CHAPITRE 6: Limites et continuité

LECON 3: Continuité d'une fonction

1. Continuité sur un intervalle

a) Définition

Soit f une fonction et I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit x_0 un élément de I.

- On dit que f est continue en x_0 si elle est définie en x_0 et si $\lim\limits_{x \Rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
- On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point de I.

Exemple :

Les fonctions polynômes, $\cos x$, $\sin x$ et $|x|$ sont continues sur sont continues sur $\mathbb{R}$. La fonction $\sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$.

Remarque :

- La courbe d'une fonction continue sur un intervalle se trace d'un seul trait sur cet intervalle

b) Propriétés

- P1

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I.

- Les fonctions $f+g$, $f\times g$, λf ($\lambda \in \mathbb{R}$) et $|f|$ sont continues sur I.
- Si g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I.
- Si f est positive sur I, alors $\sqrt{f}$ est continue sur I.

Exemple :

Toute fonction rationnelle est continue sur son ensemble de définition.

- **P2**

Soient I et I' deux intervalles de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions telles que $f(I) \subset I'$.

- Si f est continue sur I et g continue sur I', alors $g\circ f$ est continue sur I.

Exemple :

La fonction $x \longmapsto \tan\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$. En effet:

La fonction $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et on a $f(\mathbb{R}) \subset]-1;1[$.

Bien plus, la fonction $g(y)= \tan y$ est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et on a $]-1;1[\subset \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. Donc la fonction $g\circ f(x)= \tan\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Remarque :

- La composé de deux fonctions continues sur leur ensemble de définition est continue sur son ensemble de définition.

2. Image d'un intervalle par une fonction continue

a) Propriétés

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , a et b deux éléments de I.

- Si f est continue sur I , alors $f(I)$ est un intervalle;
- Si f est continue sur $[a;b]$, alors $f([a;b])$ est un intervalle fermé

<u>Remarque</u> :

- Si f est une fonction constante , alors f(I) est un singleton.
- Si f n'est pas continue sur I , alors f(I) peut ne pas être un intervalle.
- Si f est continue sur I , alors les intervalles I et f(I) ne sont pas nécessairement de même nature.

b) Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I.

- Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe $c \in [a; b]$ tel que $f(y)=c$

<u>Remarque</u> :

- Si f n'est pas continue sur $[a;b]$, un nombre réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ peut ne pas avoir d'antécédent par f dans l'intervalle $[a;b]$

<u>Exemple</u> :

Cas de la fonction partie entière. En effet, $E(1) < 1,4 < E(2)$ **pourtant** **1,4** n'a pas d'antécédent par E.

➢ Propriétés

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I tels que $(a < b)$.

- Si $f(a) \times f(b) < 0$ alors il existe $c \in]a; b[$ tel que f(c)=0 . Autrement dit, $\forall x \in]a; b[$, l'équation f(x)=0 admet au moins une solution

Exemple :

Montrer que l'équation $x^5+x+1=0$ admet une unique solution réelle α.

Solution :

Soit f la fonction définie par $f(x)=x^5+x+1$. f est une fonction polynôme, donc elle est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =+\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \times \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) < 0$;

d'apres le TVI, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha)=0$

De plus, $f'(x)=5x^4+1> 0$; f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. α est alors unique. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, l'équation f(x)=0 admet une seule solution α.

3. Fonction continue et monotone

a) Bijection réciproque d'une fonction continue et monotone

➢ Propriété

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.

- f réalise une bijection de I vers $f(I)$.
- La bijection réciproque f^{-1} est continue sur l'intervalle $f(I)$.
- f^{-1} est strictement monotone et a le même sens que f.

b) Image d'un intervalle par une fonction continue et monotone

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I.

I	f(I)	
	f strictement croissante	f strictement décroissante
$[a;b]$	$[f(a);f(b)]$	$[f(b);f(a)]$
$[a;b[$	$\left[f(a);\lim\limits_{x\to_< b} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to_< b} f(x);f(a)\right]$
$]a;b[$	$\left]\lim\limits_{x\to_> a} f(x);\lim\limits_{x\to_< b} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to_< b} f(x);\lim\limits_{x\to_> a} f(x)\right[$
$[a;+\infty[$	$\left[f(a);\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x);f(a)\right]$
$\mathbb{R}$	$\left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x);\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x);\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[$

c) Fonction racine n-ième et puissance d'exposant rationnel

➢ Fonction racine n-ième

Soit n un entier naturel non nul.

- La fonction racine n-ième est la bijection réciproque de la fonction : $\begin{array}{l}\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}_+\\ x\mapsto x^n\end{array}$

➢ Puissance d'exposant rationnel

Soit $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^*$, $\mathbf{q} \in \mathbb{N}^*$ **et** $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^*$.

- On appelle **x** à la puissance $\frac{p}{q}$ le nombre réel, noté $x^{\frac{p}{q}}$, **défni par**:

$$x^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$$

Exercice d'application :

Soit la fonction $f(x) = \frac{3x^3-4x^2-4x+8}{4x-8}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

1. Démontrer que $(\mathcal{C})$ admet un asymptote parallèle à l'axe (OJ).

2. a) Étudier le comportement de f lorsque x tend vers $+\infty$ **ou** $-\infty$.

   b) Déterminer trois nombres réels a, b et c tels que: $f(x) = \mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}\mathbf{x} + \frac{c}{x-2}$

   C) En déduire que $(\mathcal{C})$ est asymptote à une parabole $(\mathcal{P})$ dont on donnera une équation.

   d) Étudier les positions relatives de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{P})$

3. a) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

   b) A l'aide de ce tableau, construire $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{P})$ et tous ses asymptotes.

Solution :

1. Démontrons que $(\mathcal{C})$ admet un asymptote parallèle à l'axe (OJ).

$Df = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. $\lim\limits_{x \to 2_<} f(x) = -\infty$ **et** $\lim\limits_{x \to 2_>} f(x) = +\infty$.

Donc en au point $x_0=2$, $(\mathcal{C})$ admet un asymptote parallèle à l'axe (OJ).

2. a) Étudier le comportement de f lorsque x tend vers $+\infty$ **ou** $-\infty$.

■ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^3-4x^2-4x+8}{4x-8}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^3}{4x}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3}{4}x^2$

$=+\infty$

■ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^3-4x^2-4x+8}{4x-8}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^3}{4x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{4}x^2$

$=+\infty$

● $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} =-\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} =+\infty$ donc $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction celle de (OJ).

b) Déterminons trois nombres réels a, b et c tels que:

$f(x) = ax^2 + bx + \frac{c}{x-2}$

$$
\begin{array}{r|l}
3x^3-4x^2-4x+8 & 4x-8 \\ \hline
-3x^3+6x^2 & \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x \\ \hline
2x^2-4x+8 & \\
-2x^2+4x & \\ \hline
8 &
\end{array}
$$

D'ou $f(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{8}{4x-8} = ax^2 + bx + \frac{c}{x-2}$

Par identification, $\begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = 8 \end{cases}$

c) Déduisons-en que $(\mathcal{C})$ est asymptote à une parabole $(\mathcal{P})$ dont on donnera une équation.

$\lim\limits_{x\to\infty} \left[f(x) - \left(\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x\right)\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{8}{4x-8} - \left(\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x\right)\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{8}{4x-8} = 0$

Donc $(\mathcal{C})$est asymptote à la parabole $(\mathcal{P})$: $y=\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$

d) Étudions les positions relatives de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{P})$

Soit la fonction $h(x) = f(x) - y = \frac{8}{4x-8}$

$4x-8=0 \Longrightarrow x = 2$ d'ou le tableau

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$h(x)$	$-$		$+$

- $\forall x \in]-\infty; 2]$, $f(x) - y < 0$ donc $(\mathcal{C})$ est en dessous de $(\mathcal{P})$
- $\forall x \in [2; +\infty[$, f(x)-y> 0 donc $(\mathcal{C})$est au dessus de $(\mathcal{P})$

3. a) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

- Variations de f

$$f'(x)=\left(\frac{3x^3-4x^2-4x+8}{4x-8}\right)' = \frac{(9x^2-8x-4)(4x-8)-4(3x^3-4x^2-4x+8)}{(4x-8)^2}$$

$$= \frac{36x^3 - 72x^2 - 32x^2 + 64x - 16x + 32 - 12x^3 + 16x^2 + 16x - 32}{(4x-8)^2}$$

$f'(x) = \frac{24x^3-88x^2+64x}{(4x-8)^2}$ et $Df' = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$f'(x)=0 \Longrightarrow \frac{24x^3-88x^2+64x}{(4x-8)^2} = 0 \Longrightarrow 24x^3 - 88x^2 + 64x = 0$$

$$\Longrightarrow S = \left\{0; 1; \frac{8}{3}\right\}$$

Tableau de signe de la fonction f'

x	$-\infty$	0	1	2	$\frac{8}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	-	‖ -	+	

❖ $\forall x \in]-\infty; 0[\cup]1; 2[\cup \left]2; \frac{8}{3}\right[$, f est strictement décroissante.

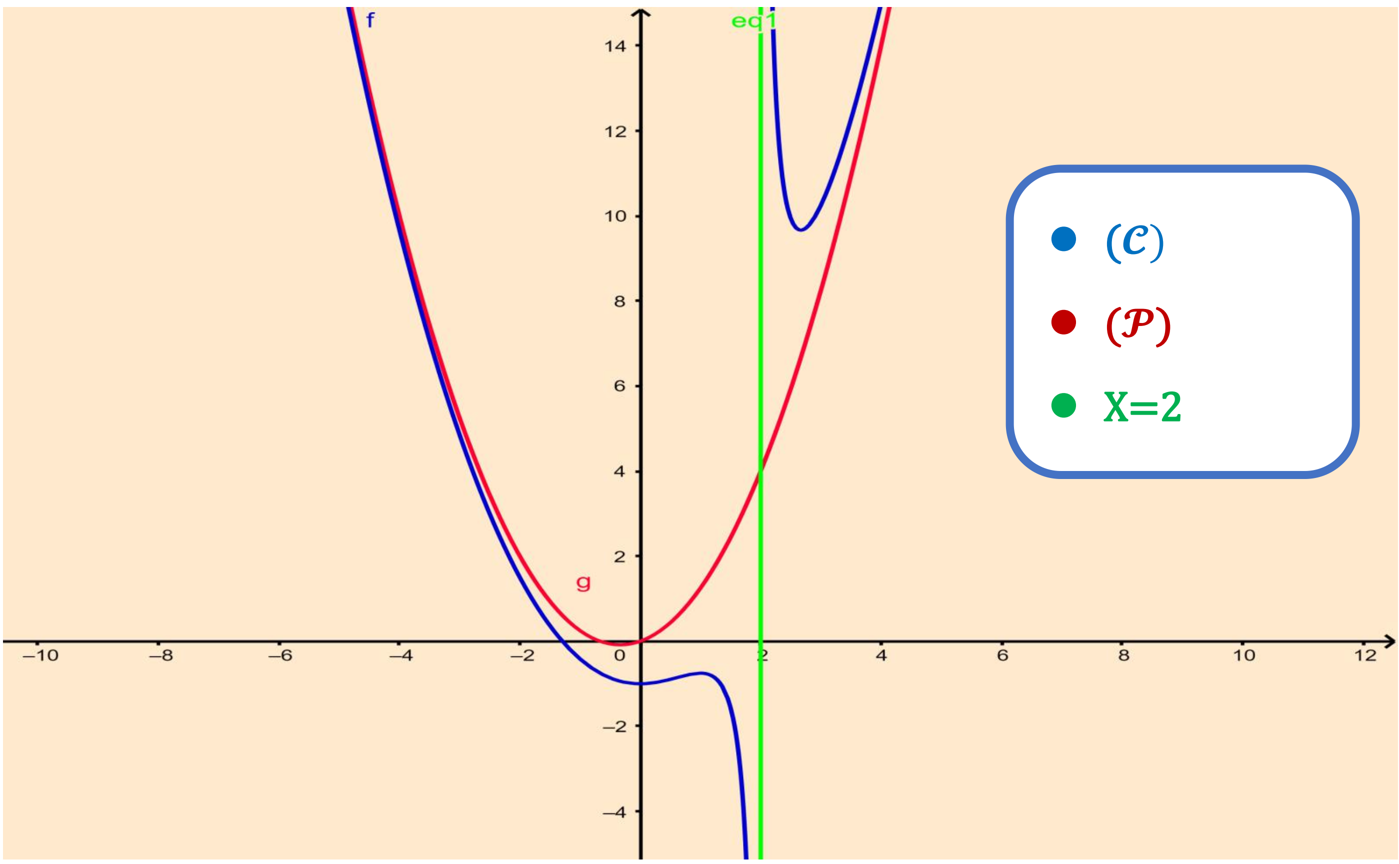
❖ $\forall x \in]0; 1[\cup \left]\frac{8}{3}; +\infty\right[$, f est strictement croissante.

- **Tableau de variation de la fonction f**

$f(0)=-1$, $f(1)=-0{,}75$ $\quad f(\frac{8}{3})=\frac{29}{3}$

x	$-\infty$	0	1	2	$\frac{8}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$\Vert$ $-$	$+$	
$f(x)$	$+\infty \searrow$	$-1 \nearrow$	$-0{,}75 \searrow$	$-\infty \Vert +\infty \searrow$	$\frac{29}{3} \nearrow$	$+\infty$

b) Construisons $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{P})$ et tous ses asymptotes.



Le Sophos vous remercie!!!