

DEVOIRS ; EQUATIONS, INEQUATIONS, SYSTEMES

Exercice n°1:

Soit (E) :  $mx^2 - 2(m-2)x - m - 10 = 0$  avec  $m \in \mathbb{R}$

- 1) Discuter suivant les valeurs de  $m$  l'existence et le signe des racines.
- 2) Pour quelles valeur de  $m$  a-t-on  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \geq 0$  ? avec  $x_1$  et  $x_2$  les deux racines.
- 3) Pour quelles valeurs de  $m$  a-t-on  $x_1^2 + x_2^2 < 3x_1x_2$ .

Exercice n°2:

Soit l'équation  $x^2 - (2m+3)x + m^2 + 5 = 0$

- 1) Peut-on trouver  $m$  pour que l'équation ait deux racines ?
  - a. Opposées.
  - b. Inverses.
  - c. Telles que  $-1 < x_1 < 1 < x_2$ .
- 2) Déterminer  $m$  tel que  $x_1^2 + x_2^2 = 53$ .
- 3) Déterminer  $m$  tel que  $|x_1 - x_2| = 13$

Exercice n°3:

- 1) Montrer que pour tous réels  $x$  et  $y$  non nuls  $2\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) - 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 6 \geq 0$

(On pourra poser  $X = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ )

- 2)
  - a. Montrer que l'équation  $x^4 + ax^3 + bx^2 + kax + k^2 = 0$  peut être amenée à une équation du second degré par le changement de variable  $X = x + \frac{k}{x}$
  - b. En déduire une résolution de  $x^4 - 4x^3 - 11x^2 - 12x + 9 = 0$

Exercice n°4:

Les racines  $x'$  et  $x''$  d'une équation du second degré vérifient les relations :

- $x' + x'' - 2x'x'' = 0$
- $mx'x'' - (x' + x'') = 2m + 1$

- 1) Former cette équation.
- 2) Pour quelles valeurs de  $m$  a-t-elles deux racines.
- 3) Déterminer  $m$  de façon que les deux racines soient positives.
- 4) Dans ce cas, on considère le triangle dont les cotés de l'angle droit ont pour mesures respectives  $x'$  et  $x''$ . Déterminer  $m$  de façon que l'hypoténuse de ce triangle soit égale à  $\sqrt{2}$

Exercice n°5:

- 1) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :
  - a.  $\sqrt{2x^2 - x} > 2x - 3;$
  - b.  $x^2 - 3x + \sqrt{x^2 - 3x + 11} = 1;$
  - c.  $\sqrt{x + 4} + \sqrt{-x + 3} = 2;$
  - d.  $\sqrt{x^2 - x - 1} < x + 5.$
- 2) Soit l'équation (1) :  $y^2 - (m+1)y + m + 3 = 0$

Discuter suivant les valeurs de  $m$ , l'existence et le signe des racines de (1)

On désigne par  $a$  et  $b$  les racines de (1) lorsqu'elles existent.

- 3) On considère l'équation (2) :  $(a + b)x^2 - 2x - ab = 0$   
 Sans calculer  $a$  et  $b$ , écrire l'équation (2) en fonction de  $m$ , puis déterminer les valeurs de  $m$  pour les quelles l'équation (2) admet deux racines  $x'$  et  $x''$ 
  - a. de signes contraires.
  - b.  $x'$  et  $x''$  tels que  $-1 < x' < 1 < x''$

Exercice n°6:

On considère l'équation (E) :  $2x^4 - 11x^3 + 19x^2 - 11x + 2 = 0$

- a. Montrer que  $0$  n'est pas une solution de (E).
- b. Démontrer que cette équation est équivalente sur  $\mathbb{R}^*$  à l'équation suivante :
 
$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 11\left(x + \frac{1}{x}\right) + 19 = 0.$$
- c. En déduire la résolution de (E).

Exercice n°7:

Soit l'équation :  $2x^2 + 3x - 3 + \sqrt{2x^2 + 3x - 9} = 18$

- 1) a. Déterminer  $D_E$  le domaine d'existence de l'équation. Vérifier que l'équation proposée devient :  $y^2 + y - 12 = 0$  en posant  $y = \sqrt{2x^2 + 3x - 9}$ .  
 b. En déduire  $y$  et calculer ensuite  $x$ .
- 2) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :  $\sqrt{2x+5} - \sqrt{x-1} = 1$  et  $\sqrt{4x+1} \geq 2x+1$

Exercice n°8:

Le but de cet exercice est d'établir l'égalité suivante :  $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = 1.$

1) On pose  $\alpha = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$  et  $\beta = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ . Calculer  $\alpha^3 + \beta^3$  et  $\alpha\beta$ .

2) Démontrer que, pour tout réels  $A$  et  $B$ , on a :

$$A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2) \text{ puis que } A^3 + B^3 = (A+B)[(A+B)^2 - 3AB].$$

3) En déduire que le réel  $\alpha + \beta$  est solution de l'équation  $x^3 + 3x - 4 = 0$ .

4) Résoudre l'équation  $x^3 + 3x - 4 = 0$  puis conclure.

NB : Si  $a > 0$  ; on convient de noter  $\sqrt[3]{a}$  la solution de l'équation  $x^3 = a$

Exercice n°9:

1) Soit  $m$  un paramètre réel. Résoudre et discuter les inéquations suivantes:

a.  $mx^2 + (m-1)x + m - 1 < 0$ ; b.  $\frac{m+1}{m-1}x^2 - 2x - 1 < 0$

2) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :

a.  $\sqrt{1-4x^2} - 4x \leq 0$  ; b.  $\frac{1}{\sqrt{x+1}} < \frac{1}{x-1}$

Exercice n°10:

Soit le trinôme  $P(x) = (2m-1)x^2 - 2mx + m + 1$

1) Déterminer l'ensemble des valeurs de  $m$  pour lesquelles  $P(x)$  admet deux racines distinctes puis une racine double.

2) Dans le cas où  $P(x)$  admet deux racines distinctes, déterminer l'ensemble des valeurs de  $m$  pour lesquelles les deux racines sont positives puis les deux racines sont de signes contraires.

3) Déterminer l'ensemble des valeurs de  $m$  pour lesquelles  $P(x) \leq 0$

Exercice n°11:

1) Résoudre dans  $\mathbb{R}^3$  les systèmes d'équations linéaires suivantes :

a. 
$$\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ x - y - z = -4 \\ x + 4y - 5z = -6 \end{cases}$$
 b. 
$$\begin{cases} (m+1)x + y + z = m+1 \\ x + (m+1)y + z = m+3 \\ x + y + (m+1)z = -2m-4 \end{cases}$$
 c. 
$$\begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

2) Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  les systèmes d'équations suivantes en discutant suivant le paramètre réel  $m$  :

a. 
$$\begin{cases} (m-1)x - 2y = m \\ 4x - (m+1)y = m+1 \end{cases}$$
 ; b. 
$$\begin{cases} 2x + my = 2 \\ -x - 3y = -1 \end{cases}$$
 c. 
$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x - y = 6 \\ 2x - y = m \end{cases}$$

Exercice n°12:

Soit  $P(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1$  Montrer que pour tout  $x$  non nul

$$\frac{P(x)}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4. \text{ En déduire les solutions de l'inéquation } P(x) \geq 0$$

Exercice n°13:

- 1) Résoudre sans calculer  $\Delta$  les équations suivantes :
  - a.  $x^2 - (a + b + c)x + a(b + c) = 0$ .
  - b.  $x^2 - (2a - 3b)x - 6ab = 0$
- 2) Trouver deux nombres réels sachant que leurs différence est égale 4 et la différence de leur cube est égale à 988.

Exercice n°14:

Soit l'équation  $x^2 - 2mx + 3m - 2 = 0$

- 1) Déterminer suivant les valeurs de  $m$  l'existence et le signe des racines  $x_1$  et  $x_2$  de l'équation
- 2) Déterminer  $m$  tel que l'on ait  $x_1^2 + x_2^2 = x_1 \cdot x_2 + 4$
- 3) Former l'équation en  $X$  admettant pour racines  $2x_1 - 3x_2$  et  $2x_2 - 3x_1$
- 4) Déterminer l'ensemble des réels  $m$  tel que l'équation admette deux racine  $x_1$  et  $x_2$  vérifiant :  
 $-1 \leq x_1 \leq 2 \leq x_2$

Exercice n°15:

On donne l'inéquation  $(E) : mx^2 + 4x + 2(m-1) \leq 0 ; m \in \mathbb{R}$ .

- 1) Déterminer l'ensemble des valeurs de  $m$  pour les quelles  $(E)$  est sans solution dans  $\mathbb{R}$ .
- 2) Déterminer l'ensemble des valeurs de  $m$  pour les quelles  $(E)$  soit vérifiée  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

Exercice n°16:

- 1) On considère l'équation d'inconnue  $x$   $(E) : x^2 + 2(m-1)x + m^2 + 2 = 0$

Déterminer les valeurs de  $m$  pour que l'équation  $(E)$  ait deux racines  $x_1$  et  $x_2$  telles que:

a.  $x_1^2 + x_2^2 = 20$     b.  $|x_1 - x_2| = 2$     c.  $x_1 \leq -1 \leq x_2$

(indication : utiliser la somme et le produit).

- 2) Soit l'équation  $(E') : x^4 + 2(m-1)x^2 + m^2 + 1 = 0$

Pour quelles valeurs de  $m$  cette équation a :

- a. Trois solutions distinctes
- b. Quatre solutions distinctes
- c. Deux solutions distinctes
- d. Aucune solution.

**N.B** : On posera d'abord toutes les conditions.

Exercice n°17:

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations et inéquations suivantes :

a.  $\sqrt{x+1} > 2 - \sqrt{x}$     b.  $\sqrt{6x+2} - \sqrt{3x} \leq \sqrt{9x-2}$     c.  $|-x^2 + x + 2| \geq x - 7$

d.  $\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 2x + 3$

Exercice n°18:

Les cotés  $x$ ,  $y$ , et  $z$  d'un triangle vérifient les égalités suivantes

$x + y + z = 10$ ;  $x + y - z = 4$ ;  $x^2 + y^2 + z^2 = 34$ . Que peut-on dire de ce triangle ?

Exercice n°19:

Soit l'équation  $(E)$  :  $(m-1)x^2 + (m-2)x + m = 0$

- 1) Discuter l'existence et le signe des solutions de l'équation  $(E)$  suivant  $m$ .
- 2) Etablir une relation entre les solutions  $x'$  et  $x''$  indépendantes de  $m$
- 3) Utiliser cette relation pour trouver  $x'$  et  $x''$  lorsque  $x' = 2x''$

Exercice n°20:

Soit  $a$ ,  $b$ ,  $c$  trois nombres non nuls distincts deux à deux tels que :  $a + b + c = 0$

1) Démontrer que  $\frac{a}{b-c} \left( \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c} \right) = \frac{2a^2}{bc}$

2) En posant  $E = \left( \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} \right) \left( \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c} \right)$  déduire de 1) que

$$E = 3 + \frac{2(a^2 + b^2 + c^2)}{abc}$$

3) Mettre sous forme de produits de facteurs l'expression  $a^3 + b^3 + c^3$ , puis en déduire que  $E = 9$

Exercice n°21:

On considère l'équation  $(E)$  :  $x^3 + px + q = 0$ , où  $p$  et  $q$  sont des réels non nuls

- 1) Démontrer que  $(E)$  ne peut avoir trois solutions égales.
- 2) Démontrer que si  $(E)$  admet trois solutions  $a$ ,  $b$ ,  $c$  alors  $a + b + c = 0$

Exercice n°22:

Soit l'équation  $(E)$ :  $mx^2 + 2(m-1)x - 2m + 2 = 0$

- 1) Pour quelles valeurs de  $m$   $(E)$  admet une racine double. Déterminer les racines doubles correspondantes.
- 2) Etudier l'existence et le signe des racines de  $(E)$
- 3) Déterminer  $m$  tel que pour tout réel  $x$  on ait  $mx^2 + 2(m+1)x - 2m + 2 \geq 0$

- 4) Déterminer une relation indépendante de  $m$  liant les racines  $x'$  et  $x''$  de  $(E)$  au cas où elles existent. Retrouver les racines doubles de  $(E)$

Exercice n°23:

- 1) Quatre cubes ont respectivement pour arêtes mesurées en cm  $x$  ;  $x+1$  ;  $x+2$  ; et  $x+3$  où  $x$  est un nombre entier naturel. Déterminer  $x$  pour que le contenu des trois cubes d'arêtes  $x$  ;  $x+1$  ;  $x+2$  remplissent exactement le cube d'arête  $x+3$ .
- 2) On estime le coût d'un forage ainsi : le premier mètre coûte 1000f le second 1050f et chaque mètre coûte 50f de plus que le précédent.  
Quelle profondeur pourra-t-on atteindre si on dispose d'un crédit de 519750f ?

Exercice n°24:

- 1) Résoudre graphiquement l'inéquation  $x^2 - 4y^2 < 0$ .
- 2) Soit  $f(x) = (1-m)x^2 + 2(m-5)x + 16 - m$  ;  $m \in \mathbb{R}$ .
- Déterminer l'ensemble des réels  $m$  pour lesquels  $f(x) = 0$  admet deux racines de signes contraires.
  - Déterminer l'ensemble des réels  $m$  tel que pour tout  $x$  appartenant  $\mathbb{R}$ ,  $f(x) < 0$
  - Déterminer l'ensemble des réels  $m$  tel que  $f(x)$  admet deux racines  $x'$  et  $x''$  vérifiant  $x' < -1 < x'' < 2$ .

Exercice n°25:

Un cycliste met deux heures pour effectuer le parcours de la ville  $A$  à la ville  $B$ , puis deux heures quatorze minutes pour effectuer le retour de  $B$  vers  $A$ . En montée sa vitesse moyenne est  $8\text{km/h}$  ; sur terrain plat  $12\text{km/h}$  et en descente  $15\text{km/h}$ . sachant que les villes  $A$  et  $B$  sont distants de  $23\text{km}$ , déterminer la longueur des montées, des plats et des descentes pour le trajet de  $B$  vers  $A$ .

Exercice n°26:

- 1) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $(2x^2 + 1)^4 - 8(2x^2 + 1)^2 + 15 = 0$
- 2) Soit  $(E) : (x-2)(x-1)(x+1)(x+2) = 1120$
- Montrer que si  $\alpha$  est solution de  $(E)$ ,  $-\alpha$  est aussi solution de  $(E)$ .
  - En décomposant 1120 en produit de quatre facteurs ; trouver une solution entière de  $(E)$  ; puis résoudre  $(E)$ .

Exercice n°27:

- 1) Résoudre dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  le système suivant : 
$$\begin{cases} x^2 y^2 = 16 \\ x + y = 4 \end{cases}$$
- 2) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation et l'inéquation suivantes
- $|2x-3| - 2|x+1| = 3x+6$
  - $|3-x| \geq |x+3| - 2|x|$
- 3) Sachant que  $x > 3$  ; prouver que  $\frac{2x-3}{1-x} \in \left] -2, -\frac{3}{2} \right[$

Exercice n°28:

Une entreprise fabrique deux types de ceintures  $A$  et  $B$ . Le bénéfice net est de  $2f$  pour le type  $A$  et  $3f$  pour le type  $B$ .

La fabrication du type  $A$  prend 2 heures, celle du type  $B$  1 heure et le temps de travail disponible est de 100 heures.

La quantité de cuire disponible est suffisante pour fabriquer 80 ceintures (types  $A$  et type  $B$  confondus). Enfin l'approvisionnement possible en boucles est de 40 pour le type  $A$  et 60 pour le type  $B$ .

Si  $x$  est le nombre de ceinture de type  $A$  fabriqué et  $y$  celui de type  $B$  ;

- 1) Déterminer les inéquations contraintes de la production.

2) Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  le système suivant :

$$\begin{cases} x + y \leq 80 \\ x \leq 40 \\ y \leq 60 \\ 2x + y \leq 100 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

- 3) Quel est le bénéfice  $b$  correspondant à  $x$  ceintures de type  $B$  et  $y$  ceintures de type  $B$ .  
4) Déterminer la production permettant d'obtenir le bénéfice maximum, et déterminer ce bénéfice.

Exercice n°29:

- 1) Pour quelles valeurs de  $m$  on a  $(m^2 - 1)x^2 - (2m + 1)x + 1 < 0$  pour tout réel  $x$  ?

- 2) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0$

( On fera le changement de variable  $X = x + \frac{1}{x}$  )

Exercice n°30:

On considère l'équation  $(E)$ :  $x(x+1)(x+2)(x+3) + 1 = m$

Dans laquelle  $x$  est l'inconnue et  $m$  un paramètre.

- 1) Montrer que par un changement d'inconnue  $X = x^2 + 3x + 1$ , l'équation se ramène à la forme simple  $X^2 = m$ .  
2) Discuter suivant les valeurs de  $m$  le nombre et le signe des racines de  $(E)$ .

Exercice n°31:

- 1) Résoudre et discuter l'équation  $m(x^2 + 1)^2 - 2(x^4 + 1) = 0$

- 2) Démontrer que lorsqu'elle admet quatre racines  $x_1, x_2, x_3$  et  $x_4$  ces racines sont liées par les relations  $x_1 + x_2 = 0$  ;  $x_3 + x_4 = 0$  ;  $x_1 \cdot x_3 = 1$  ;  $x_1 \cdot x_4 = -1$ .

Exercice n°32:

On considère l'équation  $x^4 + (m-2)x^2 + m + 1 = 0$

Déterminer les valeurs du nombre réel  $m$  pour lesquelles cette équation a :

- 1) Quatre solutions distinctes.
- 2) Deux solutions distinctes.
- 3) Trois solutions distinctes.

Exercice n°33:

- 1) On considère l'équation  $x^2 + m(m+3)x + m^3 = 0$

Déterminer le nombre réel  $m$  pour que cette équation ait deux racines  $\alpha$  et  $\beta$  telles que

$$\alpha^2 = \beta$$

- 2) Déterminer deux équations du second degré telles que les racines de chacune d'elles soient la somme et le produit des racines de l'autre.

Exercice n°34:

On considère les équations suivantes :  $f(x) = x^2 + px + q$  (1) et  $g(x) = x^2 + p'x + q'$  (2) qui sont supposées avoir chacune deux racines  $\alpha$  et  $\beta$  pour la (1),  $\alpha'$  et  $\beta'$  pour la (2).

- 1) Démontrer que chacun des produits  $f(\alpha')f(\beta')$  et  $g(\alpha)g(\beta)$  a pour valeur  $R = (p - p')(pq' - qp') + (q - q')^2$
- 2) En déduire des conditions nécessaires et suffisantes pour que les deux équations aient une racine commune et une seule.

Exercice n°35:

Soit l'équation :  $2x^2 + 3x - 3 + \sqrt{2x^2 + 3x - 9} = 18$

- 1)
  - a. Définir l'équation. Vérifier que l'équation proposée devient :  $y^2 + y - 12 = 0$  en posant  $y = \sqrt{2x^2 + 3x - 9}$ .
  - b. En déduire  $y$  et calculer ensuite  $x$ .
- 2) Soit l'équation :  $x^4 - 12x^3 + 37x^2 - 12x + 1 = 0$ 
  - a. Vérifier que  $0$  n'est pas solution et que si  $\alpha$  est une solution alors  $\frac{1}{\alpha}$  est aussi solution.
  - b. Montrer en posant  $X = x + \frac{1}{x}$  que résoudre l'équation revient à résoudre  $X^2 - 12X + 35 = 0$ . En déduire  $X$  puis calculer  $x$ .

Exercice n°36:

On considère le trinôme du second degré en  $x$  ;  $f_m(x) = mx^2 - (m-1)(m^2+1)x + m(m-2)^2$  où  $m$  désigne un paramètre réel.

- 1) Montrer que lorsque  $m \neq 0$ , le discriminant de l'équation d'inconnue  $x$ ,  $f_m(x) = 0$ , est un carré parfait. Etudier suivant les valeurs de  $m$  le signe des racines de cette équation.
- 2) Calculer en fonction de  $m$  les racines  $x'$  et  $x''$  de l'équation  $f_m(x) = 0$ .

$x''$  est la racine qui est une fraction rationnelle en  $m$ . Vérifier que  $x' - x'' = \frac{(m-2)(m^2-1)}{m}$ .

En déduire les valeurs de  $m$  pour lesquelles on a  $x' > x''$ .

- 3) Pour qu'elles valeurs de  $m$  a-t-on  $x'' < -2$ .

Montrer que:  $\forall m \neq 0$  on a :  $x' > -2$

- 4) Déduire des questions précédentes, l'ensemble des valeurs de  $m$  pour les quelles on a :  $-2$  entre les racines  $x'$  et  $x''$

Exercice n°37:

Soit le trinôme  $g_m(x) = (m-1)x^2 - 3(m-1)x + 2m - \frac{9}{4}$

- 1) Discuter suivant les valeurs de  $m$  l'existence des racines de l'équation d'inconnue  $x$ ,  $g_m(x) = 0$
- 2) Déterminer le signe de  $(m-1)g_m\left(\frac{3}{2}\right)$  suivant les valeurs de  $m$  dans  $\mathbb{R}$ .

En déduire la position de  $\frac{3}{2}$  par rapport aux racines, lorsqu'elles existent, de  $g_m(x) = 0$ .

- 3) Résoudre l'inéquation  $m(x^2 - 3x + 2) \geq 0$ , on discutera suivant les valeurs de  $m$  dans  $\mathbb{R}$ .
- 4) En utilisant les résultats précédents, résoudre l'équation d'inconnue  $x$  :  $\sqrt{m(x-1)(x-2)} = x - \frac{3}{2}$  On discutera suivant les valeurs de  $m$  dans  $\mathbb{R}$ .

Exercice n°38:

Soit l'équation  $(E): mx^2 + 2(m-1)x - 2m + 2 = 0$

- 1) Pour quelles valeurs de  $m$   $(E)$  admet une racine double. Déterminer les racines doubles correspondantes.
- 2) Etudier l'existence et le signe des racines de  $(E)$
- 3) Déterminer  $m$  tel que pour tout réel  $x$  on ait  $mx^2 + 2(m+1)x - 2m + 2 \geq 0$
- 4) Déterminer une relation indépendante de  $m$  liant les racines  $x'$  et  $x''$  de  $(E)$  au cas où elles existent. Retrouver les racines doubles de  $(E)$

Exercice n°39:

On note  $(E)$  l'équation :  $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ , avec  $a_0 \neq 0$  et  $a_n \neq 0$ .

On désigne par  $M$  le plus grand des nombres  $\left| \frac{a_1}{a_0} \right| ; \left| \frac{a_2}{a_0} \right| ; \dots ; \left| \frac{a_n}{a_0} \right|$ .

Le but du problème est de démontrer que toutes les solutions de  $(E)$  si elles existent, sont dans l'intervalle  $]-1 - M, 1 + M[$

1) Démontrez que  $(E)$  a les mêmes solutions que l'équation :

$$\frac{a_1}{a_0x} + \frac{a_2}{a_0x^2} + \dots + \frac{a_n}{a_0x^n} = -1 \quad (E')$$

2)  $g$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $g(x) = \frac{a_1}{a_0x} + \frac{a_2}{a_0x^2} + \dots + \frac{a_n}{a_0x^n}$ .

a. Démontrer que  $|g(x)| \leq M \left( \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|x|^2} + \dots + \frac{1}{|x|^n} \right)$ .

b. Montrer que pour tout  $|x| \geq 1 + M$  :

$$|g(x)| \leq M \left( \frac{1}{1+M} + \frac{1}{(1+M)^2} + \dots + \frac{1}{(1+M)^n} \right).$$

En déduire que  $\forall x \geq 1 + M, |g(x)| < 1$  (inégalité stricte)

c. Démontrer que si  $|x| \geq 1 + M$ , alors  $x$  n'est pas solution de  $(E)$ .

Déduisez-en que les solutions de  $(E)$  sont dans l'intervalle  $]-1 - M, 1 + M[$ .

3) Application :

a. Montrez que l'équation  $8x^5 + 4x^4 - 3x^2 + 5x - 2 = 0$ , a au moins une solution.

b. Montrer que toutes ses solutions sont dans  $]-1,625; 1,625[$ .