

DM 3

Les intégrales impropres

A) Les fonctions puissances

1°) Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{Z}$, $x^n = e^{n \ln x}$

Lorsque $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on définira en conséquence x^α par la relation suivante :

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

2°) Lorsque $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que l'application $x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}$.

3°) Pour tout $x \in]1, +\infty[$, calculer $\int_1^x \frac{dt}{t^2}$ et déterminer la limite de cette quantité lorsque x tend vers $+\infty$.

4°) Pour tout $x \in]0, 1[$, calculer $\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ et déterminer la limite de cette quantité lorsque x tend vers 0.

Lorsque f est une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$, on note $\int_a^b f(t) dt$ la limite réelle, si elle existe, de $\int_a^x f(t) dt$ lorsque x tend vers b .

De même, lorsque f est une application continue de $]a, b]$ dans $\mathbb{R}$ où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, on note $\int_a^b f(t) dt$ la limite réelle, si elle existe, de $\int_x^b f(t) dt$ lorsque x tend vers a .

5°) Étudier l'existence des quantités suivantes et, en cas d'existence, préciser leurs valeurs : $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$, $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$, $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

B) Une intégrale doublement impropre

Notons f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{\frac{3}{2}}}$.

6°) Déterminer le domaine de définition de f .

7°) Lorsque u est un réel tel que $\cos u \neq 0$, on pose $\tan u = \frac{\sin u}{\cos u}$ (cette expression se prononce "tangente de u "). Déterminer le domaine de définition de la fonction $\tan$, montrer qu'elle est dérivable et que $\tan'(u) = \frac{1}{\cos^2 u}$.

8°) Soit $\alpha \in]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$. En dérivant, montrer que $\int_{\frac{1}{2}}^{(\sin \alpha)^2} f(x) dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\alpha} \frac{4 \ln \sin u}{\cos^2 u} du$, puis en intégrant par parties, en déduire la valeur de $\int_{\frac{1}{2}}^{(\sin \alpha)^2} f(x) dx$.

9°) Montrer que $\frac{\ln(t)}{t-1} \xrightarrow[t \rightarrow 1]{} 1$ puis en déduire l'existence et la valeur de la quantité

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^{\sin^2(\alpha)} f(x) dx.$$

10°) On admet que, pour tout $x \in [-1, 1]$, il existe un unique réel dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, noté $\arcsin(x)$ tel que $\sin(\arcsin(x)) = x$. On admet également que l'application $\arcsin$ ainsi définie est continue sur $[-1, 1]$.

En déduire l'existence et la valeur de $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx$.

11°) Calculer $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$.

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$.

Soit g une application continue de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$.

On suppose qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\int_x^c g(t) dt$ converge vers une limite réelle lorsque

x tend vers a et tel que $\int_c^x g(t) dt$ converge vers une limite réelle lorsque x tend vers

b . Ainsi, $\int_a^c g(t) dt$ et $\int_c^b g(t) dt$ sont supposées définies.

12°) Montrer que la quantité $\int_a^c g(t) dt + \int_c^b g(t) dt$ ne dépend pas de c .

On la notera $\int_a^b g(t) dt$.

13°) Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{\frac{3}{2}}} dx$ est bien définie et donner sa valeur.

C) Un peu de théorie

Pour la suite, f désigne à nouveau une application quelconque.

On admettra le théorème suivant, appelé *théorème de la limite monotone* : Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$. Soit f une application de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ que l'on suppose croissante. Alors $f(t)$ possède une limite réelle lorsque t tend vers b , avec $t \in [a, b[$, si et seulement si f est majorée, c'est-à-dire si et seulement si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $t \in [a, b[$, $f(t) \leq M$.

14°) Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Si f est une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, montrer que $\int_x^b f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow a} \int_a^b f(t) dt$ et que $\int_a^x f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow b} \int_a^b f(t) dt$.

En déduire l'existence de $\int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt$.

15°) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$. Soit f une application continue de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que, pour tout $t \in [a, b[$, $f(t) \geq 0$. Montrer que $\int_a^b f(t) dt$ est définie si et seulement si l'application $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est majorée.

16°) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$. Soit f et g deux applications continues de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que, pour tout $t \in [a, b[$, $0 \leq g(t) \leq f(t)$.

Montrer que si $\int_a^b f(t) dt$ est définie, alors $\int_a^b g(t) dt$ est également définie.

En déduire que $\int_1^{+\infty} \frac{|\cos t|}{t^2} dt$ est définie.

17°) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$. Soit f une application continue de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in [a, b[$, on pose $f^+(t) = \max(f(t), 0)$ et $f^-(t) = \max(-f(t), 0)$. Exprimer f et $t \mapsto |f(t)|$ en fonction de f^+ et f^- .

En déduire que si $\int_a^b |f(t)| dt$ est définie, alors $\int_a^b f(t) dt$ est aussi définie.

D) Calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$

18°) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est définie.

19°) Montrer que pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$ et $n \in \mathbb{N}$, $\frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(2kt)$.

20°) En déduire la valeur de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} dt$.

Pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$, on pose $h(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}$ et on convient que $h(0) = 0$. On admettra que h est une application de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, c'est-à-dire que h est dérivable et que h' est continue.

On admettra également les propriétés suivantes, appelées *inégalité triangulaire* :

- pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $|a + b| \leq |a| + |b|$;
- si $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et si f est une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, alors
$$\left| \int_a^b f(t) \, dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| \, dt.$$

21°) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt = \frac{\pi}{2}$.