FICHE 1 PREPA DEVOIR Tle D (RENFORCEMENT) SUR LIMITE ET CONTINUITE. M. DJAHA 0709521305

EXERCICE 1 :

A/ Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x+\sqrt{x^2-1} & \text{si } x \langle -1 \\ 4x^3+6x^2-1 & \text{si } -1 \leq x \leq 0. \\ \dfrac{1-\cos(\pi x)}{x}-1 & \text{si } x \rangle 0 \end{cases}$

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

   b) Montrer que, pour tout $x > 0$, $-1 \leq f(x) \leq \dfrac{2}{x}-1$.

   c) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) Etudier la continuité de f en (-1) et en 0.

B/ Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \sqrt{x^2-1}-4$.

1) Déterminer le domaine de continuité de g.
2) Soit h la restriction de g à l'intervalle $[1,+\infty[$.

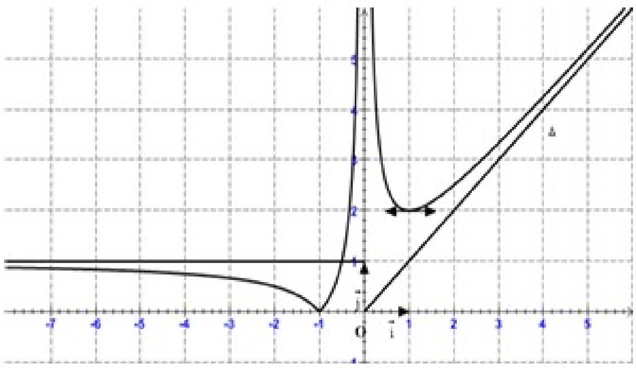
   a) Montrer que h est strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

   b) Déterminer h ($[1,+\infty[$).

3) Montrer que l'équation h(x) = 0 admet une unique solution sur $[4,5]$.

EXERCICE 2 :

Dans le graphique ci-contre, on a représenté La courbe (C_f) d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$. La droite : $\Delta : y = x$ est une asypmtote à (C_f) au voisinage de $+\infty$, la droite : $y = 1$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $-\infty$ l'axe des ordonnées est une asymptote à (C_f) à gauche et à droite en 0.



Utiliser la graphique pour répondre.

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{1}{f(x)}$ et $\lim\limits_{x\to0} f(x)\sin(\dfrac{1}{f(x)})$.
2) Déterminer $f(]-\infty,-1])$, $f([-1,0[)$ et $f(]0,1])$.
3) Montrer que la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{\dfrac{1}{f(x)}}$ est continue sur $\mathbb{R}^* \setminus \{-1\}$.
4) La fonction g admet elle un prolongement par continuité en 0.

EXERCICE 3 :

1 Calculer sans utiliser la calculatrice en détaillant les étapes de calcul.

$A=\sqrt[4]{5}\times\sqrt[4]{125}$; $B=5^{\frac{2}{3}}\times\sqrt[6]{25}$; $C=\sqrt[5]{81}\times 3^{\frac{1}{5}}$.

2 1°) Développer $\left(2+\sqrt{2}\right)^3$ et $\left(2-\sqrt{2}\right)^3$.

2°) En déduire la valeur exacte de $A=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}-\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.

3 Soit a un réel strictement positif. Simplifier $A=\dfrac{\sqrt[3]{a^5}\times\left(\sqrt[4]{a^7}\right)^2}{\left(a^2\right)^2\times\sqrt[5]{a^2}\times\sqrt[5]{a^3}}$.

4 Calculer $A=\dfrac{27^{-\frac{2}{3}}\times 49^{\frac{1}{2}}\times 16^{\frac{5}{4}}}{\left(\sqrt[5]{243}\right)^2}$.

5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt[3]{5-2x}=2$.

On commencera par préciser le domaine de résolution de l'équation.

6 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}-2=0$.

On commencera par préciser le domaine de résolution de l'équation.

A NULS SACRIFICES, NULLES VICTOIRES