développements limités en 0, à l'ordre 5, des fonctions  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$  et  $\cos(2x)$ .
2. En déduire la limite, lorsque  $x$  tend vers 0 ( $x \neq 0$ ), de l'expression  $\frac{f(2x)}{f(x)}$ .

Allez à : [Correction exercice 25](#)

Exercice 26.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de 0 de la fonction définie par :

$$h(x) = \frac{\sin(x) \operatorname{sh}(x)}{\sin(x^2)}$$

2. En déduire un équivalent de  $h(x) - 1$  au voisinage de 0.

Allez à : [Correction exercice 26](#)

Exercice 27.

Justifier l'existence et calculer le développement limité à l'ordre  $n$ , relatif à 0, des applications suivantes :

1.

$$f(x) = \frac{x}{\sin(x)} \quad n = 4$$

2.

$$f(x) = \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{\operatorname{sh}^2(x)} \quad n = 3$$

3.

$$f(x) = (\cos(2x))^{x^2} \quad n = 4$$

Allez à : [Correction exercice 27](#)

Exercice 28.

1. Donner le développement limité à l'ordre 1, en 0 de  $\sqrt{1 + 3X + 2X^2} - 1$
2. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 2} - x)$$

Allez à : [Correction exercice 28](#)

Exercice 29.

Déterminer le développement limité à l'ordre 5, au voisinage de 0 de la fonction

$$f(x) = \sin^3(x) (e^{x^2} - 1)$$

Allez à : [Correction exercice 29](#)

Exercice 30.

Ecrire le développement limité à l'ordre 3, en 0, de  $\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}$  et en déduire sa limite en 0.

Allez à : [Correction exercice 30](#)

Exercice 31.

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \ln\left(e^x + \sqrt{e^{2x} + 1}\right)$$

1. Déterminer le développement limité la fonction  $g$  définie par  $g(X) = \ln(1 + \sqrt{1 + X})$  à l'ordre 1, au voisinage de 0.
2. Montrer que  $f(x) = x + \ln(1 + \sqrt{1 + e^{-2x}})$ , à l'aide de la question 1. montrer que  $f$  admet une asymptote oblique en  $+\infty$ , on déterminera la position du graphe de  $f$  par rapport à cette asymptote.

Allez à : [Correction exercice 32](#)

Exercice 32.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 6, au voisinage de 0 de la fonction définie par  $g(x) = \ln(1 + x^3)$
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 5, au voisinage de 0 de la fonction définie par  $h(x) = \sqrt{1 + x^2} - 1$
3. En déduire le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de 0 de la fonction définie par  $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$
4. Montrer que  $f$  est prolongeable par continuité en 0 et que la fonction ainsi prolongée est dérivable, on donnera  $f'(0)$ .
5. Déterminer la position de la courbe par rapport à la tangente au voisinage de 0.

Allez à : [Correction exercice 32](#)

Exercice 33.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de  $(1 + h)^{\frac{1}{h}}$ .
2. En déduire le développement généralisé à l'ordre 2 de  $\left(1 + \frac{1}{X}\right)^X$  lorsque  $X \rightarrow +\infty$ .
3. En déduire

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left[ \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - 4 \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x} + 3 \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3x} \right]$$

Allez à : [Correction exercice 33](#)

Exercice 34.

Calculer

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2}$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1}$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 2} - x)$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{\sin^2(x)}$$

5.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln(x))^2}{\operatorname{ch}(x-1) - 1}$$

Allez à : [Correction exercice 34](#)

Exercice 35.

Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\tan(2x)}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x \tan(2x)}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - e^x)\sin(x)}{x^2 + x^3}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos(x) - x}{\ln(1 + \sin(x)) - x}.$$

Allez à : [Correction exercice 35](#)

Exercice 36.

Déterminer la limite suivante, sans préjuger qu'elle existe :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos(x)} - e^{\operatorname{ch}(x)}}{\cos(x) - \operatorname{ch}(x)}$$

Allez à : [Correction exercice 36](#)

Exercice 37.

Calculer les limites

1.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x + 1}{2x - 1} \right)^{2x}$$

2.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \left( \frac{x}{\sin(x)} \right)^{\frac{\sin(x)}{x - \sin(x)}}$$

On pourra poser  $X = \frac{x - \sin(x)}{\sin(x)}$ 

3.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{e^{\sin(x)} - e^{\tan(x)}}{\sin(x) - \tan(x)}$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x \ln(1 + x)}$$

Allez à : [Correction exercice 37](#)

Exercice 38.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 1, au voisinage de 0 de la fonction définie par

$$f(X) = \frac{\ln(1 + X)}{X}$$

2. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x - e \right)$$

Allez à : [Correction exercice 38](#)

Exercice 39.

Soit  $f$  l'application définie par  $f(x) = 2x + \sin(x)$ 1. Déterminer un développement limité de  $f$  à l'ordre 3 en  $x = 0$ .2. Montrer que  $f$  est une bijection et que sa bijection réciproque  $f^{-1}$  est de classe  $C^3$ , en déduire que  $f^{-1}$  a un développement limité à l'ordre 3.On note  $f^{-1}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + o(x^3)$  le développement limité de  $f^{-1}$  en 0.3. En déduire le développement limité de  $f^{-1}$  en exploitant la relation  $f^{-1}(f(x)) = x$ .Allez à : [Correction exercice 39](#)

Exercice 40.

Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $f(x) = xe^{x^2}$

1. Justifier que  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  puis déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de  $f$ .
2. Montrer que  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ .
3. On admet que  $f^{-1}$  est aussi  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $f^{-1}$  admet un développement limité à l'ordre 5 en 0 de la forme :

$$f^{-1}(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)$$

Où  $a, b$  et  $c$  sont des réels.

4. A partir de l'identité  $f(f^{-1}(x)) = x$  valable pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , déterminer  $a, b$  et  $c$ .

Allez à : [Correction exercice 40](#)

## CORRECTIONS

Correction exercice 1.

1.

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x(1+x)^{-3} = \left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(1-3x+\frac{(-3)(-4)}{2}x^2+o(x^2)\right) \\ &= \left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)(1-3x+6x^2+o(x^2)) \\ &= 1+(-3+1)x+\left(6-3+\frac{1}{2}\right)x^2+o(x^2) = 1-2x+\frac{7}{2}x^2+o(x^2) \end{aligned}$$

2.

$$g(x) = \frac{\sin(x)}{1+\ln(1+x)} = \frac{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)}$$

$x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$	$1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$
$x + x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$	$x - x^2 + \frac{4}{3}x^3$
$-x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$	
$-x^2 - x^3 + o(x^3)$	
$\frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$	
$\frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$	
$o(x^3)$	

Donc

$$g(x) = x - x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$$

3.

$$h(x) = e^{\frac{\text{sh}(x)}{x}} = e^{\frac{x+o(x^2)}{x}} = e^{1+o(x)} = e \times e^{o(x)} = e(1+o(x)) = e + o(x)$$

4.

$$i(x) = \sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6)$$

Allez à : [Exercice 1](#)

Correction exercice 2.

1.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$$

2.

Première méthode

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+e^x} &= \frac{1}{1 + \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)} = \frac{1}{2 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)} \\ &= \frac{1}{2 \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+X} = \frac{1}{2} (1 - X + X^2 - X^3 + o(X^3)) \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3) \\ X^2 &= \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right) \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right) = \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + \frac{x^3}{8} + o(x^3) = \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{4} + o(x^3) \\ X^3 &= \frac{x^3}{8} + o(x^3) \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} o(X^3) &= o(x^3) \\ \frac{1}{1+e^x} &= \frac{1}{2} (1 - X + X^2 - X^3 + o(X^3)) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right) + \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{4} + o(x^3)\right) - \left(\frac{x^3}{8} + o(x^3)\right) + o(x^3)\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{2} + \left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right)x^3 + o(x^3)\right) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^3}{48} + o(x^3) \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 2**

Deuxième méthode

1	$2 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$
$1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)$	$\frac{1}{2} - \frac{x}{4} - \frac{x^3}{48}$
$-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)$	
$-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + o(x^3)$	
$\frac{x^3}{24} + o(x^3)$	
$-\frac{x^3}{24} + o(x^3)$	
$o(x^3)$	

3. On pose  $X = \frac{1}{x}$ ,  $X \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{X(1+e^X)} = \frac{1}{X} \left( \frac{1}{2} - \frac{X}{4} - \frac{X^3}{48} + o(X^3) \right) = \frac{1}{2X} - \frac{1}{4} - \frac{X^2}{48} + o(X^2) \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{48x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{48x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Donc  $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$  est asymptote au graphe en  $+\infty$ .

Allez à : **Exercice 2**

Correction exercice 3.

1.

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5) = x\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + o(x^4)\right) \\ \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) = x\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)\right) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \ln(1+x) \sin(x) &= x^2 \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + o(x^4)\right) \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)\right) \\ \ln(1+x) \sin(x) &= x^2 \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x}{2} + \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{18} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + o(x^4)\right) \\ \ln(1+x) \sin(x) &= x^2 \left(1 - \frac{x}{2} + x^2 \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right) + x^3 \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{4}\right) + x^4 \left(\frac{1}{120} - \frac{1}{18} + \frac{1}{5}\right) + o(x^4)\right) \\ \ln(1+x) \sin(x) &= x^2 \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{11}{72}x^4 + o(x^4)\right) \\ \ln(1+x) \sin(x) &= x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{6} + \frac{11x^6}{72} + o(x^6) \end{aligned}$$

2.

$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$	$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$
$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$	$1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$
$x + x^2 + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$	$x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^4)$
$x - \frac{x^3}{2} + o(x^4)$	$x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$
$x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^4)$	$\frac{2}{3}x^3 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$
$x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$	$\frac{2}{3}x^3 + o(x^4)$
$\frac{2}{3}x^3 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$	$\frac{x^4}{2} + o(x^4)$
$\frac{2}{3}x^3 + o(x^4)$	$\frac{x^4}{2} + o(x^4)$
$\frac{x^4}{2} + o(x^4)$	$o(x^4)$

Donc  $\frac{e^x}{\cos(x)} = 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$

Allez à : **Exercice 3**

Correction exercice 4.

1.

$$\begin{aligned} u(x) &= (x^3 + x^2 + x + 1)^{\frac{1}{3}} = (1 + X)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}X + \frac{1}{3} \times \left(-\frac{2}{3}\right) \times \frac{X^2}{2} + o(X^2) \\ &= 1 + \frac{1}{3}X - \frac{1}{9}X^2 + o(X^2) \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned} X &= x + x^2 + x^3 = x + x^2 + o(x^2) \\ X^2 &= x^2 + o(x^2) \\ o(X^2) &= o(x^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x) &= 1 + \frac{1}{3}(x + x^2 + o(x^2)) - \frac{1}{9}(x^2 + o(x^2)) = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 + o(x^2) \\ v(x) &= \sqrt{x^2 + x + 1} = (1 + X)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}X^2 + o(X^2) \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned} X &= x + x^2 \\ X^2 &= x^2 + o(x^2) \\ o(X^2) &= o(x^2) \end{aligned}$$

$$v(x) = 1 + \frac{1}{2}(x + x^2) - \frac{1}{8}(x^2 + o(x^2)) + o(x^2) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)$$

Donc

$$f(x) = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 - \left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2\right) + o(x^2) = -\frac{1}{6}x - \frac{11}{72}x^2 + o(x^2)$$

La courbe admet une tangente d'équation  $y = -\frac{1}{6}x$  à l'origine

2. On pose  $X = \frac{1}{x} \rightarrow 0^+$ , donc  $X > 0$ .

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^3 + x^2 + x + 1)^{\frac{1}{3}} - \sqrt{x^2 + x + 1} = \left(\frac{1}{X^3} + \frac{1}{X^2} + \frac{1}{X} + 1\right)^{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{1}{X^2} + \frac{1}{X} + 1} \\ &= \left(\frac{1 + X + X^2 + X^3}{X^3}\right)^{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{1 + X + X^2}{X^2}} = \frac{(1 + X + X^2 + X^3)^{\frac{1}{3}}}{X} - \frac{(1 + X + X^2)^{\frac{1}{2}}}{X} \\ &= \frac{f(X)}{X} = \frac{-\frac{1}{6}X - \frac{11}{72}X^2 + o(X^2)}{X} = -\frac{1}{6} - \frac{11}{72}X + o(X) = -\frac{1}{6} - \frac{11}{72x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

La courbe admet une asymptote horizontale d'équation  $y = -\frac{1}{6}$  en  $+\infty$

3. On pose  $X = \frac{1}{x} \rightarrow 0^-$  donc  $X < 0$ .

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^3 + x^2 + x + 1)^{\frac{1}{3}} - \sqrt{x^2 + x + 1} = \left(\frac{1}{X^3} + \frac{1}{X^2} + \frac{1}{X} + 1\right)^{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{1}{X^2} + \frac{1}{X} + 1} \\ &= \left(\frac{1 + X + X^2 + X^3}{X^3}\right)^{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{1 + X + X^2}{X^2}} = \frac{(1 + X + X^2 + X^3)^{\frac{1}{3}}}{X} - \frac{(1 + X + X^2)^{\frac{1}{2}}}{-X} \\ &= \frac{u(X) + v(X)}{X} = \frac{1 + \frac{1}{3}X + \frac{2}{9}X^2 + o(x^2) + 1 + \frac{1}{2}X + \frac{3}{8}X^2 + o(X^2)}{X} \\ &= \frac{2 + \frac{5}{6}X + \frac{43}{72}X^2 + o(X^2)}{X} = \frac{2}{X} + \frac{5}{6} + \frac{43}{72}X + o(X) = 2x + \frac{5}{6} + \frac{43}{72x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

La courbe admet une asymptote d'équation  $y = \frac{5}{6} + 2x$  en  $-\infty$ , comme au voisinage de  $-\infty$

$$f(x) - \left(2x + \frac{5}{6}\right) = \frac{43}{72x} + o\left(\frac{1}{x}\right) < 0$$

La courbe est au-dessous de l'asymptote.

Allez à : **Exercice 4**

Correction exercice 5.

1.

$$f(x) = \sqrt{1+X} = 1 + \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{X^2}{2} + o(X^2) = 1 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}X^2 + o(X^2)$$

Avec  $X = x + x^2$ ,  $X^2 = x^2 + o(x^2)$  et  $o(X^2) = o(x^2)$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}(x + x^2) - \frac{1}{8}(x^2 + o(x^2)) + o(x^2) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)$$

2. Une équation de la tangente en 0 est  $y = 1 + \frac{1}{2}x$

$$f(x) - \left(1 + \frac{1}{2}x\right) = \frac{3}{8}x^2 + o(x^2) = x^2\left(\frac{3}{8} + o(1)\right)$$

Cette expression est positive dans un voisinage de 0 donc la courbe est au-dessus de la tangente dans un voisinage de 0.

3. On pose  $X = \frac{1}{x} \rightarrow 0$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$ .

$$f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{X} + \frac{1}{X^2}} = \sqrt{\frac{X^2 + X + 1}{X^2}} = \frac{\sqrt{X^2 + X + 1}}{|X|} = \frac{\sqrt{1 + X + X^2}}{X}$$

Car  $X > 0$ .

En utilisant le développement limité du 1. on en déduit que

$$f(x) = \frac{1 + \frac{1}{2}X + \frac{3}{8}X^2 + o(X^2)}{X} = \frac{1}{X} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}X + o(X) = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Une équation de l'asymptote en  $+\infty$  est  $y = x + \frac{1}{2}$

$$f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{3}{8} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

Cette expression est positive lorsque que  $x \rightarrow +\infty$  donc la courbe est au-dessus de l'asymptote en  $+\infty$ .

Allez à : **Exercice 5**

Correction exercice 6.

1.

$$f(x) = (x^2 - 1) \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| = (x^2 - 1)[\ln|1+x| - \ln|1-x|]$$

Au voisinage de 0,

$$f(x) = (x^2 - 1)[\ln(1+x) - \ln(1-x)]$$

$$= (x^2 - 1) \left[ x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - \left( -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) \right]$$

$$= (x^2 - 1) \left[ 2x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3) \right] = 2x^3 - 2x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3) = -2x + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$$

Une équation de la tangente en 0 est  $y = -2x$ , et comme  $f(x) - (-2x) = \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$  est du signe de  $\frac{4}{3}x^3$  lorsque  $x$  est proche de 0.

Si  $x > 0$  la tangente est au dessous de la courbe.

Si  $x < 0$  la tangente est au dessus de la courbe.

Remarque :

Attention au raisonnement suivant, si  $f(x) = -2x + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$  alors  $f'(x) = -2 + 4x^2 + o(x^2)$ , si  $f'(x)$  admet un développement limité à l'ordre 2, par exemple parce que  $f'$  est de classe  $C^3$  dans un voisinage de 0, alors ce développement est celui-là, autrement dit on ne peut pas dériver un développement limité sans justifier que la fonction dérivée admet un développement limité. Par contre on peut toujours intégrer un développement limité.

2. On pose  $t = \frac{1}{x}$ ,

$$f(t) = \left(\frac{1}{t^2} - 1\right) \ln \left| \frac{1 + \frac{1}{t}}{1 - \frac{1}{t}} \right| = \frac{1 - t^2}{t^2} \ln \left| \frac{t + 1}{t - 1} \right| = \frac{1 - t^2}{t^2} \ln \left| \frac{t + 1}{t - 1} \right|$$

Lorsque  $x \rightarrow +\infty$ ,  $t \rightarrow 0$  et au voisinage de 0,

$$\begin{aligned} \frac{1 - t^2}{t^2} \ln \left| \frac{t + 1}{t - 1} \right| &= -\frac{t^2 - 1}{t^2} \ln \left| \frac{t + 1}{t - 1} \right| = -\frac{1}{t^2} \left( -2t + \frac{4}{3}t^3 + o(t^3) \right) = \frac{2}{t} - \frac{4}{3}t + o(t) \\ &= 2x - \frac{4}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

On trouve le développement limité en 0 de  $\frac{t^2 - 1}{t^2} \ln \left| \frac{t + 1}{t - 1} \right|$  à l'aide du 1.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{4}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right) = 0$  donc la droite d'équation  $y = -2x$  est asymptote à la courbe.

Comme  $f(x) - 2x = -\frac{4}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$  est strictement négatif lorsque  $x \rightarrow +\infty$ , la courbe est au dessus de l'asymptote.

Allez à : **Exercice 6**

Correction exercice 7.

1.

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o(x^4)$$

En intégrant

$$f(x) = f(0) + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$

Car  $f(0) = \arctan(0) = 0$

2.

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{\arctan(x) - x}{\sin(x) - x} = \frac{x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5) - x}{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) - x} = \frac{-\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)}{-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)} \\ &= \frac{x^3 \left( -\frac{1}{3} + \frac{x^2}{5} + o(x^2) \right)}{x^3 \left( -\frac{1}{6} + \frac{x^2}{120} + o(x^2) \right)} = \frac{-\frac{1}{3} + \frac{x^2}{5} + o(x^2)}{-\frac{1}{6} + \frac{x^2}{120} + o(x^2)} = \frac{-\frac{1}{3} + \frac{x^2}{5} + o(x^2)}{-\frac{1}{6} \left( 1 - \frac{x^2}{20} + o(x^2) \right)} \\ &= -6 \left( -\frac{1}{3} + \frac{x^2}{5} + o(x^2) \right) \frac{1}{1 - \frac{x^2}{20} + o(x^2)} \\ &= -6 \left( -\frac{1}{3} + \frac{x^2}{5} + o(x^2) \right) \left( 1 + \frac{x^2}{20} + o(x^2) \right) = -6 \left( -\frac{1}{3} + \left( -\frac{1}{60} + \frac{1}{5} \right) x^2 + o(x^2) \right) \\ &= 2 - 6 \times \frac{11}{60} x^2 + o(x^2) = 2 - \frac{11}{10} x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 7**

Correction exercice 8.

$$f'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}} = 2x(1-x^4)^{-\frac{1}{2}}$$

$$(1-X)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)X + o(X) = 1 + \frac{1}{2}X + o(X)$$

Donc

$$f'(x) = -2x(1-x^4)^{-\frac{1}{2}} = -2x \left(1 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)\right) = -2x - x^5 + o(x^5)$$

Donc

$$f(x) = f(0) - x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6) = \frac{\pi}{2} - x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6)$$

Allez à : **Exercice 8**

Correction exercice 9.

$$f'(x) = \frac{1}{1+(1+x)^2} = \frac{1}{2+2x+x^2}$$

Première méthode : division suivant les puissances croissantes

$\begin{array}{r} 1 \\ 1+x+\frac{x^2}{2} \\ \hline -x-\frac{x^2}{2} \\ -x-x^2-\frac{x^3}{2} \\ \hline \frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2} \\ \frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+o(x^3) \\ \hline o(x^3) \end{array}$	$\begin{array}{r} 2+2x+x^2 \\ \hline \frac{1}{2}-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4} \end{array}$
---	---

Par conséquent

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

Deuxième méthode

$$f'(x) = \frac{1}{2+2x+x^2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+x+\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+X} = \frac{1}{2} \times (1-X+X^2-X^3+o(X^3))$$

Avec

$$X = x + \frac{x^2}{2}$$

$$X^2 = \left(x + \frac{x^2}{2}\right)\left(x + \frac{x^2}{2}\right) = x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3) = x^2 + x^3 + o(x^3)$$

$$X^3 = x^3 + o(x^3) \quad \text{et} \quad o(X^3) = o(x^3)$$

Par conséquent

$$f'(x) = \frac{1}{2} \times (1-X+X^2-X^3+o(X^3))$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(1 - \left(x + \frac{x^2}{2}\right) + (x^2 + x^3 + o(x^3)) - (x^3 + o(x^3)) + o(x^3)\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + o(x^3)$$

On en déduit le développement de  $f$  à l'ordre 4 en déterminant une primitive du polynôme de Taylor de  $f'(x)$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^4) = \arctan(1) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^4) \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^4) \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 9**

Correction exercice 10.

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(x) \ln(1+x) &= \left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) = x + \frac{x^2}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)x^3 + o(x^3) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^3}{6} + o(x^3) \end{aligned}$$

$x - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^3}{6} + o(x^3)$	$1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$
$x - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{4}{3}x^3$
$-\frac{x^2}{2} + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$	
$-\frac{x^2}{2} + o(x^3)$	
$\frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$	
$\frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$	
$o(x^3)$	

$$\frac{\operatorname{ch}(x) \ln(1+x)}{\cos(x)} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$$

Allez à : **Exercice 10**

Correction exercice 11.

1. On pose  $t = x - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = t + \frac{\pi}{2}$ ,  $\cos(x) = \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(t)$

$$f(x) = e^{-\sin(t)} = e^{-t+o(t^2)} = e^T = 1 + T + \frac{T^2}{2!} + o(T^2) = 1 + (-t + o(t^2)) + \frac{t^2 + o(t^2)}{2!} + o(t^2)$$

En posant  $T = -t + o(t^2)$ ,  $T^2 = t^2 + o(t^2)$  et  $o(T^2) = o(t^2)$

$$f(x) = 1 + (-t + o(t^2)) + \frac{t^2 + o(t^2)}{2!} + o(t^2) = 1 - t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

$$= 1 - \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{2} + o\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2\right)$$

2. On pose  $t = x - 1 \Leftrightarrow x = 1 + t$

$$g(x) = \frac{\frac{\pi}{4} - \arctan(1+t)}{\ln(1+t)}$$

Le dénominateur et le numérateur s'annulent en  $t = 0$ . Il faut trouver un développement limité à l'ordre 2 (au moins) du numérateur et du dénominateur. Pour le dénominateur il n'y a pas de problème, par

contre le développement limité de  $h(t) = \frac{\pi}{4} - \arctan(1+t)$  ne fait pas parti des formules connues, pour cela on va chercher un développement à l'ordre 1 de sa dérivée.

$$\begin{aligned} h'(t) &= -\frac{1}{1+(1+t)^2} = -\frac{1}{1+1+2t+t^2} = -\frac{1}{2+2t+t^2} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{1+t+\frac{t^2}{2}} \\ &= -\frac{1}{2}(1-t+o(t)) = -\frac{1}{2} + \frac{t}{2} + o(t) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} h(t) &= h(0) - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4} + o(t^2) = \frac{\pi}{4} - \arctan(1) - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4} + o(t^2) = -\frac{t}{2} + \frac{t^2}{4} + o(t^2) \\ g(x) &= \frac{-\frac{t}{2} + \frac{t^2}{4} + o(t^2)}{t - t^2 + o(t^2)} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{t}{4} + o(t)}{1-t+o(t)} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{t}{4} + o(t)\right)(1+t+o(t)) \\ &= -\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)t + o(t) = -\frac{1}{2} - \frac{t}{4} + o(t) = -\frac{1}{2} - \frac{x-1}{4} + o((x-1)) \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 11**

Correction exercice 12.

Première méthode :

$f$  est  $C^{+\infty}$  donc  $f$  admet un développement limité à n'importe quel ordre, on peut appliquer la formule de Taylor-Young

$$f(0) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = -\sin(x) \Rightarrow f'(0) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f''(x) = -\cos(x) \Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$f^{(3)}(x) = \sin(x) \Rightarrow f^{(3)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f^{(4)}(x) = \cos(x) \Rightarrow f^{(4)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\cos(x) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{1}{48}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4\right)$$

Allez à : **Exercice 12**

Deuxième méthode

On pose  $t = x - \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = t + \frac{\pi}{3}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right) = \cos(t)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin(t)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + o(t^4)\right) \times \frac{1}{2} - \left(t - \frac{t^3}{3!} + o(t^4)\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{4}t^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}t^3 + \frac{1}{48}t^4 + o(t^4) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{1}{48}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4\right) \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 12**

Correction exercice 13.

On pose  $t = x - 1$ ,  $x = 1 + t$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{2+t}}{(1+t)^2} = \sqrt{2} \left(1 + \frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{2}} (1+t)^{-2} \\ &= \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{\left(\frac{t}{2}\right)^2}{2} + o(t^2)\right) \left(1 - 2t - 2(-3)\frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) \\ &= \sqrt{2} \left(1 + \frac{t}{4} - \frac{t^2}{32} + o(t^2)\right) (1 - 2t + 3t^2 + o(t^2)) \\ &= \sqrt{2} \left(1 + \left(-2 + \frac{1}{4}\right)t + \left(3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{32}\right)t^2 + o(t^2)\right) = \sqrt{2} \left(1 - \frac{7}{4}t + \frac{79}{32}t^2 + o(t^2)\right) \\ &= \sqrt{2} - \frac{7\sqrt{2}}{4}(x-1) + \frac{79\sqrt{2}}{32}(x-1)^2 + o((x-1)^2) \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 13**

Correction exercice 14.

On pose  $t = x - 1 \Leftrightarrow x = 1 + t$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{x-1} = (1+t)^{\frac{1}{t}} = e^{\frac{1}{t}\ln(1+t)} \\ \frac{\ln(1+t)}{t} &= \frac{t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)}{t} = 1 - \frac{t}{2} + o(t) \\ f(x) &= e^{1-t+o(t)} = e e^{-t+o(t)} = e \left(1 - \frac{t}{2} + o(t)\right) = e - e \frac{t}{2} + o(t) = e - e \frac{(x-1)}{2} + o((x-1)) \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 14**

Correction exercice 15.

1. On pose  $x = \frac{\pi}{2} - t$ , soit  $x = \frac{\pi}{2} + t$ ,

$$f(x) = e^{\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)} = e^{\cos(t)} = e^{1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^4)} = e e^{-\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^4)} = e e^X = e(1 + X + \frac{X^2}{2} + o(X^2))$$

Avec  $X = -\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^4)$ ,  $X^2 = \frac{t^4}{4} + o(t^4)$  et  $o(X^2) = o(t^4)$

$$\begin{aligned} f(x) &= e \left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^4) + \frac{1}{2}\left(\frac{t^4}{4} + o(t^4)\right) + o(t^4)\right) = e - \frac{e}{2}t^2 + \frac{e}{6}t^4 + o(t^4) \\ &= e - \frac{e}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{e}{6}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4\right) \end{aligned}$$

2.

$$f(x) - e = -\frac{e}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2\right) \underset{\frac{\pi}{2}}{\sim} -\frac{e}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$$

3.

$$\frac{f(x) - e}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2} \underset{\frac{\pi}{2}}{\sim} -\frac{\frac{e}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2} = -\frac{e}{2}$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - e}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2} = -\frac{e}{2}$$

Allez à : **Exercice 15**

Correction exercice 16.

1.  $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$  et  $\ln$  est  $C^{+\infty}$  au voisinage de 1, donc  $f$  admet un développement limité à n'importe quel ordre.

$$\text{On pose } t = x - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = t + \frac{\pi}{2}$$

$$f(x) = \ln\left(\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \ln(\cos(t)) = \ln\left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3)\right) = \ln(1 + T) = T - \frac{T^2}{2} + o(T^2)$$

Avec

$$T = -\frac{t^2}{2} + o(t^3), \quad T^2 = o(t^3) \quad \text{et} \quad o(T^2) = o(t^3)$$

$$f(x) = T - \frac{T^2}{2} + o(T^2) = -\frac{t^2}{2} + o(t^3) = -\frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{2} + o\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3\right)$$

2. On pose  $t = x - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = t + \frac{\pi}{2}$

$$f(x) = e^{\frac{1}{x} \ln(1 + \cos(x))} = e^{\frac{1}{t + \frac{\pi}{2}} \ln(1 + \cos(t + \frac{\pi}{2}))} = e^{\frac{1}{t + \frac{\pi}{2}} \ln(1 - \sin(t))} = g(t)$$

$g$  est une fonction  $C^{+\infty}$  au voisinage de 0 donc elle admet un développement limité à n'importe quel ordre. On fait d'abord un développement limité à l'ordre 3 de  $\frac{1}{t + \frac{\pi}{2}} \ln(1 - \sin(t))$

$$\begin{aligned} \frac{1}{t + \frac{\pi}{2}} &= \frac{2}{\pi} \times \frac{1}{1 + \frac{2t}{\pi}} = \frac{2}{\pi} \times \frac{1}{1 + T} = \frac{2}{\pi} (1 - T + T^2 - T^3 + o(T^3)) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{2t}{\pi} + \left(\frac{2t}{\pi}\right)^2 - \left(\frac{2t}{\pi}\right)^3 + o(t^3)\right) = \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{2t}{\pi} + \frac{4t^2}{\pi^2} - \frac{8t^3}{\pi^3} + o(t^3)\right) \end{aligned}$$

$$\ln(1 - \sin(t)) = \ln\left(1 - t + \frac{t^3}{6} + o(t^3)\right) = \ln(1 + T) = T - \frac{T^2}{2} + \frac{T^3}{3} + o(T^3)$$

Avec  $T = -t + \frac{t^3}{6} + o(t^3)$ ,  $T^2 = \left(-t + \frac{t^3}{6} + o(t^3)\right)\left(-t + \frac{t^3}{6} + o(t^3)\right) = t^2 + o(t^3)$ ,  $T^3 = t^3 + o(t^3)$  et  $o(T^3) = o(t^3)$

$$\begin{aligned} \ln(1 - \sin(t)) &= T - \frac{T^2}{2} + \frac{T^3}{3} + o(T^3) = -t + \frac{t^3}{6} + o(t^3) - \frac{t^2 + o(t^3)}{2} + \frac{t^3 + o(t^3)}{3} + o(t^3) \\ &= -t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2} + o(t^3) \end{aligned}$$

Cette fois il fallait bien faire un développement limité à l'ordre 3 en  $T$  parce que le premier terme de  $T$  est en  $t$ .

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t + \frac{\pi}{2}} \ln(1 - \sin(t)) &= \frac{2}{\pi} \times \frac{1}{\left(1 + \frac{2t}{\pi}\right)} \ln\left(1 - t + \frac{t^3}{6} + o(t^3)\right) \\
&= \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{2t}{\pi} + \frac{4t^2}{\pi^2} - \frac{8t^3}{\pi^3} + o(t^3)\right) \left(-t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2} + o(t^3)\right) \\
&= \frac{2}{\pi} \left(-t + \left(-\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}\right)t^2 + \left(-\frac{4}{\pi^2} + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\right)t^3 + o(t^3)\right) \\
&= \frac{2}{\pi} t - \left(\frac{4}{\pi} + 1\right)t^2 + \left(-\frac{8}{\pi^3} + \frac{2}{\pi^2} + \frac{1}{\pi}\right)t^3 + o(t^3) \\
f(x) = e^{\frac{1}{t + \frac{\pi}{2}} \ln(1 - \sin(t))} &= e^{\frac{2}{\pi} t - \left(\frac{4}{\pi} + 1\right)t^2 + \left(-\frac{8}{\pi^3} + \frac{2}{\pi^2} + \frac{1}{\pi}\right)t^3 + o(t^3)} = e^T = 1 + T + \frac{T^2}{2} + \frac{T^3}{6} + o(T^3)
\end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}
T &= \frac{2}{\pi} t - \left(\frac{4}{\pi} + 1\right)t^2 + \left(-\frac{8}{\pi^3} + \frac{2}{\pi^2} + \frac{1}{\pi}\right)t^3 + o(t^3) \\
T^2 &= \left(\frac{2}{\pi} t - \left(\frac{4}{\pi} + 1\right)t^2 + \left(-\frac{8}{\pi^3} + \frac{2}{\pi^2} + \frac{1}{\pi}\right)t^3 + o(t^3)\right) \left(\frac{2}{\pi} t - \left(\frac{4}{\pi} + 1\right)t^2 + \left(-\frac{8}{\pi^3} + \frac{2}{\pi^2} + \frac{1}{\pi}\right)t^3 + o(t^3)\right) \\
&= \frac{4}{\pi^2} t^2 - \left(\frac{2}{\pi} \left(\frac{4}{\pi} + 1\right) + \frac{2}{\pi} \left(\frac{4}{\pi} + 1\right)\right)t^3 + o(t^3) \\
&= \frac{4}{\pi^2} t^2 - \left(\frac{16}{\pi^2} + \frac{4}{\pi}\right)t^3 + o(t^3) \\
T^3 &= \frac{8}{\pi^3} t^3 + o(t^3) \quad \text{et} \quad o(T^3) = o(t^3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= 1 + T + \frac{T^2}{2} + \frac{T^3}{6} + o(T^3) \\
&= 1 + \frac{2}{\pi} t - \left(\frac{4}{\pi} + 1\right)t^2 + \left(-\frac{8}{\pi^3} + \frac{2}{\pi^2} + \frac{1}{\pi}\right)t^3 + o(t^3) + \frac{\frac{4}{\pi^2} t^2 - \left(\frac{16}{\pi^2} + \frac{4}{\pi}\right)t^3 + o(t^3)}{2} \\
&\quad + \frac{\frac{8}{\pi^3} t^3 + o(t^3)}{6} + o(t^3) \\
&= 1 + \frac{2}{\pi} t + \left(-\frac{4}{\pi} - 1 + \frac{2}{\pi^2}\right)t^2 + \left(-\frac{8}{\pi^3} + \frac{2}{\pi^2} + \frac{1}{\pi} - \frac{8}{\pi^2} - \frac{2}{\pi} + \frac{4}{3\pi^3}\right)t^3 + o(t^3) \\
&= 1 + \frac{2}{\pi} t + \left(\frac{2}{\pi^2} - \frac{4}{\pi} - 1\right)t^2 + \left(-\frac{20}{3\pi^3} - \frac{6}{\pi^2} - \frac{1}{\pi}\right)t^3 + o(t^3) \\
&= 1 + \frac{2}{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{2}{\pi^2} - \frac{4}{\pi} - 1\right) \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \left(-\frac{20}{3\pi^3} - \frac{6}{\pi^2} - \frac{1}{\pi}\right) \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 \\
&\quad + o\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3\right)
\end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 16**

Correction exercice 17.

1. On pose  $t = x - 2 \Leftrightarrow x = t + 2$

$$\begin{aligned}
f(x) = \ln(t + 2) &= \ln\left(2\left(1 + \frac{t}{2}\right)\right) = \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{t}{2}\right) = \ln(2) + \frac{t}{2} - \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^2}{2} + o(t^2) \\
&= \ln(2) + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + o(t^2) = \ln(2) + \frac{x - 2}{2} - \frac{(x - 2)^2}{8} + o((x - 2)^2)
\end{aligned}$$

On peut utiliser la même méthode ou utiliser la formule de Taylor pour les polynômes de degré 3

$$g(x) = x^3 - x^2 - x - 2 = g(2) + g'(2)(x - 2) + g''(2) \frac{(x - 2)^2}{2!} + g'''(2) \frac{(x - 2)^3}{3!}$$

$$\begin{aligned}
 g(2) &= 2^3 - 2^2 - 2 - 2 = 0 \\
 g'(x) &= 3x^2 - 2x - 1 \Rightarrow g'(2) = 7 \\
 g''(x) &= 6x - 2 \Rightarrow g''(2) = 10 \\
 g'''(x) &= 6 \Rightarrow g'''(2) = 6 \\
 g(x) &= 7(x-2) + 5(x-2)^2 + (x-2)^3 = 7(x-2) + 5(x-2)^2 + o((x-2)^2)
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 \frac{\ln(x) - \ln(2)}{x^3 - x^2 - x - 2} &= \frac{\frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{8} + o((x-2)^2)}{7(x-2) + 5(x-2)^2 + o((x-2)^2)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{x-2}{8} + o(x-2)}{7 + 5(x-2) + o(x-2)} \\
 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x) - \ln(2)}{x^3 - x^2 - x - 2} &= \frac{1}{14}
 \end{aligned}$$

Allez à : Exercice 17

Correction exercice 18.

1. Comme on va diviser par  $x$ , il faut faire un d.l. de  $\sin(x)$  à l'ordre 5.

$$f(x) = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)$$

2.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \left( 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4) \right) = 1$$

On peut prolonger  $f$  par continuité en posant  $f(0) = 1$ . $f$  admet un d.l. à l'ordre 1, donc  $f'(0)$  existe et  $f'(0) = -\frac{1}{6}$  (le coefficient de  $x$  dans le d.l. de  $f(x)$ ).

On rappelle que l'on ne peut pas conclure des résultats identiques sur les dérivées d'ordre supérieures si on n'a pas montré auparavant que la fonction admettait une dérivée à l'ordre voulu.

3.

$$g(x) = \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)\right) = \ln(1 + X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} - \frac{X^4}{4} + o(X^4)$$

Avec  $X = -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)$ ,  $X^2 = \frac{x^4}{36} + o(x^4)$  et  $X^3 = X^4 = o(X^4) = o(x^4)$ 

Donc

$$\begin{aligned}
 g(x) &= X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} - \frac{X^4}{4} + o(X^4) = -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{\left(\frac{x^4}{36}\right)}{2} + o(x^4) = -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^4}{72} + o(x^4) \\
 &= -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + o(x^4)
 \end{aligned}$$

Allez à : Exercice 18

Correction exercice 19.

 $f(x)$  tend vers 1 lorsque  $x$  tend vers 0, donc  $f$  est prolongeable par continuité 0,  $x$  et  $\sin(x)$  sont  $C^{+\infty}$  donc ces fonctions admettent des développements limités à n'importe quel ordre, leur quotient aussi.Il va y avoir une simplification par  $x$ , donc il faut faire un développement limité du numérateur et du dénominateur à l'ordre 5,  $x$  est un polynôme de degré inférieur à 5, son développement limité est lui-même.

$$f(x) = \frac{x}{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)}$$

Là, il y a deux techniques, soit la division suivant les puissances croissantes ou utiliser la formule  $\frac{1}{1+X}$ .

Je vais faire une division

$$\begin{array}{r|l}
 1 & 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4) \\
 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4) & \hline
 \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + o(x^4) & 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7}{360}x^4 \\
 \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{36} + o(x^4) & \\
 \hline
 \frac{7}{360}x^4 + o(x^4) & \\
 \frac{7}{360}x^4 + o(x^4) & \\
 \hline
 o(x^4) & 
 \end{array}$$

$$f(x) = \frac{x}{\sin(x)} = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7}{360}x^4 + o(x^4)$$

Allez à : **Exercice 19**

Correction exercice 20.

$$\ln(\operatorname{ch}(x)) = \ln\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) = \ln(1 + X) = X - \frac{X^2}{2} + o(X^2)$$

Avec  $X = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$ ,  $X^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^4)$  et  $o(X^2) = o(x^4)$

Donc

$$\ln(\operatorname{ch}(x)) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4} + o(x^4)\right) + o(x^4) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

$$x \ln(1 + x) = x \left( x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

$$f(x) = \frac{\ln(\operatorname{ch}(x))}{x \ln(1 + x)} = \frac{\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)}{x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + o(x^4)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^2)}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)}$$

$$\begin{array}{r|l}
 \frac{1}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^2) & 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} \\
 \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{6} & \hline
 \frac{x}{4} - \frac{x^2}{4} + o(x^2) & \frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{8} \\
 \frac{x}{4} - \frac{x^2}{8} + o(x^2) & \\
 \hline
 -\frac{x^2}{8} + o(x^2) & \\
 -\frac{x^2}{8} + o(x^2) & \\
 \hline
 o(x^2) & 
 \end{array}$$

Donc  $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$

Allez à : **Exercice 20**

Correction exercice 21.

$$\ln(\cos(x)) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) = \ln(1 + X) = X - \frac{X^2}{2} + o(X^2)$$

Avec  $X = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$ ,  $X^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^4)$  et  $o(X^2) = o(x^4)$

Donc

$$\ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4} + o(x^4)\right) + o(x^4) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

$$x \ln(1-x) = x\left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) = -x^2 - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

$$f(x) = \frac{\ln(\cos(x))}{x \ln(1-x)} = \frac{-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)}{-x^2 - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{3} + o(x^4)} = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^2)}{-1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + o(x^2)} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^2)}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)}$$

$\frac{1}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^2)$	$1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}$
$\frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{6}$	
$-\frac{x}{4} - \frac{x^2}{12} + o(x^2)$	$\frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{24}$
$-\frac{x}{4} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$	
$\frac{x^2}{24} + o(x^2)$	
$\frac{x^2}{24} + o(x^2)$	
$o(x^2)$	

Donc  $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{24} + o(x^2)$

Allez à : **Exercice 21**

Correction exercice 22.

1.

$$\ln(\operatorname{ch}(x)) = \ln\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

On pourra mettre  $x^2$  en facteur au numérateur

$$\operatorname{sh}(x) = x + o(x)$$

On pourra mettre  $x$  en facteur au dénominateur

$$\frac{\ln(\operatorname{ch}(x))}{\operatorname{sh}(x)} = \frac{x^2 f_1(x)}{x g_1(x)} = x \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

Il suffit de faire un développement limité à l'ordre 4 au numérateur et 3 au dénominateur, car après simplification de  $x^2$  par  $x$ , il y aura un  $x$  en facteur donc des développements à l'ordre 2 de  $f_1$  et de  $g_1$  suffisent

$$\ln(\operatorname{ch}(x)) = \ln\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) = \ln(1 + X) = X - \frac{X^2}{2} + o(X^2)$$

Avec  $X = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$  et donc  $X^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^4)$  et  $o(X^2) = o(x^4)$

$$\begin{aligned} \ln(\operatorname{ch}(x)) &= \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) - \frac{\frac{x^4}{4} + o(x^4)}{2} + o(x^4) = \frac{x^2}{2} + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8}\right)x^4 + o(x^4) \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4) = x^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^2)\right) \end{aligned}$$

$$\operatorname{sh}(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = x \left( 1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right)$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^2) \right)}{x \left( 1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right)} = x \frac{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^2)}{1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)} = x \left( \frac{1}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^2) \right) \left( 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right) \\ &= x \left( \frac{1}{2} + \left( -\frac{1}{12} - \frac{1}{12} \right) x^2 + o(x^2) \right) = x \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{6} x^2 + o(x^2) \right) = \frac{1}{2} x - \frac{1}{6} x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

Donc il suffit de poser  $f(0) = 0$  pour prolonger  $f$  par continuité en 0.

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} x^3 + o(x^3)}{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} x^2 + o(x^2) \rightarrow \frac{1}{2}$$

Alors  $f'(0) = \frac{1}{2}$ .

Allez à : **Exercice 22**

Correction exercice 23.

$$\ln(1+x) \operatorname{sh}(x) \sim_0 x^2$$

Et

$$\cos(x) - 1 \sim_0 -\frac{x^2}{2}$$

Donc on pourra mettre  $x^2$  en facteur au numérateur et au dénominateur, puis simplifier par  $x^2$ , il faut donc faire des développements limités à l'ordre  $2 + 3 = 5$  pour finalement obtenir un développement limité à l'ordre 3.

$$\cos(x) - 1 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) = x^2 \left( -\frac{1}{2} + \frac{x^2}{24} + o(x^3) \right)$$

$$\begin{aligned} \ln(1+x) \operatorname{sh}(x) &= \left( x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) \right) \left( x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right) \\ &= x^2 \left( 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3) \right) \left( 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3) \right) \end{aligned}$$

Je me suis contenté de faire des développements à l'ordre 4 parce que les deux factorisations par  $x$  (donc par  $x^2$ ) permettent d'obtenir le produit de  $x^2$  par un produit de développements limités à l'ordre 3 (qui donne un développement limité à l'ordre 3) c'est-à-dire un développement limité à l'ordre 5.

Si on avait fait des développements limités de  $\ln(1+x)$  et de  $\operatorname{sh}(x)$  à l'ordre 5, on aurait juste constaté que les deux termes de degré 5 n'auraient servi à rien (donc rien de bien grave).

$$\begin{aligned} \ln(1+x) \operatorname{sh}(x) &= x^2 \left( 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3) \right) \left( 1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3) \right) \\ &= x^2 \left( 1 - \frac{x}{2} + \left[ \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \right] x^2 + \left[ -\frac{1}{12} - \frac{1}{4} \right] x^3 + o(x^3) \right) \\ &= x^2 \left( 1 - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 + o(x^3) \right) \end{aligned}$$

Donc

$$f(x) = \frac{x^2 \left( -\frac{1}{2} + \frac{x^2}{24} + o(x^3) \right)}{x^2 \left( 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \right)} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{x^2}{24} + o(x^3)}{1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}$$

Il reste à faire une division suivant les puissances croissantes

$-\frac{1}{2} + \frac{1}{24}x^2 + o(x^3)$	$1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$
$-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$	<hr style="border: 0.5px solid black;"/> $-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + o(x^3)$
$-\frac{1}{4}x + \frac{7}{24}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$	<hr style="border: 0.5px solid black;"/>
$-\frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{8}x^3 + o(x^3)$	<hr style="border: 0.5px solid black;"/>
$\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{24}x^3 + o(x^3)$	<hr style="border: 0.5px solid black;"/>
$\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{12}x^3 + o(x^3)$	<hr style="border: 0.5px solid black;"/>
$\frac{1}{24}x^3 + o(x^3)$	<hr style="border: 0.5px solid black;"/>
$\frac{1}{24}x^3 + o(x^3)$	<hr style="border: 0.5px solid black;"/>
$+o(x^3)$	<hr style="border: 0.5px solid black;"/>

Et finalement

$$f(x) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + o(x^3)$$

Allez à : **Exercice 23**

Correction exercice 24.

1.

$$\ln(1 + \operatorname{sh}(x)) = \ln\left(1 + x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = \ln(1 + X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + o(X^3)$$

Avec  $X = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ ,  $X^2 = \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = x^2 + o(x^3)$ ,  $X^3 = x^3 + o(x^3)$

et  $o(X^3) = o(x^3)$

$$\begin{aligned} \ln(1 + \operatorname{sh}(x)) &= X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + o(X^3) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \frac{x^2 + o(x^3)}{2} + \frac{x^3 + o(x^3)}{3} + o(x^3) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3) \end{aligned}$$

2.

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Donc

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{\ln(1 + \operatorname{sh}(x))}{\sin(x)} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)}{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)} \\ &= \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \times \frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)} = \frac{1}{1 + X} = 1 - X + o(X) \end{aligned}$$

Avec  $X = -\frac{x^2}{6} + o(x^2)$  et  $o(X) = o(x^2)$

$$\frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)} = 1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)$$

On aurait aussi pu faire une division suivant les puissances croissantes

$$\begin{aligned} g(x) &= \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) = 1 - \frac{x}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)x^2 + o(x^2) \\ &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{2}{3}x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{2}{3}x^2 + o(x^2)\right) = 1$$

donc  $g$  est prolongeable par continuité par la fonction définie par :  $\begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Allez à : **Exercice 24**

Correction exercice 25.

1.

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

$$\cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{24} + o(x^5) = 1 - 2x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^5)$$

2.

$$\begin{aligned} f(x) &= 9 \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) - 11x \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) + 2x \left(1 - 2x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^5)\right) \\ &= (9 - 11 + 2)x + \left(-\frac{9}{6} + \frac{11}{2} - 4\right)x^3 + \left(\frac{9}{120} - \frac{11}{24} + \frac{4}{3}\right)x^5 + o(x^5) = \frac{19}{20}x^5 + o(x^5) \\ f(2x) &= \frac{19}{20}(2x)^5 + o(x^5) = \frac{19 \times 8}{5}x^5 + o(x^5) = \frac{152}{5}x^5 + o(x^5) \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{f(2x)}{f(x)} = \frac{\frac{19}{20}x^5 + o(x^5)}{\frac{152}{5}x^5 + o(x^5)} = \frac{\frac{19}{20} + o(1)}{\frac{152}{5} + o(1)} \sim \frac{19}{20} \times \frac{5}{19 \times 8} = \frac{1}{32}$$

Et

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x)}{f(x)} = \frac{1}{32}$$

Allez à : **Exercice 25**

Correction exercice 26.

1.

$$\begin{aligned}
\sin(x) \operatorname{sh}(x) &= \left( x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \right) \left( x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \right) \\
&= x^2 \left( 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4) \right) \left( 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4) \right) \\
&= x^2 \left( 1 + \left( -\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right) x^2 + \left( \frac{1}{120} - \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{120} \right) x^4 + o(x^4) \right) \\
&= x^2 \left( 1 - \frac{1}{90} x^4 + o(x^4) \right) = x^2 - \frac{1}{90} x^6 + o(x^6)
\end{aligned}$$

Donc

Il faut faire un développement limité au même ordre du dénominateur

$$\begin{aligned}
h(x) &= \frac{x^2 - \frac{1}{90} x^6 + o(x^6)}{x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6)} = \frac{1 - \frac{1}{90} x^4 + o(x^4)}{1 - \frac{x^4}{6} + o(x^4)} = \left( 1 - \frac{1}{90} x^4 + o(x^4) \right) \left( 1 + \frac{x^4}{6} + o(x^4) \right) \\
&= 1 + \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{90} \right) x^4 + o(x^4) = 1 + \frac{7}{45} x^4 + o(x^4)
\end{aligned}$$

2.

$$h(x) - 1 = \frac{7}{45} x^4 + o(x^4) \sim \frac{7}{45} x^4$$

Allez à : **Exercice 26**

Correction exercice 27.

1.  $f(x)$  tend vers 1 lorsque  $x$  tend vers 0, donc  $f$  est prolongeable par continuité 0,  $x$  et  $\sin(x)$  sont  $C^\infty$  donc ces fonctions admettent des d.l. à n'importe quelle ordre, leur quotient aussi.

Il va y avoir une simplification par  $x$ , donc il faut faire un d.l. du numérateur et du dénominateur à l'ordre 5,  $x$  est un polynôme de degré inférieur à 5, son d.l. est lui-même.

$$f(x) = \frac{x}{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)}$$

Là, il y a deux techniques, soit la division suivant les puissances croissantes ou utiliser la formule  $\frac{1}{1+X}$ .

Je vais faire une division

1	$1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)$
$1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)$	$1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7}{360} x^4$
$\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + o(x^4)$	
$\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{36} + o(x^4)$	
$\frac{7}{360} x^4 + o(x^4)$	
$\frac{7}{360} x^4 + o(x^4)$	
$o(x^4)$	

$$f(x) = \frac{x}{\sin(x)} = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7}{360} x^4 + o(x^4)$$

2. Il faut évidemment réduire au même dénominateur

$$f(x) = \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{\operatorname{sh}^2(x)} = \frac{\operatorname{sh}^2(x) - \sin^2(x)}{\sin^2(x) \operatorname{sh}^2(x)}$$

Le terme de plus petit degré du dénominateur est  $x^4$  car  $\sin^2(x) \operatorname{sh}^2(x) \sim_0 x^2 \times x^2 = x^4$

Pour que cette fonction admette un développement limité il faut que le terme de plus bas degré du numérateur soit en  $x^4$ .

$\operatorname{sh}^2(x) - \sin^2(x)$  est paire, cette fonction est nulle en 0, le terme en  $x^2$  est  $x^2 - x^2 = 0$  car

$$\operatorname{sh}^2(x) - \sin^2(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + \dots\right)^2 - \left(x + \frac{x^3}{6} + \dots\right)^2 = x^2 + \dots - (x^2 + \dots)$$

Tout va bien, le terme de plus bas degré de cette fonction est en  $x^4$  (le terme en  $x^3$  est nul car la fonction est paire. Donc cette fonction admet un développement limité en 0 et il y aura une simplification par  $x^4$ . Pour faire un développement limité à l'ordre 4, il faut faire un développement limité à l'ordre  $4 + 3 = 7$  du numérateur et du dénominateur.

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}^2(x) &= \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)\right)^2 = x^2 \left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^5)\right)^2 \\ &= x^2 \left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^5)\right) \left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^5)\right) \\ &= x^2 \left(1 + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right)x^2 + \left(\frac{1}{120} + \frac{1}{36} + \frac{1}{120}\right)x^4 + o(x^5)\right) \\ &= x^2 \left(1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{90}x^4 + o(x^5)\right) = x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{90}x^6 + o(x^7) \end{aligned}$$

On remarquera que le développement limité à l'ordre 6 de  $\operatorname{sh}(x)$  permet de trouver le développement limité à l'ordre 7 de  $\operatorname{sh}^2(x)$

$$\begin{aligned} \sin^2(x) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)\right)^2 = x^2 \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^5)\right)^2 \\ &= x^2 \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^5)\right) \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^5)\right) \\ &= x^2 \left(1 + \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right)x^2 + \left(\frac{1}{120} + \frac{1}{36} + \frac{1}{120}\right)x^4 + o(x^5)\right) \\ &= x^2 \left(1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{90}x^4 + o(x^5)\right) = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{90}x^6 + o(x^7) \end{aligned}$$

$$\operatorname{sh}^2(x) - \sin^2(x) = x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{90}x^6 + o(x^7) - \left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{90}x^6 + o(x^7)\right) = \frac{2}{3}x^4 + o(x^7)$$

$$\begin{aligned} \sin^2(x) \operatorname{sh}^2(x) &= \left(x^2 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^5)\right) \left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^5)\right) \\ &= x^4 \left(1 + \frac{x^2}{3} + o(x^3)\right) \left(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^3)\right) = x^4(1 + o(x^3)) = x^4 + o(x^7) \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{\operatorname{sh}^2(x) - \sin^2(x)}{\sin^2(x) \operatorname{sh}^2(x)} = \frac{\frac{2}{3}x^4 + o(x^7)}{x^4 + o(x^7)} = \frac{\frac{2}{3} + o(x^3)}{1 + o(x^3)} = \frac{2}{3} + o(x^3)$$

3.  $f(x) = (\cos(2x))^{\frac{3}{x^2}} = e^{\frac{3}{x^2} \ln(\cos(2x))}$

Il faut déjà faire un développement limité à l'ordre 4 de  $\frac{3}{x^2} \ln(\cos(2x))$

On va diviser par  $x^2$  donc il faut faire un développement limité de  $\ln(\cos(2x))$  à l'ordre 6.

$$\begin{aligned}\ln(\cos(2x)) &= \ln\left(1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{24} - \frac{(2x)^6}{720} + o(x^6)\right) = \ln\left(1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{45}x^6 + o(x^6)\right) \\ &= \ln(1 + X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + o(X^3)\end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}X &= -2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{45}x^6 + o(x^6) \\ X^2 &= \left(-2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{45}x^6 + o(x^6)\right)\left(-2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{45}x^6 + o(x^6)\right) \\ &= 4x^4 + \left(-\frac{4}{3} - \frac{4}{3}\right)x^6 + o(x^6) = 4x^4 - \frac{8}{3}x^6 + o(x^6) \\ X^3 &= -8x^6 + o(x^6) \\ o(X^3) &= o(x^6)\end{aligned}$$

Donc il était bien inutile de faire un développement limité à l'ordre 6 de  $\ln(1 + X)$ , l'ordre 3 suffit car le terme de plus bas degré de  $X$  est  $x^2$ .

$$\begin{aligned}\ln(\cos(2x)) &= \ln(1 + X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + o(X^3) \\ &= -2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{45}x^6 + o(x^6) - \frac{4x^4 - \frac{8}{3}x^6 + o(x^6)}{2} + \frac{-8x^6 + o(x^6)}{3} + o(x^6) \\ &= -2x^2 - \frac{4}{3}x^4 - \frac{124}{45}x^6 + o(x^6) \\ \frac{3}{x^2}\ln(\cos(2x)) &= \frac{3}{x^2}\left(-2x^2 - \frac{4}{3}x^4 - \frac{124}{45}x^6 + o(x^6)\right) = -6 - 4x^2 - \frac{124}{45}x^4 + o(x^4) \\ f(x) &= e^{\frac{3}{x^2}\ln(\cos(2x))} = e^{-6-4x^2-\frac{124}{45}x^4+o(x^4)} = e^{-6}e^{-4x^2-\frac{124}{45}x^4+o(x^4)} = e^{-6}e^X \\ &= e^{-6}\left(1 + X + \frac{X^2}{2} + o(X^2)\right)\end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}X &= -4x^2 - \frac{124}{45}x^4 + o(x^4) \\ X^2 &= 16x^4 + o(x^4) \text{ et } o(X^2) = o(x^4) \\ f(x) &= e^{-6}\left(1 + X + \frac{X^2}{2} + o(X^2)\right) = e^{-6}\left(1 - 4x^2 - \frac{124}{45}x^4 + o(x^4) + \frac{16x^4 + o(x^4)}{2} + o(x^4)\right) \\ &= e^{-6}\left(1 - 4x^2 + \frac{236}{45}x^4 + o(x^4)\right) = e^{-6} - 4e^{-6}x^2 + \frac{236e^{-6}}{45}x^4 + o(x^4)\end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 27**

Correction exercice 28.

- $1 + \frac{1}{2} \times 3X + o(X) - 1 = \frac{3}{2}X + o(X)$
- On pose  $X = \frac{1}{x}$ ,  $X$  tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers l'infini.

$$\sqrt{x^2 + 3x + 2} - x = \sqrt{\frac{1}{X^2} + \frac{3}{X} + 2} - \frac{1}{X} = \sqrt{\frac{1 + 3X + 2X^2}{X^2}} - \frac{1}{X} = \frac{\sqrt{1 + 3X + 2X^2}}{X} - \frac{1}{X}$$

Car  $X > 0$

$$\sqrt{x^2 + 3x + 2} - x = \frac{\sqrt{1 + 3X + 2X^2} - 1}{X} = \frac{\frac{3}{2}X + o(X)}{X} = \frac{3}{2} + o(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 2} - x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{3}{2} + o(1) \right) = \frac{3}{2}$$

Allez à : **Exercice 28**

Correction exercice 29.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin^3(x) (e^{x^2} - 1) = (x + o(x))^3 (1 + x^2 + o(x^2) - 1) = (x^3 + o(x^3))(x^2 + o(x^2)) \\ &= x^3(1 + o(1))x^2(1 + o(1)) = x^5(1 + o(1)) = x^5 + o(x^5) \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 29**

Correction exercice 30.

Ni  $\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$  ni  $\frac{1}{x^2}$  n'admettent de développement limité en 0, il faut absolument réduire au même dénominateur.

$$\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 \cos(x) - \sin^2(x)}{x^2 \sin^2(x)}$$

Le dénominateur s'annule en 0, il faut faire attention ! Le terme de plus bas degré est  $x^4$ , cela se voit. Si le terme de plus bas degré du numérateur est  $x^p$  avec  $p < 4$ , la fonction n'admet pas de développement limité en 0.

Étudions brièvement  $x^2 \cos(x) - \sin^2(x)$ , cette fonction s'annule en 0, il n'y a pas de terme constant, elle est paire donc il n'y a pas de terme en  $x$  et  $x^3$ , il reste à regarder le terme en  $x^2$  :  $x^2 \cos(x) = x^2(1 - \frac{x^2}{2} + \dots)$  le premier terme est  $x^2$ ,  $(\sin(x))^2 = (x - \frac{x^3}{6} + \dots)^2$  donc le premier terme est aussi  $x^2$ , il n'y a pas de terme en  $x^2$ . Cette étude justifie le fait que cette fonction admet un développement limité en 0. De plus il y aura une simplification par  $x^4$  il faut donc faire des développements limités à l'ordre  $4 + 3 = 7$  pour pouvoir obtenir un développement limité à l'ordre 3.

$$x^2 \cos(x) = x^2 \left( 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \right) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{24} + o(x^7)$$

On notera qu'un développement limité à l'ordre 5 de  $\cos(x)$  suffit pour obtenir un développement limité à l'ordre 7 de  $x^2 \cos(x)$ .

$$\begin{aligned} \sin^2(x) &= \left( x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6) \right)^2 = x^2 \left( 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^5) \right)^2 \\ &= x^2 \left( 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^5) \right) \left( 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^5) \right) \\ &= x^2 \left( 1 - \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right) x^2 + \left( \frac{1}{120} + \left( -\frac{1}{6} \right) \left( -\frac{1}{6} \right) + \frac{1}{120} \right) x^4 + o(x^5) \right) \\ &= x^2 \left( 1 - \frac{1}{3} x^2 + \frac{2}{45} x^4 + o(x^5) \right) = x^2 - \frac{1}{3} x^4 + \frac{2}{45} x^6 + o(x^7) \end{aligned}$$

On notera qu'un développement limité à l'ordre 6 de  $\sin(x)$  suffit pour obtenir un développement limité à l'ordre 7 de  $\sin^2(x)$ . Cela vient du fait que le développement limité de  $\sin(x)$  commence par  $x$ .

On en déduit que :

$$\begin{aligned} x^2 \cos(x) - \sin^2(x) &= x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{24} + o(x^7) - \left( x^2 - \frac{1}{3} x^4 + \frac{2}{45} x^6 + o(x^7) \right) \\ &= -\frac{1}{6} x^4 - \frac{1}{360} x^6 + o(x^7) \\ x^2 \sin^2(x) &= x^2 \left( x^2 - \frac{1}{3} x^4 + o(x^5) \right) = x^4 - \frac{1}{3} x^6 + o(x^7) \end{aligned}$$

En faisant une troncature du développement limité de  $\sin^2(x)$  trouver ci-dessus.

$$\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} = \frac{-\frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{360}x^6 + o(x^7)}{x^4 - \frac{1}{3}x^6 + o(x^7)} = \frac{-\frac{1}{6} - \frac{1}{360}x^2 + o(x^3)}{1 - \frac{1}{3}x^2 + o(x^3)}$$

La première (et plus délicate) partie est finie, il faut trouver le développement limité d'un quotient de fonction dont le dénominateur ne s'annule pas. On peut faire une division suivant les puissance croissante mais ici on peut appliquer la formule  $\frac{1}{1+X}$ , cela me paraît plus simple.

$$\frac{-\frac{1}{6} - \frac{1}{360}x^2 + o(x^3)}{1 - \frac{1}{3}x^2 + o(x^3)} = \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{360}x^2 + o(x^3)\right) \times \frac{1}{1 - \frac{1}{3}x^2 + o(x^3)}$$

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{3}x^2 + o(x^3)} = \frac{1}{1+X} = 1 - X + X^2 + o(X^2)$$

Avec  $X = -\frac{1}{3}x^2 + o(x^3)$ ,  $X^2 = o(x^3)$  et  $o(X^2) = o(x^3)$ . On remarquera qu'un d.l. à l'ordre 1 du d.l. de  $\frac{1}{1+X} = 1 - X + o(X)$  pose un problème parce que  $o(X) = o(x^2)$  or on souhaite obtenir un d.l. à l'ordre 3.

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{3}x^2 + o(x^3)} = \frac{1}{1+X} = 1 - X + X^2 + o(X^2)$$

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{3}x^2 + o(x^3)} = 1 - \left(-\frac{1}{3}x^2 + o(x^3)\right) + o(x^3) + o(x^3) = 1 + \frac{1}{3}x^2 + o(x^3)$$

On en déduit que :

$$\frac{-\frac{1}{6} - \frac{1}{360}x^2 + o(x^3)}{1 - \frac{1}{3}x^2 + o(x^3)} = \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{360}x^2 + o(x^3)\right) \times \frac{1}{1 - \frac{1}{3}x^2 + o(x^3)}$$

$$= \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{360}x^2 + o(x^3)\right) \times \left(1 + \frac{1}{3}x^2 + o(x^3)\right) = -\frac{1}{6} + \left(-\frac{1}{18} - \frac{1}{360}\right)x^2 + o(x^3)$$

$$= -\frac{1}{6} - \frac{7}{120}x^2 + o(x^3)$$

$$\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{6} - \frac{7}{120}x^2 + o(x^3)$$

Et enfin

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{6} - \frac{7}{120}x^2 + o(x^3) \right) = -\frac{1}{6}$$

Allez à : **Exercice 30**

Correction exercice 31.

1.

$$g(X) = \ln\left(1 + 1 + \frac{1}{2}X + o(X)\right) = \ln\left(2 + \frac{X}{2} + o(X)\right) = \ln\left(2\left(1 + \frac{X}{4} + o(X)\right)\right)$$

$$= \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{X}{4} + o(X)\right) = \ln(2) + \frac{X}{4} + o(X)$$

2.

$$f(x) = \ln\left(e^x + \sqrt{e^{2x}(1 + e^{-2x})}\right) = \ln\left(e^x + e^x\sqrt{1 + e^{-2x}}\right) = \ln\left(e^x\left(1 + \sqrt{1 + e^{-2x}}\right)\right)$$

$$= \ln(e^x) + \ln\left(1 + \sqrt{1 + e^{-2x}}\right) = x + \ln\left(1 + \sqrt{1 + e^{-2x}}\right)$$

Lorsque  $x \rightarrow +\infty$ ,  $e^{-2x} \rightarrow 0$ , on peut poser  $X = e^{-2x}$  donc

$$\ln(1 + \sqrt{1 + e^{-2x}}) = \ln(1 + \sqrt{1 + X}) = \ln(2) + \frac{X}{4} + o(X) = \ln(2) + \frac{e^{-2x}}{4} + o(e^{-2x})$$

Par conséquent

$$f(x) = x + \ln(2) + \frac{e^{-2x}}{4} + o(e^{-2x})$$

Comme  $\frac{e^{-2x}}{4} + o(e^{-2x}) \rightarrow 0$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$ , la droite d'équation  $y = x + \ln(2)$  est asymptote au graphe de  $f$  en  $+\infty$ .

$$f(x) - (x + \ln(2)) = \frac{e^{-2x}}{4} + o(e^{-2x}) = e^{-2x} \left( \frac{1}{4} + o(1) \right)$$

$\frac{1}{4} + o(1) > 0$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$ ,  $e^{-2x} > 0$  ce qui entraîne que  $f(x) - (x + \ln(2)) > 0$ , ce qui montre que le graphe est au-dessus de l'asymptote.

Allez à : **Exercice 31**

Correction exercice 32.

1.

$$(1+h)^{\frac{1}{h}} = e^{\frac{\ln(1+h)}{h}} = e^{\frac{h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3)}{h}} = e^{1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} + o(h^2)} = e e^X = e \left( 1 + X + \frac{X^2}{2} + o(X^2) \right)$$

Avec  $X = -\frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} + o(h^2)$ ,  $X^2 = \frac{h^2}{4} + o(h^2)$  et  $o(X^2) = o(h^2)$ .

Donc

$$\begin{aligned} (1+h)^{\frac{1}{h}} &= e \left( 1 + X + \frac{X^2}{2} + o(X^2) \right) = e \left( 1 - \frac{h}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^2) + \frac{h^2}{8} + o(h^2) + o(h^2) \right) \\ &= e - \frac{e}{2}h + \frac{11}{24}h^2 + o(h^2) \end{aligned}$$

2. On pose  $h = \frac{1}{x}$ ,

$$\left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = (1+h)^{\frac{1}{h}} = e - \frac{e}{2}h + \frac{11}{24}h^2 + o(h^2) = e - \frac{e}{2x} + \frac{11e}{24x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

3.

$$\begin{aligned} &x^2 \left[ \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x - 4 \left( 1 + \frac{1}{2x} \right)^{2x} + 3 \left( 1 + \frac{1}{3x} \right)^{3x} \right] \\ &= x^2 \left[ e - \frac{e}{2x} + \frac{11e}{24x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - 4 \left( e - \frac{e}{2 \times 2x} + \frac{11e}{24 \times (2x)^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \right. \\ &\quad \left. + 3 \left( e - \frac{e}{2 \times 3x} + \frac{11e}{24 \times (3x)^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \right] \\ &= x^2 \left[ e - \frac{e}{2x} + \frac{11e}{24x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - 4 \left( e - \frac{e}{4x} + \frac{11e}{24 \times 4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \right. \\ &\quad \left. + 3 \left( e - \frac{e}{6x} + \frac{11e}{24 \times 9x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \right] \\ &= x^2 \left[ e - \frac{e}{2x} + \frac{11e}{24x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - 4e + \frac{e}{x} - \frac{11e}{24x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) + 3e - \frac{e}{2x} + \frac{11e}{24 \times 3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right] \\ &= x^2 \left[ + \frac{11e}{24 \times 3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right] = \frac{11e}{72} + o(1) \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left[ \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - 4 \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x} + 3 \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3x} \right] = \frac{11e}{72}$$

Allez à : **Exercice 32**

Correction exercice 33.

1.

$$g(x) = x^3 - \frac{x^6}{2} + o(x^6)$$

2.

$$h(x) = (1 + x^2)^{\frac{1}{2}} - 1 = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{x^4}{2} + o(x^5) - 1 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^5)$$

3.

$$f(x) = \frac{x^3 - \frac{x^6}{2} + o(x^6)}{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^5)} = \frac{x^3 \left(1 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)\right)}{x^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}x^2 + o(x^3)\right)} = x \frac{1 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)}{\frac{1}{2} - \frac{1}{8}x^2 + o(x^3)}$$

$1 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{8}x^2 + o(x^3)$
$1 - \frac{x^2}{4} + o(x^3)$	$2 + \frac{x^2}{2} - x^3$
$\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$	
$\frac{x^2}{4} + o(x^3)$	
$-\frac{x^3}{2} + o(x^3)$	
$-\frac{x^3}{2} + o(x^3)$	
$o(x^3)$	

Donc

$$f(x) = x \left( 2 + \frac{x^2}{2} - x^3 + o(x^3) \right) = 2x + \frac{x^3}{2} - x^4 + o(x^4)$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 2x + \frac{x^3}{2} - x^4 + o(x^4) \right) = 0$$

On pose alors  $f(0) = 0$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{2x + \frac{x^3}{2} - x^4 + o(x^4)}{x} = \frac{x \left( 2 + \frac{x^2}{2} - x^3 + o(x^3) \right)}{x} = 2 + \frac{x^2}{2} - x^3 + o(x^3) \rightarrow 2$$

Ce qui montre que  $f$  est dérivable en 0 et que  $f'(0) = 2$

5. L'équation de la tangente en 0 est  $y = 2x$

$$f(x) - 2x = \frac{x^3}{2} - x^4 + o(x^4) = x^3 \left( \frac{1}{2} - x + o(x) \right)$$

$\frac{1}{2} - x + o(x) > 0$  lorsque  $x$  est proche de 0, par conséquent  $f(x) - 2x$  a le même signe que  $x^3$

Si  $x < 0$ ,  $f(x) - 2x < 0$  et la courbe est au-dessous de la tangente.

Si  $x > 0$ ,  $f(x) - 2x > 0$  et la courbe est au-dessus de la tangente.

Allez à : **Exercice 33**

Correction exercice 34.

1.

$$\frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2} = \frac{1 + x^2 + o(x^2) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x^2} = \frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{3}{2} + o(1)$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{2} + o(1) = \frac{3}{2}$$

2. On pose  $t = x - 1 \Leftrightarrow x = 1 + t$

$$\frac{\ln(x)}{x^2 - 1} = \frac{\ln(1+t)}{(1+t)^2 - 1} = \frac{\ln(1+t)}{1+2t+t^2-1} = \frac{\ln(1+t)}{t(2+t)} = \frac{t+o(t)}{t(2+t)} = \frac{1+o(1)}{2+t}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1+o(1)}{2+t} = \frac{1}{2}$$

3. On pose  $X = \frac{1}{x}$ ,  $X$  tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers l'infini.

$$\sqrt{x^2 + 3x + 2} - x = \sqrt{\frac{1}{X^2} + \frac{3}{X} + 2} - \frac{1}{X} = \sqrt{\frac{1 + 3X + 2X^2}{X^2}} - \frac{1}{X} = \frac{\sqrt{1 + 3X + 2X^2}}{X} - \frac{1}{X}$$

Car  $X > 0$

$$\sqrt{x^2 + 3x + 2} - x = \frac{\sqrt{1 + 3X + 2X^2} - 1}{X} = \frac{1 + \frac{1}{2} \times 3X + o(X) - 1}{X} = \frac{\frac{3}{2}X + o(X)}{X} = \frac{3}{2} + o(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 2} - x) = \lim_{X \rightarrow 0} \left( \frac{3}{2} + o(1) \right) = \frac{3}{2}$$

4.

$$e^x - 1 - x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 - x = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim_0 \frac{x^2}{2}$$

$$\sin^2(x) \sim_0 x^2$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{\sin^2(x)} = \frac{1}{2}$$

5.

On pose  $t = x - 1$ , donc  $t \rightarrow 0$  lorsque  $x \rightarrow 1$

$$\frac{(\ln(x))^2}{\text{ch}(x-1) - 1} = \frac{(\ln(1+t))^2}{\text{ch}(t) - 1}$$

$$\text{ch}(t) - 1 = 1 + \frac{t^2}{2} + o(t^2) - 1 = \frac{t^2}{2} + o(t^2) = t^2 \left( \frac{1}{2} + o(t) \right)$$

$$(\ln(1+t))^2 = (t + o(t))^2 = t^2(1 + o(1))^2 = t^2(1 + o(1))$$

$$\frac{(\ln(x))^2}{\text{ch}(x-1) - 1} = \frac{(\ln(1+t))^2}{\text{ch}(t) - 1} = \frac{t^2(1 + o(1))}{t^2 \left( \frac{1}{2} + o(1) \right)} = \frac{1 + o(1)}{\frac{1}{2} + o(1)}$$

Allez à : **Exercice 34**

Correction exercice 35.

$$\frac{\sin(3x)}{\tan(2x)} = \frac{3x + o(x)}{2x + o(x)} = \frac{x(3 + o(1))}{x(2 + o(1))} = \frac{3 + o(1)}{2 + o(1)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{3}{2}$$

$$\frac{\sin(3x)}{x \tan(2x)} = \frac{3x + o(x)}{x(2x + o(x))} = \frac{x(3 + o(1))}{x^2(2 + o(1))} = \frac{3 + o(1)}{x(2 + o(1))}$$

Si  $x \rightarrow 0^+$ ,  $\frac{\sin(3x)}{x \tan(2x)} \rightarrow +\infty$  et si  $x \rightarrow 0^-$ ,  $\frac{\sin(3x)}{x \tan(2x)} \rightarrow -\infty$ .

Mais  $\frac{\sin(3x)}{x \tan(2x)}$  n'admet pas de limite en 0.

$$\begin{aligned} \frac{(1 - e^x)\sin(x)}{x^2 + x^3} &= \frac{(1 - (1 - x + o(x)))(x + o(x))}{x^2(1 + x)} = \frac{(x + o(x))(x + o(x))}{x^2(1 + x)} \\ &= \frac{x^2(1 + o(1))(1 + o(1))}{x^2(1 + x)} = \frac{(1 + o(1))(1 + o(1))}{(1 + x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \\ \frac{e^x - \cos(x) - x}{\ln(1 + \sin(x)) - x} &= \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - x}{\ln(1 + (x + o(x^2))) - x} = \frac{x^2 + o(x^2)}{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x} \\ &= \frac{x^2(1 + o(1))}{x^2\left(-\frac{1}{2} + o(1)\right)} = \frac{1 + o(1)}{-\frac{1}{2} + o(1)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -2 \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 35**

Correction exercice 36.

$$\begin{aligned} \cos(x) - \operatorname{ch}(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = -x^2 + o(x^2) = x^2(-1 + o(1)) \\ e^{\cos(x)} - e^{\operatorname{ch}(x)} &= e^{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} - e^{1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)} = e e^{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)} - e e^{\frac{x^2}{2} + o(x^2)} \\ &= e \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - e \left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = e(-x^2 + o(x^2)) = x^2(-e + o(1)) \\ \frac{e^{\cos(x)} - e^{\operatorname{ch}(x)}}{\cos(x) - \operatorname{ch}(x)} &= \frac{x^2(-e + o(1))}{x^2(-1 + o(1))} = \frac{-e + o(1)}{-1 + o(1)} \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos(x)} - e^{\operatorname{ch}(x)}}{\cos(x) - \operatorname{ch}(x)} = e$$

Allez à : **Exercice 36**

Correction exercice 37.

1. On pose  $X = \frac{1}{2x} \rightarrow 0$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$ .

$$\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{2x} = \left(\frac{\frac{1}{X}+1}{\frac{1}{X}-1}\right)^{\frac{1}{X}} = \left(\frac{1+X}{1-X}\right)^{\frac{1}{X}} = e^{\frac{1}{X} \ln\left(\frac{1+X}{1-X}\right)} = e^{\frac{1}{X}(\ln(1+X) - \ln(1-X))}$$

$\frac{1}{X}(\ln(1+X) - \ln(1-X))$  est une forme indéterminée lorsque  $X \rightarrow 0$  car le numérateur et le dénominateur tendent vers 0. Le terme de plus bas degré du dénominateur est  $X$  (c'est le seul), il faut donc faire un d.l. à l'ordre 1 du numérateur.

$$\ln(1+X) - \ln(1-X) = X + o(X) - (-X + o(X)) = 2X + o(X)$$

Donc

$$\frac{1}{X}(\ln(1+X) - \ln(1-X)) = \frac{2X + o(X)}{X} = 2 + o(1)$$

Et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{2x} = \lim_{X \rightarrow 0} e^{\frac{1}{X}(\ln(1+X) - \ln(1-X))} = \lim_{X \rightarrow 0} e^{2+o(1)} = e^2$$

2.

$$\left(\frac{x}{\sin(x)}\right)^{\frac{\sin(x)}{x-\sin(x)}} = e^{\frac{\sin(x)}{x-\sin(x)} \ln\left(\frac{x}{\sin(x)}\right)}$$

On peut toujours vérifier, il s'agit d'une forme indéterminée.

Il faut faire apparaître  $X = \frac{x-\sin(x)}{\sin(x)}$ ,

$$X = \frac{x - \sin(x)}{\sin(x)} = \frac{x}{\sin(x)} - 1 \Leftrightarrow X + 1 = \frac{x}{\sin(x)}$$

Donc

$$\left(\frac{x}{\sin(x)}\right)^{\frac{\sin(x)}{x-\sin(x)}} = e^{\frac{\sin(x)}{x-\sin(x)} \ln\left(\frac{x}{\sin(x)}\right)} = e^{\frac{1}{X} \ln(1+X)}$$

Là on est forcément tenté d'utiliser la formule  $\ln(1 + X) = X + o(X)$  mais attention, il faut vérifier que  $X \rightarrow 0$  lorsque  $x \rightarrow 0$ .

$$X = \frac{x - \sin(x)}{\sin(x)} = \frac{x}{\sin(x)} - 1$$

Soit on sait que la limite de  $\frac{\sin(x)}{x}$  tend vers 1 lorsque  $x \rightarrow 0$ , donc  $\frac{x}{\sin(x)}$  tend aussi vers 1, soit on ne le sait pas et on cherche un équivalent de  $X$ .

$$x - \sin(x) = x - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = \frac{x^3}{6} + o(x^3) \sim \frac{x^3}{6}$$

Donc

$$X = \frac{x - \sin(x)}{\sin(x)} \sim \frac{\frac{x^3}{6}}{x} = \frac{x^2}{6} \rightarrow 0$$

C'est bon  $X \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{\sin(x)}\right)^{\frac{\sin(x)}{x-\sin(x)}} &= e^{\frac{1}{X} \ln(1+X)} = e^{\frac{1}{X}(X+o(X))} = e^{1+o(1)} \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \left(\frac{x}{\sin(x)}\right)^{\frac{\sin(x)}{x-\sin(x)}} &= \lim_{X \rightarrow 0} e^{\frac{1}{X} \ln(1+X)} = \lim_{X \rightarrow 0} e^{1+o(1)} = e^1 = e \end{aligned}$$

3.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{e^{\sin(x)} - e^{\tan(x)}}{\sin(x) - \tan(x)}$$

Bien sûr, il s'agit d'une forme indéterminée, il va falloir faire un développement limité, mais à quel ordre ?

Regardons le dénominateur, manifestement les termes en  $x$  s'annulent, il n'y a pas de terme en  $x^2$ , on va faire un développement limité du dénominateur à l'ordre 3.

$$\sin(x) - \tan(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) = -\frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

On va faire alors un développement limité du numérateur à l'ordre 3.

$$e^{\sin(x)} - e^{\tan(x)} = e^{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)} - e^{x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}$$

$$e^{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)} = e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3) \text{ avec}$$

$$u = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), u^2 = x^2 + o(x^3) \text{ et } u^3 = x^3 + o(x^3) \text{ et } o(u^3) = o(x^3) \text{ donc}$$

$$e^{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \frac{x^2 + o(x^3)}{2} + \frac{x^3 + o(x^3)}{6} + o(x^3) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$e^{x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)} = e^v = 1 + v + \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{6} + o(v^3) \text{ avec}$$

$$v = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3), v^2 = x^2 + o(x^3) \text{ et } v^3 = x^3 + o(x^3) \text{ et } o(v^3) = o(x^3) \text{ donc}$$

$$\begin{aligned} e^{x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)} &= 1 + \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) + \frac{x^2 + o(x^3)}{2} + \frac{x^3 + o(x^3)}{6} + o(x^3) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3) \end{aligned}$$

Donc

$$e^{\sin(x)} - e^{\tan(x)} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)\right) = -\frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

Et

$$\begin{aligned} \frac{e^{\sin(x)} - e^{\tan(x)}}{\sin(x) - \tan(x)} &= \frac{-\frac{x^3}{2} + o(x^3)}{-\frac{x^3}{2} + o(x^3)} = \frac{-\frac{1}{2} + o(1)}{-\frac{1}{2} + o(1)} = \frac{1 + o(1)}{1 + o(1)} = 1 + o(1) \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{e^{\sin(x)} - e^{\tan(x)}}{\sin(x) - \tan(x)} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} (1 + o(1)) = 1 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x^2)}{x \ln(1+x)} &\underset{0}{\sim} \frac{x^2}{x \times x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x \ln(1+x)} &= 1 \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 37**

Correction exercice 38.

1.

$$\frac{\ln(1+X)}{X} = \frac{X - \frac{X^2}{2} + o(X^2)}{X} = 1 - \frac{X}{2} + o(X)$$

2.  $X \rightarrow 0$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} x \left( \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - e \right) &= \frac{(1+X)^{\frac{1}{X}} - e}{X} = \frac{e^{\frac{\ln(1+X)}{X}} - e}{X} = \frac{e^{1-\frac{X}{2}+o(X)} - e}{X} = \frac{e e^{-\frac{X}{2}+o(X)} - e}{X} = e \frac{e^{-\frac{X}{2}+o(X)} - 1}{X} \\ &= e \frac{1 - \frac{X}{2} + o(X) - 1}{X} = e X \frac{-\frac{1}{2} + o(1)}{X} = e \left( -\frac{1}{2} + o(1) \right) \rightarrow -\frac{e}{2} \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 38**

Correction exercice 39.

1.

$$f(x) = 2x + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = 3x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

2.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 + \cos(x) \geq 1 > 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty \end{aligned}$$

Donc  $f$  est une fonction strictement croissante de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ , c'est une bijection.

Si  $f$  est une fonction strictement croissante donc  $f^{-1}$  est une fonction strictement croissante de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$  (les  $\mathbb{R}$  s'inversent), comme la dérivée de  $f$  n'est jamais nulle,  $f^{-1}$  est dérivable et

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$f^{-1}$  est donc définie sur  $\mathbb{R}$  et continue sur  $\mathbb{R}$  car  $f'$  est continue. Par une récurrence quasi immédiate, on en déduit que  $f^{-1}$  est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et donc admet un développement limité à n'importe quel ordre.

3.  $f(0) = 0$  on peut appliquer la formule du développement limité de  $f^{-1}$  à  $f(x)$  au voisinage de  $x = 0$ .  
 $f^{-1}(f(x)) = x$

$$\Leftrightarrow a_0 + a_1 \left( 3x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) + a_2 \left( 3x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^2 + a_3 \left( 3x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^3 + o \left( \left( 3x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^3 \right) = x \Leftrightarrow a_0 + a_1 \left( 3x - \frac{x^3}{6} \right) + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o(x^3) = x$$

$$\Leftrightarrow a_0 + 3a_1 x + a_2 x^2 + \left( -\frac{a_1}{6} + a_3 \right) x^3 + o(x^3) = x \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ 3a_1 = 1 \\ a_2 = 0 \\ -\frac{a_1}{6} + a_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = \frac{1}{3} \\ a_2 = 0 \\ a_3 = \frac{1}{18} \end{cases}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{18}x^3 + o(x^3)$$

Allez à : **Exercice 39**

Correction exercice 40.

1.  $f$  est le produit et la composée de fonction  $C^\infty$  donc  $f$  est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

$$f(x) = x \left( 1 + x^2 + \frac{(x^2)^2}{2!} + o(x^4) \right) = x + x^3 + \frac{x^5}{2} + o(x^5)$$

- 2.

$$f'(x) = e^{x^2} + x(2x)e^{x^2} = (1 + 2x^2)e^{x^2} > 0$$

Donc la fonction est strictement croissante sur l'intervalle  $\mathbb{R}$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Par conséquent  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ .

3.  $f$  est impaire donc  $f^{-1}$  est aussi impaire par conséquent son développement limité n'a que des termes de degrés impairs.

- 4.

$$f(f^{-1}(x)) = x \Leftrightarrow f(ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)) = x$$

On pose

$$X = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)$$

$$X^2 = (ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5))(ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)) = a^2x^2 + 2abx^4 + o(x^5)$$

$$X^3 = a^3x^3 + (a^2b + 2a^2b)x^5 + o(x^5) = a^3x^3 + 3a^2bx^5 + o(x^5)$$

$$X^4 = a^4x^4 + o(x^5)$$

$$X^5 = a^5x^5 + o(x^5)$$

D'après 1. on a

$$\begin{aligned}f(X) &= X + X^3 + \frac{X^5}{2} + o(X^5) = ax + bx^3 + cx^5 + a^3x^3 + 3a^2bx^5 + \frac{a^5x^5}{2} + o(x^5) \\ &= ax + (a^3 + b)x^3 + \left(\frac{a^5}{2} + 3a^2b + c\right)x^5 + o(x^5)\end{aligned}$$

Par conséquent

$$f(f^{-1}(x)) = x \Leftrightarrow ax + (a^3 + b)x^3 + \left(\frac{a^5}{2} + 3a^2b + c\right)x^5 + o(x^5) = x \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a^3 + b = 0 \\ \frac{a^5}{2} + 3a^2b + c = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Allez à : **Exercice 40**