# DM 1 - Ensembles équipotents

Deux ensembles $E$ et $F$ sont dits *équipotents* s'il existe une bijection de $E$ dans $F$.

**Exercice 1.** – *Théorème de Cantor-Bernstein*

Soient $E$ et $F$ deux ensembles, soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux injections. Le but de cet exercice est de montrer que $E$ et $F$ sont équipotents : c'est le *théorème de Cantor-Bernstein*. On introduit d'abord quelques définitions :

- Un élément $x \in E$ (resp. $y \in F$) a un parent s'il a un antécédent par $g$ (resp. par $f$). Un tel antécédent est nécessairement unique : on l'appellera *le parent* de $x$ (resp. de $y$).
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit récursivement le nombre d'ancêtres d'un élément de $E$ ou de $F$ :
  - Les éléments ayant 0 ancêtre sont ceux n'ayant pas de parent.
  - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les éléments ayant (exactement) $n$ ancêtres sont ceux ayant un parent, et dont le parent a $n-1$ ancêtres.
  - Les éléments restants ont une infinité d'ancêtres.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $E_n$ (resp. $F_n$) les éléments de $E$ (resp. de $F$) ayant $n$ ancêtres.
- On note $E_\infty$ (resp. $F_\infty$) les éléments de $E$ (resp. de $F$) ayant une infinité d'ancêtres.

1. Montrer que
$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}} E_n$$
et que cette union est disjointe. On admettra le résultat analogue pour $F$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $f(E_n) = F_{n+1}$ et que $g(F_n) = E_{n+1}$. En déduire que
$$f_{|E_n} : E_n \to F_{n+1} \text{ et } g_{|F_n} : F_n \to E_{n+1}$$
sont des bijections.

3. Montrer que $f(E_\infty) = F_\infty$ et en déduire que $f_{|E_\infty} : E_\infty \to F_\infty$ est une bijection.

4. Conclure.

**Exercice 2.** – *Ensembles infinis dénombrables*

Un ensemble est *infini dénombrable* s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. Dans cet exercice, on donne des exemples élémentaires de cette notion. *On s'abstiendra d'utiliser le théorème de Cantor-Bernstein.*

1. Montrer que $\mathbb{Z}$ est infini dénombrable.
2. En utilisant l'application $\psi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, définie par $\psi(n,p) = 2^n(2p+1) - 1$, montrer que $\mathbb{N}^2$ est infini dénombrable.
3. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{N}^k$ est infini dénombrable.
4. On admet les propriétés élémentaires de $\mathbb{N}$. Montrer que toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est infinie dénombrable.
5. En déduire qu'une partie infinie d'un ensemble infini dénombrable est infinie dénombrable.
6. Montrer que $\mathbb{Q}$ est infini dénombrable.

**Exercice 3.** – $\mathbb{R}$ *et* $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ *sont équipotents*

Le but de cet exercice est de montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sont équipotents.

1. Construction d'une injection de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dans $\mathbb{R}$.
   (a) Soit $A$ une partie de $\mathbb{N}$. On définit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par
   $$S_n = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{1}_A(k) 3^{-k},$$
   où $\mathbb{1}_A(k) = 1$ si $k \in A$, 0 sinon. Montrer que $(S_n)$ est une suite croissante majorée.
   (b) En déduire qu'elle admet une limite finie.

   On notera $\displaystyle\sum_{n\in A} 3^{-n}$ cette limite dans la suite.

   (c) On définit l'application $\phi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$, par
   $$\phi(A) = \sum_{n\in A} 3^{-n}.$$
   Montrer que $\phi$ est une injection.
2. Construction d'une injection de $]10^{-1}, 1[$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
   Soit $x$ un réel dans $]10^{-1}, 1[$.
   (a) Pour tout $n \geq 1$, on pose $x_n = \lfloor 10^n x \rfloor$, où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière. Ainsi, $x_n$ est l'unique entier naturel tel que
   $$x_n \leq 10^n x < x_n + 1.$$
   Montrer que pour tout $n \geq 1$, $x_n \in [10^{n-1}, 10^n[$.

(b) Montrer que la suite $\left(\dfrac{x_n}{10^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $x$.

(c) On définit $\psi : ]10^{-1}, 1[ \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ par

$$\forall x \in ]10^{-1}, 1[, \psi(x) = \{x_n, n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Montrer que $\psi$ est une injection.

3. Montrer qu'il existe une bijection de $]10^{-1}, 1[$ dans $\mathbb{R}$.

4. Conclure, en utilisant le théorème de Cantor-Bernstein.

5. En déduire que $\mathbb{R}$ n'est pas infini dénombrable.

**Note culturelle.** L'hypothèse du continu affirme que tout ensemble $X$ tel que $\mathbb{N} \subset X \subset \mathbb{R}$ est infini dénombrable ou équipotent à $\mathbb{R}$. En 1963, le mathématicien Paul Cohen a démontré que l'hypothèse du continu et l'axiome du choix sont indécidables : il est impossible de démontrer, à partir des axiomes de la théorie des ensembles, que ces assertions sont vraies ou fausses.