DM 6

Problème 1 : Topologies

Lorsque X est un ensemble, si $\mathcal{T}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(X)$, on dit que $\mathcal{T}$ est une topologie sur X si et seulement si

— $\emptyset \in \mathcal{T}$ et $X \in \mathcal{T}$;

— Pour tout ensemble I, pour toute famille $(U_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathcal{T}$, $\bigcup\limits_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$;

— Pour tout $U, V \in \mathcal{T}$, $U \cap V \in \mathcal{T}$.

1°) Soit X un ensemble. Montrer que $\{\emptyset, X\}$ et $\mathcal{P}(X)$ sont des topologies sur X.

2°) On suppose que $\mathcal{T}$ est une topologie sur X.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $U_1, \ldots, U_n$ n éléments de $\mathcal{T}$. Montrer que $U_1 \cap \cdots \cap U_n \in \mathcal{T}$.

Si U est une partie de $\mathbb{R}$, on dit que U est un ouvert de $\mathbb{R}$ si et seulement si :
$\forall x \in U,\ \ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset U$.

3°) Les ensembles suivants sont-ils des ouverts de $\mathbb{R}$ (on justifiera les réponses) ?

1. $\emptyset$,
2. $\mathbb{R}$,
3. $[a, b]$, où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$,
4. $]a, b[$, où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.

4°) Montrer que l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ est une topologie sur $\mathbb{R}$.

5°) Soit X et I deux ensembles avec $I \neq \emptyset$. Soit $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille de topologies sur X. Montrer que $\bigcap\limits_{i\in I} \mathcal{T}_i$ est une topologie sur X.

6°) Soit X un ensemble et $\mathcal{A}$ un sous-ensemble de $\mathcal{P}(X)$.
Montrer qu'on peut définir la plus petite topologie sur X contenant $\mathcal{A}$.

Problème 2 :
distributivité de la réunion par rapport à l'intersection.

Dans tout ce problème, E désigne un ensemble et n est un entier naturel non nul.
$A_1, \ldots, A_n,\ B_1, \ldots, B_n$ désignent $2n$ parties de E.
On note $\mathbb{N}_n$ l'ensemble des entiers compris entre 1 et n
et $\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}_n$.

L'objet du problème est de montrer selon plusieurs méthodes la propriété (C_n) suivante :

$$(C_n)\ :\ \bigcup_{i=1}^{n}(A_i \cap B_i) = \bigcap_{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_n)} \Big(\Big(\bigcup_{i \in X} A_i\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{i \in \mathbb{N}_n \setminus X} B_i\Big)\Big).$$

1°) Lorsque $n = 1$, montrer que (C_1) est vraie.

2°) Soit I un ensemble non vide, $(F_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E et G une partie de E. Montrer que $\Big(\bigcap_{i \in I} F_i\Big) \cup G = \bigcap_{i \in I}(F_i \cup G)$ et $\Big(\bigcup_{i \in I} F_i\Big) \cap G = \bigcup_{i \in I}(F_i \cap G)$.

3°) On considère deux nouvelles parties de E, notées A_{n+1} et B_{n+1}.
On note $Q = \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_{n+1})\ /\ n+1 \in X\}$.
Montrer que $\displaystyle\bigcap_{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_n)} \Big(\Big(\bigcup_{i \in X \cup \{n+1\}} A_i\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{i \in \mathbb{N}_n \setminus X} B_i\Big)\Big) = \bigcap_{X \in Q} \Big(\Big(\bigcup_{i \in X} A_i\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{i \in \mathbb{N}_{n+1} \setminus X} B_i\Big)\Big)$.

4°) En déduire une démonstration de (C_n) par récurrence sur n.

5°) Proposer une seconde démonstration de (C_n), en procédant par double inclusion et en passant aux éléments.

6°) Soit I et J deux ensembles non vides. Pour tout $i \in I$ et $j \in J$, on suppose que $A_{i,j}$ est une partie de E. On note $\mathcal{F}(I, J)$ l'ensemble des applications de I dans J.
Montrer que $\displaystyle\bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{i,j} = \bigcup_{f \in \mathcal{F}(I,J)} \bigcap_{i \in I} A_{i,f(i)}$.
En déduire que $\displaystyle\bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J} A_{i,j} = \bigcap_{f \in \mathcal{F}(I,J)} \bigcup_{i \in I} A_{i,f(i)}$.

7°) Soit I un ensemble non vide. Pour tout $i \in I$ et $j \in \{0, 1\}$, on suppose que $A_{i,j}$ est une partie de E. On note $\mathcal{P}(I)$ l'ensemble des parties de I. Déduire de la question précédente que $\displaystyle\bigcup_{i \in I}(A_{i,0} \cap A_{i,1}) = \bigcap_{X \in \mathcal{P}(I)} \Big(\Big(\bigcup_{i \in X} A_{i,0}\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{i \in I \setminus X} A_{i,1}\Big)\Big)$.
En déduire une nouvelle démonstration de (C_n).