DEVOIR MAISON 2

Les exercices 1 et 2 traitent de thèmes similaires, mais le second est (nettement) plus difficile que le premier. Pour tout $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, vous traiterez donc soit la question i) de l'exercice 1, soit la question i) de l'exercice 2. Et même si vous traitez les deux, vous n'en ferez figurer qu'une sur votre copie.

► Exercice 1 : un peu de logique

1. Soit (u_n) une suite de réels. Montrer que

$$(\exists M \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}, |u_n| \leq M) \Leftrightarrow (\exists a, b \in \mathbf{R}, \forall p, q \in \mathbf{N}, a \leq u_p - u_q \leq b).$$

2. Montrer que toute fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction nulle sur $] -\infty, 0]$.
3. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = (n+1)(u_n + u_{n+1})$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, exprimer u_n en fonction de n .

► Exercice 2 : un peu de logique plus difficile

1. Soient a, b deux réels tels que $a \leq b$. Montrer que $\mathbf{Q} \cap [a, b]$ est un intervalle si et seulement si $a = b$.
2. Déterminer tous les réels x tels que $\forall n \in \mathbf{N}, x^{n+2} \leq x^{n+1} + x^n$.
3. Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. Montrer que

$$(\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n = n) \Leftrightarrow \left(\forall n \in \mathbf{N}^*, u_1^3 + u_2^3 + \dots + u_n^3 = (u_1 + u_2 + \dots + u_n)^2 \right).$$

► Problème : une équation fonctionnelle

Une fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est appelée une **involution** si pour tout $x \in \mathbf{R}, f(f(x)) = x$.

Partie I. Exemples

1. Montrer que les fonctions suivantes sont des involutions :

$$\text{a. } f_1 : \begin{cases} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 2 - x \end{cases}$$

$$\text{b. } f_2 : \begin{cases} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

2. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une involution. Prouver que pour tous réels a, b si $f(a) = f(b)$, alors $a = b$.
On dira plus tard que f est une injection, c'est-à-dire qu'elle ne prend pas deux fois la même valeur.
3. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une involution croissante. Prouver que pour tout $x \in \mathbf{R}, f(x) = x$.

Partie II. Une équation fonctionnelle

Le but de cette partie est de prouver que les fonctions $g : \begin{cases} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x \end{cases}$ et $h : \begin{cases} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & -x \end{cases}$ sont les seules fonctions $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathbf{R}, \quad f\left(f(x)^2 + f(y)\right) = xf(x) + y \quad (\star).$$

On dit qu'il s'agit des solutions de l'équation fonctionnelle $(\star)$.

4. Montrer que g et h sont bien des solutions de $(\star)$.

Dans toute la suite de cette partie, on fixe une fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, solution de $(\star)$, et on cherche à prouver que f est l'une des deux fonctions de la question précédente.

5. En appliquant $(\star)$ à des réels x et y bien choisis, prouver qu'il existe $x_0 \in \mathbf{R}$ tel que $f(x_0) = 0$.
Dans toute la suite, on considère donc $x_0 \in \mathbf{R}$ tel que $f(x_0) = 0$.
6. Prouver que f est une involution.
7. a. Prouver que pour tous réels x et y , on a $f(x)^2 + f(y) = f(xf(x) + y)$.
b. En déduire que pour tous réels t et y , on a $t^2 + f(y) = f(f(t)t + y)$.
c. En déduire que pour tous réels t et y , on a $t^2 + f(y) = f(t)^2 + f(y)$.
d. Prouver enfin que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = x$ ou $f(x) = -x$.
e. Expliquer brièvement pourquoi ceci ne suffit pas encore pour conclure que $f = g$ ou $f = h$.
8. a. Montrer que $:\forall a, b \in \mathbf{R}, (f(a) = a \text{ et } f(b) = -b) \Rightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0)$.
b. Conclure.

Partie III (facultative). Compléments sur les involutions

9. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une involution qu'on suppose continue sur $\mathbf{R}$. Montrer que f possède au moins un point fixe, c'est-à-dire un réel x tel que $f(x) = x$. *On pourra raisonner par l'absurde, et s'intéresser au signe de la fonction $x \mapsto f(x) - x$.*
10. Construire une involution $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ sans point fixe.

CORRECTION DU DEVOIR MAISON 2

► Exercice 1 : un peu de logique

1. Puisqu'il s'agit de prouver une équivalence, procédons par double implication.

Supposons donc qu'il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|u_n| \leq M$, et notons M un tel réel.

En particulier, pour $p, q \in \mathbf{N}$, on a $|u_p - u_q| \leq |u_p| + |u_q| \leq 2M$, si bien que $-2M \leq u_p - u_q \leq 2M$. Et donc si on pose $a = -2M$ et $b = 2M$, nous avons bien prouvé que pour tout $p, q \in \mathbf{N}$, $a \leq u_p - u_q \leq b$.

Ainsi, nous venons de justifier l'implication :

$$(\exists M \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}, |u_n| \leq M) \Rightarrow (\exists a, b \in \mathbf{R}, \forall p, q \in \mathbf{N}, a \leq u_p - u_q \leq b).$$

Inversement, supposons qu'il existe $a, b \in \mathbf{R}$ tels que pour tous $p, q \in \mathbf{N}$, $a \leq u_p - u_q \leq b$, et notons a et b de tels réels. Alors en particulier, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$a \leq u_n - u_0 \leq b \text{ et donc } a + u_0 \leq u_n \leq b + u_0.$$

Et donc $-b - u_0 \leq -u_n \leq -a - u_0$, si bien que si on pose $M = \max(b + u_0, -a - u_0)$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$|u_n| = \max(u_n, -u_n) \leq M.$$

Et donc nous venons de prouver que

$$(\exists a, b \in \mathbf{R}, \forall p, q \in \mathbf{N}, a \leq u_p - u_q \leq b) \Rightarrow (\exists M \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}, |u_n| \leq M).$$

Par double implication, on a donc bien

$$(\exists M \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}, |u_n| \leq M) \Leftrightarrow (\exists a, b \in \mathbf{R}, \forall p, q \in \mathbf{N}, a \leq u_p - u_q \leq b).$$

2. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ fixée. Procédons par analyse-synthèse.

► **Analyse** : supposons qu'il existe $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ paire et $h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ nulle¹ sur $\mathbf{R}_-$ telles que $f = g + h$.

Alors pour $x \in \mathbf{R}_-$, $f(x) = g(x) + \underbrace{h(x)}_{=0} = g(x)$.

Et pour $x \in \mathbf{R}_+$, puisque $-x \in \mathbf{R}_-$, on a $g(x) = g(-x) = f(-x)$ et donc

$$f(x) = g(x) + h(x) = f(-x) + h(x).$$

Donc $h(x) = f(x) - f(-x)$.

Ainsi, si deux telles fonctions existent, on a, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \leq 0 \\ f(-x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \text{ et } h(x) = \begin{cases} f(x) - f(-x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Donc déjà, il existe **au plus**² un tel couple de fonctions (g, h) .

► **Synthèse** : notons $g : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \leq 0 \\ f(-x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ et $h : x \mapsto \begin{cases} f(x) - f(-x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

Alors h est nulle sur $\mathbf{R}_-$, et pour $x \in \mathbf{R}$, on a clairement³ $g(x) = g(-x)$, si bien que g est paire.

Par ailleurs, pour $x \geq 0$, $g(x) + h(x) = f(-x) + f(x) - f(-x) = f(x)$ et pour $x \leq 0$, $g(x) + h(x) = g(x) = f(x)$.

Donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $g(x) + h(x) = f(x)$, si bien que $f = g + h$, et donc un tel couple (g, h) existe.

Conclusion : il existe un unique couple (g, h) avec g paire, h nulle sur $\mathbf{R}_-$ et $f = g + h$.

Danger !

N'essayez pas de procéder directement par équivalence ! C'est parfois une bonne idée pour transformer une (in)égalité en une autre (in)égalité qui lui est équivalente, ce qui est possible car on dispose de règles pour cela.

En revanche, nous n'avons aucune règle générale nous permettant de dire qu'une expression quantifiée est équivalente à une autre expression quantifiée, avec d'autres quantificateurs.

Détails

Pour tout réel x , on a

$$|x| = \max(x, -x)$$

puisque des deux réels x et $-x$, seul le plus grand des deux est positif.

L'avez-vous vu ?

Ces deux assertions signifient que la suite (u_n) est bornée.

¹ Autrement dit telle que pour tout $x \in \mathbf{R}_-$, $h(x) = 0$.

² Et s'il existe, nous venons de le déterminer.

³ J'exagère peut-être un peu, il faudrait probablement distinguer les cas $x \geq 0$ et $x \leq 0$ et calculer $g(-x)$ dans chacun de ces cas.

3. Calculons les premiers termes de la suite : $u_2 = u_{0+2} = 1 \times (u_0 + u_1) = 2$, $u_3 = u_{1+2} = 2(u_1 + u_2) = 6$,
 $u_4 = u_{2+2} = 3(u_2 + u_3) = 24$.
 On constate alors que pour $n \in \llbracket 0, 4 \rrbracket$, $u_n = n!$.
 Prouvons par récurrence double que ceci est vrai pour tout $n \in \mathbf{N}$.
 L'initialisation⁴ est triviale puisque $u_0 = 1 = 0!$ et $u_1 = 1 = 1!$.
 Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $u_n = n!$ et $u_{n+1} = (n+1)!$.
 Alors $u_{n+2} = (n+1)(n! + (n+1)!) = (n+1)n!(1 + n + 1) = (n+1)! \times (n+2) = (n+2)!$.
 Par le principe de récurrence double, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = n!$.

⁴ Double.

► Exercice 2

1. Dans cette question, nous aurons besoin d'un fait que nous prouverons plus tard dans l'année : entre deux réels $a < b$ se trouvent toujours au moins un rationnel et au moins un irrationnel.
 Admettons-le pour l'instant, nous en donnerons une preuve en fin de question⁵.

Procédons par double implication.

Il est évident que si $a = b$, alors soit $a \in \mathbf{Q}$, et alors $[a, b] \cap \mathbf{Q} = \{a\}$ qui est un intervalle, soit $a \notin \mathbf{Q}$, et alors $\mathbf{Q} \cap [a, b] = \emptyset$, qui est aussi un intervalle⁶.
 Donc si $a = b$, alors $[a, b] \cap \mathbf{Q}$ est toujours un intervalle.

Inversement, nous allons prouver que si $a < b$, alors $[a, b] \cap \mathbf{Q}$ n'est jamais un intervalle.
 Supposons donc $a < b$. Alors par le résultat admis ci-dessus, il existe $c_1 \in \mathbf{Q}$ tel que $a < c_1 < b$. Et alors en appliquant le même résultat entre c_1 et b il existe un rationnel c_2 tel que $c_1 < c_2 < b$.

Et toujours grâce aux résultats admis ci-dessus, entre c_1 et c_2 se trouve un irrationnel x .
 On a donc c_1 et c_2 qui sont tous deux dans $\mathbf{Q} \cap [a, b]$, et $x \in [c_1, c_2]$. Mais puisque $x \notin \mathbf{Q}$, $x \notin \mathbf{Q} \cap [a, b]$, si bien que $\mathbf{Q} \cap [a, b]$ n'est pas un intervalle.

Et donc par double implication, on a bien $\mathbf{Q} \cap [a, b]$ intervalle si et seulement si $a = b$.

Reste à prouver les résultats admis. Commençons par prouver que pour tous réels a et b , vérifiant $a < b$, alors il existe $c \in \mathbf{Q}$ tel que $c \in]a, b[$.

Pour cela, posons, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $c_n = \frac{\lfloor 10^n b \rfloor}{10^n}$, qui est bien un rationnel.

et puisque $10^n b - 1 < \lfloor 10^n b \rfloor \leq 10^n b$, on en déduit que $b - \frac{1}{10^n} < c_n \leq b$.

En particulier, si n vérifie $10^{-n} < b - a$, alors $a < b - \frac{1}{10^n} < c_n < b$, et donc $c_n \in]a, b[$.

Or de tels n existent, puisque

$$10^{-n} < b - a \Leftrightarrow 10^n \geq \frac{1}{b - a} \Leftrightarrow n \ln(10) > -\ln(b - a) \Leftrightarrow n > \frac{-\ln(b - a)}{\ln(10)}.$$

Et donc pour $n > \frac{-\ln(b - a)}{\ln(10)}$, c_n est un rationnel de l'intervalle $]a, b[$.

Une fois ceci acquis, l'existence d'un irrationnel dans tout intervalle ouvert est beaucoup plus simple !

Soient donc a, b deux réels avec $a < b$.

Alors $a - \sqrt{2} < b - \sqrt{2}$, et donc par ce qui précède, il existe un rationnel $c \in]a - \sqrt{2}, b - \sqrt{2}[$.

Et donc $c + \sqrt{2} \in]a, b[$. Et puisque $\sqrt{2}$ est irrationnel et c rationnel, $c + \sqrt{2}$ est irrationnel.

Ainsi, entre deux réels distincts se trouve toujours au moins un irrationnel.

2. Procédons par analyse-synthèse.

Supposons donc que x soit un réel tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x^{n+2} \leq x^{n+1} + x_n$.

Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x^{n+2} - x^{n+1} - x_n \leq 0$, soit encore $x^n (x^2 - x - 1) \leq 0$.

Si $x^2 - x - 1 \neq 0$, il s'agit d'une constante non nulle, donc de signe constant, et donc x^n doit aussi être de signe constant. Ainsi, $x \geq 0$.

Et par ailleurs, en prenant $n = 0$, on a $x^2 - x - 1 \leq 0$, si bien que $x \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]$.

Si nous combinons toutes ces observations, nous venons de dire que si $x \in \mathbf{R}$ convient alors $x^2 - x - 1 = 0$ ou $x \in \left[0, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]$.

⁵ Et à ce stade de l'année, si vous aviez «deviné» que ceci est vrai et que vous l'utilisiez correctement, je m'en contentais.

⁶ Fait qui a juste été mentionné en cours pour l'instant, nous reviendrons sur

c. **Remarque** remms.

Notons qu'on prouve la contraposée de l'implication souhaitée.

Intuition

$10^n b$ est le nombre obtenu en décalant la virgule de l'écriture décimale de b de n rangs vers la gauche. En en prenant la partie entière, on «oublie» les chiffres après le $n^{\text{ème}}$ chiffre après la virgule. Et en divisant par 10^n , on redécalle la virgule à sa place initiale. Autrement dit, c_n est l'approximation décimale par défaut de b à 10^{-n} près.

Inversement, si x est une solution de $x^2 - x - 1 = 0$, c'est-à-dire un élément de $\left\{ \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right\}$,

alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x^n \underbrace{(x^2 - x - 1)}_{=0} = 0 \leq 0$.

Et si $x \in \left[0, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right]$, alors $x^2 - x - 1 \leq 0$, et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x^n \geq 0$, si bien que $x^n (x^2 - x - 1) \leq 0$, et donc $x^{n+1} \leq x^{n+1} + x^n$.

Conclusion : les réels x solutions du problème posé sont $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ et les éléments de $\left[0, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right]$.

3. Procédons par double implication. Et pour cela, commençons par justifier que si pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = n$, alors $u_1^3 + \dots + u_n^3 = (u_1 + \dots + u_n)^2$.

Puisqu'on sait que $1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, il s'agit de prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Procédons par récurrence⁷ sur $n \in \mathbf{N}^*$ en prouvant $\mathcal{P}(n) : 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

⁷ Simple.

Pour $n = 1$, on a $1^3 = 1 = \frac{1^2 \times (1+1)^2}{4}$.

Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie, la récurrence est initialisée.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Alors

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 &= (1^3 + 2^3 + \dots + n^3) + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= (n+1)^2 \frac{n^2 + 4(n+1)}{4} = (n+1)^2 \frac{n^2 + 4n + 4}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, si bien que la propriété $\mathcal{P}$ est héréditaire, et donc par le principe

de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Pour la réciproque, supposons à présent que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_1^3 + u_2^3 + \dots + u_n^3 = (u_1 + \dots + u_n)^2.$$

Notons, pour $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathcal{P}(n) : u_n = n$. Cette fois procédons par récurrence forte.

Pour $n = 1$, on a $u_1^3 = (u_1)^2$.

Or l'équation $x^3 = x^2$, qui s'écrit encore $x^2(x-1) = 0$, ne possède que 0 et 1 comme solutions.

Puisque par hypothèse, $u_1 > 0$, nécessairement, $u_1 = 1$.

Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie : la récurrence est initialisée.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et supposons que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $u_k = k$. Alors

$$u_1^3 + u_2^3 + \dots + u_n^3 + u_{n+1}^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + u_{n+1}^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + u_{n+1}^3.$$

Mais par ailleurs,

$$(u_1 + u_2 + \dots + u_n + u_{n+1})^2 = (1 + 2 + \dots + n + u_{n+1})^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2} + u_{n+1} \right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + n(n+1)u_{n+1} + u_{n+1}^2.$$

Donc nécessairement, $u_{n+1}^3 = n(n+1)u_{n+1} + u_{n+1}^2$.

Puisque $u_{n+1} \neq 0$, ceci s'écrit encore $u_{n+1}^2 = n(n+1) + u_{n+1} \Leftrightarrow u_{n+1}^2 - u_{n+1} - n(n+1) = 0$.

Forte ou simple ?

Suivant la propriété que vous prouvez, il est tout à fait possible de s'en tirer avec une récurrence simple, en posant pour $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\mathcal{P}(n) : \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, u_k = k.$$

C'est d'ailleurs plus ou moins ce que nous avons fait pour prouver la validité du principe de récurrence forte.

Autrement dit, u_{n+1} est une solution de l'équation du second degré $x^2 - x - n(n+1) = 0$.

Le discriminant de cette équation est $\Delta = 1 + 4n(n+1) = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2$.

Et donc les deux solutions de l'équation sont $x_1 = \frac{1+2n+1}{2} = n+1$ et $x_2 = \frac{1-(2n+1)}{2} = -n$.

Puisque $u_{n+1} \geq 0$, alors $u_{n+1} = n+1$.

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par le principe de récurrence forte, on en déduit que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = n$.

Commentaire : nous venons de prouver qu'il existe donc au plus une suite (u_n) vérifiant cette relation, la question précédente prouvant que $u_n = n$ est bien une telle suite.

Et donc il existe une unique suite $(u_n)_{n \geq 1}$ formée de réels positifs telle que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_1^3 + \dots + u_n^3 = (u_1 + \dots + u_n)^2$.

► Problème : une équation fonctionnelle (d'après Olympiades Kyrgyzstan 2012)

Partie I. Exemples

1.a. Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors $f_1(f_1(x)) = 2 - f(x) = 2 - (2 - x) = x$.

Donc f_1 est bien une involution.

1.b. Soit $x \in \mathbf{R}$. Si $x = 0$, alors $f_2(x) = 0$ et donc $f_2(f_2(x)) = f_2(0) = 0 = x$.

Si $x \neq 0$, alors $f_2(f_2(x)) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$.

Donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f_2(f_2(x)) = x$, si bien que f_2 est une involution.

2. Soient a, b deux réels tels que $f(a) = f(b)$. Alors⁸ $f(f(a)) = f(f(b)) \Leftrightarrow a = b$.

Et donc ceci prouve bien que si $f(a) = f(b)$, alors $a = b$.

À présent que vous connaissez les bijections, vous avez peut-être remarqué qu'une involution est un cas particulier de bijection, égale à sa propre bijection réciproque. Et donc qu'on retrouve là un résultat du cours : une bijection ne prend pas deux fois la même valeur.

3. Supposons par l'absurde qu'il existe $x \in \mathbf{R}$ tel que $f(x) \neq x$.

► Si $f(x) > x$, alors par croissance de f , $f(f(x)) \geq f(x) \Leftrightarrow x \geq f(x)$, ce qui contredit $f(x) > x$.

► Et si $f(x) < x$, alors toujours par croissance de f , on a $f(f(x)) \leq f(x) \Leftrightarrow x \leq f(x)$, ce qui est également absurde.

Donc $f(x) = x$, et ce pour tout $x \in \mathbf{R}$.

⁸ Si deux nombres sont égaux, ils ont même image par f .

Rappel

Une fonction croissante est une fonction qui préserve le sens des inégalités.

Partie II. Une équation fonctionnelle

4. Soient x, y deux réels. Alors

$$g(g(x)^2 + g(y)) = g(x^2 + y) = x^2 + y = xg(x) + y.$$

Donc g est bien solution de $(\star)$.

De même, on a

$$h(h(x)^2 + y) = h((-x)^2 - y) = y - x^2 \text{ et } xh(x) + y = -x^2 + y$$

donc h est bien solution de $(\star)$.

5. Prenons $x = 0$ et $y = 0$. Alors $f(f(0)^2 + f(0)) = 0$.

Et donc en posant $x_0 = f(0)^2 + f(0)$, on a bien $f(x_0) = 0$.

6. Soit $t \in \mathbf{R}$. En prenant $x = x_0$ et $y = t$ dans $(\star)$, il vient

$$f(f(x_0)^2 + f(t)) = x_0 f(x_0) + t \Leftrightarrow f(f(t)) = t.$$

Ceci étant vrai pour tout réel t , f est une involution.

7.a. Soient x, y deux réels. Alors $f(f(x)^2 + f(y)) = xf(x) + y$.

Et donc en appliquant f aux deux membres, et en notant que f est une involution, il vient

$$f(x)^2 + f(y) = f(xf(x) + y).$$

Rédaction

Prenons de bonnes habitudes : si l'on souhaite prouver quelque chose « pour tout $x \in \mathbf{R}$ », on commence par dire « Soit $x \in \mathbf{R}$ », ce qui signifie que x désigne dans la suite un réel quelconque (nous n'avons rien supposé de plus au sujet de x), et que ce que l'on va prouver sera donc valable quel que soit $x \in \mathbf{R}$.

- 7.b. Soient t et y deux réels. Alors en prenant $x = f(t)$ dans la relation de la question précédente, il vient $f(f(t))^2 + f(y) = f(tf(t) + y) \Leftrightarrow t^2 + f(y) = f(f(t)t + y)$.
- 7.c. Soient t et y deux réels. Par la question précédente, $t^2 + f(y) = f((t)t + y)$.
Mais par la question 7.a, $f(t(f(t) + y)) = f(t)^2 + f(y)$. Et donc $t^2 + f(y) = f(t)^2 + f(y)$.
- 7.d. Soit $x \in \mathbf{R}$. Prenons $t = x$ et $y = x_0$ dans la question précédente.
Il vient alors $x^2 + f(x_0) = f(x)^2 + f(x_0) \Leftrightarrow x^2 = f(x)^2 \Leftrightarrow (f(x) = x \text{ ou } f(x) = -x)$.
- 7.e. On souhaite prouver que soit pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = x$ (si $f = g$), soit pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = -x$ (si $f = h$).
Or ce que nous venons de prouver ne permet pas d'exclure que pour certaines valeurs de x , $f(x) = x$ et que pour d'autres $f(x) = -x$.
Par exemple, la fonction $f : x \mapsto |x|$ vérifie bien la conclusion de la question 7.d :

$$\forall x \in \mathbf{R}, (|x| = x \text{ ou } |x| = -x)$$

pourtant elle n'est égale ni à g ni à h .

Donc nous n'avons pas encore prouvé que $f = g$ ou $f = h$.

- 8.a. Dans $(\star)$, prenons $x = a$ et $y = b$.
Il vient alors $f(f(a)^2 + f(b)) = af(a) + b \Leftrightarrow f(a^2 - b) = a^2 + b$.
Mais par la question 7.d, soit $f(a^2 - b) = a^2 - b$, soit $f(a^2 - b) = b - a^2$.
Dans le premier cas, on a donc $a^2 + b = a^2 - b$, et donc $b = -b \Leftrightarrow b = 0$.
Dans le second cas, on a $a^2 + b = b - a^2 \Leftrightarrow 2a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$.
Donc en conclusion, $\boxed{\text{soit } a = 0, \text{ soit } b = 0}$.
- 8.b. Rappelons ce que nous souhaitons prouver : c'est que soit pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = x$, soit pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = -x$.
► Supposons que $f(1) = 1$. Alors par la question précédente, il ne peut exister de $x \in \mathbf{R}^*$ tel que $f(x) = -x$. Et donc pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, $f(x) = x$.
Et puisque $f(0) = 0$, on a donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = x$, si bien que $f = g$.
► En revanche, si $f(1) = -1$, alors par la question précédente, il n'existe pas de $a \neq 0$ tel que $f(a) = a$.
Donc pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, $f(x) = -x$. Puisque $f(0) = -0$, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = -x$, si bien que $f = h$.

Donc nous venons de prouver que si f est une solution de $(\star)$, alors c'est soit f soit g .
Puisque par ailleurs, nous avons déjà prouvé que g et h sont des solutions au problème posée, ce sont les seules solutions de l'équation fonctionnelle $(\star)$.

Partie III. Compléments sur les involutions

9. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une involution continue. Supposons par l'absurde que f ne possède pas de point fixe, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) \neq x$.
Alors la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$. Étant continue, elle est de signe constant sur $\mathbf{R}$.
Graphiquement, cela signifie que le graphe de f est soit toujours au-dessus de la première bissectrice, soit toujours en dessous.

► **Premier cas : pour tout $x \in \mathbf{R}$, $g(x) > 0$.** Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) > x$.
Et donc en particulier, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(f(x)) > f(x) > x$.

Mais f étant une involution, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(f(x)) = x$, donc ceci est absurde.

► **Second cas : pour tout $x \in \mathbf{R}$, $g(x) < 0$.**

Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) < x$. Et donc en particulier, $f(f(x)) < f(x) < x$, ce qui est absurde pour les mêmes raisons.

Donc $\boxed{f \text{ possède au moins un point fixe.}}$

10. Soit $f : \begin{cases} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 2-x & \text{si } x \notin \mathbf{Z} \\ x+1 & \text{si } x \text{ est un entier pair} \\ x-1 & \text{si } x \text{ est un entier impair} \end{cases} \end{cases}$.

Prouvons alors que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(f(x)) = x$.

Détails

► C'est le résultat de 7.d, avec $x = a^2 - b$.

Remarque

► $f(1)$ n'est plus important que n'importe quelle autre valeur de f , mais supposer que $f(1) = 1$ nous permet de supposer qu'il existe un $x \neq 0$ tel que $f(x) = x$.

Détails

► S'il existait deux réels a et b tels que $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$, alors par le théorème des valeurs intermédiaires (qui nécessite la continuité), il existerait x_0 compris entre a et b tel que $g(x_0) = 0$.

Détails

► Puisque pour tout $t \in \mathbf{R}$, $f(t) > t$, si on prend $t = f(x)$, on obtient $f(f(x)) > f(x)$.

Soit donc $x \in \mathbf{R}$.

► **Premier cas : $x \notin \mathbf{Z}$.**

Alors $f(x) = 2 - x$ n'est pas non plus entier. Donc $f(f(x)) = 2 - (2 - x) = x$.

► **Deuxième cas : x est un entier pair**

Alors $f(x) = x + 1$ est un entier impair. Et donc $f(f(x)) = f(x + 1) = (x + 1) - 1 = x$.

► **Troisième cas : x est un entier impair.**

Alors $f(x) = x - 1$ est un entier pair, et donc $f(f(x)) = f(x - 1) = (x - 1) + 1 = x$.

Donc dans tous les cas, $f(f(x)) = x$, si bien que f est une involution.

De plus, f ne possède pas de point fixe.

En effet, un entier n'est jamais un point fixe.

Et l'équation $2 - x = x$ possède 1 pour unique solution, et donc n'a pas de solution en dehors de $\mathbf{N}$.

Nous avons donc bien construit une involution sans point fixe.

Mais comment trouve-t-on cette fonction ?

Il faut un peu d'intuition pour penser à cette fonction⁹, mais donnons quelques pistes.

La fonction $x \mapsto 2 - x$ est une involution de $\mathbf{R}$, le seul problème c'est qu'elle possède un point fixe (et un seul), qui est 1.

Changeons donc l'image de 1 afin de supprimer ce point fixe, en posant par exemple $f(1) = 0$ (et donc $f(0) = 1$ pour garder une involution : $f(f(1)) = 1$).

Le soucis est alors que 0 était l'antécédent de 2, et donc on n'a plus $f(f(2)) = 2$, mais $f(f(2)) = f(0) = 1$.

Changeons donc l'image de 2 en posant $f(2) = 3$, et donc $f(3) = 2$.

Mais alors 3 était l'antécédent de -1, et donc on n'a plus $f(f(-1)) = -1$, mais $f(f(-1)) = f(3) = 2$. Qu'à cela ne tienne, changeons aussi l'image de -1 en posant $f(-1) = -2$. Et donc $f(-2) = -1$. Et ainsi de suite...

Notons qu'une autre solution, peut-être plus simple, mais à laquelle on pense à l'aide du

même raisonnement est la suivante : $f : \begin{cases} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 2 - x & \text{si } x \notin \mathbf{Z} \\ 1 - x & \text{si } x \in \mathbf{Z} \end{cases} \end{cases}$.

On vérifie alors que c'est une involution, qui n'a pas non plus de point fixe puisque $x \mapsto 2 - x$ possède un entier pour unique point fixe et que $x \mapsto 1 - x$ possède $\frac{1}{2} \notin \mathbf{Z}$ pour unique point fixe.

⁹ Qui est loin d'être la seule solution à la question posée.