

MPSI MP

Bertrand Beaufils
Patrick Beynet
Stéphanie Calmettes
Thierry Finot
Michel Goumi
Ivan Gozard
Marie-Laure Kaiser-Lavielle
Nicolas Nguyen
Lionel Vidal

PRÉPAS SCIENCES

COLLECTION DIRIGÉE PAR **BERTRAND HAUCHECORNE**

FORMULAIRE MATHS PHYSIQUE CHIMIE SII



3^e édition

Les 2 années
en 1 clin d'œil



**PRÉPAS
SCIENCES**

collection dirigée par Bertrand Hauchecorne

Formulaire MPSI/MP

MATHÉMATIQUES

PHYSIQUE-CHIMIE

SII

3^e édition

ouvrage coordonné par

Bertrand HAUCHECORNE

Bertrand BEAUFILS

professeur au lycée Paul Valéry (Paris)

Patrick BEYNET

professeur au lycée Rouvière (Toulon)

Stéphanie CALMETTES

professeure au lycée Saint-Denis (Annonay)

Thierry FINOT

professeur au lycée Lavoisier (Paris)

Michel GOUMI

*professeur honoraire au lycée E. Perrier
(Tulle)*

Ivan GOZARD

professeur au lycée Carnot (Dijon)

Marie-Laure KAISER-LAVIELLE

*professeure au lycée de la Cité des Sciences Vertes
(Toulouse-Auzeville)*

Nicolas NGUYEN

*professeur au lycée F. Rabelais
(Saint-Brieuc)*

Lionel VIDAL

*professeur au lycée Vaucanson
(Grenoble)*



COLLECTION
PRÉPAS SCIENCES

Retrouvez tous les titres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr



ISBN 9782340-070356

©Ellipses Édition Marketing S.A., 2022

8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

La réussite en prépa nécessite une acquisition solide des connaissances et une capacité à les mettre en réseau ; elle exige par ailleurs d'en avoir une vision claire et de savoir les mobiliser rapidement. Les ouvrages de la collection *Prépas Sciences Maths, Physique-Chimie et Sciences industrielles de l'ingénieur (SII)*, répondent au premier besoin. Ce formulaire vous permettra de satisfaire à la deuxième exigence.

C'est en effet un mémento synthétisant le cours de manière claire et concise : définitions, lois, théorèmes, propriétés et schémas à connaître. Les formules principales sont mises en valeur par un encadrement sur une trame grisée. L'ouvrage couvre les deux années et permet de les visualiser en un clin d'œil.

Aucune démonstration n'est faite, aucun exemple n'est proposé, car l'unique objectif est de retrouver le plus vite possible la définition ou la propriété cherchée.

Ce formulaire est structuré en deux grandes parties correspondant aux programmes respectifs des deux années. Dans chacune d'elles, vous trouverez successivement les mathématiques, la physique-chimie, les sciences industrielles de l'ingénieur (SII). Les notions sont présentées par thèmes dans l'ordre approximatif du programme, pour faciliter la recherche.

Un index très précis en fin d'ouvrage permettent de trouver rapidement et sans hésitation la notion cherchée. Ainsi, ce formulaire sera le compagnon idéal pour la préparation des colles, la résolution des exercices et des problèmes mais surtout pour accompagner les révisions avant les concours.

Bertrand Hauchecorne

Sommaire

Avant-propos	III
--------------------	-----

Première année

Mathématiques	3
Raisonnement et vocabulaire ensembliste	3
Techniques fondamentales en algèbre et analyse	7
Analyse 1	21
Algèbre générale	34
Algèbre linéaire	42
Analyse 2	58
Dénombrement et probabilités	71
 Physique-Chimie	 79
Optique géométrique	79
Électrocinétique	85
Physique des ondes	99
Mécanique	104
Thermodynamique	123
Électromagnétisme	134
Transformations de la matière	141
Structure de la matière et propriétés	146
Transformations en solution aqueuse	154
 Sciences industrielles de l'ingénieur (SII)	 165
Ingénierie système	165
Algorithmique	174
Automatique	177
Mécanique	189

Deuxième année

Mathématiques	207
Algèbre	207
Topologie	223
Analyse	233
Probabilités	256
Calcul différentiel	267
Physique-Chimie	279
Mécanique	279
Électromagnétisme	284
Physique des ondes	297
Optique ondulatoire	308
Thermodynamique	318
Électronique	328
Mécanique quantique	330
Thermodynamique chimique	335
Oxydo-réduction	342
Sciences industrielles de l'ingénieur (SII)	351
Mécanique	351
Automatique : SLCI	362
Algorithmique	370

Index

Mathématiques	379
Physique-Chimie	387
SII	397

Première année

*Quelques-uns ont donné le nom de mathématiques
à la magie parce que par le moyen des mathématiques,
on fait des choses si surprenantes
que le peuple croit qu'il y a magie.*

Antoine Furetière

Raisonnement et vocabulaire

Raisonnement et vocabulaire

Logique

Assertions

Une **assertion mathématique** est une application d'un ensemble de variables, à valeurs dans l'ensemble à deux éléments $\{V, F\}$. Une assertion $P : E \rightarrow \{V, F\}$ est aussi appelée une **propriété des éléments** de E .

Connecteurs logiques élémentaires

La négation, la disjonction, la conjonction, l'implication et l'équivalence de deux assertions sont définies par leurs tables de vérité :

P	Q	$\text{non } P$	$P \text{ ou } Q$	$P \text{ et } Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \iff Q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	V	F	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Propriétés des connecteurs logiques élémentaires

- $P \text{ ou } Q \iff Q \text{ ou } P$
- $P \text{ et } Q \iff Q \text{ et } P$

P , Q et R trois assertions. La conjonction et la disjonction sont commutatives.

- $(P \text{ ou } Q) \text{ ou } R \iff P \text{ ou } (Q \text{ ou } R)$
- $(P \text{ et } Q) \text{ et } R \iff P \text{ et } (Q \text{ et } R)$

La conjonction et la disjonction sont associatives.

- $P \text{ et } (Q \text{ ou } R) \iff (P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)$
- $P \text{ ou } (Q \text{ et } R) \iff (P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)$

La conjonction et la disjonction sont distributives l'une sur l'autre.

- $P \iff \text{non}(\text{non}P)$
- $\text{non}(P \text{ ou } Q) \iff (\text{non } P \text{ et } \text{non } Q)$
- $\text{non}(P \text{ et } Q) \iff (\text{non } P \text{ ou } \text{non } Q)$

Les deux dernières assertions sont les lois de Morgan.

Quantificateurs

Les propriétés d'un ensemble E sont de l'un des deux types suivants :

- **Existentiel** : il existe un élément de E vérifiant P . On note $\exists x \in E \ P(x)$.
- **Universel** : tous les éléments de E vérifient P . On note $\forall x \in E \ P(x)$.

S'il existe un unique élément de E vérifiant P , on note $\exists! x \in E, \ P(x)$.

Règles de calcul pour les quantificateurs

- $\text{non}(\exists x \in E; \ P(x)) \iff (\forall x \in E, \ \text{non } P(x))$
- $\text{non}(\forall x \in E, \ P(x)) \iff (\exists x \in E; \ \text{non } P(x))$
- $\forall x \in E, \ \forall y \in F, \ P(x, y) \iff \forall y \in F, \ \forall x \in E, \ P(x, y)$
- $\exists x \in E, \ \exists y \in F, \ P(x, y) \iff \exists y \in F, \ \exists x \in E, \ P(x, y)$

Stratégies pour une implication

- $P \Rightarrow Q$
- $(\text{non } P) \text{ ou } Q$
- $\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P$
- $\text{non}[P \text{ et } \text{non } Q]$.

Ces équivalences sont utiles pour démontrer $P \Rightarrow Q$ par contraposée, ou par l'absurde.

Théorème de récurrence simple

Soit $\mathcal{P}$ une propriété des éléments de $\mathbb{N}$, et $n_0 \in \mathbb{N}$.

$$\forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n) \iff \begin{cases} \mathcal{P}(n_0) \text{ est vraie} \\ (\forall n \geq n_0), (\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)) \end{cases}$$

Théorème de récurrence double

$$\forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n) \iff \begin{cases} \mathcal{P}(n_0) \text{ et } \mathcal{P}(n_0+1) \text{ sont vraies} \\ (\forall n \geq n_0), (\mathcal{P}(n) \text{ et } \mathcal{P}(n+1) \Rightarrow \mathcal{P}(n+2)) \end{cases}$$

Théorème de récurrence forte

$$\forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n) \iff \begin{cases} \mathcal{P}(n_0) \text{ est vraie} \\ (\forall n \geq n_0), (\mathcal{P}(n_0) \text{ et } \dots \text{ et } \mathcal{P}(n)) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1) \end{cases}$$

Ensembles

Parties d'un ensemble

E un ensemble, A, B, C des parties de E . On dit que

- A est **inclus** dans B ($A \subset B$) si tout élément de A appartient à B .
- A et B sont **égaux** ($A = B$), lorsque $A \subset B$ et $B \subset A$.

Opérations élémentaires sur les parties

- $A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$ est la **réunion** de A et B .
- $A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$ est l'**intersection** de A et B .
- $\complement_E A = \{x \in E \mid x \notin A\}$, est le **complémentaire** de A dans E .
- $A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$ est la **différence** de A et B .

Propriétés des opérations élémentaires

- L'intersection est distributive sur la réunion : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- La réunion est distributive sur l'intersection : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

- $\complement_E (A \cup B) = (\complement_E A) \cap (\complement_E B)$
- $\complement_E (A \cap B) = (\complement_E A) \cup (\complement_E B)$

Lois de Morgan

Fonction indicatrice d'une partie

Pour tout $x \in E$, on note

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}.$$

$\mathbf{1}_A : E \rightarrow \{0, 1\}$ est la fonction indicatrice de A

- $\mathbf{1}_{\complement_E A} = 1 - \mathbf{1}_A$
- $\mathbf{1}_{A \setminus B} = \mathbf{1}_A (1 - \mathbf{1}_B)$
- $\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$
- $\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$

Produit cartésien de deux ensembles

Soit E, F deux ensembles, le **produit cartésien** de E et F est l'ensemble défini par $E \times F = \{(x, y) ; x \in E, y \in F\}$. L'égalité de deux couples (x, y) et (x', y') est définie par $(x, y) = (x', y') \iff \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

Applications

Application injective, surjective

Une application $f : E \rightarrow F$ est dite :

- **injective** si $(\forall (x, x') \in E \times E), (f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$;
- **surjective** si $(\forall y \in F), (\exists x \in E) ; y = f(x)$.

Composée d'applications et injectivité, surjectivité

Soit $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$ deux applications.

- f et g injectives $\Rightarrow g \circ f$ injective.
- $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective.
- f et g surjectives $\Rightarrow g \circ f$ surjective.
- $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective.

Application bijective

Une application $f : E \rightarrow F$ est dite **bijective** si elle est à la fois injective et surjective, i.e. $(\forall y \in F), (\exists! x \in E) ; y = f(x)$.

Application réciproque d'une bijection

Soit $f : E \rightarrow F$ une **bijection**. On définit une application $f^{-1} : F \rightarrow E$, appelée **application réciproque** de f , par

$$\forall (x, y) \in E \times F, \begin{cases} y \in F \\ x = f^{-1}(y) \end{cases} \iff \begin{cases} x \in E \\ y = f(x) \end{cases}$$

$$f \text{ bijective} \iff \exists g : F \rightarrow E \begin{cases} f \circ g = id_F \\ g \circ f = id_E \end{cases} \quad \text{En ce cas, } g = f^{-1} \text{ est l'application réciproque de } f.$$

Composée de bijections

Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications.

$$f \text{ et } g \text{ bijectives} \Rightarrow g \circ f \text{ bijective} \quad \text{et } (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Image directe et image réciproque d'une partie

Soit $f : E \rightarrow F$ une application, $A \subset E$, $B \subset F$.

- **L'image directe** de A par f est le sous-ensemble de F défini par $f(A) = \{f(x) ; x \in A\} = \{y \in F \mid \exists x \in A ; y = f(x)\}$.
- **L'image réciproque** de B par f est le sous-ensemble de E défini par $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$.

Relations

Une **relation binaire** $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est une propriété vraie pour certains couples (x, y) de E et fausse pour les autres. Lorsque le couple (x, y) vérifie la relation $\mathcal{R}$, on note $x\mathcal{R}y$.

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E . On dit que :

- $\mathcal{R}$ est **réflexive** si, pour tout $x \in E$, $x\mathcal{R}x$;
- $\mathcal{R}$ est **symétrique** si, pour tous $x, y \in E$, $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$;
- $\mathcal{R}$ est **transitive** si, pour tous $x, y, z \in E$, $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$;
- $\mathcal{R}$ est **antisymétrique** si, pour tous $x, y \in E$, $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$.

On appelle **relation d'équivalence** sur un ensemble toute relation binaire réflexive, symétrique et transitive.

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E et x un élément de E . On appelle **classe d'équivalence** de x pour la relation $\mathcal{R}$ et on note $Cl(x)$ le sous-ensemble de E constitués des éléments en relation avec x . Autrement dit, $Cl(x) = \{y \in E, y\mathcal{R}x\}$.

On appelle **relation d'ordre** sur un ensemble toute relation binaire réflexive, antisymétrique et transitive.

Techniques fondamentales en algèbre et analyse

Compléments de calcul algébrique

Sommes et produits finis

Soit $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. On note

$$S_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_n = \sum_{k=0}^n x_k = \sum_{0 \leq k \leq n} x_k \text{ la somme des } x_k$$

$$P_n = x_0 \times x_1 \times \cdots \times x_n = \prod_{k=0}^n x_k = \prod_{k \in \{0, \dots, n\}} x_k \text{ le produit des } x_k.$$

Les propriétés d'associativité, commutativité et distributivité de la multiplication sur l'addition se généralisent aux sommes et produits finis.

$$\sum_{k=0}^n [a_{k+1} - a_k] = a_{n+1} - a_0$$

Somme télescopique
 $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de réels.

La somme des n premiers (resp. carrés, cubes d') entiers est donnée par :

$$\bullet \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \bullet \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \bullet \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Coefficients binomiaux

Le produit des n premiers entiers est la **factorielle de** n . On note $n! = \prod_{k=1}^n k$.

On convient que $0! = 1$.

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \text{ si } 0 \leq p \leq n \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

Coefficients du binôme
où $(n, p) \in \mathbb{Z}^2$.

Les coefficients du binôme sont des entiers naturels qui vérifient les propriétés suivantes :

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}, \quad \binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}, \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

Formule du binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$.

Identité géométrique

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \times \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k}$$

Avec $b = 1$, on obtient la somme des premiers termes de la suite géométrique de raison a .

Systèmes d'équations linéaires

L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions d'un système de n équations linéaires à p inconnues (S) ne change pas si l'on effectue sur les lignes les **opérations élémentaires** suivantes :

- échanger l'ordre des lignes L_i et L_j , $(L_i \leftrightarrow L_j)$,
- multiplier la ligne L_i par une constante non nulle $\lambda_i \in \mathbb{K}^*$, $(L_i \leftarrow \lambda_i L_i)$,
- ajouter à la ligne L_i un multiple d'une autre L_j ($i \neq j$), $(L_i \leftarrow L_i + \lambda_j L_j)$.

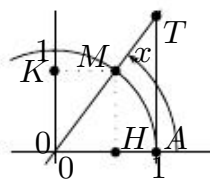
Trigonométrie circulaire

Le cercle trigonométrique

$$x \equiv (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) [2\pi]$$

$$\bullet \cos(x) = \overline{OH}, \sin(x) = \overline{OK}$$

$$\bullet \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \overline{AT}$$



Valeurs remarquables

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin(x)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos(x)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan(x)$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	

Formules fondamentales de trigonométrie circulaire

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \text{ et } 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Propriétés de symétrie

- $\cos(2\pi + x) = \cos(x)$ • $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$ • $\cos(\pi/2 + x) = -\sin(x)$
- $\cos(-x) = \cos(x)$ • $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ • $\cos(\pi/2 - x) = \sin(x)$
- $\sin(2\pi + x) = \sin(x)$ • $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$ • $\sin(\pi/2 + x) = \cos(x)$
- $\sin(-x) = -\sin(x)$ • $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ • $\sin(\pi/2 - x) = \cos(x)$

Formules d'addition

- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ • $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ • $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$ • $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

Formules de duplication

- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$
- $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$ • $\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$

Formules de linéarisation

- $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$ • $\cos^2 a = \frac{1}{2} [1 + \cos(2a)]$
- $\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$ • $\sin^2 a = \frac{1}{2} [1 - \cos(2a)]$
- $\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)]$

Formules de factorisation

- $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$ • $\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$
- $\sin p + \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$ • $\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

Nombres complexes

Notation algébrique des nombres complexes

$$\forall z \in \mathbb{C} \exists ! (x, y) \in \mathbb{R}^2, z = x + iy$$

$x = \Re(z)$ est la **partie réelle**
 $y = \Im(z)$ est la **partie imaginaire** de z .

$$z = z' \iff \begin{cases} \Re z = \Re z' \\ \Im z = \Im z' \end{cases}$$

z, z' sont deux nombres complexes.

- Le nombre complexe $\bar{z} = x - iy$ est le **conjugué** de z .
- Le nombre réel positif $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ est le **module** de z .

Nombres complexes de module 1

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

$\theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta}$ est l'**exponentielle imaginaire (pure)** d'angle θ .

- Pour tout nombre complexe z de module 1, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$
- Pour tout couple $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$ de réels, $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta \equiv \theta' [2\pi]$

Règle de calcul pour l'exponentielle imaginaire

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'} \quad (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$$

Formules d'Euler et de Moivre

$$\bullet \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \bullet \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Formules d'Euler

$$\bullet (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

$$\bullet (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin n(\theta)$$

Formules de Moivre

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $1 + e^{i\theta} = 2 \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $1 - e^{i\theta} = -2i \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$.

$$\bullet e^{ip} + e^{iq} = 2 \cos \left(\frac{p-q}{2} \right) e^{i\frac{p+q}{2}}$$

$$\bullet e^{ip} - e^{iq} = 2i \sin \left(\frac{p-q}{2} \right) e^{i\frac{p+q}{2}}$$

Factorisation de somme d'exponentielles

Notation exponentielle d'un complexe non nul

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \exists (\rho, \theta) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}, z = \rho e^{i\theta}$$

Forme exponentielle du nombre complexe non nul z .

Si $z \in \mathbb{C}^*$ s'écrit $z = \rho e^{i\theta}$ alors ρ est le **module** de z et θ est appelé un **argument** de z . On note $\arg(z)$ un argument quelconque de z .

$$z = z' \iff \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) \equiv \arg(z') [2\pi] \end{cases} \quad (z, z') \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$$

Exponentielle d'un complexe quelconque

Soit $z = x + iy$ un complexe présenté en notation algébrique. On définit

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y)).$$

$$e^z \times e^{z'} = e^{z+z'} \quad (z, z') \in \mathbb{C}^2$$

Racines n-ièmes du nombre complexe 1

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On note $\omega_n = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

ω_n est l'**exponentielle imaginaire** d'angle $\frac{2\pi}{n}$.

$$\mathbb{U}_n = \{\omega_n^k; k \in \mathbb{Z}\} = \{1, \omega_n, \omega_n^2, \dots, \omega_n^{n-1}\}$$

$\mathbb{U}_n$ est l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité.

$$1 + \omega_n + \omega_n^2 + \cdots + \omega_n^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^k = 0$$

La somme des racines n -ièmes de l'unité est nulle.

Racines n -ièmes d'un complexe

L'ensemble des n racines n -ièmes de $a \in \mathbb{C}^*$ est :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{\zeta_0 \omega_n^k; k \in \mathbb{Z}\} = \{\zeta_0, \zeta_0 \omega_n, \zeta_0 \omega_n^2, \dots, \zeta_0 \omega_n^{n-1}\} \\ &= \{\sqrt[n]{|a|} e^{i \frac{\arg a}{n}}, \sqrt[n]{|a|} e^{i \frac{\arg a + 2\pi}{n}}, \dots, \sqrt[n]{|a|} e^{i \frac{\arg a + 2(n-1)\pi}{n}}\} \end{aligned}$$

où ζ_0 est une solution particulière de $z^n = a$, par exemple $\zeta_0 = \sqrt[n]{|a|} e^{i \frac{\arg a}{n}}$.

Équations polynomiales de degré 2

$$az^2 + bz + c = 0 \iff z = \frac{-b \pm \delta}{2a}$$

$(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, δ est l'une des racines carrées (complexes) de $\Delta = b^2 - 4ac$.

Système somme-produit

Soit $(\sigma, \rho) \in \mathbb{C}^2$. Alors le couple (z_1, z_2) est solution du système $\begin{cases} z_1 + z_2 = \sigma \\ z_1 \times z_2 = \rho \end{cases}$ si et seulement si z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation $z^2 - \sigma z + \rho = 0$.

Interprétation géométrique des nombres complexes

Soit $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ un repère orthonormé direct.

- Au point $M(\mathcal{F})_{\mathcal{R}}$, on associe son **affiche**, le nombre complexe $z = x + iy$.
- À $z = x + iy$, on associe son **image** dans le plan, le point $M(\mathcal{F})_{\mathcal{R}}$.
- L'application $z \mapsto z + u$ correspond à la translation du vecteur d'affixe u .
- L'application $z \mapsto \bar{z}$ correspond à la réflexion par rapport à l'axe des abscisses.
- L'application $z \mapsto az + b$, avec $a \neq 1$ correspond à la similitude directe de centre Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$, de rapport $|a|$ et d'angle $\arg(a)$.

Généralités sur les fonctions numériques

Symétries

Soit I un intervalle symétrique par rapport à 0 et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est

- **paire** lorsque pour tout $x \in I$, $f(-x) = f(x)$;
- **impaire** lorsque pour tout $x \in I$, $f(-x) = -f(x)$.

Soit $T \in \mathbb{R}^{+*}$, une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **périodique de période T** lorsque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + T \in I$ et $f(x + T) = f(x)$.

Fonctions majorées, minorées, bornées

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles. On dit que f est

- **majorée** lorsqu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $f \leq M$;
- **minorée** lorsqu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $f \geq m$;
- **bornée** lorsque f est majorée et minorée.

Fonctions monotones

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle. On dit que f est

- **croissante** sur I si $\forall (x_1, x_2) \in I^2, x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$;
- **décroissante** sur I si $\forall (x_1, x_2) \in I^2, x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$;
- **strictement croissante** sur I si $\forall (x_1, x_2) \in I^2, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;
- **strictement décroissante** sur I si $\forall (x_1, x_2) \in I^2, x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Une fonction est dite **monotone** si elle est croissante ou décroissante sur I . Elle est dite **strictement monotone** si elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur I .

Dérivée d'une fonction à valeurs réelles

La fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est **dérivable** en $a \in I$ si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie. En ce cas, on note $f'(a)$ ce réel.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- On dit que f est dérivable dans I si elle est dérivable en tout point de I . On note $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ sa fonction dérivée.
- On dit que f est de classe C^1 dans I si de plus $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

Fonction à valeurs complexes

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Pour tout réel $x \in I$, $f(x)$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$f(x) = u(x) + iv(x),$$

où u et v sont deux fonctions réelles définies sur I .

Les fonctions u et v sont appelées parties réelle et imaginaire de f . On note $u = \Re f$ et $v = \Im f$.

Dérivée d'une fonction à valeurs complexes

Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est dite **dérivable au point** $a \in I$ si ses parties réelles et imaginaires u et v le sont. En ce cas $f'(a) = u'(a) + iv'(a)$ est appelé le nombre ¹dérivée de f en a .

1. Complexe.

Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est dite dérivable dans I (resp. de **classe** $\mathcal{C}^1$ sur I) si ses parties réelles et imaginaires u et v le sont.

Soit $\alpha \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est définie par $x \mapsto e^{\alpha(x)}$.

$$\forall x \in I, f'(x) = \alpha'(x)e^{\alpha(x)} \quad f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ dans } I.$$

Lien entre intégrales et primitives

Pour la commodité du lecteur, ce chapitre est regroupé avec les autres chapitres d'intégration, p.63.

Fonctions usuelles : définitions et propriétés

Fonctions logarithmes

$\ln$ est l'unique primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ s'annulant en 1.

$\ln$ est donc dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a donc $\ln'(x) = \frac{1}{x}$. Pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$,

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

Règle de calcul

Soit $a \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, on appelle **logarithme de base a** la fonction $\log_a : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$ par $\log_a(x) = \ln(x)/\ln(a)$.

Fonctions exponentielles

La fonction $\ln$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}$. Son application réciproque, notée $\exp$ est appelée fonction **exponentielle**. Il s'agit donc d'une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Elle vérifie pour tout couple (x, y) de réels :

$$x \in \mathbb{R} \text{ et } y = \exp(x) \iff y \in \mathbb{R}^{+*}, \text{ et } x = \ln(y)$$

La fonction $\exp$ est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\exp)'(x) = \exp(x)$. Pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$$

Règle de calcul

Soit $a \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, on appelle **exponentielle de base a** la fonction $\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ réciproque de $\log_a$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$ on a $y = \exp_a(x) \iff x = \log_a(y)$.

Fonctions puissances

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on appelle **puissance d'exposant α** la fonction $p_\alpha : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ définie pour tout $x > 0$, par $p_\alpha(x) = x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$.

p_α est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^{+\star}, p'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$. Pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}^{+\star}$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{ll} \bullet \ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x) & \bullet x^\alpha \times x^\beta = x^{\alpha+\beta} \\ \bullet x^\alpha \times y^\alpha = (x \times y)^\alpha & \bullet (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha \times \beta} \end{array} \quad \text{Règles de calcul}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x = \exp(x)$. De même, si $a \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, $\exp_a(x) = \exp(x \ln a) = a^x$.

Fonctions hyperboliques

Les fonctions **cosinus**, **sinus** et **tangente hyperboliques** sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\bullet \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \bullet \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \bullet \operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

On a les relations $e^x = \operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x)$, $e^{-x} = \operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)$.

- $\bullet \operatorname{ch} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est paire, dérivable et $\forall x, \operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}(x)$.
- $\bullet \operatorname{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est impaire, dérivable et $\forall x, \operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}(x)$.
- $\bullet \operatorname{th} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est impaire, dérivable et $\forall x, \operatorname{th}'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)} = 1 - \operatorname{th}^2(x)$.

Trigonométrie hyperbolique

Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1 \text{ et } 1 - \operatorname{th}^2(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)} \quad \text{Relations fondamentales de trigo hyperbolique}$$

Les formules de trigonométrie hyperbolique se déduisent des formules de trigonométrie circulaire en changeant les signes des produits de deux sinus.

Fonctions circulaires

- $\bullet \cos$ est 2π -périodique, paire, dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \cos'(x) = -\sin(x)$.
- $\bullet \sin$ est 2π -périodique, impaire, dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \sin'(x) = \cos(x)$.
- $\bullet \tan$ est π -périodique, impaire dérivable sur $\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ et $\forall x \in \mathcal{D}_{\tan}, \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.

Trigonométrie circulaire

Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \text{ et } 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \quad \text{Relations fondamentales de trigo circulaire}$$

Les formules de trigonométrie circulaire sont rappelées à la page 8.

Fonctions circulaires réciproques

- La fonction restreinte $\sin| : [-\pi/2; \pi/2] \rightarrow [-1; 1]$ est une bijection strictement croissante et continue. Son application réciproque $\operatorname{Arcsin} : [-1; 1] \rightarrow [-\pi/2; \pi/2]$ vérifie, pour tout couple (x, t) de réels

$$t \in [-\pi/2; \pi/2] \text{ et } x = \sin(t) \iff x \in [-1, 1] \text{ et } t = \operatorname{Arcsin}(x)$$

La fonction Arcsin est strictement croissante et impaire. Elle est continue sur $[-1, 1]$ et dérivable dans $] -1, 1[$, et $\forall x \in] -1, 1[$, $\operatorname{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

- La fonction restreinte $\cos| : [0; \pi] \rightarrow [-1; 1]$ est une bijection strictement décroissante et continue. Son application réciproque $\operatorname{Arccos} : [-1; 1] \rightarrow [0; \pi]$ vérifie pour tout couple (x, t) de réels

$$t \in [0, \pi] \text{ et } x = \cos(t) \iff x \in [-1, 1] \text{ et } t = \operatorname{Arccos}(x)$$

La fonction Arccos est strictement décroissante. Elle est continue sur $[-1, 1]$, dérivable dans $] -1, 1[$ et $\forall x \in] -1, 1[$, $\operatorname{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\forall x \in [-1, 1], \operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2}.$$

- La fonction restreinte $\tan| :] -\pi/2; \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}$ est une bijection strictement croissante et continue. Son application réciproque $\operatorname{Arctan} : \mathbb{R} \rightarrow] -\pi/2; \pi/2[$ vérifie pour tout couple (x, t) de réels

$$t \in] -\pi/2, \pi/2[\text{ et } x = \tan(t) \iff x \in \mathbb{R} \text{ et } t = \operatorname{Arctan}(x).$$

La fonction Arctan est strictement croissante et impaire. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

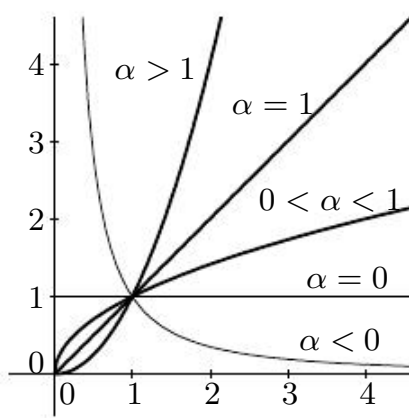
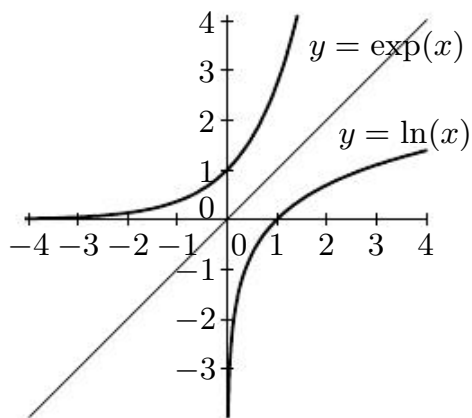
- $\forall x \in \mathbb{R}^{+\ast}$, $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(1/x) = \pi/2$.
- $\forall x \in \mathbb{R}^{-\ast}$, $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(1/x) = -\pi/2$.

***Nous devons plutôt nous fier
au calcul algébrique qu'à notre jugement.***

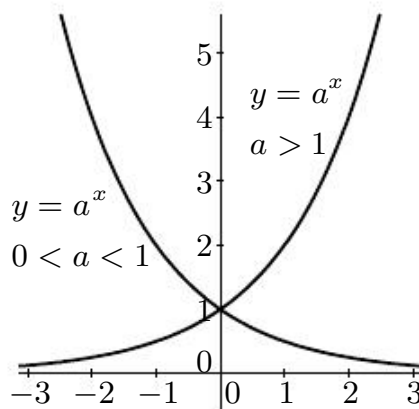
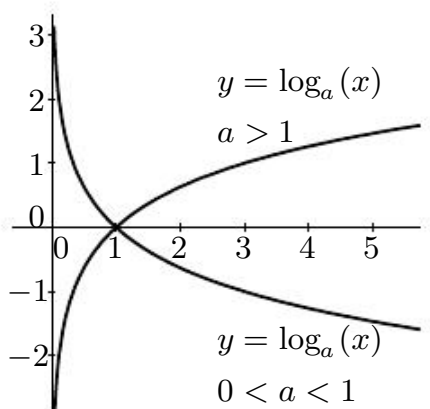
Leonhard Euler

Fonctions usuelles : graphes

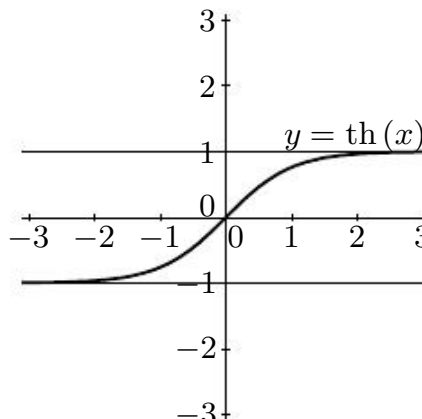
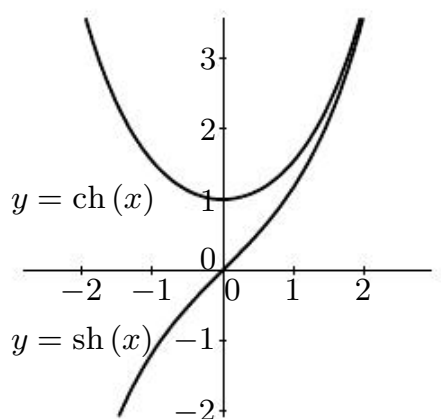
Fonctions ln, exp et puissances



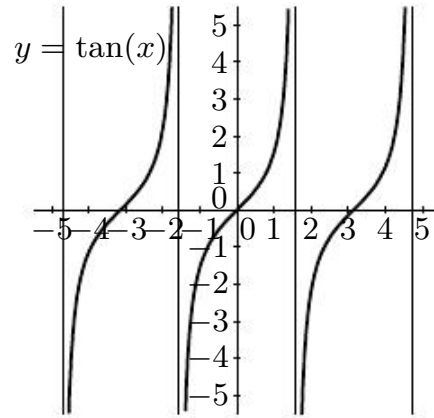
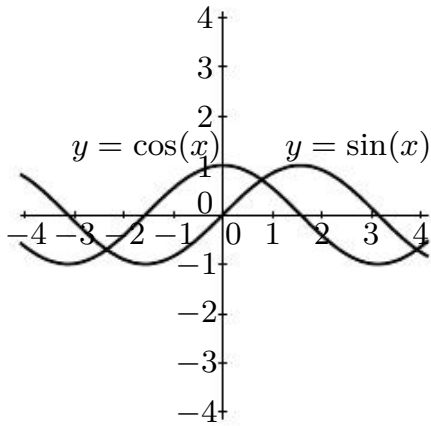
Fonctions logarithmiques et exponentielles de base a



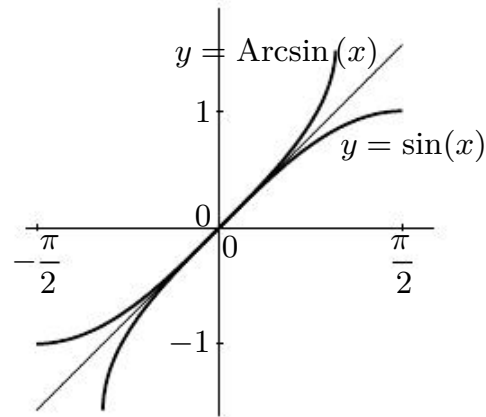
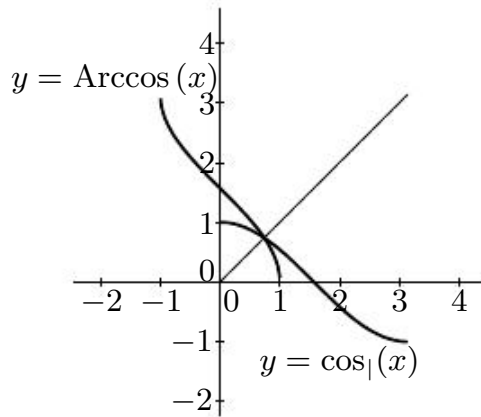
Fonctions hyperboliques directes



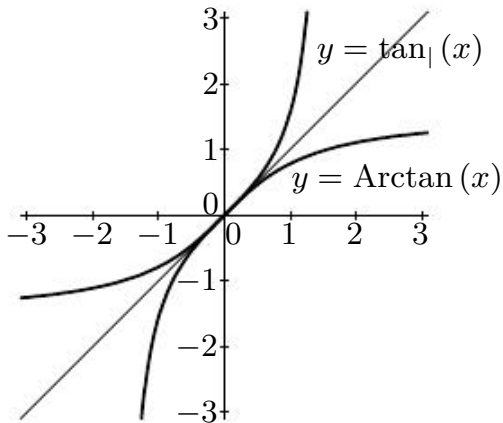
Fonctions circulaires directes



Fonctions Arccos et Arcsin



Fonction Tan et Arctan



Primitives et équations différentielles linéaires

Équations différentielles linéaires d'ordre n

Soit $a_0, a_1, \dots, a_n, b : I \rightarrow \mathbb{K}$ des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On considère les équations différentielles linéaires (EDL) :

$$\begin{aligned}(E_n) \quad & y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t) \\(H_n) \quad & y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0\end{aligned}$$

Principe de superposition

Soit $f_1, f_2 : I \rightarrow \mathbb{K}$. On suppose que :

- f_1 est solution de $y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_0(t)y = b_1(t)$,
- f_2 est solution de $y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_0(t)y = b_2(t)$,

alors $f_1 + f_2$ est solution de $y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_0(t)y = b_1(t) + b_2(t)$.

Les solutions de (E_n) sont les fonctions de la forme $f = f_0 + h$, où f_0 est une solution particulière de (E_n) et h est une solution quelconque de (H_n) .

EDL d'ordre 1 coefficient continu

Soit $a, b : I \rightarrow \mathbb{K}$ continues sur I . On note

- $A : I \rightarrow \mathbb{K}$ une primitive de a .
- $c : I \rightarrow \mathbb{K}$ une primitive de $t \mapsto b(t)e^{A(t)}$ sur I .

On résout (E_1) $y' + a(t)y = b(t)$ et (H_1) $y' + a(t)y = 0$.

Les solutions de (H_1) sont les fonctions définies sur I par $h(t) = Ce^{-A(t)}$, où $C \in \mathbb{K}$.

Résolution de l'équation homogène

La fonction $f_0 : I \rightarrow \mathbb{K}$ définie sur I par $f_0(t) = c(t)e^{-A(t)}$ est solution de (E_1) .

Méthode de la variation de la constante

Si $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, la fonction définie par
$$f(t) = \left[y_0 e^{A(t_0)} + \int_{t_0}^t b(u) e^{A(u)} du \right] e^{-A(t)}$$

est l'unique solution du **problème de Cauchy**

$$\begin{cases} y' + a(t)y = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

EDL d'ordre 2 à coefficients constants

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et $c : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue. On note (EC) $r^2 + ar + b = 0$ l'équation caractéristique associée à (E_2) $y'' + ay' + by = c(t)$ et (H_2) $y'' + ay' + by = 0$. On résout (H_2) en distinguant deux cas ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) :

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. On note Δ le discriminant de (EC) . **Les solutions à valeurs complexes de (H_2)** sont les fonctions définies sur I par

- si $\Delta \neq 0$, $h(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$, où $(C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$;
- si $\Delta = 0$, $h(t) = (C_1 + C_2 t) e^{r_0 t}$, où $(C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$;

en notant (r_1, r_2) ou r_0 , les racines distinctes ou confondues de (EC) .

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On note Δ le discriminant de (EC) . **Les solutions à valeurs réelles de (H_2)** sont les fonctions définies sur I par

- si $\Delta > 0$, $h(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$, où $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$;
- si $\Delta = 0$, $h(t) = (C_1 + C_2 t) e^{r_0 t}$ où $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$;
- si $\Delta < 0$, $h(t) = e^{rt} [C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)]$ où $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$;

en notant respectivement (r_1, r_2) les racines réelles distinctes, r_0 la racine réelle double, $r \pm i\omega$ les racines complexes et conjuguées de (EC) .

En ce qui concerne l'équation complète (E_2) , elle admet toujours des solutions. On trouve une **solution particulière** en imitant le second membre c :

- si $c(t) = P_m(t)$, (E_2) a une solution de la forme $Q_m(t)$ lorsque $b \neq 0$, de la forme $t Q_m(t)$ si $a \neq 0$ et $b = 0$, de la forme $t^2 Q_m(t)$ sinon ;
- si $c(t) = P_m(t) e^{\alpha t}$, (E_2) a une solution de la forme $Q_m(t) e^{\alpha t}$ si α n'est pas racine de (EC) , de la forme $t Q_m(t) e^{\alpha t}$ si α est racine simple de (EC) et de la forme $t^2 Q_m(t) e^{\alpha t}$ sinon ;
- si $c(t) = P_m(t) \cos(\omega t)$ ou $c(t) = P_m(t) \sin(\omega t)$, une solution à valeurs réelles de (E_2) est obtenue en prenant la partie réelle (ou imaginaire) d'une solution de $(\tilde{E}_2)$ $y'' + ay' + by = P_m(t) e^{i\omega t}$;

en notant ici $P_m(t)$ et $Q_m(t)$ désignent des polynômes de degré m .

Le problème de Cauchy d'ordre 2

(S)
$$\begin{cases} y'' + ay' + by = c(t) \\ y(t_0) = y_0 \text{ et } y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$$
 possède une unique solution.

$(a, b) \in \mathbb{K}^2$, $c : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue, $t_0 \in I$ et $(y_0, y'_0) \in \mathbb{K}^2$

*Les mathématiques ne sont pas
une moindre immensité que la mer.*

Victor Hugo

Primitives des fonctions usuelles

Fonction	Primitives	Intervalle de validité
x^α avec $\alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$I \subset \mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$ $I \subset \mathbb{R}^{+\star}$ ou $I \subset \mathbb{R}^{-\star}$ si $\alpha \in \mathbb{Z}^-$ $I \subset \mathbb{R}^{+\star}$ si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + C$	$I \subset \mathbb{R}^{+\star}$ ou $I \subset \mathbb{R}^{-\star}$
$\ln(x)$	$x \ln(x) - x + C$	$I \subset \mathbb{R}^{+\star}$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$	$I \subset \mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$	$I \subset \mathbb{R}$
$\tan(x)$	$-\ln(\cos x) + C$	$I \subset \mathcal{D}_{\tan}$
e^x	$e^x + C$	$I \subset \mathbb{R}$
$\operatorname{ch}(x)$	$\operatorname{sh}(x) + C$	$I \subset \mathbb{R}$
$\operatorname{sh}(x)$	$\operatorname{ch}(x) + C$	$I \subset \mathbb{R}$
$\operatorname{th}(x)$	$\ln(\operatorname{ch} x) + C$	$I \subset \mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{Arctan}(x) + C$	$I \subset \mathbb{R}$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2} \ln \left \frac{1+x}{1-x} \right + C$	$I \subset \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{Arcsin}(x) + C$	$I \subset]-1, 1[$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C$	$I \subset]-\infty, -1[$ ou $I \subset]1, +\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$	$I \subset \mathbb{R}$

Analyse 1

Nombres réels et suites numériques

_____ $\mathbb{R}$ est un ensemble totalement ordonné _____

La relation $\leq$ vérifie les propriétés suivantes :

- **réflexivité** : $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x$
- **antisymétrie** : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x \leq y \text{ et } y \leq x) \Rightarrow x = y$
- **transitivité** : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x \leq y \text{ et } y \leq z) \Rightarrow (x \leq z)$.

On dit que $\leq$ est une **relation d'ordre** dans $\mathbb{R}$. De plus, cet ordre est total car

- **ordre total** : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x \leq y \text{ ou } y \leq x)$.

On note $x < y$ la relation $x \leq y$ et $x \neq y$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$, alors $\forall t \in \mathbb{R}, x + t < y + t$ et $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, x t < y t$.

- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x + y| \leq |x| + |y|$
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x - y| \geq ||x| - |y||$

Inégalités triangulaires

_____ **Parties majorées, minorées, bornées** _____

Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. On dit que :

- x est un **majorant** de A si $\forall a \in A, a \leq x$;
- x est un **minorant** de A si $\forall a \in A, a \geq x$;
- x est le **plus grand élément** de A ($\max(A)$) s'il est élément et majorant de A ;
- x est le **plus petit élément** de A ($\min(A)$) s'il est élément et minorant de A .

- A est **majorée** si elle a un majorant : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall a \in A, a \leq M$.
- A est **minorée** si elle a un minorant : $\exists m \in \mathbb{R}, \forall a \in A, a \geq m$.
- A est **bornée** si elle est minorée et majorée : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall a \in A, |a| \leq M$.

On note $\text{Maj}(A)$ et $\text{Min}(A)$ les ensembles de majorants et de minorants de A .

Bornes supérieure, inférieure

- S'il existe, le plus petit majorant de A est appelé la **borne supérieure** de A .
 - S'il existe, le plus grand minorant de A est appelé la **borne inférieure** de A .
- Si ces bornes existent, on note $\sup A = \min \text{Maj}(A)$ et $\inf A = \max \text{Min}(A)$.

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide.

- A a une borne supérieure si A est majorée.
- A a une borne inférieure si A est minorée.

Propriétés des bornes supérieure et inférieure

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\alpha = \sup A \iff \begin{array}{l} \forall a \in A, \alpha \geq a \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, \alpha - \varepsilon < a \leq \alpha \end{array}$$

Caractérisation de la borne supérieure

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\alpha = \inf A \iff \begin{array}{l} \forall a \in A, \alpha \leq a \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, \alpha \leq a < \alpha + \varepsilon \end{array}$$

Caractérisation de la borne inférieure

Conséquences de la propriété de la borne supérieure

Une partie C de $\mathbb{R}$ est dite **convexe** si $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a, b) \in C^2 \Rightarrow [a, b] \subset C$.

Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

$$\forall \varepsilon > 0, \forall a \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, n\varepsilon > a$$

Propriété d'Archimède

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique entier relatif $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n + 1$, on le note $\lfloor x \rfloor$.

Partie entière d'un réel

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$.

- $\exists r \in \mathbb{Q}, x < r < y$.
- $\exists \xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, x < \xi < y$.

Densité des rationnels et des irrationnels

Suites réelles et ordre

Une **suite de réels** est une application $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. L'image de n est notée plutôt u_n . L'ensemble des suites de réels est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- u est **croissante** si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$.
- u est **strictement croissante** si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}$.
- u est **décroissante** (resp. **strictement décroissante**) si $-u$ est croissante (resp. strictement croissante).
- u est **minorée**, majorée ou bornée si l'ensemble $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ l'est.
- Si u est majorée (resp. minorée), on note $\sup u_n = \sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$, resp. $\inf u_n = \inf\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Limites de suites de réels

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que

- u **converge vers** ℓ si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon)$.
- u **diverge vers** $+\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow (u_n \geq A))$.
- u **diverge vers** $-\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow (u_n \leq A))$.

On note ces relations $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

En outre, on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0^+$ si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et u_n est strictement positif à partir d'un certain rang. On note $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Soit $(\ell, \ell') \in \bar{\mathbb{R}}^2$.

$$\left(\begin{array}{l} \bullet u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell \\ \bullet u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell' \end{array} \right) \Rightarrow \ell = \ell'$$

Unicité de la limite

Compatibilité limites et inégalités

$u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite **convergente** si elle converge vers un réel et **divergente** sinon.

Soit u et v deux suites de réels convergentes.

- Si $\lim u_n < \lim v_n$ alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, u_n < v_n$.
- S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, u_n \leq v_n$ alors $\lim u_n \leq \lim v_n$.

En particulier, toute suite convergente est bornée.

Opérations sur les limites

Soit $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \in \bar{\mathbb{R}}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell' \in \bar{\mathbb{R}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = |\ell|$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \times v_n = \ell \times \ell'$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda \cdot u_n = \lambda \cdot \ell$
- Si $\ell \neq 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1/u_n = 1/\ell$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n = \ell + \ell'$
- Si $\ell = 0^+$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1/u_n = +\infty$

pourvu que les opérations ci-dessus soient bien définies dans $\bar{\mathbb{R}}$.

$\infty - \infty, 0 \times \infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ ne sont pas définies.

Formes indéterminées

Limites des suites extraites

Soit u, v deux suites de réels. On dit que $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une **suite extraite** de la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}$.

Si u a pour limite $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$, alors toute suite extraite de u a pour limite ℓ .

Existence de limite par comparaison, encadrement

Soit u, v, w des suites de réels, ℓ un réel.

Si $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, |v_n| \leq |u_n| \end{cases}$ alors v converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

Si $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \leq w_n \end{cases}$ alors v converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$.

Si $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq u_n \end{cases}$ alors v diverge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

Théorème de la limite monotone

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite **monotone**. Alors

u est convergente $\iff u$ est bornée.

Lorsque u n'est pas monotone, l'implication $\Rightarrow$ subsiste.

- Soit u une suite **croissante** de nombres réels.
 - ▶ Si u est majorée, alors u est convergente et $\lim u_n = \sup_n u_n$.
 - ▶ Si u n'est pas majorée alors u est divergente vers $+\infty$: $\lim u_n = +\infty$.
- Soit u une suite **décroissante** de nombres réels.
 - ▶ Si u est minorée, alors u est convergente et $\lim u_n = \inf_n u_n$.
 - ▶ Si u n'est pas minorée alors u est divergente vers $-\infty$: $\lim u_n = -\infty$.

Convergence des suites adjacentes

Soit $(u, v) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2$. Les suites u et v sont dites **adjacentes** si

- l'une est croissante et l'autre décroissante,
- $(u_n - v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite nulle.

Deux suites adjacentes u et v sont convergentes et ont même limite.

Si $(u_n) \nearrow$ et $(v_n) \searrow$ de limite commune ℓ , alors

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, u_n \leq \ell \leq v_p.$$

Théorème de Bolzano-Weierstrass

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une **suite bornée** de nombres réels. Il existe $\ell \in \mathbb{R}$ et $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, une application strictement croissante, telles que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} u_{\varphi(k)} = \ell.$$

De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

Traductions séquentielles

A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\forall \ell \in \mathbb{R}, \exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}; \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell$

Caractérisation séquentielle de la densité

Soit $x \in \mathbb{R}$ un réel. On note pour $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ et $q_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$.
Les suites (p_n) et (q_n) sont adjacentes de limite commune x . En conséquence, les ensembles $\mathbb{D}$ des nombres décimaux et $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels sont denses dans $\mathbb{R}$.

Il existe une suite (a_n) d'éléments de A telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup(A)$.

Traduction séquentielle de la borne supérieure d'une partie non vide et majorée

Suites de référence

Suites géométriques

Soit u la **suite géométrique** de raison q de premier terme u_0 : $u_n = u_0 q^n$.
 (u_n) est convergente $\iff |q| < 1$ ou $q = 1$.

La **suite des sommes partielles** (S_n) est définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

(S_n) est convergente $\iff |q| < 1$ et dans ce cas $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{u_0}{1 - q}$.

Suites arithmético-géométriques

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq 1$ et $b \neq 0$. La suite u la suite donnée par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$ est une **suite arithmético-géométrique**.

Soit r tel que $r = ar + b$. La suite $(v_n) = (u_n - r)$ est géométrique de raison a .

Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$. Une suite (u_n) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ est une **suite récurrente linéaire d'ordre 2 (RL2)**.

Soit u une suite RL2. On note Δ le discriminant de l'équation caractéristique (EC) :

$$r^2 - ar - b = 0$$

- Si $\Delta > 0$, (EC) a deux racines réelles distinctes, notées r_1, r_2 .
 $\exists !(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$
- Si $\Delta = 0$, (EC) a une racine réelle double, notée r_0 .
 $\exists !(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda r_0^n + n \mu r_0^n$
- Si $\Delta < 0$, (EC) a deux racines complexes conjuguées, notées $r = \rho e^{\pm i\theta}$.
 $\exists !(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \rho^n (\lambda \cos n\theta + \mu \sin n\theta)$

Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Étant donné une fonction $f : I \rightarrow I$, définie sur un intervalle I à valeurs dans ce même intervalle I , et $a \in I$, il existe une suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, unique telle que

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

De plus, $(u_n) \in I^{\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de I .

- On suppose que $f - id : I \rightarrow \mathbb{R}$ est de signe constant sur I .

- Si $f - id$ est positive sur I , alors (u_n) est croissante.
- Si $f - id$ est négative sur I , alors (u_n) est décroissante.
- On suppose que f est monotone.
- Si f est croissante sur I alors (u_n) est monotone.
- Si f est décroissante sur I alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et de monotonies contraires.
- On suppose que f est continue. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$, alors ℓ est une extrémité ouverte de I ou bien une solution dans I de l'équation : $f(x) = x$.
- On suppose que f est lipschitzienne de constante $k \in]0, 1[$, ℓ un point fixe de f . Alors (u_n) est convergente de limite ℓ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$.

Limites de fonctions

Notions de limites de fonctions

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On note :

- $a \in \overset{\circ}{I}$, si a est un point de I , mais pas une extrémité de I ;
- $a \in \bar{I}$, si a est un élément de I ou une extrémité réelle de I ;
- $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$ si a est un point ou une extrémité éventuellement infinie de I .

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \bar{I}$, $\ell \in \mathbb{R}$.

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$.
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq A)$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, (x \geq B \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, (x \geq B \Rightarrow f(x) \geq A)$.

Si $a \in \overset{\circ}{I}$, on note $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell$ si $\lim_{x \rightarrow a} f|_I(x) = \ell$, où $f|_I = f|_{I \cap]-\infty, a[}$.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \iff \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell.$$

Propriétés des fonctions possédant une limite

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$, $\ell, \ell' \in \bar{\mathbb{R}}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \\ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell' \end{array} \right. \Rightarrow \ell = \ell'.$$

Unicité de la limite

Les assertions suivantes sont équivalentes :

$$\begin{array}{l} \Uparrow \bullet \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \\ \Downarrow \bullet \forall u \in I^{\mathbb{N}}, \lim u_n = a \Rightarrow \lim f(u_n) = \ell \end{array}$$

Caractérisation séquentielle de la limite

Compatibilité limite et inégalités

Soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell'$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$.

- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < \lim_{x \rightarrow a} g(x)$, alors $f < g$ dans un voisinage de a .
- Si $f \leq g$ au voisinage de a , alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \in \mathbb{R}$, alors f est bornée au voisinage de a .

Opérations sur les limites

- $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |\ell|$
- $\lim_{x \rightarrow a} \lambda f(x) = \lambda \ell$
- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \ell + \ell'$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \times g(x) = \ell \times \ell'$
- si $\ell \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow a} 1/f(x) = 1/\ell$
- si $\ell = 0^+$, $\lim_{x \rightarrow a} 1/f(x) = +\infty$

Pourvu que ces opérations aient un sens dans $\mathbb{R}$.

Encadrement, comparaison

- Si $\begin{cases} \forall x \in I, |g(x)| \leq |f(x)| \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \end{cases}$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.
- Si $\begin{cases} \forall x \in I, f(x) \leq g(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \end{cases}$ alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$.
- Si $\begin{cases} \forall x \in I, f(x) \leq g(x) \leq h(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell \end{cases}$ alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$.

Changement de variable

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$.

$$\text{Si } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \\ \lim_{y \rightarrow b} g(y) = \ell \end{cases} \quad \text{alors} \quad \lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = \ell.$$

Cas des fonctions monotones

Soit $(a, b) \in \bar{\mathbb{R}}^2$ tel que $a < b$ et $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une application **monotone**. Alors

- Si f est **croissante**, alors
 - ▶ f possède une limite dans $\bar{\mathbb{R}}$ en a et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \inf_{x \in]a, b[} f(x)$,
 - ▶ f possède une limite dans $\bar{\mathbb{R}}$ en b et $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \sup_{x \in]a, b[} f(x)$.
- Si f est **décroissante**, alors
 - ▶ f possède une limite dans $\bar{\mathbb{R}}$ en a et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \sup_{x \in]a, b[} f(x)$,
 - ▶ f possède une limite dans $\bar{\mathbb{R}}$ en b et $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \inf_{x \in]a, b[} f(x)$.

De plus f admet des limites finies à gauche et à droite en tout point $c \in]a, b[$:

- Si f est **croissante**, alors $\lim_{c^-} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{c^+} f(x)$.
- Si f est **décroissante**, alors $\lim_{c^+} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{c^-} f(x)$.

Limites usuelles

Limites des fonctions usuelles

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+\star}$.

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} p_\alpha(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} p_\alpha(x) = +\infty$

Croissances comparées des fonctions usuelles

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\gamma x}} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\alpha e^{\gamma x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\beta (|\ln x|)^\alpha = 0$

Autres limites usuelles

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2}$

Fonctions continues sur un intervalle

Notions de continuité

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que

- f est **continue au point** a si $\lim_a f(x) = f(a)$;
- f est **continue à gauche** en a si $\lim_{a^-} f(x) = f(a)$;
- f est **continue sur** I si f est continue en tout point de I .

Soit $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est **prolongeable par continuité** au point a si f admet une limite finie ℓ en a . Le **prolongement continu** de f en a est la fonction $\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in I, \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$$

Propriétés des fonctions continues sur un intervalle

Soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}, h : J \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que h (resp. f, g) est continue sur J (resp. I) et que $f(I) \subset J$. Alors les fonctions $\lambda f, f + g, f \times g$ et $h \circ f$ sont continues sur I . Si de plus f ne s'annule pas, alors $1/f$ est continue sur I .

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour tout couple $(a, b) \in I^2$, f atteint toute valeur γ intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$:

$$\left(\forall (a, b) \in I^2, \forall \gamma \in \mathbb{R} \right), \quad \left(\gamma \in [f(a), f(b)] \Rightarrow \exists c \in I, \quad f(c) = \gamma. \right)$$

Si de plus f est strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors pour toute valeur γ , intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique élément $c \in I$ tel que $f(c) = \gamma$.

Théorème des bornes atteintes

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ ($a < b$). Alors f est bornée et atteint ses bornes. Plus précisément, il existe $\alpha, \beta \in [a, b]$ tels que

$$\forall x \in [a, b], \quad f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta).$$

Théorème de la bijection bicontinue

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application **continue et strictement monotone** sur I . Alors $J = f(I)$ est un intervalle et f réalise une bijection de I sur J . De plus :

- $f^{-1} : J \rightarrow I$ est strictement monotone, de même monotonie que f .
- $f^{-1} : J \rightarrow I$ est continue de J sur I .

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction **continue et injective**. Alors f est strictement monotone.

Continuité uniforme

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $k \in \mathbb{R}^+$. On dit que

- f est **lipschitzienne de constante k** , si $\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.
- f est **uniformément continue sur I (UCI)** si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in I^2, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

f lipschitzienne $\Rightarrow f$ UCI $\Rightarrow f$ continue sur I Les réciproques sont fausses !

Théorème de Heine

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue alors f est uniformément continue sur $[a, b]$.

Dérivation

Dérivabilité

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$. f est **dérivable** en a si $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ a une limite finie en

a . En ce cas, $f'(a) = \lim_{\substack{x \neq a \\ x \rightarrow a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est le **nombre dérivé** de f en a .

Si f est dérivable au point a , alors

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + o_{x \rightarrow a}(x - a)$$

Développement limité à l'ordre 1 d'une fonction dérivable

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable au point $a \in I$, alors f est continue au point a .

La réciproque est fausse !

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable dans $]a, b[$. Si $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} = \ell$.

Soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables sur I . Alors

- $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$ est dérivable et $(\lambda \cdot f + \mu \cdot g)' = \lambda \cdot f' + \mu \cdot g'$;
- $f \times g$ est dérivable et $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$;
- si g ne s'annule pas, $\frac{f}{g}$ est dérivable et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$.

Si f est dérivable dans I , g est dérivable dans J et $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est dérivable et

$$(g \circ f)' = g' \circ f \times f'$$

Règle de dérivation en chaîne

Soit $f : I \rightarrow J$ une bijection continue de l'intervalle I sur l'intervalle J . Si f est dérivable si f' ne s'annule pas dans I , alors $f^{-1} : J \rightarrow I$ est dérivable et

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Dérivée d'une bijection réciproque

Extremums locaux d'une fonction dérivable

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que f présente un

- **max local** en a s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a tel que $\forall x \in \mathcal{V}, f(x) \leq f(a)$,
- **min local** en a s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a tel que $\forall x \in \mathcal{V}, f(x) \geq f(a)$,
- **extremum local** en a si elle possède un maximum ou un minimum local en a .

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I , et $a \in \overset{\circ}{I}$.

Si f a un extremum local en a , alors $f'(a) = 0$.

Condition nécessaire d'extrémalité

Lorsque $f'(a) = 0$, on dit que a est un **point critique** de f .

Théorème de Rolle

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable dans $]a, b[$.

Si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorèmes des accroissements finis (TAF)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable dans $]a, b[$.

$$\exists c \in]a, b[, \text{ tel que } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Égalité des AF

$$\text{Si } \forall x \in]a, b[, m \leq f'(x) \leq M, \text{ alors } m \cdot (b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M \cdot (b - a)$$

Inégalité des AF

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable dans I et s'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $|f'| \leq k$, alors f est k -lipschitzienne.

Limite de la dérivée

Si $\lim_{\substack{x \neq a \\ x \rightarrow a}} f'(x) = \ell$, alors $\lim_{\substack{x \neq a \\ x \rightarrow a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue dans I , dérivable dans $I \setminus \{a\}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

En particulier, si $\ell \in \mathbb{R}$, f est dérivable en a et $f'(a) = \lim_{\substack{x \neq a \\ x \rightarrow a}} f'(x) = \ell$.

Fonctions monotones dérivables

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle non trivial I .

- f croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$. Elle est strictement croissante si de plus f' ne s'annule sur aucun sous-intervalle non trivial de I .
- f décroissante sur I si et seulement si $f' \leq 0$. Elle est strictement décroissante si de plus f' ne s'annule sur aucun sous-intervalle non trivial de I .

Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, on définit les **dérivées d'ordre $0, 1, \dots, n, \dots$** de f lorsqu'elles existent par $f^{(0)} = f$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, si $f^{(n)}$ existe et est dérivable dans I , on pose $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.

Si f admet une dérivée $n^{\text{ième}}$ continue dans I , on dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$. On note $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I .

Soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}, h : J \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que h (resp. f, g) est de classe $\mathcal{C}^n$ sur J (resp I) et que $f(I) \subset J$. Alors les fonctions $\lambda f, f + g, f \times g, 1/f$ (si f ne s'annule pas) et $h \circ f$ sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur I . Si de plus $f : I \rightarrow J$ est bijective et f' ne s'annule pas dans I , alors f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I .

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)}$$

Formule de Leibniz

Dérivées des fonctions usuelles

En notant p_α la fonction puissance α -ième ($x \mapsto x^\alpha$), nous avons :

Dérivée	Intervalle	Paramètres
$\exp'(x) = e^x$	$x \in \mathbb{R}$	
$\ln'(x) = \frac{1}{x}$	$x \in \mathbb{R}^{+\star}$	
$p'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$	$x \in]0, +\infty[$	$\alpha \in \mathbb{R}$
$\sin'(x) = \cos(x)$	$x \in \mathbb{R}$	
$\cos'(x) = -\sin(x)$	$x \in \mathbb{R}$	
$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$x \in]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[\quad k \in \mathbb{Z}$	
$\operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}(x)$	$x \in \mathbb{R}$	
$\operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}(x)$	$x \in \mathbb{R}$	
$\operatorname{th}'(x) = 1 - \operatorname{th}^2(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}$	$x \in \mathbb{R}$	
$\operatorname{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in]-1, 1[$	
$\operatorname{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in]-1, 1[$	
$\operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$	

Convexité

Définition et caractérisations

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On dit que f est **convexe** sur I si :

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1], f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

f est dite **concave** sur I si $-f$ est convexe.

- Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, f est convexe sur I ssi $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ est croissante sur I .
- Si f est de classe $\mathcal{C}^2$, f est convexe sur I ssi $f'' : I \rightarrow \mathbb{R}$ est positive sur I .

Caractérisations des fonctions convexes

Inégalités de convexité

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in I^n$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ tels que $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$, alors

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(a_i)$$

Inégalité de Jensen

Si plus $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Alors

$$\forall (a, x) \in I^2, f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$$

Inégalité des tangentes
le graphe de f est situé au-dessus de ses tangentes.

L'essence des mathématiques, c'est la liberté.

Georg Cantor

Algèbre générale

Entiers relatifs, arithmétique

Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$\begin{aligned} \bullet & a = bq + r \\ \bullet & 0 \leq r < b \end{aligned}$$

q et r sont le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b .

PGCD, PPCM de deux entiers

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ un couple d'entiers relatifs.

- Si $(a, b) \neq (0, 0)$, on note $a \wedge b$ le plus grand diviseur commun à a et b . On convient que $0 \wedge 0 = 0$.
- Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$, on note $a \vee b$ le plus petit entier strictement positif, multiple commun de a et b . Si $a = 0$ ou $b = 0$, on convient que $a \vee b = 0$.

Entiers premiers entre eux, théorème de Bezout

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. a et b sont dits **premiers entre eux** si $\text{PGCD}(a, b) = 1$.

$$a \text{ et } b \text{ sont premiers entre eux} \iff \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2, au + bv = 1.$$

Soit $a_1, a_2, \dots, a_n$ des entiers non tous nuls. L'ensemble des diviseurs communs à $a_1, a_2, \dots, a_n$ admet un plus grand élément, appelé **plus grand commun diviseur** et noté $\text{PGCD}(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$, $d = \text{PGCD}(a_1, \dots, a_n)$. Alors il existe des entiers $u_1, u_2, \dots, u_n$ tels que $d = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$.

Théorème de Gauss

$$\left(\begin{aligned} \bullet & a \mid bc \\ \bullet & a \wedge b = 1 \end{aligned} \right) \Rightarrow a \mid c. \quad (a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$$

Nombres premiers

On appelle **nombre premier** tout entier naturel $p \geq 2$ dont les seuls diviseurs dans $\mathbb{N}$ sont 1 et p lui-même. Un entier naturel $n \geq 2$ qui n'est pas premier est dit **composé**. On note $\mathfrak{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

- Un entier $n \geq 2$ admet au moins un diviseur premier.
- Un entier $n \geq 2$ composé admet un diviseur premier p vérifiant $p \leq \sqrt{n}$.

L'ensemble $\mathfrak{P}$ des nombres premiers est infini.

Décomposition primaire d'un entier

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Il existe des nombres premiers $p_1, p_2, \dots, p_N$ (avec $p_1 < p_2 < \dots < p_N$), et des entiers naturels non nuls $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$, uniques, tels que :

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_N^{\alpha_N}.$$

Expressions du PGCD et PPCM en décomposition primaire

Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2 donnés par

$$a = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_N^{\alpha_N} \quad \text{et} \quad b = p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \dots \times p_N^{\beta_N}$$

où $p_1, p_2, \dots, p_N$ sont des nombres premiers deux à deux distincts, et les exposants, (α_i) , (β_i) sont des nombres entiers, positifs ou nuls. Alors :

$$\begin{aligned} a \wedge b &= p_1^{\min(\alpha_1, \beta_1)} \times p_2^{\min(\alpha_2, \beta_2)} \times \dots \times p_N^{\min(\alpha_N, \beta_N)} \\ a \vee b &= p_1^{\max(\alpha_1, \beta_1)} \times p_2^{\max(\alpha_2, \beta_2)} \times \dots \times p_N^{\max(\alpha_N, \beta_N)} \end{aligned}$$

Congruences

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. On dit que a est congru à b modulo n , et on note $a \equiv b [n]$ si n divise $b - a$.

$$\left\{ \begin{array}{l} a \equiv b [n] \\ c \equiv d [n] \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a + c \equiv b + d [n] \\ a \times c \equiv b \times d [n] \\ \forall k \in \mathbb{N}, a^k \equiv b^k [n] \end{array} \right.$$

Compatibilité avec les opérations

Petit théorème de Fermat

Soit $p \in \mathfrak{P}$ un nombre premier.

- Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on a $n^p \equiv n [p]$.
- Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $p \wedge n = 1$, on a $n^{p-1} \equiv 1 [p]$.

Structures algébriques usuelles

Lois de composition interne

Une loi de composition interne (l.c.i.) $\star : E \times E \rightarrow E$ est dite :

- **associative** si $\forall (x, y, z) \in E^3$, $x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$;
- **commutative** si $\forall (x, y) \in E^2$, $x \star y = y \star x$.

Un élément de $(E, \star)$ est dit **élément neutre** pour $\star$ si : $\forall x \in E, x \star e = e \star x = x$.

On suppose que $(E, \star)$ a un élément neutre e et que $\star$ est associative. Un élément $x \in E$ est dit **symétrisable** s'il existe $x' \in E$, tel que $x \star x' = x' \star x = e$. x' est alors appelé le **symétrique** de x .

Groupes, sous-groupes

Soit G un ensemble muni d'une loi de composition interne notée $\cdot$.

On dit que $(G, \cdot)$ est un **groupe** si

- la loi $\cdot$ est associative
- la loi $\cdot$ possède un élément neutre 1_G
- tout élément x possède un symétrique x^{-1}

Si de plus la loi $\star$ est commutative, on dit que G est groupe **commutatif**.

Soit $(G, \cdot)$ un groupe, H une partie de G . H est un **sous-groupe** de G si :

- H est stable pour la loi de G : $\forall (x, y) \in H \times H, x \cdot y \in H$.
- $(H, \cdot)$ est un groupe.

Caractérisation des sous-groupes

Soit $(G, \cdot)$ un groupe et H une partie de G . Alors

$$H \text{ sous-groupe de } G \iff \begin{cases} \bullet H \neq \emptyset \\ \bullet \forall (x, y) \in H \times H, x \cdot y^{-1} \in H \end{cases}$$

Morphismes de groupes

Soit $(G, \cdot)$ et $(G', \star)$ deux groupes. On appelle **morphisme de groupes** une application $f : G \rightarrow G'$ telle que :

$$\forall (x, y) \in G \times G, f(x \cdot y) = f(x) \star f(y)$$

Lorsque $f : G \rightarrow G'$ est un morphisme bijectif, on dit que f est un **isomorphisme** de groupes.

Soit $f : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupes. Alors :

$\text{Im } f = \{f(x); x \in G\}$ est un sous-groupe de G'

Image d'un morphisme de groupes

$\text{Ker } f = \{x \in G \mid f(x) = 1_{G'}\}$ est un sous-groupe de G

Noyau d'un morphisme de groupes

f est injectif si et seulement si $\text{Ker } f = \{1_G\}$.

Anneaux et corps

Soit A un ensemble, $+$ et $\times$ deux l.c.i. $(A, +, \times)$ est un **anneau** si :

- $(A, +)$ est un **groupe commutatif**. L'élément neutre de $+$ est noté 0_A
- la loi $\times$ est **associative**
- la loi $\times$ est **distributive par rapport à la loi $+$**

- la loi $\times$ possède un **élément neutre**, noté 1_A

Si de plus $\times$ est commutative, on dit que $(A, +, \times)$ est un **anneau commutatif**.

Un anneau $(A, +, \times)$ non réduit à $\{0_A\}$ est dit **intègre** lorsqu'il ne possède pas de diviseurs stricts de 0_A : $\forall (a, b) \in A^2, a \times b = 0_A \Rightarrow a = 0_A$ ou $b = 0_A$.

Soit $(A, +, \times)$ un anneau et B une partie de A . B est un **sous-anneau** de A si :

- $1_A \in B$;
- B est stable pour les lois de A : $\forall (a, b) \in B \times B, a + b \in B$ et $a \times b \in B$;
- muni de ces lois de composition interne, $(B, +, \times)$ est un anneau.

Un **corps** $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un anneau commutatif non réduit à $\{0\}$, dans lequel tout élément non nul est symétrisable pour $\times$.

Polynômes à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

_____ Anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ _____

Un polynôme est une expression de la forme

$$P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$$

$n \in \mathbb{N}$, les $a_k \in \mathbb{K}$ sont les **coefficients de P** et X est l'**indéterminée**.

Le **degré** d'un polynôme non nul P est le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$.

On note $d^\circ P$ cet entier. On convient que le polynôme nul a pour degré $-\infty$.

On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes d'indéterminée X à coefficients dans $\mathbb{K}$, et $\mathbb{K}_n[X]$ le sous-ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n .

_____ Opérations algébriques dans $\mathbb{K}[X]$ _____

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, $Q = \sum_{k=0}^m b_k X^k$ deux polynômes et $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit :

$$\begin{aligned} \bullet P+Q &= \sum_{k=0}^{\max\{n,m\}} (a_k+b_k) X^k & \bullet P' &= \sum_{k=1}^n k \cdot a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)a_{k+1} X^k \\ \bullet \lambda \cdot P &= \sum_{k=0}^n \lambda a_k X^k & \bullet P \times Q &= \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k, \text{ où } c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}. \end{aligned}$$

_____ Opérations algébriques et degré _____

Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Alors

- $d^\circ(P+Q) \leq \max\{d^\circ P, d^\circ Q\}$, égalité si $d^\circ P \neq d^\circ Q$
- $d^\circ(P \times Q) = d^\circ P + d^\circ Q$
- $d^\circ P' = d^\circ P - 1$ si P est non constant
- $d^\circ(\lambda P) = d^\circ P$

_____ Dérivées successives _____

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$.

$$P^{(p)} = \sum_{k=p}^n a_k \frac{k!}{(k-p)!} X^{k-p} \text{ si } p \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad P^{(p)} = 0 \text{ si } p > n.$$

Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$(P + Q)^{(n)} = P^{(n)} + Q^{(n)} \text{ et } (P \times Q)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^{(k)} \times Q^{(n-k)}$$

Formule de Taylor polynomiale

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k$$

$P \in \mathbb{K}_n[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ un scalaire

Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$

Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$. On dit que B **divise** A lorsqu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$. On note $B \mid A$. Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$.

Il existe un couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$, unique tel que $\begin{cases} A = B \times Q + R \\ d^\circ R < d^\circ B \end{cases}$

Q est le quotient, R est le reste de la **division euclidienne** de A par B .

Racines d'un polynôme

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est **racine** de P lorsque $P(\alpha) = 0$. En ce cas, l'**ordre de multiplicité** de α est le plus grand entier k tel que $(X - \alpha)^k$ divise P .

Caractérisations des racines

- α est racine de $P \iff (X - \alpha)$ divise P
- α est racine d'ordre r de $P \iff \begin{cases} P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(r-1)}(\alpha) = 0 \\ P^{(r)}(\alpha) \neq 0 \end{cases}$

Nombres de racines et degré

Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$ un polynôme de degré inférieur ou égal à n .

- si $d^\circ P = n$, alors P admet au plus n racines comptées avec multiplicité.
- si le nombre de racines de P comptées avec multiplicité est supérieur à $n + 1$ alors $P = 0$.

Formule d'interpolation de Lagrange

Soit $x_1, \dots, x_n$ des nombres distincts, $y_1, \dots, y_n$ quelconques. Il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$, unique tel que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(x_i) = y_i$. P est donné par

$$P(X) = \sum_{i=1}^n y_i \left[\prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{X - x_j}{x_i - x_j} \right].$$

Théorème fondamental de l'algèbre

Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ **non constant** admet une racine complexe.

Décompositions primaires d'un polynôme

$P \in \mathbb{C}[X]$ se factorise de façon unique sous la forme :

$$P = a \prod_{k=1}^p (X - \alpha_k)^{r_k}$$

α_k sont les racines complexes distinctes de P de multiplicités respectives r_k .

$P \in \mathbb{R}[X]$ se factorise de façon unique sous la forme :

$$P = a \prod_{k=1}^p (X - \alpha_k)^{r_k} \prod_{j=1}^q \left(X^2 + \beta_j X + \gamma_j \right)^{s_j}$$

α_k est racine réelle de P de multiplicité r_k , le polynôme à coefficients réels $X^2 + \beta_j X + \gamma_j$ n'a pas de racines réelles.

Polynômes scindés

$P \in \mathbb{K}[X]$ est **scindé** s'il peut s'écrire comme produit de polynômes de degré 1.

Un polynôme de degré n est scindé sur $\mathbb{K}$ si et seulement si il admet n racines comptées avec multiplicité.

Fonctions symétriques élémentaires

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. On pose pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$$

$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ sont les **fonctions symétriques élémentaires** de $x_1, \dots, x_n$

Relations entre racines et coefficients

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ un polynôme scindé de degré $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $x_1, \dots, x_n$ sont les n racines de P si et seulement si $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sigma_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$.

PGCD et PPCM de deux polynômes

Soit A et B des polynômes non nuls. Il existe un unique polynôme $\Delta \in \mathbb{K}[X]$, et un unique polynôme $M \in \mathbb{K}[X]$ unitaire et tels que

- Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P \mid A$ et $P \mid B \iff P \mid \Delta$.
- Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $A \mid P$ et $B \mid P \iff M \mid P$.
- Δ est le **plus grand diviseur commun** de A et B , on note $\Delta = \text{PGCD}(A, B)$.
- M est le **plus petit multiple commun** de A et B , on note $M = \text{PPCM}(A, B)$.

Polynômes premiers entre eux

A et B sont dits **premiers entre eux** lorsque $\text{PGCD}(A, B) = 1$.

A et B sont premiers entre eux
si et seulement si

$$\exists (U, V) \in \mathbb{K}[X]^2, AU + BV = 1$$

Théorème de Bezout

Si $A \mid BC$ et $\text{PGCD}(A, B) = 1$ alors $A \mid C$

Théorème de Gauss

Fractions rationnelles

Corps des fractions rationnelles

Une **fraction rationnelle** est une expression de la forme $F = P/Q$, où $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et Q n'est pas le polynôme nul.

$\mathbb{K}(X)$ est le corps des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$ et d'indéterminée X

Lorsque P et Q sont premiers entre eux et Q est unitaire, on dit que F est **présentée sous forme irréductible**. Soit $F = P/Q$ une fraction rationnelle présentée sous forme irréductible.

Le nombre $d = d^\circ P - d^\circ Q \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ est appelé **degré** de F . On note $d^\circ F = d^\circ P - d^\circ Q$.

- Si $\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine de P d'ordre de multiplicité p , on dit que α est un **zéro** de F de multiplicité p .
- Si $\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine de Q d'ordre de multiplicité p , on dit que α est un **pôle** de F de multiplicité p .

Partie entière

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ irréductible et α un pôle de F de multiplicité $p \in \mathbb{N}^*$.

Il existe un couple $(E, G) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}(X)$, unique tel que E est un polynôme, G est une fraction rationnelle de degré strictement négatif et $F = E + G$.

E est appelée la **partie entière** de F , notée $\text{Ent}(F)$, G est la partie fractionnaire.

Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$

Soit $F = P/Q \in \mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle irréductible.

$$F = \text{Ent}(F) + \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{p_i-1} \frac{a_{i,k}}{(X - \alpha_i)^{p_i-k}} \quad \text{où } Q = \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)^{p_i}.$$

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Notons $(a_1, \dots, a_n)$ les zéros distincts de P , et $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

leurs ordres de multiplicités respectifs. Alors $\frac{P'(X)}{P(X)} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{(X - \alpha_i)}.$

_____ Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ _____

Soit $F = P/Q \in \mathbb{R}[X]$ une fraction rationnelle irréductible.

$$F = Ent(F) + \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{p_i-1} \frac{a_{i,k}}{(X - \alpha_i)^{p_i-k}} + \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{q_j-1} \frac{b_{j,k}X + c_{j,k}}{(X^2 + \beta_j X + \gamma_j)^{q_j-k}}$$

où $Q = \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)^{p_i} \times \prod_{j=1}^m (X^2 + \beta_j X + \gamma_j)^{q_j}$.

_____ Partie polaire relative à un pôle simple _____

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ irréductible et α un pôle simple de F : $F(X) = \frac{P}{(X - \alpha) \times \hat{Q}}$
 où $\hat{Q}(\alpha) \neq 0$. Alors le coefficient a_0 relatif à l'élément simple $\frac{1}{(X - \alpha)}$ est donné par

$$a_0 = \frac{P}{\hat{Q}}(\alpha) = \frac{P(\alpha)}{\hat{Q}'(\alpha)}$$

Ne tenez pour certain que ce qui est démontré.

Isaac Newton

Algèbre linéaire

Systèmes d'équations linéaires

_____ Généralités sur les systèmes d'équations linéaires _____

On appelle **système d'équations linéaires** un système du type :

$$(S) \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 & (L_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 & (L_2) \\ \vdots & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n & (L_n) \end{cases}$$

- Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, les nombres $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ sont appelés les **coefficients** du système.
- Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ les nombres $b_i \in \mathbb{K}$ forment ce que l'on appelle le **second membre**.
- Pour $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ les x_j sont les **inconnues** du système.

Un système (S) de n équations linéaires à p inconnues possède

- ou bien une infinité de solutions – on dit que (S) est **indéterminé** ;
- ou bien aucune solution – on dit que (S) est **incompatible** ;
- ou bien une unique solution.

Deux systèmes (S_1) et (S_2) sont dits **équivalents** s'ils ont le même ensemble de solutions.

On obtient un système équivalent à (S) lorsqu'on effectue sur les lignes les **opérations élémentaires sur les lignes** suivantes :

- **échanger l'ordre des lignes** L_i et L_j $(L_i \leftrightarrow L_j),$
- **multiplier la ligne L_i par une constante non nulle** $(L_i \leftarrow \lambda_i L_i),$
- **ajouter à la ligne L_i un multiple d'une autre** $(L_i \leftarrow L_i + \lambda_j L_j).$

Systèmes triangulaires

Un système (S) de n équations à n inconnues est dit **triangulaire** supérieur lorsque

$$(\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2), \quad ((i > j) \Rightarrow a_{i,j} = 0).$$

Soit (S) un système triangulaire de n équations à n inconnues. Alors :

(S) a une unique solution ssi tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

Systèmes échelonnés

Un système (S) de n équations à p inconnues est dit **échelonné** (en lignes) s'il existe $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq r \leq \min\{n, p\}$, tel que (S) s'écrive

$$(S) \left\{ \begin{array}{lcl} \boxed{a_{1,1}}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,r}x_r + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 & | & \\ \boxed{a_{2,2}}x_2 + \cdots + a_{2,r}x_r + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 & | & r \text{ équations} \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{r,r}}x_r + \cdots + a_{r,p}x_p = b_r & | & \text{principales} \\ 0 = b_{r+1} & | & n - r \\ \vdots & & \vdots \\ 0 = b_n & | & \text{équations} \\ & & \text{auxiliaires.} \end{array} \right.$$

où les coefficients $a_{1,1}, \dots, a_{r,r}$ sont non nuls.

Soit (S) un système échelonné. Alors

(S) est compatible ssi les $n - r$ équations auxiliaires sont vérifiées.

Dans ce cas, (S) possède :

- une unique solution, si et seulement si $r = p$
- une infinité de solutions si et seulement si $r < p$.

Cas général

Un système de n équations linéaires à p inconnues à coefficients non tous nuls est équivalent à un système échelonné.

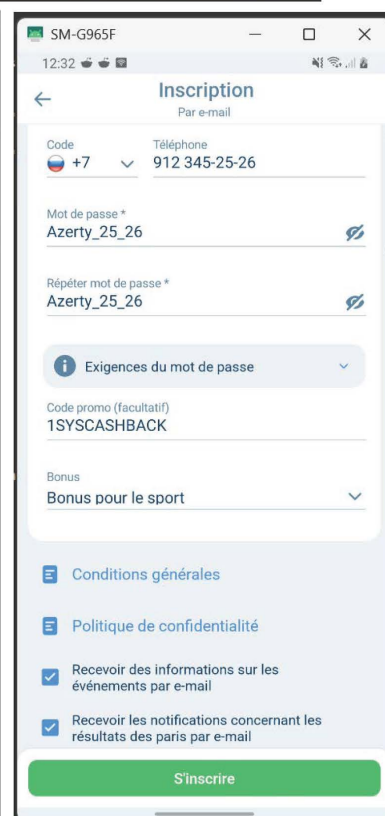
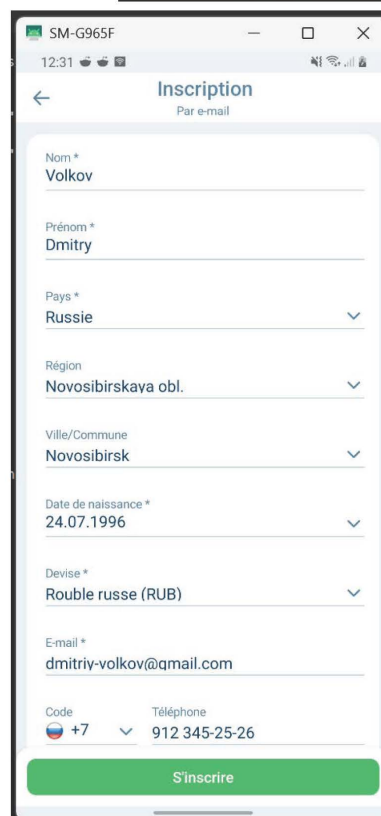
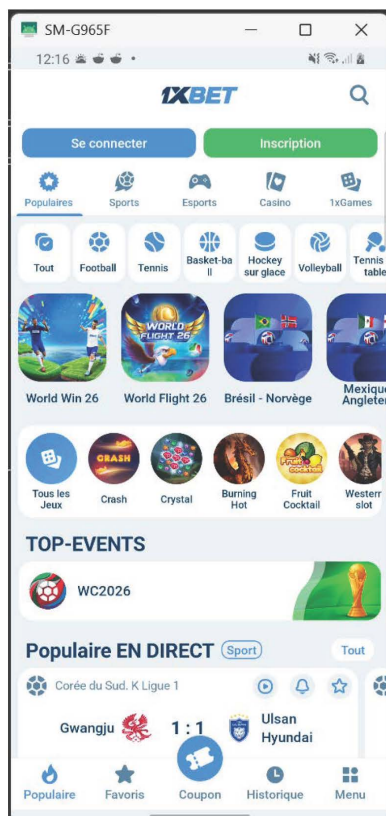
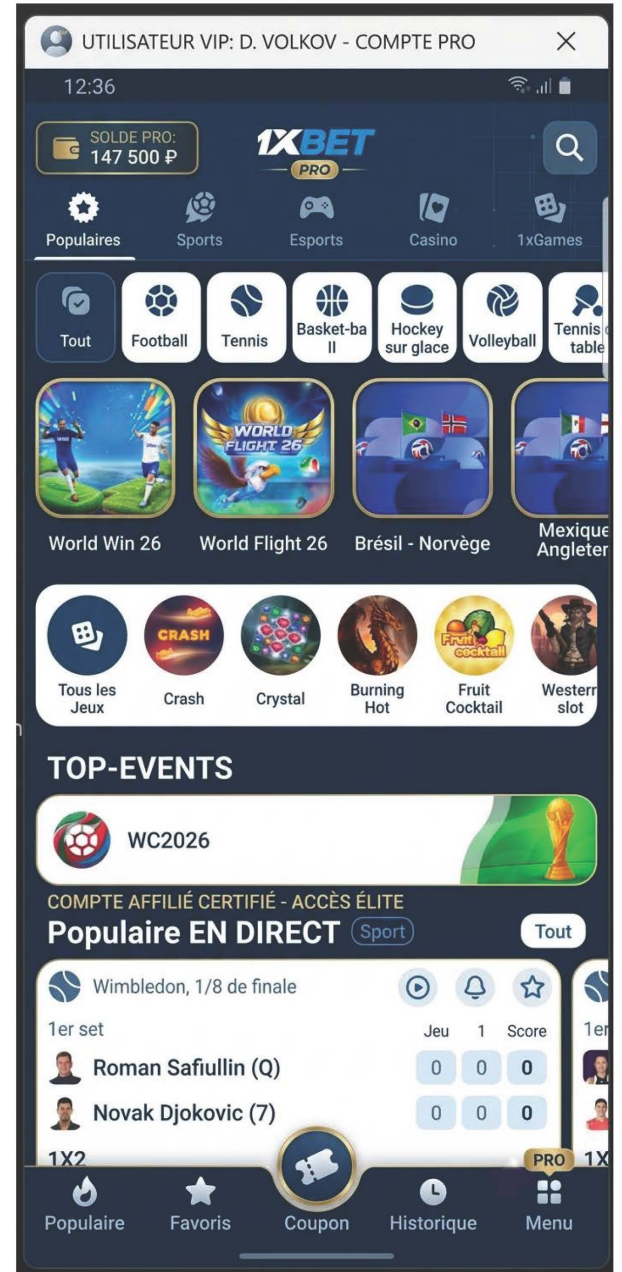
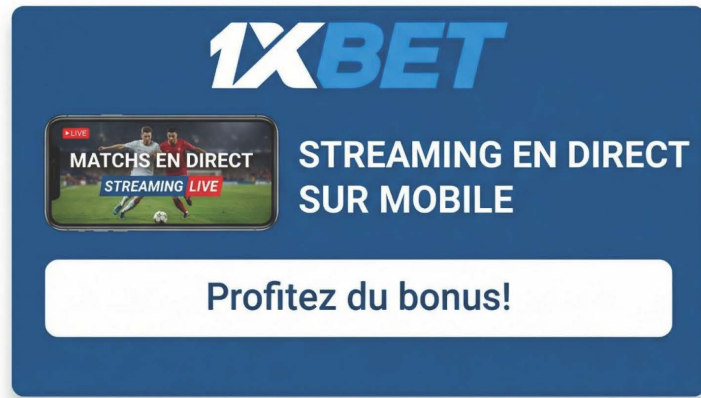
Théorème de Gauss

Structure de l'ensemble des solutions

Tout système de n équations linéaires à p inconnues possède

- ou bien une infinité de solutions ;
- ou bien aucune solution ;
- ou bien une unique solution.

Soit (S) un système de n équations linéaires à p inconnues. S et S_o les ensembles des solutions de (S) et de son système homogène associé (S_o) .



- $\mathcal{S}_o$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.
- Si $x^\circ = (x_1^\circ, \dots, x_p^\circ) \in \mathbb{K}^p$ une solution particulière de (S) , alors $\mathcal{S}$ est un sous-espace affine de direction $\mathcal{S}_o$:

$$\mathcal{S} = x^\circ + \mathcal{S}_o$$

Systèmes de Cramer

Un système de n équations linéaires à n inconnues possédant une unique solution est appelé un système de **Cramer**.

Soit (S) un système de n équations à n inconnues. (S) est de **Cramer** ssi (S) est équivalent à un système triangulaire à coefficients diagonaux tous non nuls.

Soit (S) un système de n équations linéaires à n inconnues. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $\begin{array}{c} \uparrow \\ \parallel \\ \downarrow \end{array}$

 - (S) possède une unique solution, c'est-à-dire (S) est de **Cramer**.
 - (S_o) possède une unique solution.
 - Pour tout second membre b , (S_b) possède une unique solution.
 - Pour tout second membre b , (S_b) possède au moins une solution.
 - Pour tout second membre b , (S_b) possède au plus une solution.

Calcul matriciel

Opérations algébriques dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Une **matrice** M de n lignes et p colonnes est une famille d'éléments de $\mathbb{K}$: $M = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices de n lignes et p colonnes.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On définit

- $A+B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$, $(A+B)_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$;
- $\lambda A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$, $(\lambda A)_{i,j} = \lambda a_{i,j}$;
- la transposée $A^T \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ par $\forall (i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$, $(A^T)_{i,j} = a_{j,i}$.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit

- $A \times B \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ par $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$, $(A \times B)_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} \times b_{k,j}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. La **matrice nulle**, $O_{n,p} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ a tous ses coefficients nuls.

$I_n = (\delta_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ est la **matrice identité**.

Écriture matricielle des systèmes d'équations linéaires

Soit (S) le système de n équations linéaires à p inconnues ci-dessous. On note $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la **matrice des coefficients** du système et $B = (b_i) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ la **matrice colonne second membre**.

$$(S) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases} \quad \text{alors} \quad (S) \iff AX = B$$

Propriétés des opérations algébriques sur les matrices

Soit A, B, C des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$. Pourvu que les produits et sommes ci-dessous soient bien définis, on a :

- $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$
- $\lambda(A \times B) = (\lambda A) \times B = A \times (\lambda B)$
- $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$
- $I_n \times A = A \times I_p = A$
- $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$
- $O \times A = O, A \times O = O$
- $(\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T$
- $(A \times B)^T = B^T \times A^T$

Matrices carrées

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n .

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que

- A est **scalaire**, s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda \cdot I_n$.
- A est **diagonale**, si : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, (i \neq j) \Rightarrow a_{i,j} = 0$
- A est **triangulaire inférieure**, si : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, (i < j) \Rightarrow a_{i,j} = 0$
- A est **triangulaire supérieure**, si : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, (i > j) \Rightarrow a_{i,j} = 0$
- A est **symétrique** (resp. **antisymétrique**) si $A^T = A$ (resp. $A^T = -A$).

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n .

On définit les **puissances** de A par $A^0 = I_n$ et $\forall k \in \mathbb{N}, A^{k+1} = A \times A^k$.

Soit $P(X) = a_p X^p + \cdots + a_1 X + a_0$
on pose $P(A) = a_p A^p + \cdots + a_1 A + a_0 I_n$

$P(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un **polynôme de la matrice** A

Formule du binôme de Newton et identité géométrique

$$\begin{aligned} \bullet (A + B)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k} \\ \bullet A^{n+1} - B^{n+1} &= (A - B) \sum_{k=0}^n A^k B^{n-k} \end{aligned}$$

$A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont des matrices carrées qui commutent
 $A \times B = B \times A$.

Matrices carrées inversibles

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **inversible** s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A \times B = I_n$ et $B \times A = I_n$

B est l'**inverse** de A , et on note $B = A^{-1}$. $GL_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices inversibles.

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors :

- Si A est inversible, alors A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.
- Si A est inversible alors A^T est inversible et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
- Si A et B sont inversibles, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Lien avec les systèmes de Cramer

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On note (S) le système d'équations linéaires $A \times X = B$.

$A \in GL_n(\mathbb{K}) \iff (S)$ a une unique solution. L'unique solution est $A^{-1}B$.

Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure).

T est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls

Inversibilité d'une matrice triangulaire

En ce cas, T^{-1} est triangulaire supérieure (resp. inférieure).

Espaces vectoriels

Espaces vectoriels

On appelle **espace vectoriel** sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ -ev) un ensemble E muni d'une addition interne, notée $+$ et d'une multiplication externe notée $\cdot$ telles que :

- $(E, +)$ est un groupe commutatif et $\cdot : \mathbb{K} \times E \rightarrow E$ vérifie :
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot x$
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2, \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
- $\forall x \in E, 1 \cdot x = x$

Construction d'espaces vectoriels

- Soit F un espace vectoriel, X un ensemble quelconque. L'ensemble $\mathcal{F}(X, F)$ des fonctions de X vers F est un espace vectoriel.
- Soit E et F deux espaces vectoriels. Le produit $E \times F$ est un espace vectoriel.

Sous-espaces vectoriels

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $F \subset E$ une partie **non vide** de E .

On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E (sev) si, F est stable pour les lois $+$, $\cdot$ et si $(F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

- F est non vide
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in F^2, \lambda x + \mu y \in F$

F est un sev de E si et seulement si il vérifie les deux propriétés ci-contre.

Constructions de sous-espaces vectoriels

Soit $(F_i)_{i \in I}$ des sev d'un espace vectoriel E . Alors l'**intersection** $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E .

Soit F_1 et F_2 des sev de E . La **somme** $F = F_1 + F_2$ est le sous-espace vectoriel de E défini par $F_1 + F_2 = \{x_1 + x_2; x_1 \in F_1, x_2 \in F_2\}$.

Soit A une partie de E . Le **sous-espace vectoriel de E engendré** par A , est le plus petit sous-espace vectoriel de E , noté $\text{Vect}(A)$ contenant A .

$$\text{Vect}(u_1, \dots, u_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i; (\lambda_i) \in \mathbb{K}^n \right\}$$

$\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des u_i .

Sous-espaces supplémentaires

Deux sous-espaces F_1 et F_2 de E sont dits **supplémentaires** lorsque tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2 . On note $E = F_1 \oplus F_2$.

$$E = F_1 \oplus F_2 \iff \begin{cases} \bullet E = F_1 + F_2 \\ \bullet F_1 \cap F_2 = \{0_E\} \end{cases}$$

Caractérisation des supplémentaires

Soit F_1 et F_2 des sev d'un espace vectoriel E . On dit que la somme $F = F_1 + F_2$ est **directe** si tout vecteur x de F s'écrit de manière unique sous la forme $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F_1, x_2 \in F_2$. On note alors $F = F_1 \oplus F_2$.

Avec ces notations, la somme $F_1 + F_2$ est directe si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.

Familles de vecteurs

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -e.v et $\mathcal{F} = (u_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E .

• $\mathcal{F}$ est dite **génératrice** de E si tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire (C-L) des u_i : $\forall x \in E, \exists (\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n}) \in \mathbb{K}^n, x = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot u_{i_k}$.

• $\mathcal{F}$ est dite **libre** si pour toute sous-famille finie $(u_{i_1}, \dots, u_{i_n})$ de $(u_i)_{i \in I}$ la seule C-L qui peut les annuler est la C-L triviale :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \lambda_1 u_{i_1} + \lambda_2 u_{i_2} + \dots + \lambda_n u_{i_n} = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

• $\mathcal{F}$ est appelée une **base** de E si elle est libre et génératrice de E .

$\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des u_i .

Caractérisation des bases

Applications linéaires

Applications linéaires, endomorphismes, isomorphismes

Soit E et F deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$.

Une application $f : E \rightarrow F$ est dite **linéaire** de E dans F lorsque

$$\forall x, y \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, f(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot f(y)$$

$(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F .

- Lorsque $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijective, on dit que f est un **isomorphisme**.
- Lorsque $f \in \mathcal{L}(E, E)$, on dit que f est un **endomorphisme** de E .
- Lorsque f est un isomorphisme de E vers E , on dit que c'est un **automorphisme** de E . $GL(E)$ désigne l'ensemble des automorphismes de E .

Endomorphismes

$(\mathcal{L}(E), +, \cdot)$ est un anneau.

Ensemble $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E .

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $Id_E : E \rightarrow E$ l'application identité.

On définit les **puissances** de A par $f^0 = Id_E$ et $\forall k \in \mathbb{N}, f^{k+1} = f \circ f^k$.

Soit $P(X) = a_p X^p + \dots + a_1 X + a_0$
on pose $P(f) = a_p f^p + \dots + a_1 f + a_0 id_E$

$P(f) \in \mathcal{L}(E)$ est un polynôme de l'endomorphisme f .

Noyau et image d'une application linéaire

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire.

- L'**image** de f , $\text{Im } f = \{f(x) ; x \in E\}$ est un sous-espace vectoriel de F .
- Le **noyau** de f , $\text{Ker } f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$ est un sous-espace de E .

- f est surjective $\iff \text{Im } f = F$
- f est injective $\iff \text{Ker } f = \{0_E\}$

Caractérisation des applications linéaires injectives/surjectives

Image d'une base par une application linéaire

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

$$\text{Im } f = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$$

L'image de $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est engendrée par $f(\mathcal{B})$.

Pour toute famille $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ de n vecteurs de F , il existe une application linéaire $f : E \rightarrow F$, unique telle que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(e_i) = f_i$.

Caractérisation des isomorphismes par les bases

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire.

$$f \text{ bijective} \iff f(\mathcal{B}) \text{ est une base de } F \quad f(\mathcal{B}) = (f(e_1), \dots, f(e_n))$$

Projections, symétries

Soit E_1 et E_2 deux sous-espaces supplémentaires de E , de sorte que tout vecteur x de E s'écrit de manière unique : $x = x_1 + x_2$, où $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$.

- La **projection de E sur E_1 parallèlement à E_2** est l'application notée $p_{E_1, E_2} : E \rightarrow E$ définie par $\forall x = x_1 + x_2 \in E; p_{E_1, E_2}(x) = x_1$.
- La **symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2** est l'application notée $s_{E_1, E_2} : E \rightarrow E$ définie par $\forall x = x_1 + x_2 \in E; s_{E_1, E_2}(x) = x_1 - x_2$.

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme tel que $p \circ p = p$ (p est un projecteur). Alors

- $\text{Ker } p$ et $\text{Im } p$ sont supplémentaires,
- p est la projection de E sur $\text{Im } p$ parallèlement à $\text{Ker } p$.

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E vérifiant $s \circ s = id_E$. Alors

- $\text{Ker}(s - id_E)$ et $\text{Ker}(s + id_E)$ sont supplémentaires,
- s est la symétrie par rapport à $\text{Ker}(s - id_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(s + id_E)$.

Espaces vectoriels de dimension finie

Existence de bases en dimension finie

Un espace vectoriel est dit de **dimension finie** s'il possède une famille génératrice finie.

Tout espace vectoriel E de dimension finie possède des bases et toutes les bases de E ont même cardinal n .

L'entier n est appelé la **dimension de E** . On note $n = \dim E$.

E est isomorphe à $F \iff \dim E = \dim F$
 E est isomorphe à $\mathbb{K}^n \iff \dim E = n$

$\mathbb{K}^n$ est l'exemple fondamental d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n .

Théorèmes de la base incomplète, de la base extraite

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

- Une famille libre $\mathcal{L}$ de vecteurs de E peut être complétée en une base de E .
- De toute famille génératrice finie $\mathcal{G}$ de E , on peut extraire une base.

Bases canoniques

- $\mathbb{K}^n$ est de dimension n , sa base canonique est $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ où $\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ... $\vec{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$.

- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension np , sa base canonique est $\mathcal{B} = (E_{k,\ell})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq \ell \leq p}}$, où

$E_{k,\ell}$ est la matrice définie par $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, (E_{k,\ell})_{i,j} = \delta_{i,k} \delta_{j,\ell}$.

- $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension $n + 1$, sa base canonique est $\mathcal{B} = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ où $P_k(X) = X^k$.

Dimension d'un sous-espace

Soit F et G deux sous-espaces d'un espace de dimension finie E .

- F est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$.
- de plus $F = E$ si et seulement si $\dim F = \dim E$.

$$\dim(F+G) + \dim(F \cap G) = \dim F + \dim G \quad \text{Formule de Grassmann}$$

Sous-espaces supplémentaires

$$E = F \oplus G \iff \begin{cases} F \cap G = \{\vec{0}_E\} \\ \dim F + \dim G = \dim E \end{cases}$$

Caractérisation des supplémentaires en dimension finie

En dimension finie, tout sous-espace vectoriel possède des supplémentaires.

Soit F, G des sev de E , respectivement rapportés à des bases $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$.

$$E = F \oplus G \iff \mathcal{F} \cup \mathcal{G} \text{ est une base de } E$$

Caractérisation des supplémentaires par les bases

En ce cas, $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est appelée une **base adaptée** à la décomposition $E = F \oplus G$.

Familles de vecteurs en dimension finie

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs d'un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n .

Si $\mathcal{F}$ est libre (resp. génératrice), alors $p \leq n$ (resp $p \geq n$).

- $\mathcal{F}$ est dite **libre maximale**, si $\mathcal{F}$ est libre et de cardinal n .
- $\mathcal{F}$ est dite **génératrice minimale**, si $\mathcal{F}$ est génératrice et de cardinal n .

$$\begin{array}{c} \updownarrow \\ \bullet \mathcal{F} \text{ est une base} \\ \bullet \mathcal{F} \text{ est génératrice minimale} \\ \bullet \mathcal{F} \text{ est libre maximale} \end{array}$$

Caractérisation des bases en dimension finie

On appelle **rang de $\mathcal{F}$** , et on note $\text{Rg } \mathcal{F}$ la dimension de $\text{Vect}(\mathcal{F})$.

Formule du rang

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$\dim E = \dim \text{Im } f + \dim \text{Ker } f$$

On suppose que $\dim E < \infty$.

On appelle **rang de f** , et on note $\text{Rg } f$, la dimension de $\text{Im } f$.

Caractérisation des isomorphismes

Soit E et F deux espaces vectoriels de **même dimension finie** et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$f \text{ est un isomorphisme} \iff f \text{ est injectif} \iff f \text{ est surjectif}$$

Formes linéaires et hyperplans

Soit E un espace vectoriel.

On appelle **forme linéaire** sur E toute application linéaire de $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}$.

On appelle **hyperplan** de E le noyau d'une forme linéaire φ non nulle sur E .

Matrices

Représentation des familles de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $\mathcal{E}$.

- La **matrice représentative** $\mathbf{M}_{\mathcal{E}}(a) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ d'un vecteur a de E est la matrice-colonne dont les coefficients sont les coordonnées de a dans la base $\mathcal{E}$.
- La **matrice** $\mathbf{M}_{\mathcal{E}}(a_1, \dots, a_p) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ **représentative** d'une famille de p vecteurs est obtenue en rangeant leurs coordonnées dans la base $\mathcal{E}$ en colonnes.

Soit $\mathcal{A} = (a_1, \dots, a_n)$ une famille de n vecteurs de E , $A = \mathbf{M}_{\mathcal{E}}(a_1, \dots, a_n)$.

$\mathcal{A}$ est une base de E ssi A est inversible

Caractérisation matricielle des bases

Représentation matricielle des applications linéaires

Soit E et F des espaces vectoriels de dimensions finies munis des bases $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{F}$.

On définit la **matrice représentative** de $a \in \mathcal{L}(E, F)$, notée $\mathbf{M}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(a) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par $\mathbf{M}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(a) = \mathbf{M}_{\mathcal{F}}(a(e_1), a(e_2), \dots, a(e_p))$.

Soit E, F, G des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies de bases respectives $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$, $a \in \mathcal{L}(E, F)$, $b \in \mathcal{L}(F, G)$ et $x \in E$. Alors

$$\mathbf{M}_{\mathcal{F}}(a(x)) = \mathbf{M}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(a) \times \mathbf{M}_{\mathcal{E}}(x) \text{ et } \mathbf{M}_{\mathcal{E}, \mathcal{G}}(b \circ a) = \mathbf{M}_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}(b) \times \mathbf{M}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(a)$$

Caractérisation matricielle des isomorphismes

Soit E et F des espaces vectoriels de même dimension n , de bases respectives $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ et $a \in \mathcal{L}(E, F)$ de matrice $A = \mathbf{M}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(a)$.

$$a \in GL(E) \iff A \in GL_n(\mathbb{K})$$

En ce cas $\mathbf{M}_{\mathcal{F}, \mathcal{E}}(a^{-1}) = A^{-1}$.

Formules de changement de bases

Soit E, F des espaces vectoriels de dimensions finies. On considère $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ deux bases de E et $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ deux bases de F .

La **matrice de passage** de $\mathcal{E}$ vers la base $\mathcal{E}'$, est la matrice $P_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}$ définie par :

$$P_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'} = \mathbf{M}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}') = \mathbf{M}_{\mathcal{E}', \mathcal{E}}(id_E)$$

On note $P = P_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}$ et $Q = P_{\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'}$. Alors

$$X' = P^{-1} \times X$$

$$x \in E, X = \mathbf{M}_{\mathcal{E}}(x) \text{ et } X' = \mathbf{M}_{\mathcal{E}'}(x)$$

$$A' = P^{-1} \times A \times P$$

$$a \in \mathcal{L}(E) , A = \mathbf{M}_{\mathcal{E}}(a) \text{ et } A' = \mathbf{M}_{\mathcal{E}'}(a)$$

$$A' = Q^{-1} \times A \times P$$

$$a \in \mathcal{L}(E, F), A = \mathbf{M}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(a) \text{ et } A' = \mathbf{M}_{\mathcal{E}', \mathcal{F}'}(a)$$

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. A et B sont dites

- **semblables** s'il existe P inversible tel que $B = P^{-1} \times A \times P$.
- **équivalentes** s'il existe P et Q inversibles telles que $B = Q^{-1} \times A \times P$.

Rang d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice à p colonnes notées $A_1, \dots, A_p$.
Notons $(a_1, \dots, a_p)$ les vecteurs de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associés aux colonnes de A et $a \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ l'application linéaire canoniquement associée à A . On pose

$$\text{Rg } A = \text{Rg } a = \text{Rg } (a_1, a_2, \dots, a_p)$$

Soit $P \in GL_p(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_n(\mathbb{K})$, alors

$$\text{Rg } (Q^{-1} \times A \times P) = \text{Rg } A$$

Deux matrices équivalentes ont même rang.

Soit $r \leq \min(n, p)$. Alors

$$\text{Rg } A = r \iff \exists (P, Q) \in GL_p(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K})$$

$$A = Q^{-1} \times J_{n,p,r} \times P$$

$$J_{n,p,r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A et A^T ont même rang.

Calcul du rang d'une matrice par opérations élémentaires

On ne change pas le rang d'une matrice lorsqu'on :

- échange deux lignes (*resp.* colonnes) ;
- remplace une ligne (*resp.* colonne) par un multiple non nul de celle-ci ;
- ajoute à une ligne (*resp.* colonne) un multiple d'une autre.

Rang et matrices carrées inversibles

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Le rang de A est l'ordre maximal d'une matrice carrée inversible extraite de A .

$$A \in GL_n(\mathbb{K}) \iff \text{Rg } A = n$$

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Trace et matrices semblables

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n . On appelle **trace de A** la somme de ses coefficients diagonaux. On note $\text{Tr}(A) = a_{1,1} + a_{2,2} + \dots + a_{n,n}$.

- $\text{Tr}(\lambda \cdot A + \mu \cdot B) = \lambda \text{Tr}(A) + \mu \text{Tr}(B).$
- $\text{Tr}(A \times B) = \text{Tr}(B \times A).$

$(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors

En conséquence, deux matrices semblables ont même trace.

Trace d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **trace de u** , la trace de sa matrice représentative relativement à une base quelconque. On note $\text{Tr}(u)$ ce scalaire.

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur de E . Alors $\text{Tr}(p) = \text{Rg } (p)$.

- $\text{Tr}(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) = \lambda \text{Tr}(u) + \mu \text{Tr}(v).$
 - $\text{Tr}(u \circ v) = \text{Tr}(v \circ u).$
- $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2, (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2.$

Groupe symétrique et déterminants

Groupe symétrique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des bijections de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans lui-même (**permutations**).

$(\mathfrak{S}_n, \circ)$ est un groupe pour la composition des applications, appelé **groupe symétrique**.

L'élément neutre est l'application identité.

Soit $k_1, \dots, k_p$ des entiers distincts de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Le **cycle** $\sigma = (k_1, k_2, \dots, k_p)$ est la permutation définie par $\sigma(k_1) = k_2, \sigma(k_2) = k_3, \dots, \sigma(k_{p-1}) = k_p, \sigma(k_p) = k_1$ et $\forall k \notin \{k_1, \dots, k_p\}, \sigma(k) = k$. On dit que σ est un cycle de longueur p . Une **transposition** est un cycle de longueur 2.

Toute permutation de $\mathfrak{S}_n$ est décomposable en un produit d'au plus $n - 1$ transpositions.

Les transpositions engendrent $\mathfrak{S}_n$.

Signature d'une permutation

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ une permutation.

- Le **nombre d'inversions** de σ est le nombre $I(\sigma)$ de couples $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tels que $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$.
- La **signature** de σ est le nombre réel $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}$. σ est dite **paire** (resp. **impaire**) si $\varepsilon(\sigma) = 1$ (resp. $\varepsilon(\sigma) = -1$).

Un p -cycle a pour signature $(-1)^{p-1}$. Une transposition a pour signature -1 . Pour toutes permutations σ_1 et σ_2 , on a :

$$\varepsilon(\sigma_2 \circ \sigma_1) = \varepsilon(\sigma_2) \times \varepsilon(\sigma_1)$$

La signature $\varepsilon : \mathfrak{S}_n \rightarrow \{\pm 1\}$ est un morphisme de groupes.

Formes n-linéaires alternées

Soit E et F des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, $n \geq 2$.

- Une application $\varphi : E^n \rightarrow F$ est dite **n -linéaire** si elle est linéaire par rapport à chacune de ses variables.
- φ est dite **alternée** si pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in E^n$ et pour tout couple (i, j) , $1 \leq i < j \leq n$ tel que $a_i = a_j$, on a $\varphi(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n) = \vec{0}_F$.
Lorsque $F = \mathbb{K}$, on dit que φ est une **forme n -linéaire alternée** sur E . On note $\Lambda_n(E)$ l'ensemble des formes n -linéaires alternées sur E .

Soit $\varphi \in \Lambda_n(E)$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, on a :

$$\varphi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) \varphi(x_1, \dots, x_n) \quad \varphi \text{ est antisymétrique.}$$

Formes n-linéaires alternées sur E_n

On considère désormais un espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Pour tout $\varphi \in \Lambda_n(E)$ et tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ de matrice représentative, $\mathbf{M}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = (a_{i,j})$, on a :

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \left[\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} \right] \times \varphi(e_1, e_2, \dots, e_n)$$

$\Lambda_n(E)$ est un espace vectoriel de dimension 1.

Déterminant d'une famille de n vecteurs de E

Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$, on note $(a_{i,j}) = \mathbf{M}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$ la matrice représentative de cette famille de vecteurs dans la base $\mathcal{B}$.

- Le **déterminant de** $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ est le nombre

$$\text{Det}_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

$\text{Det}_{\mathcal{B}} : E^n \rightarrow \mathbb{K}$ est une forme n -linéaire alternée.

Déterminant d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. Le nombre $\text{Det}_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$ est indépendant de la base $\mathcal{B}$. On appelle ce scalaire le **déterminant de** f . On le note $\text{Det}(f)$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **déterminant de la matrice** $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ le nombre $\text{Det}(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}$.

Caractérisations à l'aide du déterminant

Soit $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E . Alors

$$\mathcal{U} \text{ est une base de } E \iff \text{Det}_{\mathcal{B}}(\mathcal{U}) \neq 0$$

Caractérisation des bases

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E . Alors

$$f \in GL(E) \iff \text{Det}(f) \neq 0$$

Caractérisation des automorphismes

En ce cas, $\text{Det}(f^{-1}) = (\text{Det}(f))^{-1}$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$A \in GL_n(\mathbb{K}) \iff \text{Det}(A) \neq 0$$

Caractérisation des matrices inversibles

Développement par une ligne ou une colonne

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carrée d'ordre n .

Pour $(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$,

- $\Delta_{i,j}$ est le déterminant de la matrice extraite de A en supprimant ses $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne. Il est appelé **mineur** d'indice (i,j) .
- le nombre $b_{i,j} = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$, est appelé le **cofacteur** de $a_{i,j}$.

On appelle **comatrice** de A , la matrice des cofacteurs de A , $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.
On note $B = \text{Com}(A)$ Soit $(i_o, j_o) \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Det}(A) &= \sum_{j=1}^n a_{i_o, j} (-1)^{i_o + j} \Delta_{i_o, j} \\ \bullet \text{ Det}(A) &= \sum_{i=1}^n a_{i, j_o} (-1)^{i + j_o} \Delta_{i, j_o} \end{aligned}$$

$\text{Det}(A)$ est la somme des facteurs de la $i_o^{\text{ème}}$ ligne (resp. de la $j_o^{\text{ème}}$ colonne) multipliés par leurs cofacteurs.

Soit A une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) d'ordre n . Alors $\text{Det}(A)$ est égal au produit de ses coefficients diagonaux.

Formule de la comatrice

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{Det}(A)} \text{Com}(A)^T$$

$$A \in GL_n(\mathbb{K}), \text{Det}(A) \neq 0$$

Espaces préhilbertiens réels

Produit scalaire

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On appelle **produit scalaire** sur E , toute application $\Phi : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ qui est :

- *symétrique* : pour tous x et y dans E , $\Phi(x, y) = \Phi(y, x)$;
- *bilinéaire* : linéaire par rapport à chaque variable ;
- *positive* : pour tout x dans E , $\Phi(x, x) \geq 0$;
- *définie-positive* : pour tout x dans E , si $\Phi(x, x) = 0$, alors $x = 0_E$.

Dans ce cas, on note pour tous vecteurs x et y de E : $\Phi(x, y) = (x | y)$. Le réel $(x | x)$ est positif, on note $\|x\| = \sqrt{(x | x)}$ la **norme euclidienne** de x .

Un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(\cdot | \cdot)$ est appelé **espace préhilbertien réel**. Si de plus E est de dimension finie, on dit que c'est un **espace vectoriel euclidien** (eve).

Familles orthogonales, orthonormales

Soit E un espace préhilbertien. Soit $\vec{x}, \vec{y}$ des vecteurs de E , $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E .

- x et y sont dits **orthogonaux** si $(x | y) = 0$, on note $x \perp y$;
- $\mathcal{U}$ est **orthogonale** si $\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow (u_i | u_j) = 0$;
- $\mathcal{U}$ est **orthonormale** si $\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, (u_i | u_j) = \delta_{ij}$;
- $\mathcal{U}$ est une **base orthonormée** (BON) de E si c'est une base et une famille orthonormale.

Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre, une famille orthonormale est libre.

Calculs dans un espace préhilbertien

Soit E un espace préhilbertien, $(x, y) \in E^2$.

- $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x | y) + \|y\|^2$
- $(x | y) = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$

Identités de polarisation

$$x \perp y \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Théorème de Pythagore

$|(x | y)| \leq \|x\| \|y\|$
avec égalité ssi x et y sont colinéaires.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
avec égalité ssi x et y sont colinéaires et de même sens.

Inégalité triangulaire

Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit E un espace préhilbertien réel et $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de vecteurs. Alors, il existe une famille orthonormale $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ unique telle que

- $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$.
- $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, (e_k | \varepsilon_k) > 0$.

Un espace vectoriel euclidien E possède des BON. Plus précisément, toute famille orthonormale de E peut être complétée en une base orthonormée de E .

Calculs en BON

Soit E un eve rapporté à une BON $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i \cdot e_i$ des vecteurs de E , alors

$$\bullet x = \sum_{i=1}^n (x | e_i) \cdot e_i \quad \bullet (x | y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \bullet \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

Orthogonal d'une partie, supplémentaire orthogonal

Soit E un espace préhilbertien réel et A une partie de E . On appelle **orthogonal** de A , et on note $A^\perp$ l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de A .

Soit F un sev de dimension finie de E . Alors F et $F^\perp$ sont supplémentaires :
 $F \oplus F^\perp = E$.

$F^\perp$ est le seul sous-espace orthogonal et supplémentaire de F . On l'appelle le **supplémentaire orthogonal** de F .

Projections orthogonales

Soit F un sev de dimension finie d'un espace préhilbertien réel E .

La **projection orthogonale** de E sur F est la projection de E sur F parallèlement à $F^\perp$. On la note $p_F : E \rightarrow E$. Soit $(x, y) \in E^2$,

$$y = p_F(x) \iff \begin{cases} \bullet & y \in F \\ \bullet & x - y \in F^\perp \end{cases}$$

Caractérisation du projeté orthogonal

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une BON de F .

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^p (x | e_i) \cdot e_i$$

Expression du projeté orthogonal en BON

Distance d'un point à un sous-espace vectoriel

Soit F un sous-espace vectoriel de E , $\vec{x} \in E$. On appelle **distance de x à F** le réel $d(x, F) = \inf\{\|x - y\| ; y \in F\}$.

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$$

$\|x - p_F(x)\|$ est la distance minimale entre x et un vecteur de F .

Arithmétique! Algèbre! Géométrie!
Trinité grandiose! Triangle lumineux!
Celui qui ne vous a pas connues est un insensé!

Lautréamont

Analyse 2

Analyse asymptotique

Relations de domination et de négligeabilité

Soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$. On dit que

- f est **dominée par** g au voisinage de a , et on note $f = \mathcal{O}_a(g)$ s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a et $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ tels que $\begin{cases} \forall x \in \mathcal{V}, f(x) = \varphi(x)g(x) \\ \varphi \text{ est bornée dans } \mathcal{V} \end{cases}$.
- f est **négligeable devant** g au voisinage de a , et on note $f = o_a(g)$ s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a et $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ tels que $\begin{cases} \forall x \in \mathcal{V}, f(x) = \varphi(x)g(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0 \end{cases}$.

- $f = \mathcal{O}_a(g) \iff \frac{f(x)}{g(x)} \text{ borné au vois de } a.$
- $f = o_a(g) \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$

Caractérisations à l'aide du quotient

Relation d'équivalence

On dit que

- f est **équivalente à** g au voisinage de a , et on note $f \sim_a g$ s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a et $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ tels que $\begin{cases} \forall x \in \mathcal{V}, f(x) = \varphi(x)g(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 1 \end{cases}$.

- $f \sim_a g \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$

Caractérisation à l'aide du quotient

- $f \sim_a g \iff f(x) - g(x) = o_a(g(x)).$

Caractérisation à l'aide de la différence

Propriétés des fonctions équivalentes

On suppose que $f \sim_a g$. Alors

$$\forall \ell \in \bar{\mathbb{R}}, \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \iff \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$$

Propriété fondamentale

$$f > 0 \text{ au vois. de } a \iff g > 0 \text{ au vois. de } a$$

Signe de fonctions équivalentes

Obtention d'équivalents

Soit $f_1, f_2, g_1, g_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$. On suppose que $f_1 \sim_a f_2$ et $g_1 \sim_a g_2$.
Alors

- **équivalent d'un produit** $f_1 g_1 \sim_a f_2 g_2$;
- **équivalent d'un quotient** si $g_1(x) \neq 0$ dans $I \setminus \{a\}$, alors $\frac{f_1}{g_1} \sim_a \frac{f_2}{g_2}$;
- **équivalent d'une puissance** si $f_1(x) > 0$ dans $I \setminus \{a\}$, alors $f_1^\alpha \sim_a f_2^\alpha$.

Soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$;

- **équivalent d'une somme** si $g = o_a(f)$, alors $f + g \sim_a f$.

Soit $f, g : J \rightarrow \mathbb{R}$, $y : I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$ et $b \in \bar{J}$, tels que $y(I) \subset J$;

- **équivalent d'une composée** si $\lim_{x \rightarrow a} y(x) = b$ $\left. \begin{array}{l} f(y) \sim_b g(y) \end{array} \right\}$ alors $f \circ y(x) \sim_a g \circ y(x)$.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $a \in I$ telle que $f'(a) \neq 0$;

- **équivalent d'un accroissement** $f(x) - f(a) \sim_a f'(a) \cdot (x - a)$.

Comparaison de fonctions usuelles

Soit $\alpha, \beta, \gamma > 0$ tels que $\alpha < \beta$, et $a > 1$, alors

- $(\ln x)^\gamma = o_0(1/x^\alpha)$ • $(\ln x)^\gamma = o_{+\infty}(x^\alpha)$ • $x^\beta = o_0(x^\alpha)$
- $x^\alpha = o_{+\infty}(x^\beta)$ • $x^\alpha = o_{+\infty}(a^x)$

Équivalents de fonctions usuelles

Au voisinage de 0

- $\sin(x) \sim_0 x$ • $1 - \cos(x) \sim_0 \frac{x^2}{2}$ • $\tan(x) \sim_0 x$
- $(1+x)^\alpha - 1 \sim_0 \alpha x$ • $\ln(1+x) \sim_0 x$ • $e^x - 1 \sim_0 x$

Soit P la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = a_d x^d + a_{d+1} x^{d+1} + \cdots + a_n x^n, \text{ où } a_n \text{ et } a_d \text{ sont non nuls.}$$

Au voisinage de $\pm\infty$ $P(x) \sim a_n x^n$ (monôme dominant)

Au voisinage de 0 $P(x) \sim a_d x^d$ (monôme de plus bas degré)

Développements limités

Soit I un intervalle, $a \in \bar{I}$, $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

- On dit que f admet un **développement limité à l'ordre n en a** s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $x \in I \setminus \{a\}$,

$$(DL_n(a)) \quad f(x) = P(x - a) + o_a((x - a)^n)$$

- On dit que f admet un **développement limité à l'ordre n en $+\infty$** s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $x \in I \cap \mathbb{R}^{+\star}$,

$$(DL_n(+\infty)) \quad f(x) = P\left(\frac{1}{x}\right) + o_\infty\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

P est appelé **partie régulière** du développement limité.

Soit $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$. Si f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de a , alors sa partie régulière est unique.

Formule de Taylor-Young

On suppose que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I . Alors pour tout $x \in I$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + o_a((x-a)^n)$$

Régularité d'une fonction admettant un DL

Soit $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction admettant un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en $a \in \bar{I}$:

$$f(x) = a_0 + a_1 (x-a) + a_2 (x-a)^2 + \cdots + a_n (x-a)^n + o((x-a)^n).$$

- Si $n \geq 0$, alors f se prolonge continûment en a et $\tilde{f}(a) = a_0$.
- Si $n \geq 1$, alors $\tilde{f}$ est dérivable au point a et $\tilde{f}'(a) = a_1$.

Opérations sur les développements limités

Soit f et g admettent des développements limités à l'ordre n à l'origine :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = P(x) + o_0(x^n), \text{ avec } P \in \mathbb{R}_n[X] \\ g(x) = Q(x) + o_0(x^n), \text{ avec } Q \in \mathbb{R}_n[X] \end{array} \right. . \text{ Alors}$$

- $(f+g)(x) = (P+Q)(x) + o_0(x^n)$,
- $(f \times g)(x) = R(x) + o_0(x^n)$, où R est le polynôme PQ tronqué à l'ordre n .
- Si de plus $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, $(g \circ f)(x) = R(x) + o_0(x^n)$, où R est le polynôme $Q \circ P$ tronqué à l'ordre n .

- Si de plus $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, $\frac{1}{1+f(x)} = R(x) + o_0(x^n)$ où R est le polynôme

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k P^k(x) \text{ tronqué à l'ordre } n.$$

- Si F est primitive de f sur I , alors $F(x) = F(0) + \int^x P(t) dt + o_0(x^{n+1})$.

Développements limités des fonctions usuelles

Au voisinage de l'origine, les fonctions usuelles admettent des développements limités de tous ordres :

$$\begin{aligned}
 e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
 \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \\
 \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \\
 \operatorname{ch}(x) &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \\
 \operatorname{sh}(x) &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \\
 (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \cdots + \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1) \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
 \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + o(x^n) \\
 \operatorname{Arctan}(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) \\
 \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
 \tan(x) &= x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)
 \end{aligned}$$

Relations de comparaison : cas des suites

Soit u et v des suites de nombres réels. On suppose qu'à partir d'un certain rang n_0 , $v_n \neq 0$. On dit que

- $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ lorsque $(u_n/v_n)_{n \geq n_0}$ est bornée ;
- $u_n = o(v_n)$ lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n/v_n = 0$;
- $u_n \sim v_n$ lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n/v_n = 1$.

Croissances comparées

Soit $(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma') \in \mathbb{R}^6$ tels que $0 < \alpha < \alpha'$, $0 < \beta < \beta'$ et $0 < \gamma < \gamma'$.

- $(\ln n)^\alpha = o((\ln n)^{\alpha'})$ • $n^\alpha = o(n^{\alpha'})$ • $e^{\gamma n} = o(e^{\gamma' n})$
- $(\ln n)^\beta = o(n^\alpha)$ • $n^\alpha = o(e^{\gamma n})$ • $e^{\gamma n} = o(n!)$

Équivalents usuels

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, alors

- $\sin u_n \sim u_n$ • $1 - \cos u_n \sim \frac{u_n^2}{2}$ • $\tan u_n \sim u_n$
- $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$ • $\ln(1 + u_n) \sim u_n$ • $e^{u_n} - 1 \sim u_n$.

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}$$

Formule de Stirling

Intégration

Fonctions en escalier et continues par morceaux

Soit $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ une subdivision de $[a, b]$, i.e. $a = a_0 < \dots < a_n = b$.

• $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une **fonction en escalier** sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision σ de $[a, b]$ telle que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, φ est constante égale à λ_k sur $]a_{k-1}, a_k[$.

• $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **continue par morceaux** sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision σ telle que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, f est continue sur $]a_{k-1}, a_k[$ et se prolonge continûment à $[a_{k-1}, a_k]$.

On note $E([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier et $\mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$. Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{R})$ une fonction continue sur $[a, b]$ et $\varepsilon > 0$ fixé. Il existe $\varphi, \psi \in E([a, b], \mathbb{R})$ des fonctions en escalier telles que :

- $0 \leq \psi - \varphi \leq \varepsilon$
- $\varphi \leq f \leq \psi$

Approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux par des fonctions en escalier.

Construction de l'intégrale sur un segment

Pour $\varphi \in E([a, b], \mathbb{R})$, on pose $\int_a^b \varphi(x) dx = \int_{[a, b]} \varphi = \sum_{k=1}^n \lambda_k [a_k - a_{k-1}]$.

Pour $f \in \mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{R})$, on définit l'intégrale de a à b de f par :

$$\begin{aligned} \int_{[a, b]} f &= \int_a^b f(t) dt = \inf \left\{ \int_a^b \varphi(t) dt; \varphi \in E([a, b], \mathbb{R}), \varphi \geq f \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_a^b \varphi(t) dt; \varphi \in E([a, b], \mathbb{R}), \varphi \leq f \right\} \end{aligned}$$

Intégrale des fonctions continues par morceaux

Soit $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, des fonctions continues par morceaux, λ, μ des réels,

- **linéarité** : $\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt$,
- **relation de Chasles** : $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$,
- **croissance** : si $f \leq g$, alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$,
- **positivité** : si $f \geq 0$, alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$,
- **Inégalité triangulaire intégrale** : $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$,
- **inégalité de la moyenne** : $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \sup_{[a, b]} |f| \int_a^b |g(t)| dt$,

Propriétés de l'intégrale des fonctions continues

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, avec $a < b$.

$$\exists c \in [a, b], \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt = f(c)$$

Valeur moyenne d'une fonction continue

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ est continue et positive sur le segment $[a, b]$.

$$f = 0 \iff \int_a^b f(t) dt = 0$$

Définie-positivité de l'intégrale

Approximations d'intégrales

Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ une fonction continue sur le segment $[a, b]$. Pour tout entier n , on considère la subdivision régulière $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$ de $[a, b]$. On appelle **somme de Riemann** de rang n de f toute somme

$$\mathcal{R}_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i), \text{ où } c_i \in [a_i, a_{i+1}]$$

La suite $(\mathcal{R}_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{R}_n(f) = \int_a^b f(t) dt$.

Intégration et dérivation

Liens fondamentaux entre intégrales et primitives

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I .

Soit $a \in I$ et on définit $F_a : I \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in I, F_a(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Intégrale fonction de sa borne supérieure

Alors F_a est dérivable sur I et $F'_a = f$

f possède des primitives sur I . Plus précisément, si $a \in I$, F_a est l'unique primitive de f sur I qui s'annule au point a .

Primitives d'une fonction continue

Les autres primitives de f sur I sont les fonctions de la forme $F = F_a + C$, où $C \in \mathbb{R}$.

Soit $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, $a \in I$, alors

$$\forall x \in I, f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$$

Représentation intégrale des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Calculs d'intégrales

Soit $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ une primitive quelconque de f sur I , pour tout $(a, b) \in I^2$

$$\int_a^b f(t) dt = \left[F(t) \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

Théorème fondamental du calcul intégral

Soit $u, v \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, pour tout $(a, b) \in I^2$

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = \left[u(t)v(t) \right]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

Intégration par parties

Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, $\varphi \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R})$ telle que $\varphi(J) \subset I$. Alors pour tout $(a, b) \in I^2$

$$\int_a^b f \circ \varphi(t) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du$$

Changement de variable

Primitives usuelles

Le tableau des primitives usuelles se trouve page 20.

Formules de Taylor

Soit $n \in \mathbb{N}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et $a \in I$.

Polynômes de Taylor d'une fonction de classe $\mathcal{C}^n$

On appelle **polynôme de Taylor** de f en a de degré inférieur ou égal à n , le polynôme T_n défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} T_n(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k. \end{aligned}$$

Formule de Taylor avec reste intégrale

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I . Alors pour tout $x \in I$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

Inégalité de Taylor-Lagrange

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I et qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall t \in I, |f^{(n+1)}(t)| \leq M$. Alors pour tout $x \in I$

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Formule de Taylor-Young

On suppose que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I . Alors pour tout $x \in I$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + o_a((x-a)^n)$$

Procédés sommatoires discrets

Convergence d'une série numérique

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}$. On appelle **somme partielle** de rang n , et on note U_n , la somme $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$. La suite des sommes partielles $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée la **série de terme général** u_n . On la note $\sum u_n$.

La série $\sum u_n$ est dite **convergente** si la suite des sommes partielles (U_n) l'est. En ce cas, la limite des sommes partielles est appelée la **somme** de la série. Lorsque la suite (U_n) diverge, on dit que la série est **divergente**.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k.$$

Lorsque la série $\sum u_n$ est convergente, la somme de la série est la limite des sommes partielles.

Restes d'une série convergente

Soit $\sum u_n$ une série **convergente**. Étant donné $p \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n \geq p+1} u_n$ est convergente. Sa somme est appelée le reste d'indice p , on note $R_p = \sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n$.

Pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = U_p + R_p$.

La suite des restes $(R_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est **convergente de limite nulle**.

Lien fondamental entre suite et série

- $\Updownarrow$ • la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge
• la suite (u_n) converge

La série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ et la suite (u_n) ont même nature.

Condition nécessaire de convergence

Si la série $\sum u_n$ converge **alors** la suite (u_n) est convergente de limite nulle.

La réciproque est fausse !

Lorsque $u_n \not\rightarrow 0$, on dit que la série $\sum u_n$ **diverge grossièrement**.

Séries à termes positifs

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On note (U_n) la suite des sommes partielles. Alors (U_n) est croissante. En particulier

$\sum u_n$ converge ssi (U_n) est majorée.

Condition nécessaire et suffisante de convergence

En ce cas $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup_n U_n$.

Comparaison séries-intégrales

$$\int_n^{n+1} f(t) dt \leq f(n) \leq \int_{n-1}^n f(t) dt$$

$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue par morceaux, décroissante et positive.

Avec les notations ci-dessus, les assertions suivantes sont équivalentes :

- $\Updownarrow$
 - la série $\sum_{n \geq 0} f(n)$ converge
 - la suite $\left(\int_0^n f(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge

Comparaison série-intégrale

Séries absolument convergentes

Soit $\sum u_n$ une série, à termes réels ou complexes. On dit que $\sum u_n$ est **absolument convergente** si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente alors elle est convergente.

Condition suffisante de convergence

En ce cas, $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$

Séries alternées

On suppose que (u_n) est une suite de nombres réels décroissante.

Si (u_n) est convergente de limite nulle alors la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n$ converge.

Critère spécial des séries alternées

Séries de référence

$\sum z^n$ converge si et seulement si $|z| < 1$.

Série géométrique de terme général z^n

En ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

$\sum \frac{z^n}{n!}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$.

Convergence des séries exponentielles

$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$

Série de Riemann de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$.

Comparaison des séries à termes positifs

Soit $\sum u_n, \sum v_n$ des séries réelles telles que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n$.

- si la série $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge aussi et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$
- si la série $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge aussi.

Soit u, v des suites de réels positifs.

Si $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Règle des équivalents

Familles sommables

Familles sommables de réels positifs

Soit I un ensemble et $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $[0, +\infty]$. On appelle **somme de la famille** $(u_i)_{i \in I}$ l'élément de $[0, +\infty]$ noté $\sum_{i \in I} u_i$ et défini par :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sup \left\{ \sum_{i \in F} u_i, F \subset I \text{ et } F \text{ fini} \right\}$$

- Lorsque $\sum_{i \in I} u_i < +\infty$, on dit que la **famille** $(u_i)_{i \in I}$ est **sommable**.
- Sinon $\sum_{i \in I} u_i = +\infty$.

Lorsque $I = \mathbb{N}$, la famille $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement si, la série $\sum u_n$ converge. En ce cas,

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} u_i = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Étant donné une permutation quelconque σ de l'ensemble d'indices I , on a

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_{\sigma(i)}$$

Invariance de la somme par permutation

Soit I et J deux ensembles tels que I est la réunion disjointe des ensembles I_j pour $j \in J$. Pour toute famille $(u_i)_{i \in I}$ de réels positifs, on a

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} u_i$$

Sommation par paquets

Soit I et J deux ensembles, $(u_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille de réels positifs. Alors

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{i,j} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} u_{i,j} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} u_{i,j}$$

Théorème de Fubini positif

Familles sommables de nombres complexes

Soit I un ensemble et $(u_i)_{i \in I}$ une famille de nombres complexes. On dit que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est **sommable** lorsque la famille de réels positifs $(|u_i|)_{i \in I}$ est sommable.

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille sommable de nombres complexes.

- Si les u_i sont réels, on pose $u_i^+ = \max(u_i, 0)$ et $u_i^- = \max(-u_i, 0)$. La somme $\sum_{i \in I} u_i$ de la famille $(u_i)_{i \in I}$ est donnée par $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_i^+ - \sum_{i \in I} u_i^-$.

- Dans le cas général, les familles de réels $(\Re(u_i))_{i \in I}$ et $(\Im(u_i))_{i \in I}$ sont sommables et la somme $\sum_{i \in I} u_i$ est donnée par : $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} \Re(u_i) + i \sum_{i \in I} \Im(u_i)$

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille sommable de nombres complexes. Pour toute permutation σ de I , la famille $(u_{\sigma(i)})_{i \in I}$ est sommable et

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_{\sigma(i)}$$

Invariance de la somme par permutation

Soit I et J deux ensembles tels que I est la réunion disjointe des ensembles I_j pour $j \in J$. Pour toute famille sommable $(u_i)_{i \in I}$ de nombres complexes, on a

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} u_i$$

Sommation par paquets

Soit I et J deux ensembles. La famille de nombres complexes $(u_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ est sommable si, et seulement si, pour tout $i \in I$, la famille $(u_{i,j})_{j \in J}$ est sommable et $\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} |u_{i,j}| < +\infty$. On a alors

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{i,j} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} u_{i,j} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} u_{i,j}$$

Théorème de Fubini

— Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes —

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries absolument convergentes. Alors, la série dont le terme général est $w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$ est absolument convergente et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right)$$

Produit de Cauchy

Fonctions de deux variables

Dans ce chapitre, $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne habituelle. Pour tout $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

_____ Ouverts de $\mathbb{R}^2$, fonction continue sur un ouvert _____

- Soit $a \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$. La **boule ouverte** de centre a et de rayon r l'ensemble des points $u \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $\|u - a\| < r$.
- Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$. On dit que A est un **ouvert** de $\mathbb{R}^2$ si, pour tout $a \in A$, A contient une boule ouverte de centre a .

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, f une application de U dans $\mathbb{R}$ et $(x_0, y_0) \in U$. On dit que f est **continue au point** (x_0, y_0) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall (x, y) \in A, \|(x, y) - (x_0, y_0)\| \leq \eta \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq \varepsilon$$

On dit que f est **continue sur** U si f est continue en tout point de U .

Dérivées partielles

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ et $(x_0, y_0) \in U$. Lorsqu'elles existent et sont finies, on appelle **dérivées partielles** de f en (x_0, y_0) les limites suivantes :

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t}$

L'existence de dérivées partielles en (x_0, y_0) n'entraîne pas la continuité en ce point.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On dit qu'une application f de U dans $\mathbb{R}$ est de **classe $\mathcal{C}^1$** sur U si f admet des dérivées partielles en tout point a de U et si les applications $a \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(a)$ et $a \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(a)$ sont continues sur U .

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U et $(x_0, y_0) \in U$. Alors f admet un développement limité d'ordre 1 en (x_0, y_0) , c'est-à-dire :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o_{\|(h,k)\| \rightarrow 0}(\|(h, k)\|)$$

On en déduit que si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U , alors f est continue sur U .

Soit $(x_0, y_0) \in U$, on appelle **gradient** de f en (x_0, y_0) et on note $\nabla f(x_0, y_0)$ le vecteur $\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$.

En notant $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^2$, on a

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (h, k) \rangle + o_{\|(h,k)\| \rightarrow 0}(\|(h, k)\|)$$

Dérivées partielles et composées

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, φ une application de I dans $\mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ et telle que $\varphi(I) \subset U$. On suppose que f et φ sont de classe $\mathcal{C}^1$. Alors la fonction $F = f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et :

$$\forall t \in I, F'(t) = \varphi'_1(t) \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) + \varphi'_2(t) \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$$

Soit U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$, g une fonction de U dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, φ une application de V dans U définie par $\varphi(x, y) = (\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y))$, où φ_1 et φ_2 sont deux applications de V dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors la fonction

$f = g \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V et, pour tout $(x_0, y_0) \in V$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x_0, y_0) \frac{\partial g}{\partial x}(\varphi(x_0, y_0)) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x_0, y_0) \frac{\partial g}{\partial y}(\varphi(x_0, y_0)) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x_0, y_0) \frac{\partial g}{\partial x}(\varphi(x_0, y_0)) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x_0, y_0) \frac{\partial g}{\partial y}(\varphi(x_0, y_0))\end{aligned}$$

Extremums d'une fonction

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, f une application de U dans $\mathbb{R}$ et $a \in U$. On dit que f admet un

- **maximum global** en a si $\forall u \in U, f(u) \leq f(a)$
- **maximum local** en a s'il existe $r > 0$ tel que : $\forall u \in U \cap B(a, r), f(u) \leq f(a)$
- **minimum global** en a si $\forall u \in U, f(u) \geq f(a)$
- **minimum local** en a s'il existe $r > 0$ tel que : $\forall u \in U \cap B(a, r), f(u) \geq f(a)$
- **extremum global** en a si f admet un maximum ou un minimum global en a ;
- **extremum local** en a si f admet un maximum ou un minimum local en a .

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Si f admet un extremum local au point $a \in U$, alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$$

**Condition nécessaire
d'extrémalité du premier
ordre**

Autrement dit, $\nabla f(a) = \vec{0}$. On dit que a est un **point critique** de f .

***Aucune investigation humaine ne doit s'appeler
vraie science si elle ne passe pas
par des démonstrations mathématiques.***

Léonard de Vinci

Dénombrement et probabilités

Ensembles finis, dénombrement

Cardinal d'un ensemble

Soit E un ensemble.

On dit que E est **fini** lorsqu'il est en bijection avec un intervalle d'entiers $\llbracket 1, n \rrbracket$.

L'entier n est unique, on l'appelle le **cardinal** de E et on note $\text{Card } E = n$.

Cardinal d'une partie

- A est fini et $\text{Card } A \leq \text{Card } E$,
- $A = E \iff \text{Card } A = \text{Card } E$.

E est un ensemble fini et $A \subset E$ est une partie de E .

Applications entre ensembles finis

Soit $f : E \rightarrow F$ une application entre ensembles **de même cardinal fini**.

f est injective $\iff f$ est surjective $\iff f$ est bijective

Dénombrements

Soit E et F des ensembles finis.

- $\text{Card } E \cup F = \text{Card } E + \text{Card } F - \text{Card } E \cap F$.
- Si $E \cap F = \emptyset$, alors $\text{Card } E \cup F = \text{Card } E + \text{Card } F$.
- $\text{Card } (E \times F) = \text{Card } E \times \text{Card } F$.
- $\text{Card } (F^E) = (\text{Card } F)^{\text{Card } E}$.
- L'ensemble des bijections (permutations) de E vers E est fini et de cardinal $(\text{Card } E)!$.

Nombre d'arrangements et de combinaisons

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$.

- $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ si $0 \leq p \leq n$, et 0 sinon.
- $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ si $0 \leq p \leq n$ et 0 sinon.

A_n^p (resp $\binom{n}{p}$) est le nombre d'**arrangements** (resp **combinaisons**) de p éléments parmi n .

Analyse combinatoire

Soit E_n un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$.

n^p est le nombre de	▶ listes à répétition de p éléments de E_n (ou p-listes d'éléments de E_n) ▶ applications de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans E_n
A_n^p est le nombre de	▶ listes de p éléments distincts de E_n (ou p-arrangements d'éléments de E_n) ▶ applications injectives de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans E_n
$\binom{n}{p}$ est le nombre de	▶ listes strictement croissantes de p éléments de E_n ▶ parties à p éléments de E_n (ou p-combinaisons d'éléments de E_n)

Espaces probabilisés finis

Le langage des probabilités

Une **expérience aléatoire** (e.a.) est une expérience dont on ne peut prédire avec certitude le résultat. Un résultat possible est appelé une **éventualité**, l'ensemble des éventualités est l'**univers des possibles**, noté Ω .

Un **événement aléatoire** est un événement qui peut se produire ou non, suivant le résultat de l'expérience aléatoire. On le représente par l'ensemble des éventualités qui le réalisent. Il s'agit donc d'une partie de Ω , $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. À la suite d'une e.a. on dira que l'**événement A est réalisé** si le résultat ω de cette expérience appartient à A .

Ω est l'événement certain, $\emptyset$ est l'événement impossible. L'identification entre événements aléatoires et parties de Ω permet d'utiliser les opérations élémentaires ensemblistes pour traduire certains événements, ainsi

- l'événement $(A \text{ ou } B)$, appelé **disjonction de A et B** , est modélisé par la réunion $A \cup B$;
- l'événement $(A \text{ et } B)$, appelé **conjonction de A et B** , est modélisé par l'intersection $A \cap B$;
- l'événement $\bar{A}$, appelé **contraire de A** , est modélisé par le complémentaire de A $\Omega \setminus A$.

Le fait que la réalisation de A entraîne celle de B ($A \Rightarrow B$) se traduit simplement par $A \subset B$.

Deux **événements** $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$ sont dits **incompatibles** lorsqu'il est impossible qu'ils soient réalisés simultanément, c'est-à-dire si $A \cap B = \emptyset$.

Une famille finie $(A_i)_{i \in I}$ d'événements forme un **système complet d'événements** (SCE) si les A_i sont 2 à 2 incompatibles et recouvrent Ω : $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$ et pour tout couple $(i, j) \in I^2$ d'éléments distincts $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Espace probabilisé fini

Soit Ω un ensemble fini, non vide. On appelle **probabilité** sur Ω toute application $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ qui vérifie les deux propriétés suivantes :

$$(\mathbb{P}_1) \quad P(\Omega) = 1$$

$$(\mathbb{P}_2) \quad \text{si } A \text{ et } B \text{ sont incompatibles, alors } P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

On dit alors que (Ω, P) est un **espace probabilisé fini**, et pour tout événement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on appelle **probabilité de** A le nombre $P(A) \in [0, 1]$.

un événement B est dit **négligeable** pour la probabilité P lorsque $P(B) = 0$. On considère une ea pour laquelle l'univers des possibles Ω est fini, non vide. Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ une partie de Ω . La **probabilité uniforme** pour que l'événement A soit réalisé à l'issue de l'expérience aléatoire est donnée par :

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\# \text{ cas favorables}}{\# \text{ cas possibles}}$$

Le procédé $A \mapsto P(A)$ définit une probabilité sur Ω appelée **probabilité uniforme**.

Propriétés des probabilités

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit A et B des événements. Alors

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$
- $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'événements **deux à deux incompatibles**, alors

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

Formule d'additivité finie

Soit $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et $(p_1, \dots, p_n)$ un n -uplet de nombres réels positifs. Pour qu'il existe une probabilité $P : \Omega \rightarrow [0, 1]$ telle que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(\{\omega_i\}) = p_i$ il faut et il suffit que $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

Conditionnement

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et B un événement non négligeable ($P(B) > 0$).

Pour tout événement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on définit la **probabilité conditionnelle de** A **sachant** B par : $P(A|B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

L'application $A \mapsto P_B(A)$ est une probabilité sur Ω .

$$P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$$

A et B sont des événements tels que $P(B) > 0$.

Formule des probabilités composées

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'événements tels que $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$. Alors

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1) \times P(A_2|A_1) \times \cdots \times P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

Formule des probabilités totales

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système complet d'événements non négligeables. Pour tout événement $B \in \mathcal{P}(\Omega)$,

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \times P(B | A_i)$$

Formule de Bayes

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système complet d'événements non négligeables. Pour tout événement B non négligeable, et pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$P(A_j | B) = \frac{P(A_j) \times P(B | A_j)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \times P(B | A_i)}$$

Indépendance en probabilité

Soit (Ω, P) un espace probabilisé. Deux événements A et B sont **indépendants pour la probabilité** P lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. En particulier, si $P(B) > 0$, A et B sont indépendants si et seulement si $P_B(A) = P(A)$.

Soit A, B des événements indépendants pour P , alors

- les événements A et $\bar{B}$ sont indépendants ;
- les événements $\bar{A}$ et B sont indépendants ;
- les événements $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.

Soit $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{P}(\Omega)^n$ une famille d'événements. Ces événements sont dits **indépendants** si pour tous $i_1, \dots, i_k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \times \cdots \times P(A_{i_k})$.

Toute sous-famille d'une famille d'événements indépendants est formée d'événements **indépendants**.

Soit $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{P}(\Omega)^n$ une famille d'événements **indépendants**. Soit $(B_1, \dots, B_n) \in \mathcal{P}(\Omega)^n$ une famille d'événements telle que : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $B_i = A_i$ ou $B_i = \bar{A}_i$. Alors les événements $B_1, \dots, B_n$ sont indépendants.

Variables aléatoires réelles finies

Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle finie

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.

On appelle **variable aléatoire réelle** (v.a.r.) sur Ω toute application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. L'ensemble des valeurs possibles pour X est fini et sera noté $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

L'application $P^X : \begin{matrix} X(\Omega) & \rightarrow & [0, 1] \\ x_i & \mapsto & P(X = x_i) \end{matrix}$ est une probabilité sur $X(\Omega)$, appelée **loi de probabilité de X** .

Ici $(X = x_i)$ désigne l'événement $X^{-1}(\{x_i\}) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_i\}$. Plus généralement, si $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, on note $(X \in A)$ ou encore $[X \in A]$ l'événement $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$.

La loi de probabilité de X est la donnée d'un n -uplet de couples $(x_i, p_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$:

- $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
- $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, p_i = P(X = x_i)$

Les événements $(X = x_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ forment un SCE, appelé **système complet d'événements liés à X** . En particulier $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, p_i \geq 0$, et $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Transformée d'une variable aléatoire finie

Soit X une v.a.r. sur (Ω, P) et $f : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur $X(\Omega)$. L'application composée $Y : \begin{matrix} \Omega & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & f(X(\omega)) \end{matrix}$ est une variable aléatoire notée $Y = f(X)$.

Espérance d'une variable aléatoire réelle

Soit X une v.a.r. sur Ω . L'**espérance** de X est le réel, noté $E(X)$, défini par $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$. Lorsque $E(X) = 0$, on dit que X est **centrée**.

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\}) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i)$$

Espérance d'une v.a.r.

Soit $f : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur $X(\Omega)$. Alors

$$E(f(X)) = \sum_{i=1}^n f(x_i) P(X = x_i)$$

Formule de transfert

Soit X, Y deux v.a.r. définies sur Ω . Alors

- **linéarité** : si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ alors $E(\lambda \cdot X + \mu \cdot Y) = \lambda \cdot E(X) + \mu \cdot E(Y)$
- **positivité** : si $X \geq 0$ (i.e. $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \geq 0$), alors $E(X) \geq 0$
- **croissance** : si $X \leq Y$ (i.e. $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \leq Y(\omega)$), alors $E(X) \leq E(Y)$.

Soit X une v.a.r. positive sur (Ω, P) . Alors

$$\forall x > 0, \quad P(X \geq x) \leq \frac{1}{x} E(X)$$

Inégalité de Markov

Variance, écart-type d'une variable aléatoire

Soit X une v.a.r. sur (Ω, P) .

- La **variance** de X est le nombre positif $V(X) = E((X - E(X))^2)$.
- L'**écart-type** de X est le nombre positif $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Lorsque $V(X) = 1$, on dit que X est **réduite**. Plus généralement, si $\sigma(X) > 0$, la v.a.r. $X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est une variable aléatoire centrée réduite, dite **associée à X** .

Soit X une v.a.r. sur (Ω, P) . Alors

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Formule de Huygens

Pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ de réels, on a $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

$$\forall t > 0, \quad P(|X - E(X)| \geq t) \leq \frac{1}{t^2} V(X)$$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Lois finies usuelles

Loi uniforme $X \rightsquigarrow \mathcal{U}([1, n])$		
Paramètres	Loi de probabilité	Espérance, Variance
• $n \in \mathbb{N}^*$	• $X(\Omega) = [1, n]$ • $P([X = k]) = 1/n$	• $E(X) = \frac{n+1}{2}$ • $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$
Loi de Bernoulli $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$		
Paramètres	Loi de probabilité	Espérance, Variance
• $p \in [0, 1]$ • $q = 1 - p$	• $X(\Omega) = \{0, 1\}$ • $P[X = 1] = p$ • $P[X = 0] = q$	• $E(X) = p$ • $V(X) = pq$
Loi binomiale $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p)$		
Paramètres	Loi de probabilité	Espérance, Variance
• $n \in \mathbb{N}^*$, • $p \in [0, 1]$ • $q = 1 - p$	• $X(\Omega) = [0, n]$ • $P[X = k] = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	• $E(X) = np$ • $V(X) = npq$

Soit $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. Alors la somme $S = X_1 + \dots + X_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Couples de variables aléatoires

Loi conjointe de deux variables aléatoires X et Y

Soit X, Y deux v.a.r. sur (Ω, P) . On note $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$.

L'application $P^{X,Y} : X(\Omega) \times Y(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ est une probabilité sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$, appelée **loi conjointe de X et de Y** .

La loi du couple (X, Y) est la donnée d'une famille $((x_i, y_j), p_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$:

- $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}, Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$
- $\forall (i, j) \in I \times J, p_{i,j} = P([X = x_i] \cap [Y = y_j])$

Les $([X = x_i] \cap [Y = y_j])$ pour $(i, j) \in I \times J$ forment un SCE. En particulier $\forall (i, j) \in I \times J, p_{i,j} \geq 0$ et $\sum_{(i,j) \in I \times J} p_{i,j} = 1$.

Lois marginales

Soit X et Y deux v.a.r. sur (Ω, P) . Les lois de X et Y sont appelées les **lois marginales du couple** (X, Y) . Soit $(i, j) \in I \times J$, on note $p_{i\bullet} = P(X = x_i)$ et $p_{\bullet j} = P(Y = y_j)$.

Soit (X, Y) un couple de v.a.r. sur (Ω, P) de loi $\{(x_i, y_j), p_{i,j}\}$. Alors

- $\forall i \in I, p_{i\bullet} = P(X = x_i) = P\left(\bigcup_{j \in J} [X = x_i] \cap [Y = y_j]\right) = \sum_{j \in J} p_{i,j}$
- $\forall j \in J, p_{\bullet j} = P(Y = y_j) = P\left(\bigcup_{i \in I} [X = x_i] \cap [Y = y_j]\right) = \sum_{i \in I} p_{i,j}$

Variables aléatoires indépendantes

X et Y sont dites **indépendantes** sur (Ω, P) si pour tout $(i, j) \in I \times J$ on a :

$$P([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = P(X = x_i) \times P(Y = y_j) \text{ ou encore } p_{i,j} = p_{i\bullet} \times p_{\bullet j}$$

Soit A, B deux parties quelconques de $\mathbb{R}$.

$$P(X \in A \text{ et } Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B) \quad \text{si } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}$$

Soit X, Y des v.a.r. indépendantes sur (Ω, P) . Pour toutes fonctions f et g définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$, $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Des variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont **indépendantes** lorsque pour toutes valeurs $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}$ prises par ces variables,

$$P([X_1 = x_{i_1}] \cap \dots \cap [X_n = x_{i_n}]) = P(X_1 = x_{i_1}) \times \dots \times P(X_n = x_{i_n}).$$

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables indépendantes, soit $f : X_1(\Omega) \times \dots \times X_m(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : X_{m+1}(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. Alors les transformées $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Covariance de variables aléatoires

Soit X, Y des v.a.r. sur (Ω, P) . La **covariance de X et de Y** est le nombre réel $\text{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$. Étant donné X, Y deux v.a.r. sur (Ω, P) ,

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Formule de Huygens

Soit X une v.a.r. sur (Ω, P) et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ un couple de réels, on a $\text{Cov}(aX + b, cY + d) = ac \text{Cov}(X, Y)$.

Si X et Y sont indépendantes sur (Ω, P) , **alors** $\text{Cov}(X, Y) = 0$. En conséquence

$$E(X \times Y) = E(X) \times E(Y)$$

si X et Y sont indépendantes

Lorsque $\text{Cov}(X, Y) = 0$, on dit que X et Y sont **décorrélées**.

*Cultivons avec ardeur les sciences mathématiques,
sans vouloir les étendre au-delà de leur domaine.*

Augustin-Louis Cauchy

Optique géométrique

Bases de l'optique géométrique

Modèles de la lumière

Modèle ondulatoire : la lumière est une onde électromagnétique. Une lumière **monochromatique** est une onde sinusoïdale de fréquence f . Une lumière quelconque est une superposition de lumières monochromatiques de fréquences différentes : elles constituent le **spectre** de l'onde.

Modèle corpusculaire : la lumière est un flux de particules, les **photons**.

Longueur d'onde et fréquence dans le vide

$$\lambda_0 = \frac{c}{f}$$

λ_0 longueur d'onde dans le vide

$c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ célérité dans le vide

f fréquence

Couleur en fonction de la longueur d'onde dans le vide



Types de sources de lumière

- **Sources de lumière blanche** : spectre continu (constitué de toutes les fréquences dans l'intervalle du visible, et même au-delà).
- **Lampes spectrales** : spectre discret (quelques fréquences).
- **Lasers** : lumière sensiblement monochromatique.

On modélise une source quelconque par un ensemble de sources ponctuelles.

Célérité de la lumière et indice de réfraction

$$v = \frac{c}{n}$$

v célérité dans le milieu

n indice de réfraction du milieu ($n \geq 1$)

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{\lambda_0}{n}$$

λ longueur d'onde dans le milieu

λ_0 longueur d'onde dans le vide

Approximation de l'optique géométrique

On modélise la lumière comme un ensemble de **rayons lumineux**. Dans un milieu transparent homogène et isotrope, ils sont *rectilignes*.

$$\lambda \ll d$$

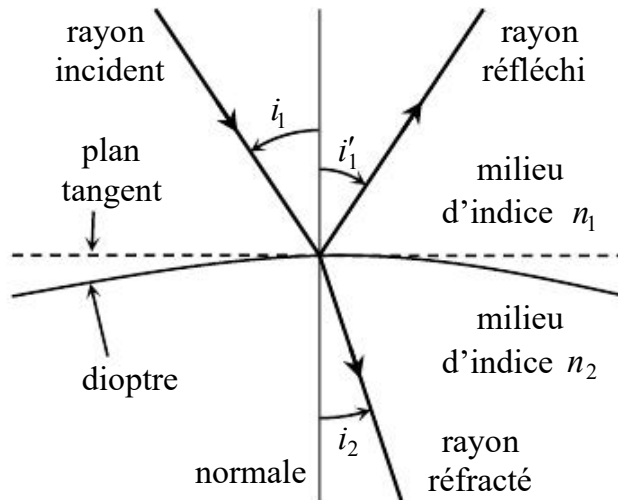
Condition pour négliger la diffraction

λ longueur d'onde, d taille caractéristique des systèmes rencontrés par la lumière

Réflexion et réfraction

Dioptre : interface de deux milieux d'indices différents.

Plan d'incidence : plan contenant le rayon incident et la normale au dioptre.



Lois de Snell-Descartes

1. Les rayons réfléchi et réfracté sont dans le plan d'incidence.
2. Le rayon réfléchi est symétrique du rayon incident par rapport à la normale : $i'_1 = -i_1$. (Avec des angles non orientés : $i'_1 = i_1$.)
3. L'angle de réfraction est lié à l'angle d'incidence par : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.

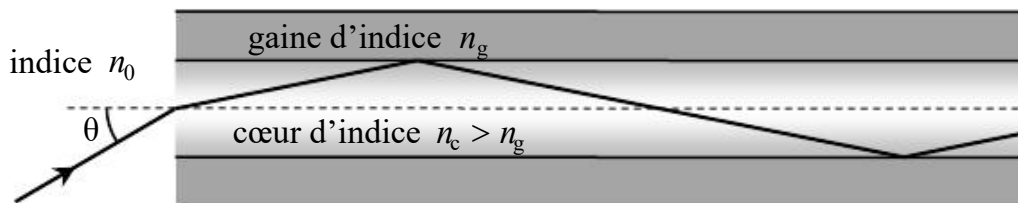
Loi de retour inverse de la lumière

Le trajet suivi par la lumière pour aller d'un point A à un point B est le même que celui suivi pour aller dans l'autre sens, de B à A .

Réfraction limite et réflexion totale

- Si $n_2 > n_1$, il y a toujours un rayon réfracté (en plus du rayon réfléchi).
- Si $n_2 < n_1$, le rayon réfracté n'existe que lorsque l'angle i_1 est inférieur à $i_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$. Lorsque $i_1 > i_{\text{lim}}$, il y a **réflexion totale**.

Fibre optique à saut d'indice



$\theta < \theta_a$ pour que le rayon soit guidé par réflexion totale : θ_a définit le **cône d'acceptance** de la fibre.

Ouverture numérique d'une fibre optique

$$o_n = n_0 \sin \theta_a$$

Définition de l'**ouverture numérique**

$$o_n = \sqrt{n_c^2 - n_g^2}$$

Expression en fonction des deux indices

Dispersion intermodale d'une fibre optique

$$\Delta\tau = \frac{L n_c (n_c - n_g)}{c n_g}$$

$\Delta\tau$ différence de temps de parcours entre les rayons d'angle 0 et θ_a , L longueur de la fibre

Formation d'images par un système optique

Système optique (SO) : ensemble de dioptries et/ou de miroirs.

Point objet : intersection de rayons incidents ou de leurs prolongements.

Point image : intersection de rayons émergents ou de leurs prolongements.

Un SO est **stigmatique** si, après sa traversée, les rayons issus d'un point A convergent vers un point A' ou semblent provenir d'un point A' .

Point objet (ou image) **réel** : intersection des rayons eux-mêmes.

Point objet (ou image) **virtuel** : intersection des prolongements des rayons.

Point objet (ou image) **à l'infini** : défini par des rayons parallèles entre eux.

Exemple du miroir plan

Le miroir plan est rigoureusement stigmatique pour tout point de l'espace. Il donne d'un objet réel une image virtuelle, et inversement.

Systèmes centrés et conditions de Gauss

Système centré : invariant par rotation autour d'un axe (**axe optique**).

Un système centré est **aplanétique** si l'image d'un objet plan perpendiculaire à l'axe optique est également plane et perpendiculaire à l'axe.

Conditions de Gauss : rayons **paraxiaux** (rencontrant le système près de l'axe optique, et peu inclinés par rapport à celui-ci). Les systèmes centrés sont stigmatiques et aplanétiques dans les conditions de Gauss.

Approximation de Gauss : tous les angles étant petits, $\sin \alpha \approx \alpha$, $\cos \alpha \approx 1$, $\tan \alpha \approx \alpha$.

Foyers et plans focaux

Foyer principal objet F : point dont l'image est à l'infini sur l'axe.

Foyer principal image F' : image d'un point objet situé à l'infini sur l'axe.

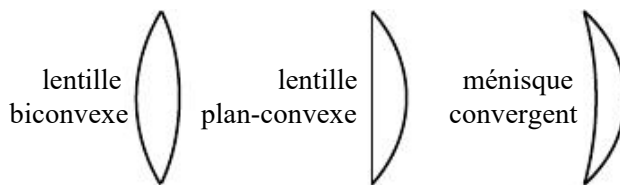
Si ces deux points sont à l'infini, le système est dit **afocal**.

Plan focal objet (resp. **image**) : plan passant par F (resp. F') et perpendiculaire à l'axe optique. Les points d'un plan focal autres que le foyer principal sont des **foyers secondaires**.

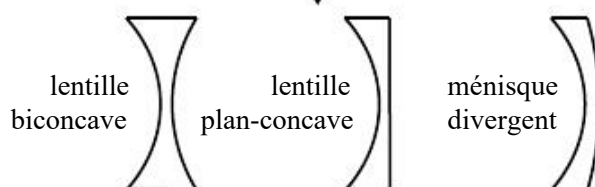
Lentilles sphériques minces

Définitions concernant les lentilles

Les lentilles à bords minces
sont **convergentes**.
 F et F' sont réels.



Les lentilles à bords épais
sont **divergentes**.
 F et F' sont virtuels.



$$\overline{OF'} = -\overline{OF}$$

O centre optique, $f = \overline{OF}$ distance focale
objet, $f' = \overline{OF'}$ distance focale image

Vergence

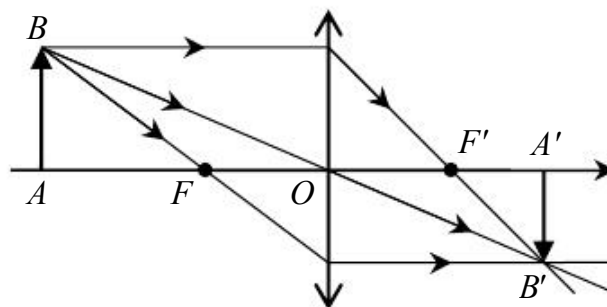
$$V = \frac{1}{f'} = -\frac{1}{f}$$

V s'exprime en m^{-1} ou dioptries (δ).
Lentille convergente : $f' > 0$, $V > 0$.
Lentille divergente : $f' < 0$, $V < 0$.

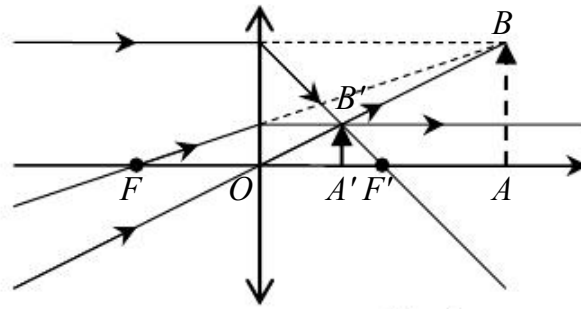
Deux lentilles minces *accollées*, de vergences V_1 et V_2 , sont équivalentes à une lentille mince de vergence $V_1 + V_2$.

Constructions graphiques avec une lentille

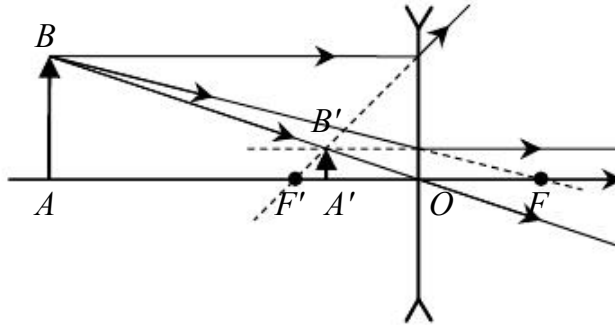
Lentille convergente,
objet réel (avant F),
image réelle



Lentille convergente,
objet virtuel,
image réelle



Lentille divergente,
objet réel,
image virtuelle



Formules de Descartes pour une lentille

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}}$$

Formule de conjugaison

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

Formule de grandissement

Formules de Newton pour une lentille

$$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -\overline{OF'}^2$$

Formule de conjugaison

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}}$$

Formule de grandissement

Condition de formation d'une image sur un écran

$$D \geq 4f'$$

D distance entre l'objet (réel) et l'écran

Champ de vision longitudinal de l'œil

Punctum proximum (PP) : point de l'axe optique à la distance minimale de vision distincte. Pour un œil **emmétrope** (normal), le PP est à 25 cm.

Punctum remotum (PR) : point de l'axe optique à la distance maximale de vision distincte. Pour un œil emmétrope, le PR est à l'infini.

L'**accommodation** est le processus par lequel l'œil diminue sa distance focale pour observer des objets plus proches. Lorsqu'un œil emmétrope est au repos (c'est-à-dire n'accommode pas), il observe à l'infini.

Limite de résolution angulaire de l'œil

$$\alpha_{\min} \sim 1' = 3 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

$\alpha_{\min}$ écart angulaire minimal entre deux points pour qu'ils soient vus séparément

Modélisation d'un appareil photographique

Objectif : lentille convergente. **Diaphragme** : ouverture de diamètre réglable, contrôlant la luminosité et les conditions de Gauss.

Capteur : plaque de détection numérique (ou anciennement pellicule photochimique), située à une distance réglable (**mise au point**) de l'objectif, en fonction de la distance de l'objet à photographier.

Profondeur de champ

La **profondeur de champ** est la distance entre le plan le plus proche et le plan le plus lointain donnant des images nettes simultanément.

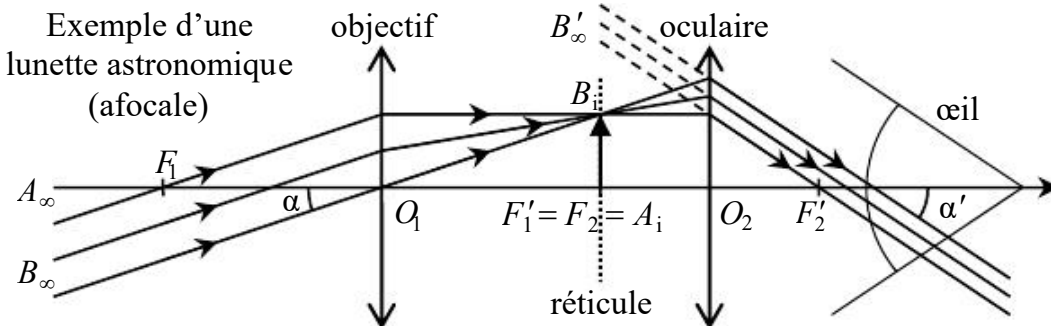
Elle augmente quand la distance entre l'objet et l'appareil augmente, quand l'ouverture du diaphragme diminue, et quand la focale diminue.

Modélisation d'un instrument d'observation

Objectif : lentille convergente de grande focale située du côté de l'objet, et donnant de celui-ci une image intermédiaire.

Réticule : plaque transparente munie d'une croix ou de graduations, sur laquelle doit se former l'image intermédiaire.

Oculaire : lentille convergente de courte focale située du côté de l'œil, et donnant de l'image intermédiaire une image finale virtuelle ou à l'infini.



Autres instruments d'optique

Un **collimateur** sert à simuler un objet à l'infini. Il comporte une source de lumière, un objet (fente ou réticule) et une lentille convergente. Son réglage consiste à amener l'objet au foyer objet de la lentille.

Un **goniomètre** sert à mesurer des angles avec une grande précision, à l'aide d'un **vernier** (système de double graduation). Il comporte un collimateur, un plateau circulaire pouvant tourner autour de son axe, et destiné à recevoir le système à étudier (prisme, réseau...), et une lunette de visée à l'infini.

Électrocinétique

Lois de l'électrocinétique

Définitions relatives aux circuits

Nœud : point commun d'au moins trois dipôles.

Branche : portion de circuit qui relie deux nœuds consécutifs.

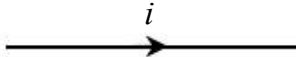
Maille : parcours fermé, constitué de branches successives, qui ne passe qu'une seule fois par les nœuds rencontrés.

Dipôles **en série** : appartenant à une même branche.

Dipôles **en parallèle** (ou **en dérivation**) : reliés aux deux mêmes nœuds.

Intensité du courant

$$i = \frac{\delta q}{dt}$$


 δq charge électrique traversant la section du conducteur, dans le sens de la flèche, pendant la durée infinitésimale dt

Ordres de grandeur d'intensités

Courant dans un canal synaptique	Valeurs usuelles au laboratoire	Valeurs en électrotechnique	Foudre
1 pA	1 mA à 1 A	10 à 1000 A	1 à 100 kA

Loi des nœuds (première loi de Kirchhoff)

$$\sum_k \varepsilon_k i_k = 0$$

i_k intensité dans chaque branche entourant le nœud ; $\varepsilon_k = +1$ si i_k est orientée vers le nœud, et -1 dans le cas contraire

Potentiel électrique

À chaque point d'un circuit est associé un **potentiel électrique**. Il est défini à une constante additive près : on peut donc choisir l'origine des potentiels, appelée **masse**, en un point quelconque du circuit.

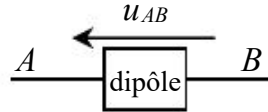
En pratique, beaucoup d'appareils (générateur de signaux, oscilloscope...) ont une borne commune, reliée à la terre, que l'on choisit comme masse.



Symbole de la masse

Tension électrique

$$u_{AB} = v_A - v_B$$



v_A et v_B potentiels des points A et B

Ordres de grandeur de tensions

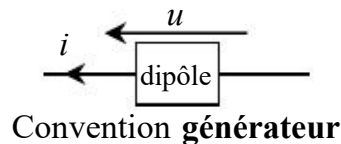
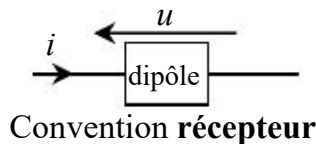
Potentiel d'action dans un neurone	Valeurs usuelles au laboratoire	Ligne à haute tension	Nuages d'orage
0,1 V	0,1 V à 100 V	1 à 100 kV	jusqu'à 100 MV

Loi des mailles (seconde loi de Kirchhoff)

$$\sum_k \varepsilon_k u_k = 0$$

u_k tension aux bornes de chaque dipôle de la maille ; $\varepsilon_k = +1$ si u_k est dans le sens de parcours de la maille, -1 dans le cas contraire

Conventions d'orientation pour un dipôle

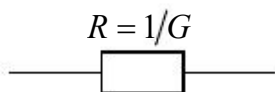


Puissance électrique

$$p = ui$$

En convention récepteur : puissance **reçue**
En convention générateur : puissance **fournie**

Loi d'Ohm pour un dipôle ohmique



R résistance, G conductance

$$u = Ri \quad \text{ou} \quad i = Gu$$

u et i en convention récepteur

$$u = -Ri \quad \text{ou} \quad i = -Gu$$

u et i en convention générateur

Valeurs usuelles de résistances utilisées au laboratoire : 100 Ω à 100 k Ω .

Puissance reçue par un dipôle ohmique

$$p = Ri^2 = \frac{u^2}{R}$$

Cette puissance est dissipée en énergie interne du dipôle et en chaleur fournie à l'extérieur du circuit (effet Joule).

Association de dipôles ohmiques en série

$$R_{\text{éq}} = \sum_k R_k$$

Résistance équivalente

$$u_j = \frac{R_j}{\sum_k R_k} u_{\text{ensemble}}$$

Formule du **(pont) diviseur de tension**

u_j tension aux bornes de R_j

Association de dipôles ohmiques en parallèle

$$G_{\text{éq}} = \sum_k G_k \quad \text{ou} \quad \frac{1}{R_{\text{éq}}} = \sum_k \frac{1}{R_k}$$

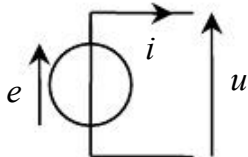
Conductance équivalente

$$i_j = \frac{G_j}{\sum_k G_k} i_{\text{ensemble}}$$

Formule du **(pont) diviseur de courant**

i_j intensité du courant traversant G_j

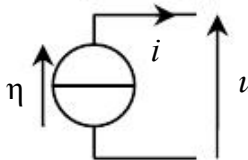
Sources idéales



Source idéale de tension

$u = e$ quel que soit le courant i

e **force électromotrice** (FÉM)

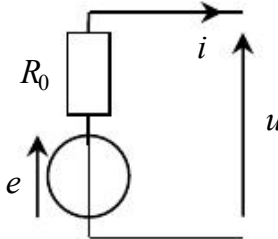


Source idéale de courant

$i = \eta$ quelle que soit la tension u

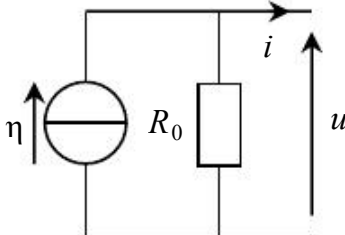
η **courant électromoteur** (CÉM) ou **courant de court-circuit**

Dipôle actif linéaire quelconque



Modèle de Thévenin

$u = e - R_0 i$ (avec ces conventions)



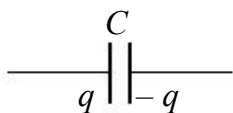
Modèle de Norton

$i = \eta - \frac{u}{R_0}$ (avec ces conventions)

R_0 résistance interne ou résistance de sortie (pour un générateur), $e = R_0 \eta$

Circuit linéaire du premier ordre

Condensateur



C capacité

q et $-q$ charges portées par les armatures

$$i = C \frac{du}{dt}$$

u et i en convention récepteur

$$i = -C \frac{du}{dt}$$

u et i en convention générateur

$$q = Cu$$

u pointant vers l'armature de charge q

$$q = -Cu$$

u pointant vers l'armature de charge $-q$

Valeurs usuelles de capacités utilisées au laboratoire : 1 nF à 1 μ F.

Propriétés du condensateur

$$u(0^+) = u(0^-)$$

$$q(0^+) = q(0^-)$$

$$E_C = \frac{1}{2} Cu^2$$

La tension aux bornes d'un condensateur et sa charge ne peuvent pas être discontinues.

Énergie électromagnétique stockée

Bobine (idéale)



L inductance

$$u = L \frac{di}{dt}$$

u et i en convention récepteur

$$u = -L \frac{di}{dt}$$

u et i en convention générateur

Valeurs usuelles d'inductances utilisées au laboratoire : 1 mH à 1 H.

Bobine réelle

$$u = L \frac{di}{dt} + ri$$

u et i en convention récepteur

r résistance des fils de la bobine

Propriétés de la bobine

$$i(0^+) = i(0^-)$$

L'intensité du courant dans une bobine ne peut pas être discontinue.

$$E_L = \frac{1}{2} Li^2$$

Énergie électromagnétique stockée

Régime libre et échelon de tension

Un circuit est en **régime libre** s'il ne comporte aucun générateur.

Un **échelon de tension** entre deux points d'un circuit est une tension passant instantanément d'une valeur constante nulle à une autre valeur constante.

Circuit d'ordre 1 en régime libre

Exemples types : circuits RC , RL

Équation différentielle pour
toute grandeur électrique

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{\tau}x = 0$$

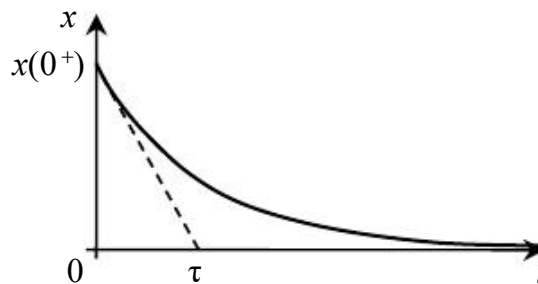
τ temps de relaxation : $\tau = RC$ (circuit RC), $\tau = \frac{L}{R}$ (circuit RL)

Solution

$$x(t) = Ae^{-t/\tau}$$

$A = x(0^+)$ (condition initiale)

Courbe temporelle
(avec $x(0^+) > 0$)



Circuit d'ordre 1 soumis à un échelon de tension

Exemples types : circuits RC , RL avec source de FÉM E en série

Équation différentielle pour
toute grandeur électrique

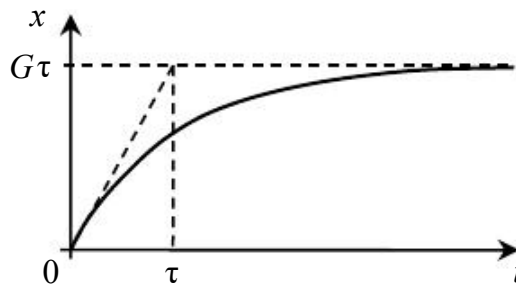
$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{\tau}x = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{dt} + \frac{1}{\tau}x = G = \text{cte}$$

Solution (cas avec G)

$$x(t) = Ae^{-t/\tau} + G\tau$$

A déterminée par la condition initiale $x(0^+)$

Courbe temporelle
(cas avec second membre G et
 $x(0^+) = 0$)



Cas de la charge d'un
condensateur par une FÉM E à
travers une résistance R

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau}u_C = \frac{E}{\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = RC$$

$$u_C(t) = E(1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{pour} \quad u_C(0^+) = 0$$

Bilan énergétique de la charge d'un condensateur

$$\mathcal{E}_C(0) = \frac{1}{2} C u(0)^2 = 0$$

Énergie stockée initialement dans le condensateur

$$\mathcal{E}_C(+\infty) = \frac{1}{2} C u(+\infty)^2 = \frac{1}{2} C E^2$$

Énergie stockée en fin de charge

$$W = C E^2 = 2 \mathcal{E}_C(+\infty)$$

Travail électrique fourni par la FÉM E , la moitié étant dissipée dans la résistance

Oscillateur électrique en régime libre

Oscillateur harmonique électrique

Exemple type : circuit LC

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega_0^2 u = 0$$

Équation différentielle définissant l'oscillateur harmonique
 ω_0 **pulsation propre**

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Pulsation propre d'un circuit LC

$$u(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

Première forme de la solution
 A et B deux constantes (de signe quelconque)

$$u(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Deuxième forme de la solution
 $X_m (> 0)$ **amplitude** des oscillations
 φ **phase** à l'origine

A et B , ou bien X_m et φ , s'obtiennent à l'aide de deux conditions initiales.

Autres grandeurs caractéristiques

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

T_0 **période propre** de l'oscillateur
 ω_0 pulsation propre

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

f_0 **fréquence propre** de l'oscillateur

Bilan énergétique du circuit LC

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} L i^2 + \frac{1}{2} C u^2 = \text{cte}$$

Conservation de l'énergie totale stockée

$$\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} C u^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_L = \frac{1}{2} L i^2 \quad \text{oscillent alternativement entre 0 et } \mathcal{E}.$$

___Circuit d'ordre 2 en régime libre ou soumis à un échelon___

Exemple type : circuit *RLC* série

Équation différentielle pour
toute grandeur électrique

ω_0 pulsation propre

Q facteur de qualité

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\text{ou } \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = G = \text{cte}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} \text{ pour un circuit } RLC \text{ série}$$

Régime **apériodique**

$$\left(Q < \frac{1}{2} \right)$$

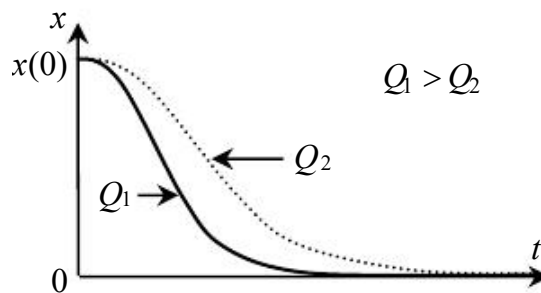
$$x(t) = A_1 e^{-t/\tau_1} + A_2 e^{-t/\tau_2} \left[+ G/\omega_0^2 \right]$$

$$\text{avec } -\frac{1}{\tau_{1,2}} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$$

Régime critique $\left(Q = \frac{1}{2} \right)$

$$x(t) = (At + B) e^{-\omega_0 t} \left[+ G/\omega_0^2 \right]$$

Courbe temporelle
(cas sans second membre,
avec $Q \leq 1/2$,
 $x(0) > 0$ et $\dot{x}(0) = 0$)



Régime **pseudo-périodique**

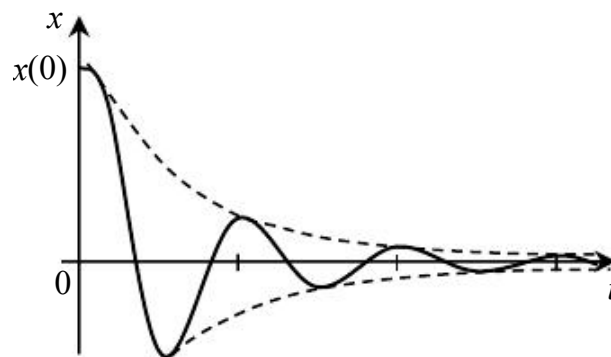
$$\left(Q > \frac{1}{2} \right)$$

$$x(t) = e^{-t/\tau} (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \left[+ G/\omega_0^2 \right]$$

$$\text{ou } x(t) = X_m e^{-t/\tau} \cos(\omega t + \varphi) \left[+ G/\omega_0^2 \right]$$

$$\text{avec } \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \text{ et } \tau = \frac{2Q}{\omega_0}$$

Courbe temporelle
(cas sans second membre,
avec $Q > 1/2$,
 $x(0) > 0$ et $\dot{x}(0) = 0$)



Circuits linéaires en régime sinusoïdal forcé

Régime sinusoïdal forcé

Lorsqu'un circuit comporte un générateur fournissant un signal sinusoïdal, il fonctionne en **régime sinusoïdal forcé** (ou **établi**) après un bref régime transitoire. Alors toutes les grandeurs sont sinusoïdales de même période.

Grandeur sinusoïdale

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$X_m (> 0)$ amplitude, ω pulsation (imposée par le générateur), φ phase à l'origine

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

T période, f fréquence

Valeur efficace

$$X_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x(t)^2 dt}$$

Définition pour une grandeur périodique quelconque

$$X_{\text{eff}} = \frac{X_m}{\sqrt{2}}$$

Cas d'une grandeur sinusoïdale

Notation complexe

$$\underline{x}(t) = X_m e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$\text{ou } \underline{x}(t) = \underline{X} e^{j\omega t}$$

$$\underline{X} = X_m e^{j\varphi} \text{ amplitude complexe}$$

Propriété des grandeurs complexes

$$\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = j\omega \underline{x}(t) \quad \text{et} \quad \int \underline{x}(t) dt = \frac{\underline{x}(t)}{j\omega} \quad (\text{primitive sinusoïdale})$$

Lien entre grandeurs réelles et complexes

$$x(t) = \text{Re}[\underline{X} e^{j\omega t}], \quad X_m = |\underline{X}|, \quad \varphi = \arg(\underline{X})$$

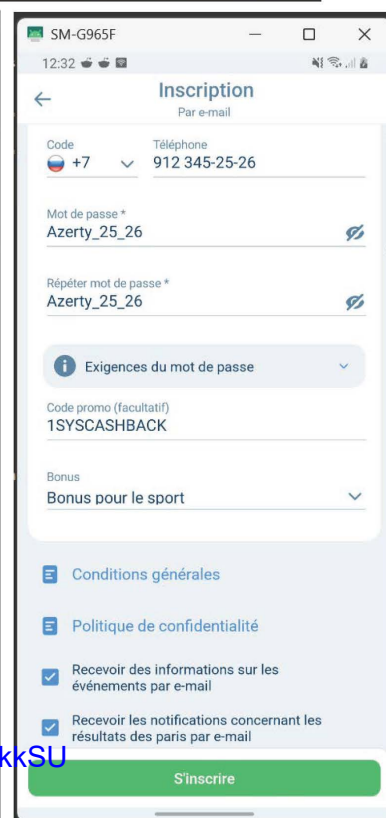
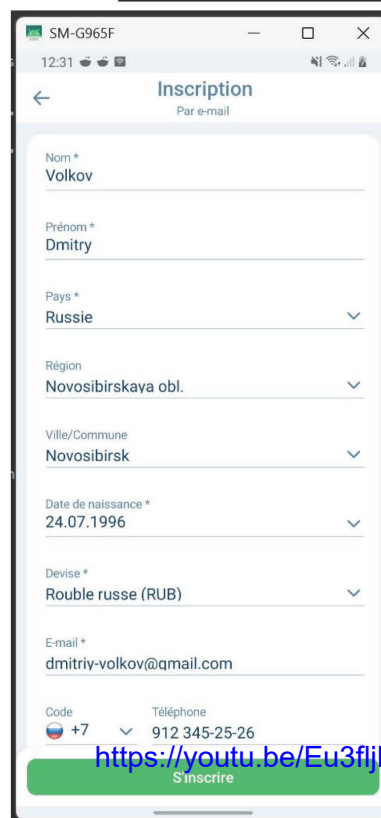
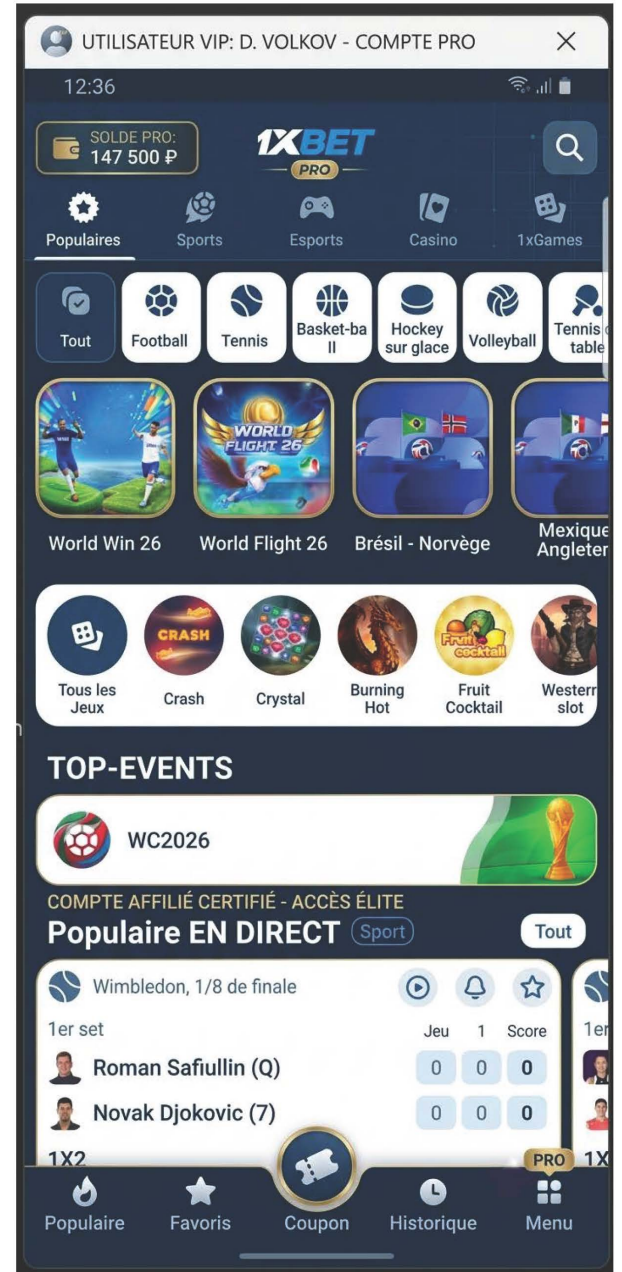
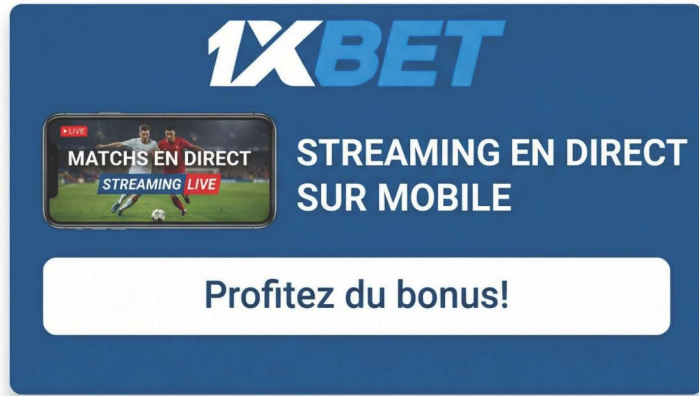
Lois de Kirchhoff avec les amplitudes complexes

$$\sum_k \varepsilon_k \underline{I}_k = 0$$

Loi des nœuds

$$\sum_k \varepsilon_k \underline{U}_k = 0$$

Loi des mailles



Comment Créer un Compte 1xBet Officiel :

<https://youtu.be/Eu3flijkkkSU>

Impédance et admittance complexes

$$\underline{U} = \underline{Z} \underline{I} \quad \underline{Z} \text{ impédance complexe}$$

$$\underline{I} = \underline{Y} \underline{U} \quad \underline{Y} \text{ admittance complexe}$$

u et i en convention récepteur

$$|\underline{Z}| = \frac{1}{|\underline{Y}|} = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} ; \varphi = \arg(\underline{Z}) = -\arg(\underline{Y}) = \arg(\underline{U}) - \arg(\underline{I}) = \varphi_u - \varphi_i$$

Impédances et admittances des dipôles simples

$$\underline{Z}_R = R ; \underline{Y}_R = \frac{1}{R} \quad \text{Dipôle ohmique (résistance)}$$

$$\underline{Z}_L = jL\omega ; \underline{Y}_L = \frac{1}{jL\omega} \quad \text{Bobine (inductance)}$$

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega} ; \underline{Y}_C = jC\omega \quad \text{Condensateur (capacité)}$$

Comportement asymptotique

Lorsque $\omega \rightarrow 0$:

$$|\underline{Z}_L| \rightarrow 0, |\underline{Y}_L| \rightarrow \infty \quad \text{bobine équivalente à un fil}$$

$$|\underline{Z}_C| \rightarrow \infty, |\underline{Y}_C| \rightarrow 0 \quad \text{condensateur équiv. à un interrupteur ouvert}$$

Lorsque $\omega \rightarrow \infty$:

$$|\underline{Z}_L| \rightarrow \infty, |\underline{Y}_L| \rightarrow 0 \quad \text{bobine équivalente à un interrupteur ouvert}$$

$$|\underline{Z}_C| \rightarrow 0, |\underline{Y}_C| \rightarrow \infty \quad \text{condensateur équivalent à un fil}$$

Association de dipôles passifs en série

$$\underline{Z}_{\text{eq}} = \sum_k \underline{Z}_k \quad \text{Impédance équivalente}$$

$$\underline{U}_j = \frac{\underline{Z}_j}{\sum_k \underline{Z}_k} \underline{U}_{\text{ensemble}} \quad \text{Formule du (pont) diviseur de tension}$$

$\underline{U}_j$ tension aux bornes de $\underline{Z}_j$

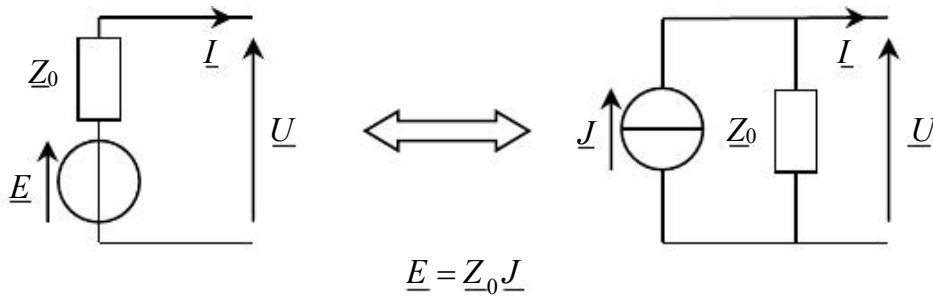
Association de dipôles passifs en parallèle

$$\underline{Y}_{\text{eq}} = \sum_k \underline{Y}_k \quad \text{Admittance équivalente}$$

$$\underline{I}_j = \frac{\underline{Y}_j}{\sum_k \underline{Y}_k} \underline{I}_{\text{ensemble}} \quad \text{Formule du (pont) diviseur de courant}$$

$\underline{I}_j$ intensité du courant traversant $\underline{Y}_j$

Dipôle actif quelconque



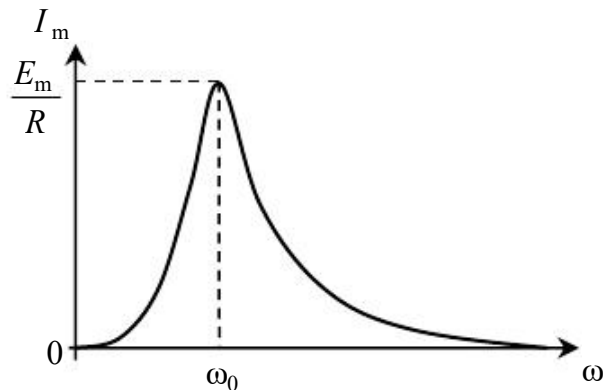
Réponse en intensité du circuit *RLC* série

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}_m}{R} \frac{1}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ pulsation propre}$$

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \text{ facteur de qualité}$$

$$I_m = \frac{E_m}{R \sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$$

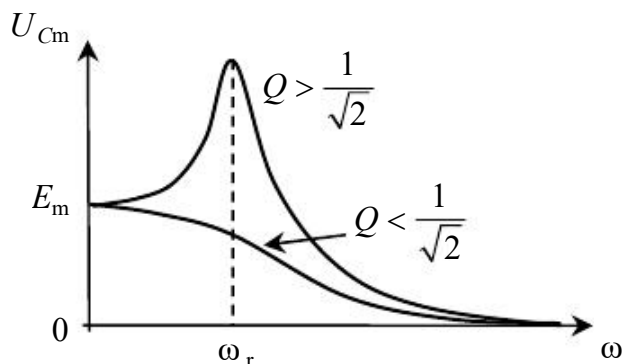


Résonance en intensité, quelle que soit la valeur de Q , à la pulsation ω_0

Réponse en charge ou en tension du condensateur

$$\underline{U}_C = \frac{\underline{E}_m}{1 + j \frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

$$U_{Cm} = \frac{E_m}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}$$



Résonance à la pulsation $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ seulement si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

Filtrage linéaire

Principe de l'analyse de Fourier

L'**analyse de Fourier** consiste à écrire une fonction (en particulier un signal physique) sous forme d'une somme de fonctions sinusoïdales de fréquences différentes.

Décomposition de Fourier d'un signal périodique

$$e(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

$$\text{avec } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$E_{\text{eff}} = \sqrt{E_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} E_n^2}$$

$$= \sqrt{E_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n^2 \text{ eff}}$$

$e(t)$ signal quelconque de période T

E_0 valeur moyenne de $e(t)$

$E_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$ **harmonique** de rang n
(appelé **fondamental** pour $n = 1$)

E_{eff} valeur efficace de $e(t)$

$E_n \text{ eff}$ valeur efficace de l'harmonique de rang n

Définition générale d'une fonction de transfert

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)}$$

$\underline{e}(t) = \underline{E} e^{j\omega t}$ signal d'entrée (ou excitation)

$\underline{s}(t) = \underline{S} e^{j\omega t}$ signal de sortie (ou réponse)

Fonction de transfert d'un quadripôle

$$\underline{H} = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{\underline{u}_s(t)}{\underline{u}_e(t)}$$

$\underline{u}_e(t) = \underline{U}_e e^{j\omega t}$ tension d'entrée

$\underline{u}_s(t) = \underline{U}_s e^{j\omega t}$ tension de sortie

La fonction de transfert dépend en général de l'impédance branchée aux bornes de sortie du quadripôle (**impédance de charge**).

Gain et phase

$$\underline{H} = G e^{j\varphi}$$

Forme polaire de la fonction de transfert

$$G = \left| \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} \right| = \frac{U_{\text{sm}}}{U_{\text{em}}}$$

G gain (amplification ou atténuation du signal)

$$G_{\text{dB}} = 20 \log G = 20 \log |\underline{H}|$$

G_{dB} gain en décibels

$$\varphi = \arg(\underline{U}_s) - \arg(\underline{U}_e)$$

$$= \varphi_s - \varphi_e$$

φ déphasage de $u_s(t)$ par rapport à $u_e(t)$

Diagramme de Bode

Courbe de gain : G_{dB} en fonction de $\log x$, avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ (pulsation réduite)

Courbe de phase : φ en fonction de $\log x$

Filtres d'ordre 1

$$\text{Filtre passe-bas : } \underline{H}(x) = H_0 \frac{1}{1 + jx}$$

$$\text{Filtre passe-haut : } \underline{H}(x) = H_0 \frac{jx}{1 + jx}$$

Filtres d'ordre 2

$$\text{Filtre passe-bas : } \underline{H}(x) = H_0 \frac{1}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2} = H_0 \frac{\frac{jQ}{x}}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

$$\text{Filtre passe-haut : } \underline{H}(x) = H_0 \frac{-x^2}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2} = H_0 \frac{jQx}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

$$\text{Filtre passe-bande : } \underline{H}(x) = H_0 \frac{j\frac{x}{Q}}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2} = H_0 \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

Pulsation de coupure à -3 dB

C'est une pulsation ω_c pour laquelle $G = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$, soit $G_{dB} = G_{dB\max} - 3 \text{ dB}$.

Pour un passe-haut ou un passe-bas d'ordre 1, $\omega_c = \omega_0$.

Pour un passe-haut ou un passe-bas d'ordre 2, $\omega_c = \omega_0$ si $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Pour un passe-bande d'ordre 2, il y a deux pulsations de coupure ω_1 et ω_2 ; l'intervalle $[\omega_1, \omega_2]$ est la **bande passante**, sa largeur $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ vérifie :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\Delta f}{f_0} = \Delta x = \frac{1}{Q}$$

Utilisation d'un filtre comme intégrateur

$$\underline{H} \approx \frac{A}{j\omega}$$

Fonction de transfert dans un certain domaine de fréquence, A constante réelle

$$u_s(t) = A \int_0^t u_e(t) dt \quad [+Au_e(0)]$$

Relation entrée-sortie

$u_e(t)$ et $u_s(t)$ signaux d'entrée et de sortie

Les filtres passe-bas d'ordre 1 (pulsation de coupure ω_0) et passe-bande d'ordre 2 (pulsation centrale ω_0) réalisent une intégration pour $\omega \gg \omega_0$.

Utilisation d'un filtre comme dérivateur

$$\underline{H} \approx A \times j\omega$$

Fonction de transfert dans un certain domaine de fréquence, A constante réelle

$$u_s(t) = A \times \frac{du_e(t)}{dt}$$

Relation entrée-sortie

$u_e(t)$ et $u_s(t)$ signaux d'entrée et de sortie

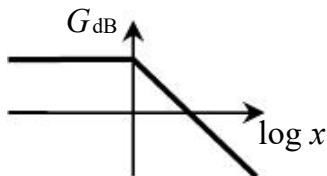
Les filtres passe-haut d'ordre 1 (pulsation de coupure ω_0) et passe-bande d'ordre 2 (pulsation centrale ω_0) réalisent une dérivation pour $\omega \ll \omega_0$.

Utilisation d'un filtre comme moyenneur

Un filtre passe-bas de fréquence de coupure très basse, par rapport à celle du signal d'entrée, ne garde que la valeur moyenne (terme de fréquence nulle).

Allure des diagrammes de Bode usuels

On a représenté les asymptotes des courbes de gain.

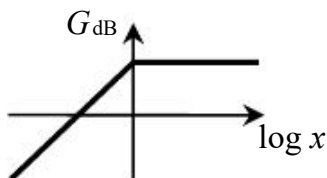


Filtre passe-bas

Pente en haute fréquence :

– 20 dB/décade pour un filtre d'ordre 1

– 40 dB/décade pour un filtre d'ordre 2

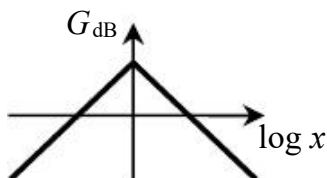


Filtre passe-haut

Pente en basse fréquence :

+ 20 dB/décade pour un filtre d'ordre 1

+ 40 dB/décade pour un filtre d'ordre 2

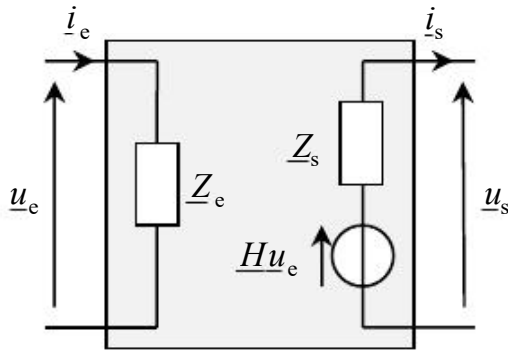


Filtre passe-bande d'ordre 2

Pente en basse fréquence : + 20 dB/décade

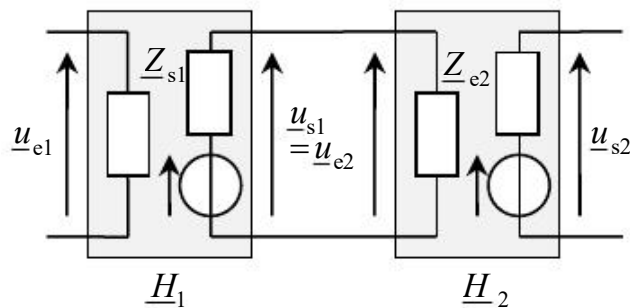
Pente en haute fréquence : – 20 dB/décade

Impédances d'entrée et de sortie



Modélisation d'un quadripôle linéaire quelconque
(indépendamment de sa structure interne réelle)
 $\underline{H}$ fonction de transfert en sortie ouverte
 $\underline{Z}_e$ **impédance d'entrée**
 $\underline{Z}_s$ **impédance de sortie**

Quadripôles en cascade



$$\underline{H} = \underline{H}_1 \times \underline{H}_2$$

si $\underline{Z}_{s1} \ll \underline{Z}_{e2}$

Cas idéal : $\underline{Z}_{s1} = 0$ (quadripôle 1 **idéal en sortie**)

ou bien $\underline{Z}_{e2} = \infty$ (quadripôle 2 **idéal en entrée**).

***Le concret c'est de l'abstrait
rendu familier par l'usage.***

Paul Langevin

Physique des ondes

Propagation d'un signal

Forme générale d'une onde quelconque

$s(M, t)$ s grandeur physique dépendant du point M et de la date t

Onde progressive unidimensionnelle (sans atténuation)

$$s(M, t) = F(t - x/c)$$

ou $s(M, t) = f(x - ct)$

Onde se propageant vers les x croissants
 F ou f fonction quelconque
 c **célérité** (vitesse de propagation)

$$s(M, t) = G(t + x/c)$$

ou $s(M, t) = g(x + ct)$

Onde se propageant vers les x décroissants
 G ou g fonction quelconque

Une onde unidimensionnelle peut être une onde dans un milieu à une dimension (onde électrique dans un câble, onde mécanique sur une corde...), ou une **onde plane** dans un milieu à deux ou trois dimensions.

Onde progressive sinusoïdale

$$s(M, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

$$\omega = kc$$

Onde se propageant vers les x croissants
 A (> 0) amplitude, ω pulsation temporelle
 k pulsation spatiale, c célérité (ou **vitesse de phase**)

$$\vec{k} = k \vec{e}_x$$

$\vec{k}$ vecteur d'onde

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$$

T période temporelle, f fréquence

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{c}{f}$$

λ **longueur d'onde** (ou période spatiale)

$$\Delta\varphi_{2/1} = k(x_2 - x_1)$$

$\Delta\varphi_{2/1}$ **déphasage** entre un point d'abscisse x_2 et un point d'abscisse x_1

$$s(M, t) = A \cos(\omega t + kx + \varphi)$$

Onde se propageant vers les x décroissants

Onde progressive quelconque

Une onde progressive quelconque est une somme d'ondes progressives sinusoïdales de fréquences différentes : elles constituent le **spectre** de l'onde.

Cas des ondes acoustiques

$$20\text{Hz} < f < 20\text{kHz}$$

Intervalle de fréquences des sons audibles

$$f > 20\text{kHz}$$

Fréquences des ultrasons

$$f < 20\text{Hz}$$

Fréquences des infrasons

Une note de musique est généralement une superposition de signaux appelés **harmoniques**, dont les fréquences sont *multiples* de la fréquence **fondamentale** définissant cette note (spectre discret).

Cas des ondes électromagnétiques

$$\lambda_0 = \frac{c}{f}$$

λ_0 longueur d'onde dans le vide

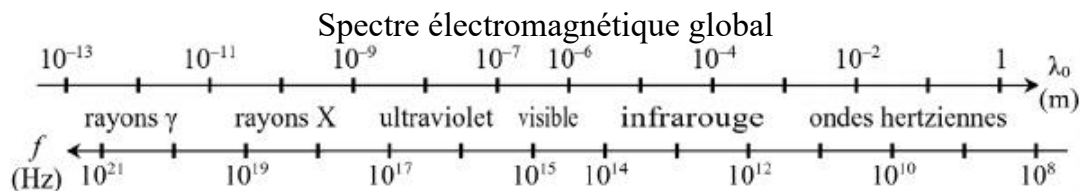
c célérité dans le vide, f fréquence

$$4 \cdot 10^{14} \text{ Hz} < f < 8 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

Intervalles de fréquences et de longueurs

$$800 \text{ nm} > \lambda_0 > 400 \text{ nm}$$

d'onde (dans le vide) de la lumière visible



Onde **monochromatique** : sinusoïdale (une seule fréquence). Onde électromagnétique quelconque : polychromatique (spectre discret ou continu).

Propagation dispersive ou non

Propagation **dispersive** : la célérité varie en fonction de la fréquence. Cela est dû principalement au milieu de propagation.

Exemples de propagation dispersive : lumière dans la plupart des milieux transparents (d'où la séparation des couleurs dans un prisme) ; vagues à la surface de l'eau.

Exemples de propagation non dispersive (en première approximation) : lumière dans le vide ou dans l'air ; onde acoustique dans un fluide ; onde de déformation sur une corde.

Diffraction d'une onde par une ouverture

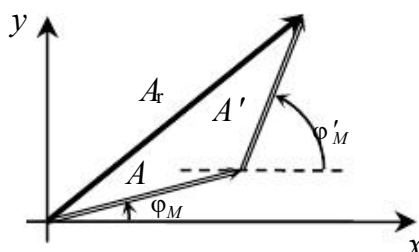
$$\sin \theta \approx \frac{\lambda}{a}$$

θ largeur angulaire de l'onde diffractée par une ouverture de largeur a

λ longueur d'onde

___ Interférences entre deux ondes sinusoïdales en un point ___

Construction de Fresnel



$$\varphi = \varphi'_M - \varphi_M$$

$$A_r = \sqrt{A^2 + A'^2 + 2AA' \cos \varphi}$$

$$\varphi = 0 (+2m\pi)$$

$$\varphi = \pi (+2m\pi)$$

φ déphasage de deux ondes arrivant en M

A et A' amplitudes des deux ondes

A_r amplitude résultante

Condition d'interférences **constructives**

(amplitude résultante A_r *maximale*)

Condition d'interférences **destructives**

(amplitude résultante A_r *minimale*, et même *nulle* si $A = A'$)

___ Formule de Fresnel pour les interférences lumineuses ___

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \varphi$$

$$\varphi = k\delta$$

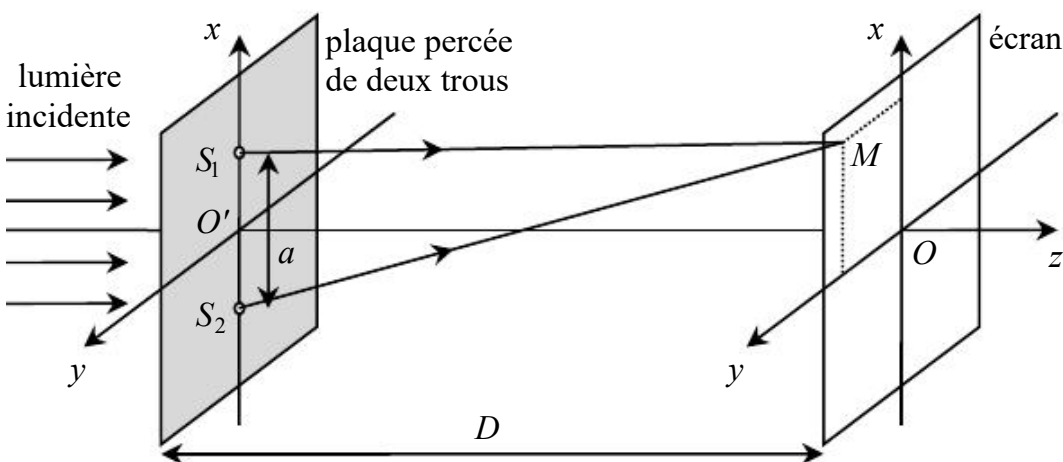
I_1, I_2 intensités des deux ondes

$I(M)$ intensité de l'onde résultante en M

φ déphasage des deux ondes arrivant en M

δ différence entre les chemins parcourus par les deux ondes, k pulsation spatiale

___ Exemple d'interférences lumineuses : trous de Young ___



$$\delta = S_2M - S_1M = \frac{ax}{D}$$

δ différence de chemin optique en M

a écart entre les trous, x abscisse de M

D distance entre les trous et l'écran

Introduction à la physique quantique

_____ Relations de Planck–Einstein pour la lumière _____

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

E énergie d'un **photon**, ν et λ fréquence et longueur d'onde de la lumière, c célérité
 $h = 6,626 \cdot 10^{-38} \text{ J} \cdot \text{s}$ constante de Planck

$$\vec{p} = \frac{h\nu}{c} \vec{e} = \frac{h}{\lambda} \vec{e}$$

$\vec{p}$ quantité de mouvement d'un photon
 $\vec{e}$ vecteur unitaire de la direction de propagation de la lumière

_____ Relation de Louis de Broglie pour la matière _____

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

λ longueur d'onde pour l'**onde de matière** associée à une particule de quantité de mouvement $\vec{p}$, h constante de Planck

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$\vec{p}$ quantité de mouvement classique
 m masse, $\vec{v}$ vitesse de la particule

___ Inégalité de Heisenberg spatiale (en ordre de grandeur) ___

$$\Delta p_x \Delta x \gtrsim \hbar$$

Δx , Δp_x incertitudes sur la position et sur la quantité de mouvement d'une particule
 $\hbar = h/2\pi$ constante de Planck réduite

_____ Fonction d'onde et probabilité _____

$$\psi(x, y, z, t)$$

ψ **fonction d'onde** d'une particule, fonction complexe des coordonnées et du temps

$$d^3P = |\psi|^2 d^3\tau$$

d^3P **probabilité de présence** de la particule dans un volume élémentaire $d^3\tau$

$$\iiint |\psi|^2 d^3\tau = 1$$

Condition de normalisation

Dans une situation de **confinement spatial**, les conditions aux limites sur la densité de probabilité de présence $|\psi|^2$ entraînent une **quantification de l'énergie** de la particule (elle ne peut prendre que certaines valeurs discrètes).

___ Niveaux d'énergie électroniques de l'atome d'hydrogène ___

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{8n^2 \varepsilon_0^2 h^2}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$E_1 = -2,18 \cdot 10^{-18} \text{ J} = -13,6 \text{ eV}$$

E_n énergie du niveau n ,

$m_e = 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ masse de l'électron

$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ charge élémentaire

$\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ permittivité du

vide, h constante de Planck

E_1 énergie du niveau fondamental ($n = 1$)

*On ne peut rien apprendre aux gens.
On peut seulement les aider à découvrir qu'ils
possèdent déjà en eux tout ce qui est à apprendre.*

Galilée

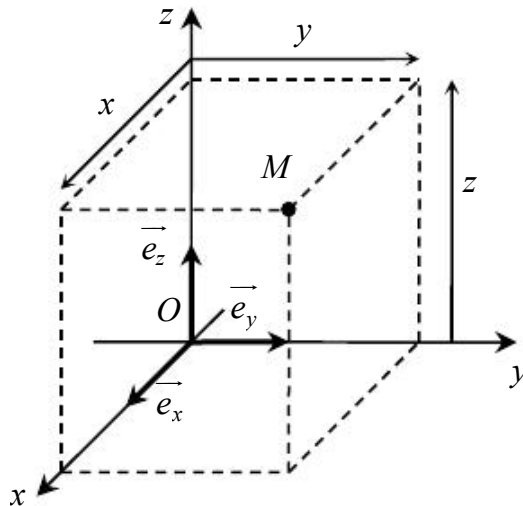
Mécanique

Cinématique du point

Référentiel et repère

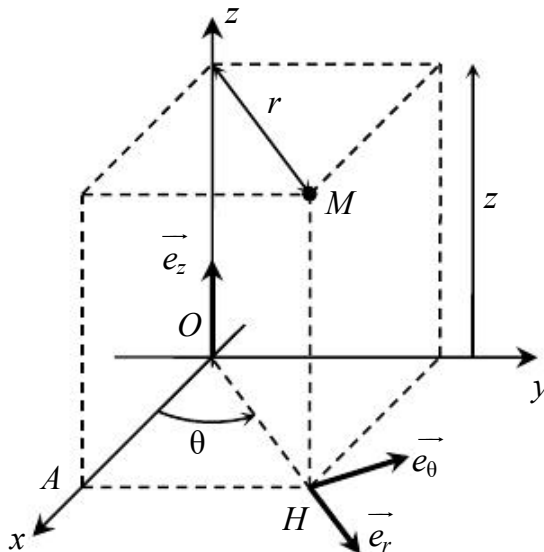
Un **référentiel** est un solide par rapport auquel on étudie un mouvement. On lui associe un **repère** spatial (une origine et trois axes orthogonaux). Le repère temporel est le même pour tous les référentiels en mécanique classique.

Coordonnées et base cartésiennes



Abscisse : $x \in]-\infty, +\infty[$
 Ordonnée : $y \in]-\infty, +\infty[$
 Cote : $z \in]-\infty, +\infty[$
 Base cartésienne :
 $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

Coordonnées et base cylindriques



Distance entre M et l'axe (Oz) : $r \in [0, +\infty[$
 Angle entre (Ox) et $\overrightarrow{OH}$:
 $\theta \in]-\infty, +\infty[$
 mais description complète de l'espace avec $\theta \in [0, 2\pi[$
 Cote : $z \in]-\infty, +\infty[$
 Base cylindrique (locale) :
 $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$

Relations entre vecteurs unitaires

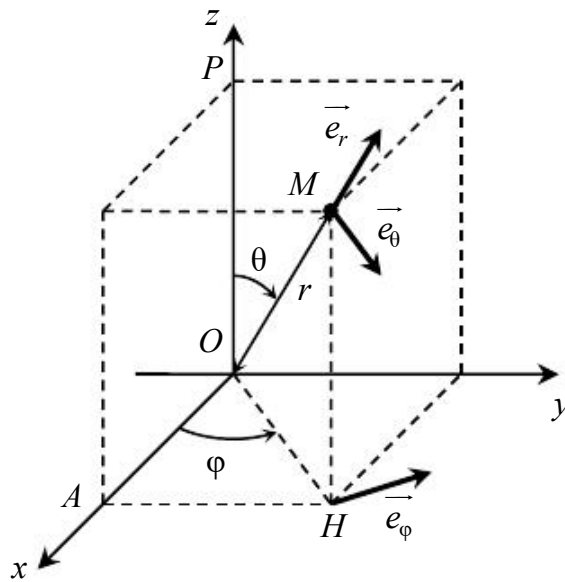
Dans le plan (Oxy) , $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est appelée **base polaire**.

La direction de $\vec{e}_r$ est dite **radiale**, celle de $\vec{e}_\theta$ est dite **orthoradiale**.

$$\vec{e}_r = \cos\theta \vec{e}_x + \sin\theta \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \vec{e}_\theta = -\sin\theta \vec{e}_x + \cos\theta \vec{e}_y$$

$$\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_r$$

Coordonnées et base sphériques



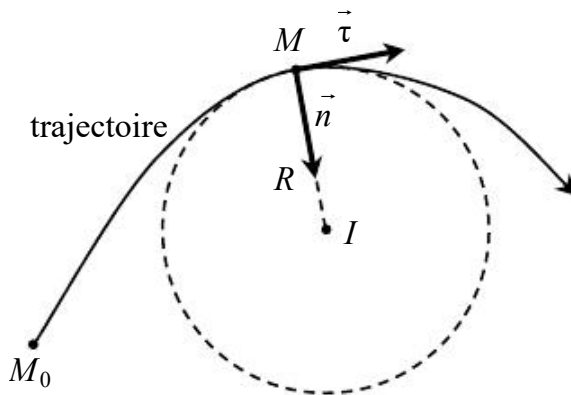
Distance entre O et M :
 $r \in [0, +\infty[$

Angle entre (Oz) et $\overline{OM}$
 (colatitude) : $\theta \in [0, \pi]$

Angle entre (Ox) et $\overline{OH}$
 (longitude) : $\varphi \in]-\infty, +\infty[$
 mais description complète de
 l'espace avec $\varphi \in [0, 2\pi[$

Base sphérique (locale) :
 $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$

Base de Frenet pour un mouvement plan



R **rayon de courbure** de la
 trajectoire au point M (rayon
 du cercle osculateur)

Base locale de Frenet $(\vec{\tau}, \vec{n})$
 dans le plan de la trajectoire :
 $\vec{\tau}$ vecteur unitaire tangent
 $\vec{n}$ vecteur unitaire normal
 (vers la concavité de la
 trajectoire)

(Troisième vecteur : binormal $\vec{b}$, non utilisé dans le cadre du programme.)

Cas d'un cercle : R a la même valeur en tout point, c'est le rayon du cercle.

Cas d'une trajectoire rectiligne : R est infini en tout point.

_____ Vecteurs vitesse et accélération d'un point _____

$$\vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{\mathcal{R}}$$

$$\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{v}(M)_{\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}}$$

M point mobile
 O point fixe quelconque du référentiel $\mathcal{R}$

_____ Composantes dans la base cartésienne _____

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \quad \vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$$

$$\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$$

_____ Composantes dans la base cylindrique _____

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z \quad \vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$$

$$\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z$$

_____ Composantes dans la base sphérique _____

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r \quad \vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\phi}\vec{e}_\phi$$

_____ Composantes dans la base de Frenet (mouvement plan) _____

$$\vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = v(M)_{\mathcal{R}} \vec{\tau}$$

$$\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = a_t(M)_{\mathcal{R}} \vec{\tau} + a_n(M)_{\mathcal{R}} \vec{n}$$

$$a_t(M)_{\mathcal{R}} = \frac{dv(M)_{\mathcal{R}}}{dt} \vec{\tau}$$

$$a_n(M)_{\mathcal{R}} = \frac{v(M)_{\mathcal{R}}^2}{R} \vec{n}$$

$a_t(M)_{\mathcal{R}}$ **accélération tangentielle**, liée à la variation de la norme de la vitesse (donc nulle pour un mouvement uniforme)
 $a_n(M)_{\mathcal{R}}$ **accélération normale**, liée à la variation de la direction de la vitesse (donc nulle pour un mouvement rectiligne)
 R rayon de courbure de la trajectoire au point considéré

_____ Accélération et modification de la vitesse _____

- Si $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} \cdot \vec{v}(M)_{\mathcal{R}} > 0$: mouvement **accéléré** (la norme $v(M)_{\mathcal{R}}$ augmente).
- Si $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} \cdot \vec{v}(M)_{\mathcal{R}} < 0$: mouvement **retardé** ou **décéléré** ($v(M)_{\mathcal{R}}$ diminue).
- Si $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} \cdot \vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = 0$ à un instant t : $v(M)_{\mathcal{R}}$ passe par un extremum.
- Si $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} \cdot \vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = 0, \forall t$: mouvement **uniforme** ($v(M)_{\mathcal{R}}$ reste constante).

Mouvement de vecteur accélération constant

On suppose que le vecteur accélération du point est une constante, notée $\vec{a}$.

Si $a = 0$: mouvement rectiligne uniforme.

Si la vitesse initiale $\vec{v}_0$ est colinéaire à $\vec{a}$: mouvement rectiligne, uniformément accéléré ou retardé. Si $\vec{v}_0$ n'est pas colinéaire à $\vec{a}$: mouvement parabolique, dans le plan $(M_0, \vec{a}, \vec{v}_0)$.

Mouvement circulaire

$$\vec{OM} = R\vec{e}_r, \quad \vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta,$$

$$\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\begin{aligned}\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} &= -\frac{v(M)_{\mathcal{R}}^2}{R}\vec{e}_r \\ &= -\omega^2\vec{OM}\end{aligned}$$

Mouvement sur un cercle de centre O , de rayon R , dans le plan (Oxy)

Vecteurs dans la base polaire (cylindrique)

Cas du mouvement *circulaire uniforme*

$\omega = \dot{\theta} = \text{cte}$ (vitesse angulaire constante)

Principes de la dynamique

Masse

La **masse** (inertielle) est une grandeur scalaire positive, extensive et conservative (en mécanique classique), qui décrit l'**inertie** d'un corps (difficulté à modifier son mouvement).

Point matériel et système

Un **point matériel** est un corps assimilable à un point mathématique : sa position est repérée par trois coordonnées ; il est doté d'une masse.

Un **système mécanique** est un ensemble de points matériels.

Actions mécaniques et forces

On appelle **action mécanique** toute action, exercée par un système et pouvant influencer le mouvement d'un autre système. En mécanique classique, une action mécanique est modélisée par un **vecteur force** appliqué en un point.

Les forces ne dépendent pas du référentiel.

Principe des interactions (3^e loi de Newton)

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$$

$\vec{F}_{i \rightarrow j}$ force exercée par le système i sur j

Pour deux points matériels M_1 et M_2 , ces forces sont colinéaires à (M_1M_2) .

_____ Forces intérieures à un système _____

$$\sum \vec{F}_{\text{int}} = \vec{0}$$

Somme des forces intérieures toujours nulle

_____ Système isolé ou pseudo-isolé _____

Système **isolé** (mécaniquement) : soumis à aucune force extérieure.

Système **pseudo-isolé** : soumis à des forces extérieures de somme nulle.

_____ Quantité de mouvement d'un point matériel _____

$$\vec{p}(M)_{\mathcal{R}} = m \vec{v}(M)_{\mathcal{R}}$$

$\vec{p}(M)_{\mathcal{R}}$ **quantité de mouvement** du point matériel M , de masse m , dans le référentiel $\mathcal{R}$

_____ Barycentre d'un système de points matériels _____

$$\vec{OG} = \frac{1}{m_{\text{tot}}} \sum_{i=1}^N m_i \vec{OM}_i$$

G **barycentre** (ou **centre de masse** ou **centre d'inertie**) du système (S) constitué de N points M_i de masses m_i

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{GM}_i = \vec{0}$$

O point quelconque, m_{tot} masse totale

_____ Quantité de mouvement d'un système _____

$$\vec{p}(S)_{\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}(M_i)_{\mathcal{R}}$$

$\vec{p}(S)_{\mathcal{R}}$ **quantité de mouvement** (ou **résultante cinétique**) du système (S) dans $\mathcal{R}$

$$\vec{p}(S)_{\mathcal{R}} = m_{\text{tot}} \vec{v}(G)_{\mathcal{R}}$$

Expression utilisant le barycentre G

_____ Principe d'inertie (1^{re} loi de Newton) _____

Il existe des référentiels, appelés **galiléens** ou **inertiels**, par rapport auxquels tout point matériel isolé a un mouvement rectiligne et uniforme.

_____ Mouvement relatif de deux référentiels galiléens _____

Si $\mathcal{R}$ est un référentiel galiléen, un autre référentiel $\mathcal{R}'$ est également galiléen si et seulement s'il est en *translation rectiligne uniforme* par rapport à $\mathcal{R}$.

_____ Référentiels usuels _____

Référentiel terrestre (lié à la Terre) : peut être considéré comme galiléen dans la majorité des expériences usuelles (à l'échelle du laboratoire).

Référentiel géocentrique (centre de la Terre fixe, axes dirigés vers trois étoiles lointaines) : pour étudier le mouvement de corps autour de la Terre.

Référentiel héliocentrique (centre du Soleil fixe, axes dirigés vers trois étoiles lointaines) : pour étudier le mouvement des astres du système solaire.

Principe fondamental de la dynamique (PFD, 2^e loi de Newton)

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}(M)_{\mathcal{R}}}{dt}$$

ou $\sum \vec{F} = m\vec{a}(M)_{\mathcal{R}}$

$\mathcal{R}$ référentiel galiléen, M point matériel de masse m , $\sum \vec{F}$ somme des forces appliquées

Théorème du centre de masse pour un système

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}(S)_{\mathcal{R}}}{dt}$$

ou $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m_{\text{tot}}\vec{a}(G)_{\mathcal{R}}$

Théorème du centre de masse (TCM) ou théorème de la résultante cinétique (TRC)
 $\mathcal{R}$ réf. galiléen, (S) système de barycentre G
 $\vec{F}_{\text{ext}}$ forces extérieures appliquées à (S)

Interaction gravitationnelle

$$\vec{F}_{g\ A \rightarrow B} = -G \frac{m_A m_B}{AB^2} \vec{e}_{A \rightarrow B}$$

A et B points matériels de masses m_A et m_B
 $\vec{e}_{A \rightarrow B}$ vecteur unitaire orienté de A vers B
 $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ constante de gravitation universelle

Poids

$$\vec{P} = m\vec{g} \approx -G \frac{m_T m}{(R_T + z)^2} \vec{e}_z$$

$\vec{g}$ **champ de pesanteur**
 m_T et R_T masse et rayon de la Terre, z altitude, G constante de gravitation universelle

Réaction d'un support (force de liaison)

$$\vec{R} = \vec{R}_n + \vec{R}_t$$

$$\vec{R}_t = \vec{0}, \vec{R} = \vec{R}_n$$

$\vec{R}_n$ réaction normale (orthogonale au support, norme inconnue a priori), $\vec{R}_t$ réaction tangentielle ou **force de frottement solide**
 Cas particulier du contact *sans frottement*

Force de frottement fluide

$$\vec{F}_f = -h \vec{v}(M)$$

Force linéaire pour une vitesse assez faible

$$\vec{F}_f = -h v(M) \vec{v}(M)$$

Force quadratique pour une vitesse élevée

Tension d'un ressort (force de rappel élastique)

$$\vec{T} = -k(\ell - \ell_0) \vec{e}_{r \rightarrow p}$$

k constante de raideur, ℓ longueur du ressort, ℓ_0 longueur à vide, $\vec{e}_{r \rightarrow p}$ vecteur unitaire orienté du ressort vers le point considéré

Tension d'un fil inextensible

$$\vec{T} = -T \vec{e}_{\text{fil} \rightarrow p}$$

T norme (inconnue a priori), $\vec{e}_{\text{fil} \rightarrow p}$ vecteur unitaire orienté du fil vers le point considéré

Un fil idéal (sans masse) exerce des tensions opposées à ses deux extrémités. Si le fil passe sur une poulie idéale (sans masse ni frottements), la tension change de direction mais sa norme reste la même aux deux extrémités.

Interaction électrostatique (loi de Coulomb)

$$\vec{F}_{\text{él}A \rightarrow B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{AB^2} \vec{e}_{A \rightarrow B}$$

A et B points matériels de charges q_A et q_B
 $\vec{e}_{A \rightarrow B}$ vecteur unitaire orienté de A vers B
 $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ permittivité du vide

Force de pression et poussée d'Archimède

$$\vec{F}_p = P S \vec{n}$$

P pression d'un fluide, $\vec{F}_p$ force de pression sur une surface plane d'aire S
 $\vec{n}$ vecteur unitaire normal à la surface

$$\vec{A} = -m_{\text{f déposé}} \vec{g}$$

$\vec{A}$ poussée d'Archimède, résultante des forces de pression sur un corps entièrement entouré de fluide au repos, $m_{\text{f déposé}}$ masse du fluide « déplacé », $\vec{g}$ champ de pesanteur

Oscillateur harmonique à ressort

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}x_{\text{éq}}$$

Équation du mouvement (d'après le PFD)
 $x(t)$ abscisse, $x_{\text{éq}}$ position d'équilibre
 m masse, k raideur du ressort

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$u = x - x_{\text{éq}}$ écart à la position d'équilibre
 ω_0 pulsation propre

Oscillateur mécanique amorti

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{\text{éq}}$$

Équation différentielle d'un oscillateur mécanique amorti par frottement visqueux

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ω_0 pulsation propre
 m masse, k raideur du ressort

$$Q = \frac{\sqrt{mk}}{h}$$

Q facteur de qualité
 h coefficient de frottement (force $\vec{F} = -h\vec{v}$)

Oscillateur mécanique en régime sinusoïdal forcé

Dans différentes situations (déplacement sinusoïdal du point d'attache du ressort, force supplémentaire sinusoïdale...), un oscillateur mécanique amorti obéit à une équation différentielle avec un second membre sinusoïdal, pour la variable $u = x - x_{\text{eq}}$ (élongation par rapport à l'équilibre).

La **réponse en élongation** est identique à la *réponse en charge du condensateur* du circuit *RLC* série. La **réponse en vitesse** est identique à la *réponse en intensité* du circuit *RLC* série.

Énergie mécanique

Puissance d'une force quelconque

$$\mathcal{P}(\vec{F})_{\mathcal{R}} = \vec{F} \cdot \vec{v}(M)_{\mathcal{R}}$$

$\vec{F}$ force appliquée au point M
 $\vec{v}(M)_{\mathcal{R}}$ vitesse de M dans $\mathcal{R}$

Travail d'une force quelconque

$$\begin{aligned} \delta W(\vec{F})_{\mathcal{R}} &= \vec{F} \cdot d\vec{OM} \\ &= \mathcal{P}(\vec{F})_{\mathcal{R}} dt \end{aligned}$$

Travail élémentaire de $\vec{F}$ dans $\mathcal{R}$
 $d\vec{OM}$ déplacement infinitésimal

$$W(\vec{F})_{A \rightarrow B}^{\mathcal{R}} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{OM}$$

Travail total entre deux positions A et B

Travail **moteur** : $W > 0$. Travail **résistant** : $W < 0$.

Cas particuliers de travaux

$$\mathcal{P}(\vec{F})_{\mathcal{R}} = 0, \quad W(\vec{F})_{A \rightarrow B}^{\mathcal{R}} = 0$$

$\vec{F}$ force toujours orthogonale au mouvement

$$W(\vec{F})_{A \rightarrow B}^{\mathcal{R}} = \vec{F} \cdot \vec{AB}$$

$\vec{F}$ force constante (vectoriellement)

Travail d'une force conservative et énergie potentielle

$$dE_p = -\delta W(\vec{F})_{\mathcal{R}} = -\vec{F} \cdot d\vec{OM}$$

$E_p(P)$ énergie potentielle dont dérive le champ de force conservative $\vec{F}(P)$

$$W(\vec{F})_{A \rightarrow B}^{\mathcal{R}} = E_p(A) - E_p(B)$$

Travail total d'une force conservative entre deux points A et B

Énergie potentielle de pesanteur

$$E_{pp} = \pm m g z + \text{cte}$$

+ si (Oz) est un axe vertical ascendant
 – si (Oz) est un axe vertical descendant

Énergie potentielle élastique

$$E_{pe} = \frac{1}{2} k (\ell - \ell_0)^2 + \text{cte}$$

k constante de raideur
 ℓ longueur du ressort, ℓ_0 longueur à vide

Énergie cinétique d'un point matériel

$$E_c(M)_{\mathcal{R}} = \frac{1}{2} m v(M)_{\mathcal{R}}^2$$

m masse de M , $v(M)_{\mathcal{R}}$ norme de sa vitesse

Énergie mécanique d'un point matériel

$$E_m(M)_{\mathcal{R}} = E_c(M)_{\mathcal{R}} + E_p(M)$$

$E_p(M)$ énergie potentielle totale

Théorème de l'énergie cinétique pour un point matériel

$$\frac{d E_c(M)_{\mathcal{R}}}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{F})_{\mathcal{R}}$$

Forme instantanée
 $\mathcal{R}$ référentiel galiléen

$$\Delta E_c(M)_{\mathcal{R}} = \sum W(\vec{F})_{\mathcal{R}}$$

Forme intégrale (entre deux instants)

Théorème de l'énergie mécanique pour un point matériel

$$\frac{d E_m(M)_{\mathcal{R}}}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{F}_{nc})_{\mathcal{R}}$$

Forme instantanée
 $\mathcal{R}$ réf. galiléen, $\vec{F}_{nc}$ forces non conservatives

$$\Delta E_m(M)_{\mathcal{R}} = \sum W(\vec{F}_{nc})_{\mathcal{R}}$$

Forme intégrale (entre deux instants)

Point matériel en évolution conservative

$$E_m(M)_{\mathcal{R}} = \text{cte}$$

Intégrale première de l'énergie mécanique
 (lorsqu'il n'y a aucun travail de force non conservative)

Équilibre d'un point matériel en évolution conservative

Chaque position d'équilibre *stable* correspond à un *minimum* de l'énergie potentielle totale. Chaque position d'équilibre *instable* correspond à un *maximum* de l'énergie potentielle totale.

Point matériel à un degré de liberté

Pour un point M dont seule la coordonnée x varie, la conservation de l'énergie mécanique entraîne nécessairement : $E_p(x) \leq E_m(M)_{\mathbb{R}} = \text{cte}$.

Si cette condition limite les valeurs possibles de x , le point matériel M est dans un **état lié**. Si cette condition n'empêche pas x de tendre vers l'infini, M est dans un **état libre** (ou **état de diffusion**).

Point matériel au voisinage d'une position d'équilibre stable

$$E_p(x) \approx \frac{1}{2}k(x - x_{\text{eq}})^2 + \text{cte} \quad E_p(x) \text{ énergie potentielle totale}$$

$$\text{avec } k = \frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_{\text{eq}}) > 0 \quad x_{\text{eq}} \text{ position d'équilibre stable}$$

$$\vec{F}(x) = -\frac{dE_p}{dx} \vec{e}_x = -k(x - x_{\text{eq}}) \vec{e}_x \quad \vec{F}(x) \text{ force conservatrice totale}$$

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega_0^2 u = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \begin{array}{l} \text{Équation du mouvement avec } u = x - x_{\text{eq}} : \\ \text{oscillateur harmonique, } \omega_0 \text{ pulsation propre} \end{array}$$

Énergie cinétique d'un système de points

$$E_c(S)_{\mathbb{R}} = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2_{\mathbb{R}} \quad \begin{array}{l} \text{Énergie cinétique du système } (S) : \text{ somme de} \\ \text{celles de tous ses points} \end{array}$$

Théorème de l'énergie cinétique pour un système

$$\frac{dE_c(S)_{\mathbb{R}}}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{F}_{\text{ext}})_{\mathbb{R}} \quad \begin{array}{l} \text{Cas général : système déformable} \\ \vec{F}_{\text{ext}} \text{ forces extérieures au système} \end{array}$$

$$+ \sum \mathcal{P}(\vec{F}_{\text{int}})_{\mathbb{R}} \quad \vec{F}_{\text{int}} \text{ forces intérieures au système}$$

Mouvement dans un champ électrique ou magnétique

Force de Lorentz

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

q charge électrique, $\vec{E}$ champ électrique
 $\vec{v}$ vitesse, $\vec{B}$ champ magnétique

Ordres de grandeur usuels

$$E \sim 1 \text{ à } 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

Ordre de grandeur des champs électriques

$$B \sim 10^{-6} \text{ à } 1 \text{ T}$$

Ordre de grandeur des champs magnétiques

$$F_L \gg mg, F_L \gg F_g$$

Pour une particule, forces gravitationnelles négligeables devant la force de Lorentz

Aspect énergétique

$$\mathcal{P}(q\vec{v} \wedge \vec{B}) = 0$$

Puissance toujours nulle pour le terme magnétique de la force de Lorentz

$$\mathcal{E}_{pe} = qV$$

$\mathcal{E}_{pe}$ énergie potentielle électrique

q charge électrique, V potentiel électrique

$$W(q\vec{E})_{A \rightarrow B} = qU_{AB}$$

U_{AB} tension électrique entre A et B

Création d'un champ électrique uniforme

$$\vec{E} = -\frac{U}{e}\vec{e}_z = -\frac{Q}{\epsilon_0 S}\vec{e}_z$$

Condensateur plan

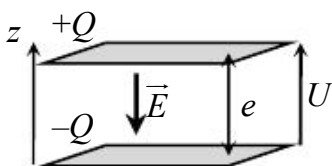
$\vec{E}$ champ uniforme entre les armatures

Q charge d'une armature, U tension

ϵ_0 permittivité du vide, S aire des armatures,

e écartement entre les armatures

$\vec{e}_z$ vecteur unitaire orthogonal aux armatures



Mouvement dans un champ électrique dans le vide

$$v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$$

q et m charge et masse de la particule

v vitesse acquise sous une tension U ($qU > 0$)

Mouvement dans un champ magnétique dans le vide

$$\omega_c = \frac{|q|B}{m}$$

ω_c pulsation cyclotron

q et m charge et masse de la particule

B norme du champ magnétique

$$R = \frac{v_0}{\omega_c} = \frac{mv_0}{|q|B}$$

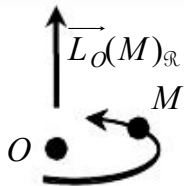
R rayon de la trajectoire circulaire pour une vitesse initiale $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$ (mouvement uniforme)

Moment cinétique

Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point

$$\vec{L}_O(M)_{\mathcal{R}} = \vec{OM} \wedge m \vec{v}(M)_{\mathcal{R}}$$

$\vec{v}(M)_{\mathcal{R}}$ vitesse de M (de masse m) dans $\mathcal{R}$



Direction de $\vec{L}_O(M)_{\mathcal{R}}$: axe de rotation instantané de M autour de O

Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un axe

$$L_{\Delta}(M)_{\mathcal{R}} = \vec{L}_O(M)_{\mathcal{R}} \cdot \vec{e} \\ = [\vec{OM} \wedge m \vec{v}(M)_{\mathcal{R}}] \cdot \vec{e}$$

Δ axe passant par O et orienté par le vecteur unitaire $\vec{e}$

$L_{\Delta}(M)_{\mathcal{R}}$ ne dépend pas du choix du point O sur l'axe Δ .

Moments cinétiques d'un système

$$\vec{L}_O(S)_{\mathcal{R}} = \sum \vec{L}_O(M_i)_{\mathcal{R}}$$

M_i points du système S

$$L_{\Delta}(S)_{\mathcal{R}} = \sum L_{\Delta}(M_i)_{\mathcal{R}}$$

Moment d'une force par rapport à un point

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F}$$

$\vec{F}$ force s'exerçant au point M

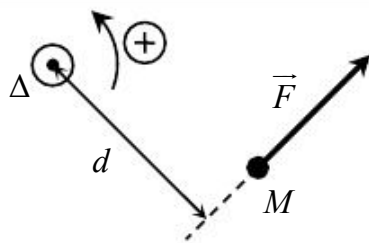
Moment d'une force par rapport à un axe

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) \cdot \vec{e} \\ = [\vec{OM} \wedge \vec{F}] \cdot \vec{e}$$

Δ axe passant par O et orienté par le vecteur unitaire $\vec{e}$

$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F})$ ne dépend pas du choix du point O sur l'axe Δ .

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) = \pm d F$$



Cas d'une force $\vec{F}$ orthogonale à Δ
 d bras de levier (distance entre le support de la force et l'axe Δ)

$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) > 0$ si $\vec{F}$ tend à faire tourner M dans le sens positif autour de l'axe (règle du tire-bouchon) ; $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) < 0$ sinon.

___ Théorèmes du moment cinétique pour un point matériel ___

$$\frac{d\vec{L}_O(M)_{\mathcal{R}}}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$$

Théorème du moment cinétique vectoriel
O point fixe dans le référentiel $\mathcal{R}$ galiléen

$$\frac{dL_{\Delta}(M)_{\mathcal{R}}}{dt} = \sum \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F})$$

Théorème du moment cinétique scalaire
 Δ axe fixe dans le référentiel $\mathcal{R}$ galiléen

_____ Théorèmes du moment cinétique pour un système _____

$$\frac{d\vec{L}_O(S)_{\mathcal{R}}}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_{O\text{ ext}}$$

$\vec{\mathcal{M}}_{O\text{ ext}}$ moments des actions extérieures au système, par rapport au point O

$$\frac{dL_{\Delta}(S)_{\mathcal{R}}}{dt} = \sum \mathcal{M}_{\Delta\text{ ext}}$$

$\mathcal{M}_{\Delta\text{ ext}}$ moments des actions extérieures au système, par rapport à l'axe Δ

Mouvement à force centrale conservative

_____ Force centrale conservative _____

$$\vec{F} = F_r(r) \vec{e}_r$$

$r = OM$ avec O centre de force

$\vec{e}_r$ vecteur unitaire de la base sphérique

$$\vec{F} = -k \vec{OM} = -k r \vec{e}_r$$

Exemple : force de rappel élastique isotrope

_____ Force centrale newtonienne _____

$$\vec{F} = \frac{K}{r^2} \vec{e}_r$$

K constante (force attractive pour $K < 0$, répulsive pour $K > 0$)

$$\vec{F}_g = -G \frac{Mm}{r^2} \vec{e}_r$$

$\vec{F}_g$ force **gravitationnelle** d'une masse ponctuelle M (en O) sur une masse ponctuelle m

$G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ constante de gravitation universelle

$$\vec{F}_{\text{el}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \vec{e}_r$$

$\vec{F}_{\text{el}}$ force **électrostatique** d'une charge ponctuelle Q (en O) sur une charge ponctuelle q

$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ permittivité du vide

_____ Énergie potentielle newtonienne _____

$$E_p = \frac{K}{r}$$

E_p énergie potentielle avec origine à l'infini

___ Définition du mouvement à force centrale conservative ___

Un point matériel M est en mouvement à force centrale conservative s'il est soumis uniquement à une force de la forme $\vec{F} = F_r(r)\vec{e}_r$ en coordonnées sphériques (ou éventuellement à d'autres forces dont la somme est nulle).

___ Conservation du moment cinétique ___

$$\vec{L}_O(M)_{\mathcal{R}} = \vec{cte} \quad \vec{L}_O(M)_{\mathcal{R}} \text{ moment cinétique de } M \text{ par rapport au centre de force } O, \text{ dans } \mathcal{R} \text{ galiléen}$$

Le mouvement a lieu dans le plan contenant O et orthogonal à $\vec{L}_O(M)_{\mathcal{R}}$, qui est aussi le plan $(O, \vec{OM}_0, \vec{v}_0)$. Si $\vec{L}_O(M)_{\mathcal{R}}$ est nul, c'est-à-dire si $\vec{OM}_0$ et $\vec{v}_0$ sont colinéaires, le mouvement a lieu selon la droite (OM_0) .

___ Constante et loi des aires ___

$$\vec{L}_O(M)_{\mathcal{R}} = m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z = \vec{cte}$$

$$C = r^2 \dot{\theta} = \text{cte}$$

Intégrale première du moment cinétique
 r et θ coordonnées polaires dans le plan du mouvement (Oxy)

C constante des aires

L'aire balayée par $\vec{OM}$ pendant une durée Δt est $S_{\Delta t} = \frac{|C|}{2} \Delta t$.

___ Conservation de l'énergie mécanique ___

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{p \text{ eff}}(r) = \text{cte}$$

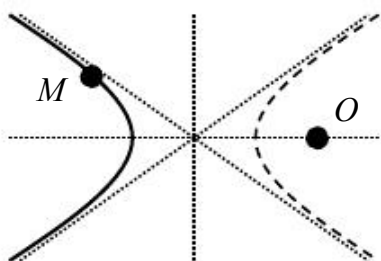
$$E_{p \text{ eff}}(r) = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} + E_p(r)$$

Intégrale première de l'énergie mécanique

$E_{p \text{ eff}}(r)$ énergie potentielle effective

Les valeurs accessibles de r sont celles qui vérifient $E_{p \text{ eff}}(r) \leq E_m$. Selon les conditions initiales (donc selon la valeur de E_m), on distingue des **états liés** (r borné) et des **états de diffusion** (r pouvant tendre vers l'infini).

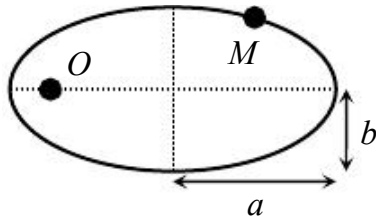
___ Trajectoire pour une force newtonienne répulsive ___



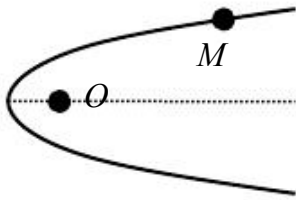
Branche d'hyperbole de foyer O (branche la plus éloignée de O), correspondant à un état de diffusion, $E_m > 0$

Application : expérience de Rutherford (particule α en M , noyau d'or en O)

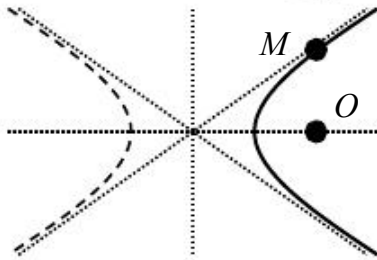
Trajectoire pour une force newtonienne attractive



$E_m < 0$: ellipse de foyer O (état lié)
 $2a$ longueur du grand axe
 $2b$ longueur du petit axe
($a = b = r$ pour un cercle de rayon r)



$E_m = 0$: parabole de foyer O (état de diffusion)



$E_m > 0$: branche d'hyperbole de foyer O , la plus proche de O (état de diffusion)

Lois de Kepler pour les planètes

1. Les planètes décrivent des ellipses, dont le Soleil est l'un des foyers.
2. Le vecteur Soleil-planète balaie des aires égales pendant des intervalles de temps égaux.
3. La période de révolution T et le demi-grand axe a de l'ellipse sont tels que $\frac{T^2}{a^3}$ a la même valeur pour toutes les planètes.

Cas du mouvement circulaire d'un satellite

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

v norme (constante) de la vitesse du satellite
 r rayon de la trajectoire, M masse de l'astre attracteur, G constante de gravitation

$$E_m = -\frac{GMm}{2r} = -E_c$$

E_m énergie mécanique, E_c énergie cinétique du satellite de masse m

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

Rapport ayant la même valeur pour tous les satellites (analogue de la loi de Kepler)

$$h = \left(\frac{GM T_T^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} - R = 35800 \text{ km}$$

h altitude d'un satellite géostationnaire
 $T_T = 1 \text{ j}$ période de rotation de la Terre

Énergie mécanique sur une trajectoire elliptique

$$E_m = -\frac{GMm}{2a}$$

a demi-grand axe de l'ellipse
 G constante de gravitation, M masse de l'astre attracteur, m masse de l'objet

Mouvement d'un solide

Définition d'un solide

Un **solide** est un ensemble indéformable de points : la distance entre deux points quelconques du solide est invariante au cours du temps.

$$m = \int_{\text{solide}} dm$$

m masse du solide (dans le cas fréquent d'une répartition continue de masse)

Mouvement de translation d'un solide

Un solide S est en **translation** par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$ si pour tout couple de points A et B de S , le vecteur $\overrightarrow{AB}$ reste constant au cours du mouvement. *Tous les points de S ont le même vecteur vitesse*, donc aussi le même vecteur accélération, à chaque instant.

Les trajectoires de tous les points de S sont superposables. Cas particuliers : **translation rectiligne** si ce sont des segments de droites (parallèles entre eux), **translation circulaire** si ce sont des cercles (de même rayon).

Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe

Un solide S est en **rotation** autour d'un axe fixe Δ si tous les points de (S) ont une trajectoire circulaire centrée sur un point de Δ .

Tous les points de S ont la même vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$, à chaque instant.

Si des points de S appartiennent à l'axe Δ , alors ils sont immobiles.

$$\vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = r \omega \vec{e}_\theta$$

$\vec{v}(M)_{\mathcal{R}}$ vitesse d'un point M de S
 r distance entre M et l'axe de rotation Δ
 $\dot{\omega} = \ddot{\theta}$ **accélération angulaire** du solide

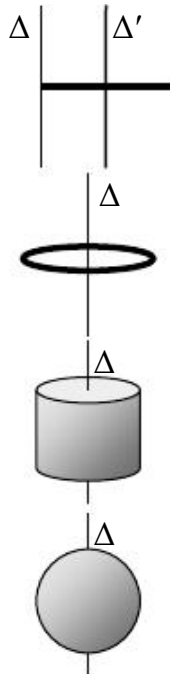
Moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe

$$L_{\Delta}(S)_{\mathcal{R}} = J_{\Delta} \omega$$

avec $J_{\Delta} = \int_{\text{solide}} dm r_{\Delta}^2$

J_{Δ} **moment d'inertie** du solide par rapport à l'axe de rotation Δ , r_{Δ} distance d'un point du solide à l'axe Δ , ω vitesse angulaire

Exemples de moments d'inertie de solides homogènes



Tige de masse m , de longueur L
par rapport à un axe orthogonal

$$J_{\Delta} = \frac{1}{3}mL^2, \quad J_{\Delta'} = \frac{1}{12}mL^2$$

Cerceau de masse m , de rayon R
par rapport à son axe de révolution

$$J_{\Delta} = mR^2$$

Disque ou cylindre de masse m , de rayon R
par rapport à son axe de révolution

$$J_{\Delta} = \frac{1}{2}mR^2$$

Boule (pleine) de masse m , de rayon R
par rapport à l'un de ses axes de révolution

$$J_{\Delta} = \frac{2}{5}mR^2$$

Énergie cinétique d'un solide

$$E_c(S)_{\mathcal{R}} = \frac{1}{2}m_{\text{tot}}v_{\mathcal{R}}^2$$

Cas d'un solide en translation

m_{tot} masse totale, $\vec{v}_{\mathcal{R}}$ vitesse du solide

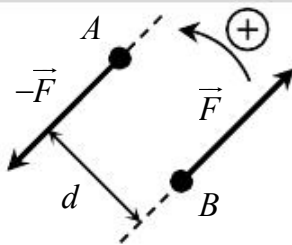
$$E_c(S)_{\mathcal{R}} = \frac{1}{2}J_{\Delta}\omega^2$$

Cas d'un solide en rotation autour de l'axe Δ
 ω vitesse angulaire, J_{Δ} moment d'inertie

Moment d'un couple par rapport à un axe

Couple : ensemble de forces de résultante nulle, de moment total non nul.

$$\mathcal{M}_{\text{couple}} = \pm d F$$



Moment du couple constitué de $\vec{F}$ et $-\vec{F}$,
appliquées en deux points différents, par
rapport à tout axe orthogonal à leur plan

d distance entre les supports des deux forces

$\mathcal{M}_{\text{couple}} > 0$ si le couple tend à faire tourner le
système dans le sens positif autour de l'axe
(règle du tire-bouchon) ; $\mathcal{M}_{\text{couple}} < 0$ sinon.

Couple de torsion

Un fil tordu d'un angle α exerce un couple de rappel, dit **couple de torsion**.

$$\mathcal{M}_{\text{torsion}} = -C \alpha$$

Moment du couple de torsion

C **constante de torsion**, α angle de torsion

Liaison pivot



Un seul degré de liberté de rotation autour de l'axe fixe Δ

Liaison **parfaite** : aucun moment selon l'axe Δ . Sinon : **couple de frottement solide** (moment $\mathcal{M}_f$ par rapport à Δ de signe opposé au sens de rotation).

Théorème du moment cinétique pour un solide en rotation

$$J_{\Delta} \frac{d\omega}{dt} = \sum \mathcal{M}_{\Delta \text{ ext}}$$

ω vitesse angulaire, J_{Δ} moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation Δ , $\mathcal{M}_{\Delta \text{ ext}}$ moments des actions extérieures (forces et couples)

Théorème de l'énergie cinétique pour un solide

$$\frac{dE_c(S)_{\mathcal{R}}}{dt} = \sum \mathcal{P}_{\mathcal{R}, \text{ ext}}$$

Forme instantanée

$\mathcal{P}_{\mathcal{R}, \text{ ext}}$ puissances des actions extérieures (forces et couples)

$$\Delta E_c(S)_{\mathcal{R}} = \sum W_{\mathcal{R}, \text{ ext}}$$

Forme intégrale

$W_{\mathcal{R}, \text{ ext}}$ travaux des actions extérieures

Les forces intérieures à un solide ont une puissance totale nulle.

Approche énergétique du solide en rotation

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \mathcal{M}_{\Delta} \cdot \omega$$

$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ puissance d'une force ou d'un couple de moment $\mathcal{M}_{\Delta}$

$$W_{\mathcal{R}} = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \mathcal{M}_{\Delta} d\theta$$

$W_{\mathcal{R}}$ travail d'une force ou d'un couple de moment $\mathcal{M}_{\Delta}$

Dans le cas de la rotation, le théorème de l'énergie cinétique sous forme instantanée donne la même équation que le théorème du moment cinétique.

$$\frac{1}{2} J_{\Delta} (\omega_f^2 - \omega_i^2) = \sum W_{\mathcal{R}, \text{ ext}}^{i \rightarrow f} \quad \text{TÉC sous forme intégrale}$$

Pendule pesant

$$\ddot{\theta} + \frac{mga}{J_{\Delta}} \sin \theta = 0$$

$$E_m = \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2 - mga \cos \theta = \text{cte}$$

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \text{ avec}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{J_{\Delta}}}$$

Équation du mouvement

θ angle avec la verticale descendante

m masse, J_{Δ} moment d'inertie

a distance entre le barycentre et l'axe Δ

Intégrale première du mouvement

(conservation de l'énergie mécanique)

Cas des petites oscillations ($\theta \ll 1$) :

oscillateur harmonique de pulsation propre

ω_0

*Rien ne naît ni ne périt mais des choses déjà
existantes se combinent puis se séparent de nouveau.*

Anaxagore

Thermodynamique Thermodynamique

Description et modélisation des systèmes

Libre parcours moyen

Libre parcours moyen ℓ_p : distance moyenne parcourue par les molécules d'un fluide entre deux chocs successifs.

$\ell_p \sim 10^{-10}$ m Ordre de grandeur usuel dans un liquide

$\ell_p \sim 10^{-7}$ m Ordre de grandeur usuel dans un gaz

Différentes échelles

Échelle microscopique : dimensions de l'ordre de ℓ_p (seulement quelques molécules dans un volume de l'ordre de ℓ_p^3).

Échelle macroscopique : dimensions perceptibles ($L \sim 10^{-3}$ à 1 m, nombre de molécules de l'ordre de 10^{23}).

Échelle mésoscopique : intermédiaire $\ell_p \ll \ell \ll L$ (un volume de l'ordre de ℓ^3 contient un grand nombre de molécules mais reste infinitésimal).

Systèmes thermodynamiques

Système : corps ou ensemble de corps séparés du **milieu extérieur** par une frontière (fictive ou matérielle).

Univers : réunion du système et de son milieu extérieur.

Système **thermodynamique** : constitué d'un trop grand nombre de particules pour qu'on puisse les décrire individuellement.

Système **ouvert** : échange matière et énergie avec le milieu extérieur.

Système **fermé** : échange de l'énergie mais pas de matière.

Système **isolé** : n'échange ni matière ni énergie.

Grandeurs et équation d'état

Grandeurs d'état : grandeurs macroscopiques pour décrire un système thermodynamique. **Fluide thermoélastique** (soumis aux seules forces de pression) : décrit par pression, volume, température, quantité de matière.

Variables d'état : grandeurs d'état indépendantes, en nombre suffisant pour connaître l'état macroscopique d'un système. **Fonctions d'état** : autres grandeurs exprimées en fonction des variables d'état.

Équation d'état : relation entre les grandeurs d'état, caractéristique d'un type donné de corps.

Grandeurs extensives et intensives

Grandeur **extensive** : relative au système entier, additive lors de la réunion de deux systèmes.

Grandeur **intensive** : définie localement en chaque point du système et indépendante de l'étendue du système.

Le rapport de deux grandeurs extensives est une grandeur intensive.

Système **homogène** : les grandeurs intensives ont même valeur en tout point.

Équilibre thermodynamique

Un système thermodynamique est dit en **équilibre thermodynamique** lorsque ses variables d'état sont définies et constantes au cours du temps et que tout échange de matière ou d'énergie avec le milieu extérieur a cessé.

Description microscopique d'un gaz

- La densité volumique des particules $n^* = N/V$ (avec N nombre de particules contenues dans le volume V) est homogène.
- La distribution des vitesses est homogène et isotrope (et la répartition de la norme des vitesses suit une statistique de Maxwell-Boltzmann).

Modèle microscopique du gaz parfait (GP)

- Les particules n'ont pas de volume propre.
- Les particules n'ont pas d'interaction à distance entre elles.

Vitesse quadratique moyenne

$$u = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

m masse d'une molécule, M masse molaire
 T température, k_B constante de Boltzmann
 R constante des gaz parfaits

Pression cinétique

$$P = \frac{1}{3} n^* m u^2$$

n^* densité volumique des particules
 m masse des particules
 u vitesse quadratique moyenne

Équation d'état du gaz parfait

$$PV = nRT$$
$$PV_m = RT$$

P pression, V volume, V_m volume molaire
 R constante des gaz parfaits, n quantité de matière, T température

Gaz réels

$$PV \xrightarrow{P \rightarrow 0 \text{ ou } n/V \rightarrow 0} nRT$$

Gaz parfait : comportement limite du gaz réel

Phase condensée idéale (liquide ou solide)

$$V = \text{cte}$$

V volume constant

La phase condensée idéale est **incompressible** (V ne diminue pas avec la pression) et **indilatable** (V n'augmente pas avec la température).

Transitions de phase

Phase : partie d'un système thermodynamique dans laquelle les paramètres intensifs sont des fonctions continues de l'espace.

Types de phases principaux : solide, liquide, gaz (ou vapeur).

Transition de phase (ou **changement de phase**, parfois *changement d'état*) : passage d'une phase à une autre.

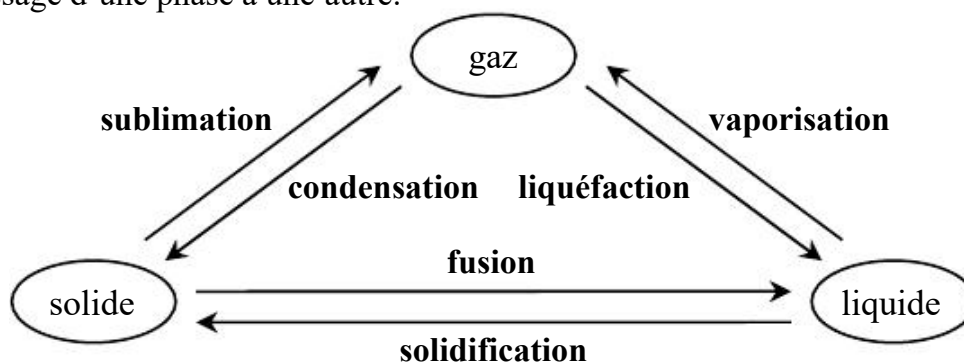
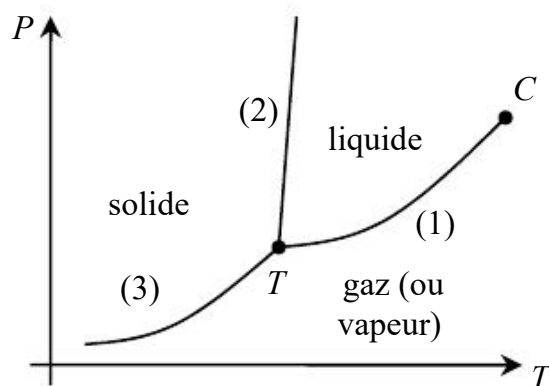


Diagramme d'équilibre (P, T)

- Cas général
- (1) **courbe de vaporisation**
(équilibre liquide–gaz)
 - (2) **courbe de fusion**
(équilibre liquide–solide)
 - (3) **courbe de sublimation**
(équilibre solide–gaz)
- T point triple
 C point critique



Cas de certains corps purs
(notamment l'eau) :
pente négative de la courbe
de fusion

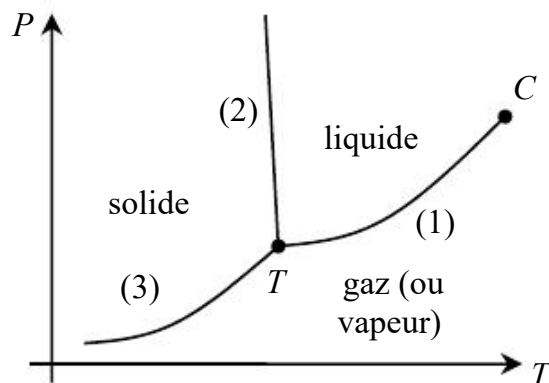
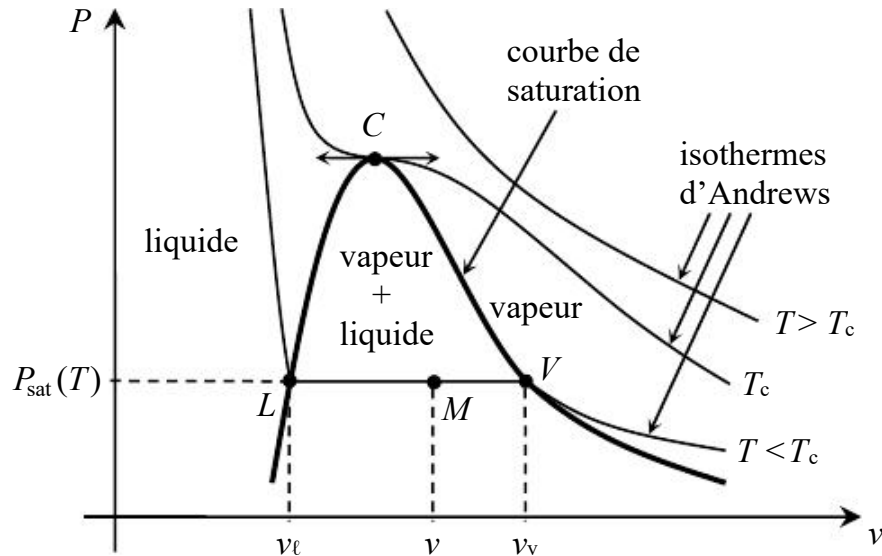


Diagramme (P, v) de l'équilibre liquide-vapeur



La **courbe de saturation** comporte deux parties : **courbe d'ébullition** (à gauche du point critique C), ensemble des points L où le liquide est saturant (limite d'apparition de la vapeur) ; **courbe de rosée** (à droite de C), ensemble des points V où la vapeur est saturante (limite d'apparition du liquide).

Pression de vapeur saturante

À une température T , trois cas d'équilibre selon la pression P :

- $P < P_{\text{sat}}(T)$, vapeur seule (équilibre monophasé) ;
- $P = P_{\text{sat}}(T)$, vapeur et liquide (équilibre diphasé) ;
- $P > P_{\text{sat}}(T)$, liquide seul (équilibre monophasé).

Dans chaque cas, il y a une inconnue à déterminer (la pression dans les cas 1 et 3, la composition dans le cas 2).

Titres en vapeur et en liquide

$$x_v = \frac{m_v}{m_{\text{totale}}} = \frac{n_v}{n_{\text{totale}}}$$

x_v **titre** (massique ou molaire) en vapeur

m_v , m_{totale} masses de la phase vapeur et de l'ensemble (vapeur et liquide)

n_v , n_{totale} quantités de matière

$$x_\ell = \frac{m_\ell}{m_{\text{totale}}} = 1 - x_v$$

x_ℓ titre en liquide

$$x_v = \frac{v - v_\ell}{v_v - v_\ell} = \frac{LM}{LV}$$

v_ℓ et v_v volumes massiques des phases liquide et vapeur, v volume massique moyen du système total

Premier principe de la thermodynamique

Transformations d'un système

Transformation **quasi-statique** : suffisamment lente pour que le système passe par une suite continue d'états d'équilibre thermodynamique infiniment voisins ; toutes les grandeurs d'état sont définies à chaque instant.

Transformation **réversible** : transformation idéale telle qu'une modification progressive des contraintes extérieures permet d'inverser le sens de son déroulement, en repassant par les mêmes états d'équilibre intermédiaires. Pour cela, elle doit être quasi-statique et ne comporter aucune des causes d'irréversibilité suivantes : inhomogénéités (température, densité, pression...) provoquant des transferts spontanés, phénomènes dissipatifs (frottements, effet Joule...), hystérésis, réactions chimiques ou nucléaires.

Transformation **monotherme** : la température extérieure T_{ext} reste constante.

Transformation **isotherme** : transformation quasi statique au cours de laquelle la température du système reste constante, soit $T = \text{cte}$ ou $dT = 0$.

Transformation **monobare** : la pression extérieure P_{ext} reste constante.

Transformation **isobare** : transformation quasi statique au cours de laquelle la pression du système reste constante, soit $P = \text{cte}$ ou $dP = 0$.

Transformation **isochore** : transformation au cours de laquelle le volume du système reste constant, soit $V = \text{cte}$ ou $dV = 0$.

Transformation **cyclique** : l'état initial et l'état final sont confondus, d'où $\Delta X = 0$ pour toute grandeur X .

Premier principe

Pour tout système fermé, il existe une fonction d'état extensive E appelée **énergie** (totale), qui ne peut être qu'échangée (pas de création ni de disparition), soit sous forme de travail W , soit sous forme de transfert thermique Q .

$$\Delta E = W + Q$$

ΔE variation de E entre états initial et final

$$dE = \delta W + \delta Q$$

dE variation infinitésimale de E

Travail ou transfert thermique positif : énergie reçue par le système. Transfert négatif : énergie fournie par le système à l'extérieur.

Énergie d'un système

$$E = U + E_c (+E_{\text{ém}})$$

U énergie interne, E_c énergie cinétique macroscopique, $E_{\text{ém}}$ énergie électromagnétique

On peut inclure aussi dans E l'énergie potentielle E_p (macroscopique), mais alors W ne contient pas les travaux des forces conservatives.

L'**énergie interne** U s'interprète au niveau microscopique : somme de l'énergie cinétique d'agitation thermique (liée à la température) et des énergies potentielles d'interactions des particules (liées à l'état physique et chimique).

Transfert thermique

Transfert thermique Q (ou **chaleur**) : énergie échangée par l'interaction désordonnée des particules, au niveau microscopique.

Paroi **diathermane** (ou **diatherme**) : permet les transferts thermiques.

Paroi **athermane** (ou **calorifugée**) : empêche les transferts thermiques.

Transformation **adiabatique** : sans transfert thermique avec l'extérieur. Deux cas : système entouré de parois athermanes ; transformation trop rapide pour que les transferts thermiques puissent avoir lieu.

Thermostat (ou **source de chaleur**) : système fermé n'échangeant pas de travail, mais pouvant échanger un transfert thermique sans que sa température varie ; en pratique, système de taille beaucoup plus grande que ceux avec lesquels il est mis en contact.

Travail des forces de pression

$$\delta W = -P_{\text{ext}} dV$$

$$W = - \int_{V_i}^{V_f} P_{\text{ext}} dV$$

δW travail infinitésimal, W travail total

dV volume infinitésimal balayé par la frontière du système sous la pression extérieure P_{ext}

$$\delta W_{\text{rév}} = -P dV$$

$$W_{\text{rév}} = - \int_{V_i}^{V_f} P dV$$

Travail lors d'une transformation réversible

Définition de l'enthalpie

$$H = U + PV$$

H enthalpie, U énergie interne
 P pression, V volume du système

Utilisation de l'enthalpie dans le premier principe

$$\Delta H = Q + W'$$

Premier principe pour une transformation isobare, ou monobare avec $P_i = P_f = P_{\text{ext}}$

W' travail autre que celui de pression

Énergie interne d'un gaz parfait

$$U^{\text{GP}} = U^{\text{GP}}(T)$$

U fonction seulement de T (1^{re} loi de Joule)

$$\Delta U^{\text{GP}} = C_V \Delta T$$

$$dU^{\text{GP}} = C_V dT$$

C_V **capacité thermique à volume constant**

$$C_V^{\text{GPM}} = \frac{3}{2} nR$$

Cas du gaz parfait monoatomique, à toute température, R constante des gaz parfaits

$$C_V^{\text{GPD}} = \frac{5}{2} nR$$

Cas du GP diatomique, dans le domaine des températures ordinaires

Enthalpie d'un gaz parfait

$$H^{\text{GP}} = H^{\text{GP}}(T)$$

H fonction seulement de T (2^e loi de Joule)

$$\Delta H^{\text{GP}} = C_P \Delta T$$

$$dH^{\text{GP}} = C_P dT$$

C_P **capacité thermique à pression constante**

Capacités thermiques massiques et molaires

$$C_{V,m} = \frac{C_V}{n}, \quad C_{P,m} = \frac{C_P}{n}$$

$C_{V,m}$, $C_{P,m}$ capacités thermiques molaires
 n quantité de matière du système

$$c_V = \frac{C_V}{m} = \frac{C_{V,m}}{M}$$

c_V , c_P capacités thermiques massiques

$$c_P = \frac{C_P}{m} = \frac{C_{P,m}}{M}$$

m masse du système, M masse molaire

Coefficient adiabatique (ou de Laplace)

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{C_{P,m}}{C_{V,m}} = \frac{c_P}{c_V}$$

γ rapport des capacités thermiques à pression constante et à volume constant

Capacités thermiques des gaz parfaits

$$C_P - C_V = nR$$

Relation de Mayer

$$C_V = \frac{nR}{\gamma - 1}, \quad C_P = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1}$$

n quantité de matière du système
 R constante des gaz parfaits

$$C_P^{\text{GPM}} = \frac{5}{2} nR, \quad \gamma = 1,66$$

Cas du gaz parfait monoatomique, à toute température

$$C_P^{\text{GPD}} = \frac{7}{2} nR, \quad \gamma = 1,4$$

Cas du GP diatomique, dans le domaine des températures ordinaires

Énergie interne d'un gaz réel

$$U^{\text{GR}} = U^{\text{GR}}(T, V)$$

U fonction de la température T et aussi du volume V

Cas d'une phase condensée idéale

$$U^{\text{PCI}} = U^{\text{PCI}}(T)$$

$$H^{\text{PCI}} = H^{\text{PCI}}(T)$$

U et H fonctions uniquement de la température T

$$PV \ll U, H^{\text{PCI}} \approx U^{\text{PCI}}$$

$$C_p \approx C_v \text{ (notée } C \text{)}$$

$$\Delta H^{\text{PCI}} \approx \Delta U^{\text{PCI}} \approx C \Delta T$$

$$dH^{\text{PC}} \approx dU^{\text{PC}} \approx C dT$$

Approximation dans les conditions usuelles
 C capacité thermique

$$c_{\text{eau}} = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$$

c_{eau} capacité thermique massique de l'eau

Enthalpie de changement de phase d'un corps pur

$$\Delta_{1 \rightarrow 2} h(T) = h_2(T) - h_1(T)$$

$\Delta_{1 \rightarrow 2} h(T)$ **enthalpie (massique) de changement de phase** (anciennement *chaleur latente*) : corps pur passant de la phase 1 à la phase 2 à la température T

Variation d'enthalpie d'un corps pur diphasé

$$\Delta H(T) = \Delta m_2 \times \Delta_{1 \rightarrow 2} h(T)$$

$\Delta H(T)$ variation d'enthalpie lors d'une transformation isotherme à T (donc isobare) où la masse de la phase 2 augmente de Δm_2

$$x_v = \frac{h - h_\ell}{h_v - h_\ell} = \frac{h - h_\ell}{\Delta_{\text{vap}} h}$$

x_v titre en vapeur d'un mélange liquide-vapeur, h_ℓ et h_v enthalpies massiques des phases liquide et vapeur, h enthalpie massique moyenne du système total

Deuxième principe de la thermodynamique

Deuxième principe

Pour tout système fermé, il existe une fonction d'état extensive, l'**entropie** S , dont la variation comporte un terme d'échange $\mathfrak{S}_e$ et un terme de création $\mathfrak{S}_c$.

$$\Delta S = \mathfrak{S}_e + \mathfrak{S}_c$$

ΔS variation de S entre états initial et final

$$dS = \delta \mathfrak{S}_e + \delta \mathfrak{S}_c$$

dS variation infinitésimale de S

Entropie échangée

$$\mathfrak{S}_e = \sum_i \frac{Q_i}{T_{th,i}}$$

Q_i transfert thermique reçu par le système au contact d'un **thermostat** de température $T_{th,i}$

Entropie créée

$$\mathfrak{S}_c > 0$$

Cas d'une transformation irréversible

$$\mathfrak{S}_c = 0$$

Cas (idéal) d'une transformation réversible

Cas d'un système thermiquement isolé

$$\Delta S = \mathfrak{S}_c \geq 0$$

Variation d'entropie toujours positive

L'entropie d'un système thermiquement isolé ne peut que croître, jusqu'à la valeur maximale accessible correspondant à l'équilibre.

Cas d'un gaz parfait

$$\begin{aligned} S &= \frac{nR}{\gamma-1} \ln T + nR \ln V + \text{cte} \\ &= \frac{\gamma nR}{\gamma-1} \ln T - nR \ln P + \text{cte} \\ &= \frac{nR}{\gamma-1} \ln P + \frac{\gamma nR}{\gamma-1} \ln V + \text{cte} \end{aligned}$$

S entropie, n quantité de matière
 P pression, T température, V volume
 R constante des gaz parfaits

$$PV^\gamma = \text{cte}$$

$$TV^{\gamma-1} = \text{cte}$$

$$T^\gamma P^{1-\gamma} = \text{cte}$$

Loi de Laplace pour une transformation *isentropique*, notamment *adiabatique réversible* (le coefficient γ étant constant)

Cas d'une phase condensée idéale

$$S = C \ln(T) + \text{cte}$$

S entropie, T température
 C capacité thermique

Entropie de changement de phase d'un corps pur

$$\begin{aligned} \Delta_{1 \rightarrow 2} s(T) &= s_2(T) - s_1(T) \\ &= \frac{\Delta_{1 \rightarrow 2} h(T)}{T} \end{aligned}$$

$\Delta_{1 \rightarrow 2} s(T)$ **entropie** (massique) **de changement de phase** à la température T
 $\Delta_{1 \rightarrow 2} h(T)$ enthalpie de changement de phase

Variation d'entropie d'un corps pur diphasé

$$\Delta S(T) = \Delta m_2 \times \frac{\Delta_{1 \rightarrow 2} h(T)}{T}$$

$$x_v = \frac{s - s_\ell}{s_v - s_\ell} = T \frac{s - s_\ell}{\Delta_{\text{vap}} h}$$

$\Delta S(T)$ variation d'entropie lors d'une transformation isotherme à T (donc isobare) où la masse de la phase 2 augmente de Δm_2
 x_v titre en vapeur d'un mélange liquide-vapeur, s_ℓ et s_v entropies massiques des phases liquide et vapeur, s entropie massique moyenne du système total

Interprétation statistique de l'entropie

$$S = k_B \ln \Omega$$

S entropie, k_B constante de Boltzmann
 Ω nombre de microétats possibles pour le macroétat considéré (caractérisant le manque d'information ou le désordre microscopique)

Machines thermiques

Modélisation d'une machine thermique

Dans une **machine thermique**, un fluide (**agent thermique**) subit des cycles de transformations et échange travail (avec des pièces mécaniques mobiles) et transfert thermique (avec des sources de chaleur). Cycle **moteur** : le fluide fournit globalement du travail à l'extérieur (travail total $W < 0$).

Cycle **récepteur** : le fluide reçoit globalement du travail ($W > 0$).

Cycle **monotherme** : avec une seule source de chaleur ; il est nécessairement *récepteur*. Cycle **ditherme** : avec deux sources de chaleur.

Application des deux principes au fluide sur un cycle

$$W + \sum Q_i = 0$$

W travail total, Q_i transfert thermique échangé avec chaque source de chaleur à T_i

$$\sum \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$$

Inégalité de Clausius

Cas d'un cycle ditherme

$$W + Q_c + Q_f = 0$$

$$\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} \leq 0$$

Q_c et Q_f transferts thermiques échangés avec les sources chaude (à T_c) et froide (à T_f)

Coefficient de performance

C'est le rapport du transfert d'énergie que l'on cherche à obtenir sur celui ou ceux que l'on dépense pour cela. On l'appelle **efficacité** s'il peut prendre des valeurs supérieures à 1, et **rendement** s'il est par nature compris entre 0 et 1.

Moteur ditherme

$$r = \frac{-W}{Q_c}$$

r rendement, W travail total sur le cycle, Q_c chaleur échangée avec la source chaude

Théorème de Carnot

$$r < r_C = 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

r_C rendement d'un **cycle de Carnot** moteur (réversible, deux isothermes aux températures des deux sources, et deux adiabatiques)

Machine frigorifique

$$e = \frac{Q_f}{W}$$

e efficacité (frigorifique), W travail total, Q_f chaleur échangée avec la source froide

$$e < e_C = \frac{T_f}{T_c - T_f}$$

e_C efficacité (frigorifique) d'un cycle de Carnot récepteur

Pompe à chaleur

$$e = \frac{-Q_c}{W}$$

e efficacité (thermique), W travail total, Q_c chaleur échangée avec la source chaude

$$e < e_C = \frac{T_c}{T_c - T_f}$$

e_C efficacité (thermique) d'un cycle de Carnot récepteur

Cogénération

La **cogénération** est la fourniture par une même installation de travail mécanique (le plus souvent transformé en travail électrique) et de transfert thermique. Elle permet notamment d'augmenter la performance globale des équipements de production.

Électromagnétisme

Champ magnétique

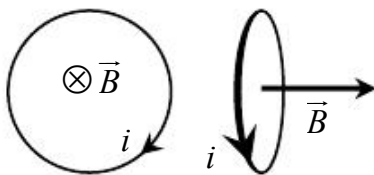
Sources du champ magnétique

Un champ magnétique $\vec{B}(M)$ peut être créé par un *courant électrique* (macroscopique) ou par un **aimant** permanent (dont le modèle microscopique fait apparaître des courants au niveau des atomes).

Lien entre le champ magnétique et le courant

$$B = K i$$

B norme du champ proportionnelle à l'intensité i du courant qui le crée
 K constante dépendant de la géométrie



Sens du champ et du courant liés par la règle du tire-bouchon de Maxwell

Ordres de grandeur des champs usuels

$B \sim 1 \mu\text{T}$	Champ magnétique créé par une spire simple
$B \sim 50 \mu\text{T}$	Champ magnétique terrestre
$B \sim 10 \text{ mT}$	Champ créé par un aimant permanent usuel
$B \sim 10 \text{ mT}$	Champ créé par une bobine utilisée en TP
$B \sim 10 \text{ T}$	Champ magnétique utilisé en imagerie IRM
$B \sim 50 \text{ T}$	Champ des électroaimants les plus puissants (bobinages supraconducteurs)

Lignes de champ magnétique

Ligne de champ magnétique : courbe tangente au champ magnétique en tout point, et orientée dans le sens du champ. **Carte de champ** : représente l'allure de quelques lignes de champ créées par un dispositif donné.

Les lignes de champ sortent du **pôle nord** (N) de l'aimant ou de la **face nord** du circuit, et entrent dans le pôle ou la face **sud** (S).



Les lignes de champ tournent autour des courants électriques, et inversement.
Là où elles sont plus resserrées, le champ est plus intense.
Des lignes de champ parallèles correspondent à un champ *uniforme*.

Plan de symétrie

Π est un plan de symétrie d'une distribution de courant si tous les couples de points symétriques par rapport à Π sont traversés par les mêmes courants.

Ce plan est alors *un plan d'antisymétrie pour le champ magnétostatique* : pour M et M' symétriques, $\vec{B}(M')$ est l'opposé du symétrique de $\vec{B}(M)$.

En particulier, si M appartient à un plan de symétrie du courant, le champ $\vec{B}(M)$ est orthogonal à ce plan.

Plan d'antisymétrie

Π^* est un plan d'antisymétrie d'une distribution de courant si tous les couples de points symétriques par rapport à Π^* ont des courants opposés.

Ce plan est alors *un plan de symétrie pour le champ magnétostatique* : pour M et M' symétriques, $\vec{B}(M')$ est le symétrique de $\vec{B}(M)$.

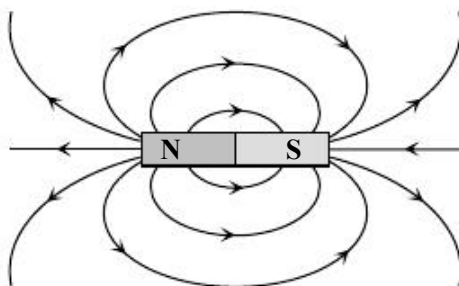
En particulier, si M appartient à un plan d'antisymétrie du courant, le champ $\vec{B}(M)$ est parallèle à ce plan.

Invariances

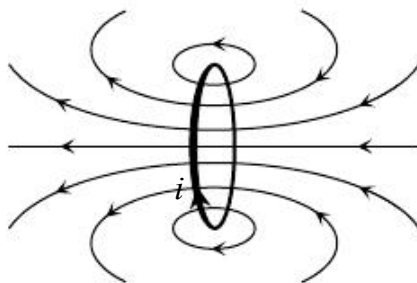
Si la distribution de courant est **invariante par translation** selon un axe, le champ l'est aussi : il ne dépend donc pas de la coordonnée le long de cet axe.

Si la distribution de courant est **invariante par rotation** autour d'un axe, le champ l'est aussi : ses composantes dans une base adaptée (locale) ne dépendent donc pas de l'angle qui définit la rotation autour de cet axe.

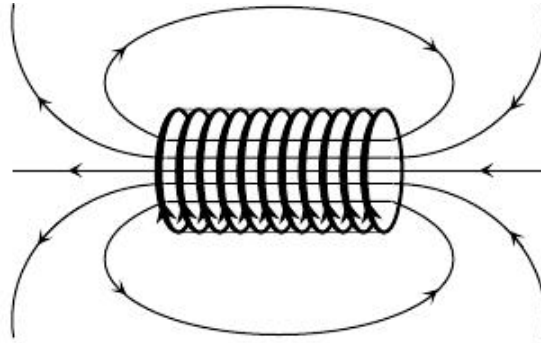
Allure du champ créé par un aimant droit



Champ créé par une spire circulaire ou une bobine plate



Champ créé par une bobine longue (solénoïde)



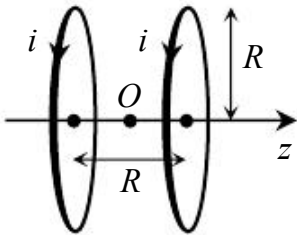
$$B = \mu_0 n i$$

B norme du champ uniforme à l'intérieur (modèle du solénoïde infini), i intensité

$\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ **perméabilité du vide**

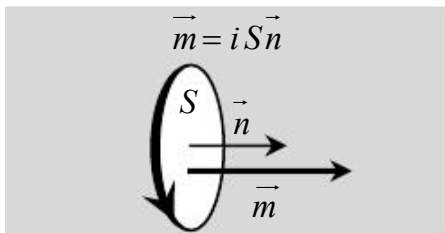
n nombre de spires par unité de longueur

Bobines de Helmholtz



Deux bobines plates séparées d'une distance R égale à leur rayon : champ uniforme, selon l'axe des spires $\vec{e}_z$, au voisinage du milieu O

Moment magnétique d'une boucle de courant plane



i intensité du courant

S aire délimitée par la boucle de courant

$\vec{n}$ vecteur unitaire normal à son plan, orienté selon la règle du tire-bouchon

Moment magnétique d'un aimant

Dans un aimant on définit des moments magnétiques pour les courants microscopiques (atomiques) ; leur somme est le moment magnétique de l'aimant.

$$m \sim 10^{-2} \text{ à } 10 \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

Moment magnétique d'un aimant usuel

Force de Laplace

$$d\vec{F}_{\text{Lap}} = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

$$\vec{F}_{\text{Lap}} = \int i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

$d\vec{F}_{\text{Lap}}$ force de Laplace subie par un élément de longueur $d\vec{\ell}$ d'un circuit parcouru par une intensité i , dans un champ magnétique $\vec{B}$
 $\vec{F}_{\text{Lap}}$ force de Laplace totale sur le circuit

Force de Laplace sur une barre rectiligne

$$\vec{F}_{\text{Lap}} = \pm i \ell B \vec{e}_y$$

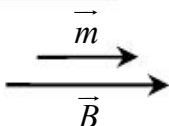
ℓ longueur de la barre selon $\vec{e}_z$, rails de Laplace parallèles à $\vec{e}_y$, champ $\vec{B} = B \vec{e}_x$

Moment des forces de Laplace

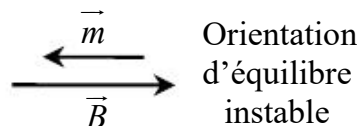
$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{m} \wedge \vec{B}$$

$\vec{\mathcal{M}}$ moment du couple de forces de Laplace sur un circuit ou aimant de moment magnétique $\vec{m}$, placé dans un champ $\vec{B}$

Orientation
d'équilibre
stable



Orientation
d'équilibre
instable



Principe du moteur synchrone

Dans un moteur synchrone, le **stator** crée un *champ magnétique tournant*. Le **rotor** est un aimant (ou une bobine alimentée en courant continu) qui tourne à la même fréquence que le champ magnétique, sous l'effet du couple de forces de Laplace qui tend à aligner son moment magnétique avec le champ.

Induction électromagnétique

Flux du champ magnétique

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{n} \, ds$$

Φ flux du champ magnétique $\vec{B}$ à travers une surface Σ , ds élément de surface

$\vec{n}$ vecteur unitaire normal à la surface

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{n} S$$

Cas d'une surface plane d'aire S dans un champ uniforme

Phénomène d'induction électromagnétique

Induction électromagnétique : apparition d'un courant électrique, appelé **courant induit**, dans un circuit placé dans un champ magnétique $\vec{B}$, lorsque le flux de $\vec{B}$ à travers la surface du circuit varie. Deux causes possibles :

- champ magnétique variable au cours du temps ;
- circuit non fixe (se déplace, tourne autour d'un axe, se déforme).

Cas de Neumann : circuit fixe dans un champ magnétique variable.

Cas de Lorentz : circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire.

Cas général : variation du champ *et* mouvement du circuit. Un même phénomène peut être interprété différemment selon le référentiel utilisé.

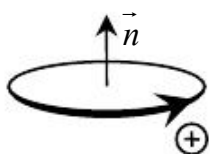
Loi de modération de Lenz

Le sens du courant induit est tel qu'il tend à s'opposer à la cause initiale :

- dans le cas d'un champ magnétique variable, le champ créé par le courant induit lui-même s'oppose à la variation du champ initial ;
- dans le cas d'un circuit mobile, les forces de Laplace dues au courant induit s'opposent au mouvement initial du circuit.

Loi de Faraday

$$e_{\text{ind}} = - \frac{d\Phi}{dt}$$



e_{ind} **force électromotrice (FÉM) induite** (ou **d'induction**) dans un circuit

Φ flux du champ $\vec{B}$ à travers la surface délimitée par le circuit, orientée en fonction du sens positif choisi sur le circuit (pour orienter la FÉM induite et le courant)

Auto-induction

Lorsque le courant dans une bobine est variable, le flux du champ magnétique créé par la bobine elle-même, dit **flux propre**, est variable, ce qui induit dans la bobine une **FÉM d'auto-induction** s'opposant à la variation de courant.

$$\Phi = L i$$

$$e_{\text{ind}} = -L \frac{di}{dt}$$

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} S = \mu_0 n^2 \ell S$$

$$L \sim 10^{-3} \text{ à } 10^{-1} \text{ H}$$

Φ flux propre, i intensité dans la bobine

L **inductance propre** de la bobine (positive)

e_{ind} FÉM d'auto-induction, orientée dans le même sens que l'intensité i

Cas d'un solénoïde de longueur ℓ , de section S , ayant N spires, μ_0 perméabilité du vide
 n nombre de spires par unité de longueur

Ordre de grandeur de l'inductance d'une bobine usuelle (sans noyau de fer)

Bobines en interaction

$$\Phi_{12} = M i_1$$

et $\Phi_{21} = M i_2$

$$M^2 \leq L_1 L_2$$

$$M = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{\ell} S$$

Φ_{mn} flux du champ créé par le courant i_m (dans la bobine m) à travers la bobine n

M **inductance mutuelle** (signe dépendant de l'orientation relative des deux circuits)

Inégalité de couplage (égalité dans le cas de l'influence totale ou couplage parfait)

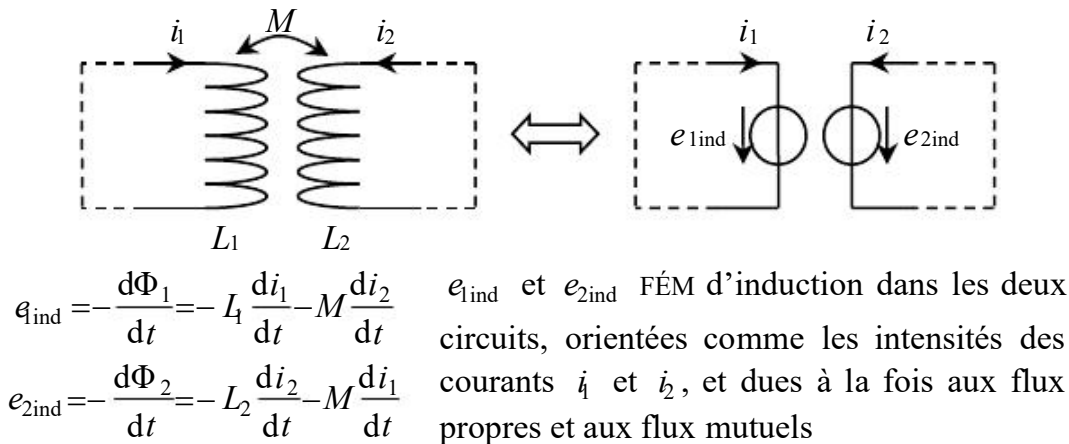
L_n inductance propre de la bobine n

Cas de deux solénoïdes de longueur ℓ en influence totale, orientés dans le même sens

N_m nombre de spires du solénoïde m

Circuits électriques couplés par inductance mutuelle

Schéma électrique équivalent



Appareils avec induction de Neumann

Application principale : transformateur (bobines primaire et secondaire).

Appareils avec bobines émettrice et réceptrice : boucle auditive (émettrice dans les murs d'une pièce, réceptrice dans une prothèse), détecteur de métaux, appareil de contrôle de pièces métalliques.

Appareil avec bobine émettrice et masse métallique : chauffage par induction.

FÉM induite d'un circuit mobile dans un champ fixe

$$e_{ind} = \pm v B \ell$$

Cas des rails de Laplace

v , ℓ vitesse et longueur de la barre

$$e_{ind} = B S \omega \sin(\omega t + \varphi)$$

Cas d'une spire rectangulaire d'aire S en rotation à la vitesse angulaire ω , autour d'un axe orthogonal au champ $\vec{B}$

Bilan énergétique dans le cas de Lorentz

$$\mathcal{P}_{Laplace} + \mathcal{P}_{fém} = 0$$

$\mathcal{P}_{Laplace}$ puissance des forces de Laplace

$\mathcal{P}_{fém}$ puissance fournie par la FÉM induite

Appareils usuels avec induction de Lorentz

Conversion de puissance mécanique en puissance électrique : génératrice de courant électrique, microphone électrodynamique.

Conversion de puissance électrique en puissance mécanique : moteur à courant continu (lecteur de disques, démarreur de voiture, modélisme, outillage, gros engin de levage ou d'enroulage), haut-parleur électrodynamique.

Courants de Foucault

Les **courants de Foucault** sont des courants induits dans tout le volume d'un conducteur non filiforme :

- carcasse en fer d'un transformateur (d'où effet Joule gênant) ;
- pièce métallique proche d'un **détecteur de métaux** ou d'un appareil de contrôle de surface (d'où champ induit dans la boucle détectrice) ;
- pièce ou récipient pour **chauffage par induction** (d'où effet Joule utile) ;
- rotor d'un **frein à induction** (ralenti par les forces de Laplace créées).

*Dans la vie, rien n'est à craindre,
tout est à comprendre.*

Marie Curie

Transformations de la matière

État et évolution d'un système chimique

Système physico-chimique

Espèce physico-chimique : caractérisée par sa formule chimique et son état physico-chimique (solide, liquide, gaz, soluté...). **Système physico-chimique** : constitué d'une seule espèce chimique (**corps pur**) ou plusieurs (**mélange**). Un **état** de ce système est décrit par la donnée de certaines grandeurs physiques, pouvant être extensives ou intensives.

Grandeur **extensive** (masse, quantité de matière, énergie...) : relative à un système entier, constitue un stock contenu dans le système ; additive lors de la réunion de deux systèmes.

Grandeur **intensive** (température, pression, concentrations...) : définie en chaque point du système, décrit une propriété locale ; non additive lors de la réunion de deux systèmes.

Le rapport de deux grandeurs extensives est une grandeur intensive.

Composition d'un mélange

$$x_{A_i} = \frac{n_{A_i}}{n_{\text{totale}}}$$

x_{A_i} **fraction molaire** du constituant A_i

n_{A_i} quantité de matière du constituant A_i

n_{totale} quantité de matière totale du système

Composition d'un mélange gazeux

$$P_{A_i} = x_{A_i} \times P$$

$$P = \sum_i P_{A_i}$$

P pression dans le système

P_{A_i} **pression partielle** du constituant A_i

Mélange gazeux dans le modèle du gaz parfait

$$PV = n_{\text{tot,gaz}} RT$$

$$P_{A_i} V = n_{A_i} RT$$

P pression, V volume du mélange, $n_{\text{tot,gaz}}$

quantité de matière totale, P_{A_i} et n_{A_i} pres-

sion partielle et quantité de matière de A_i

R constante des gaz parfaits, T température

Composition d'une solution

$$[A_i] = \frac{n_{A_i}}{V_{\text{sol}}}$$

$$c_{m,A_i} = \frac{m_{A_i}}{V_{\text{sol}}}$$

$[A_i]$ concentration en quantité de matière de l'espèce A_i , c_{m,A_i} concentration en masse, n_{A_i} quantité de matière de A_i , m_{A_i} masse de A_i , V_{sol} volume de la solution

Équation de réaction

$$\sum_i \nu_i A_i = 0$$

ν_i nombre stœchiométrique algébrique du constituant A_i , $\nu_i < 0$ pour un réactif (à gauche), $\nu_i > 0$ pour un produit (à droite)

Quotient de réaction

$$Q_r = \prod_i a(A_i)^{\nu_i}$$

Q_r quotient de réaction, $a(A_i)$ activité de l'espèce A_i , ν_i nombre stœchiométrique

Expressions des activités

$$a(A_i) = 1$$

Cas d'un constituant solide ou liquide pur

$$a(\text{H}_2\text{O}) = 1$$

Cas du solvant eau

$$a(A_i) = \frac{[A_i]}{c^\circ}$$

Cas d'un soluté en solution diluée
 $c^\circ = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ concentration standard

$$a(A_i) = \frac{P_{A_i}}{P^\circ}$$

Cas d'un gaz parfait dans un mélange gazeux
 $P^\circ = 1 \text{ bar}$ pression standard

Loi de Guldberg et Waage (loi d'action des masses)

$$\prod_i a(A_i)^{\nu_i} = K^\circ(T)$$

$K^\circ(T)$ constante d'équilibre à la température T , $a(A_i)_{\text{eq}}$ activité de A_i à l'équilibre
 ν_i nombre stœchiométrique algébrique

Lors de l'évolution spontanée du système, le quotient de réaction Q_r tend vers la constante d'équilibre $K^\circ(T)$, caractéristique de l'équation de réaction.

Avancement de réaction

$$n_{A_i}(t) = n_{A_i}(t=0) + \nu_i \cdot \xi$$

ν_i nombre stœchiométrique algébrique de A_i
 $n_{A_i}(t)$ quantité de matière de A_i à l'instant t
 ξ avancement de la réaction

État final d'un système physico-chimique

Transformation **totale** : consommation totale d'un réactif (le réactif **limitant**), l'avancement ξ augmente jusqu'à la valeur maximale $\xi_{\max}$ permise par les quantités introduites.

Transformation limitée (non totale) : l'avancement final ξ_f n'atteint pas la valeur maximale $\xi_{\max}$, l'état final est un état d'**équilibre chimique** où tous les réactifs et produits sont présents.

Optimisation d'un procédé chimique

Pour optimiser une synthèse, ou minimiser la formation d'un produit secondaire indésirable, on peut : modifier la constante d'équilibre en changeant la température ; modifier la valeur du quotient de réaction en ajoutant un constituant ou en changeant la pression.

Cinétique chimique

Vitesse de disparition ou de formation

$$v_{d,A_i} = -\frac{d[A_i]}{dt}$$

v_{d,A_i} vitesse (volumique) de disparition d'un réactif A_i , $[A_i]$ concentration molaire

$$v_{f,A_i} = \frac{d[A_i]}{dt}$$

v_{f,A_i} vitesse (volumique) de formation d'un produit A_i

Vitesse (volumique) de réaction

$$v = \frac{1}{V} \frac{d\xi}{dt}$$

v vitesse (volumique) de réaction, ξ avancement de la réaction, V volume du système

$$v = \frac{1}{v_i} \frac{1}{V} \frac{dn_{A_i}}{dt}$$

v_i , n_{A_i} nombre stœchiométrique algébrique et quantité de matière du constituant A_i

$$v = \frac{1}{v_i} \frac{d[A_i]}{dt}$$

Cas d'un volume V constant
 $[A_i]$ concentration molaire de A_i

Loi de vitesse d'une réaction admettant un ordre

$$v = k \times \prod_{i, \text{réactifs}} [A_i]^{\alpha_i}$$

v vitesse (volumique) de réaction

α_i **ordre partiel** par rapport à A_i

$$\alpha = \sum_i \alpha_i$$

k **constante de vitesse** de la réaction

α **ordre (global)** de la réaction

Loi de vitesse d'une réaction sans ordre

$$v = k \times f([A_i])$$

v vitesse (volumique) de la réaction

k constante de vitesse

$f([A_i])$ fonction quelconque des concentrations (autre qu'un monôme)

Réaction d'ordre simple à un réactif

$$|v_A| A = \text{produits}$$

Équation de la réaction

$$-\frac{1}{|v_A|} \frac{d[A]}{dt} = k$$

Cas d'une réaction d'ordre 0

k constante de vitesse (en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$)

$[A]_0$ concentration initiale du réactif A

$$[A] = [A]_0 - |v_A| k t$$

$$-\frac{1}{|v_A|} \frac{d[A]}{dt} = k [A]$$

Cas d'une réaction d'ordre 1

k constante de vitesse (en s^{-1})

$$\ln[A] = \ln[A]_0 - |v_A| k t$$

$$\text{ou } [A] = [A]_0 \times e^{-|v_A| k t}$$

$$-\frac{1}{|v_A|} \frac{d[A]}{dt} = k [A]^2$$

Cas d'une réaction d'ordre 2

k constante de vitesse (en $\text{mol}^{-1} \cdot \text{L} \cdot \text{s}^{-1}$)

$$\frac{1}{[A]} - \frac{1}{[A]_0} = |v_A| k t$$

Réaction d'ordre simple à deux réactifs

$$|v_A| A + |v_B| B = \text{produits}$$

Équation de la réaction

$$-\frac{1}{|v_A|} \frac{d[A]}{dt} = k [A]^\alpha [B]^\beta$$

Cas d'une réaction avec des ordres partiels α (par rapport à A) et β (par rapport à B)

Cas de dégénérescence de l'ordre

Si un réactif est introduit en large excès, sa concentration reste pratiquement constante ; elle peut alors être regroupée avec k dans une **constante de vitesse apparente** k_{app} , ce qui simplifie la loi de vitesse (**dégénérescence de l'ordre**).

Cas de réactifs introduits en proportions stœchiométriques

Les réactifs, initialement en proportions stœchiométriques, restent dans les mêmes proportions à tout instant ; la vitesse de réaction peut donc s'exprimer en fonction d'une seule concentration, avec un exposant qui est l'ordre global.

Temps de demi-vie et de demi-réaction

Temps de demi-vie d'un réactif : temps au bout duquel sa concentration est divisée par deux. **Temps de demi-réaction** : temps $t_{1/2}$ au bout duquel la moitié de l'avancement final est atteint ; pour une transformation totale, c'est le temps de demi-vie du réactif limitant.

$$t_{1/2} = \frac{[A]_0}{2|v_A|k} \quad \text{Cas d'une réaction d'ordre 0 à un réactif}$$

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{|v_A|k} \quad \text{Cas d'une réaction d'ordre 1 à un réactif}$$

$$t_{1/2} = \frac{1}{|v_A|k[A]_0} \quad \text{Cas d'une réaction d'ordre 2 à un réactif}$$

Loi d'Arrhenius

$$k = A \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right)$$

k constante de vitesse

E_a **énergie (molaire) d'activation**

R constante des gaz parfaits, T température

A facteur préexponentiel

Suivi d'une cinétique par conductimétrie

$$\sigma = \sum_{i, \text{ions}} \lambda_i \times c_i$$

Loi de Kohlrausch

σ conductivité de la solution

c_i concentration de l'ion i en solution

λ_i **conductivité ionique molaire** de l'ion i

$$G = k_{\text{cell}} \times \sigma$$

G conductance, k_{cell} constante de cellule

Suivi d'une cinétique par spectrophotométrie

$$A = \varepsilon_\lambda \times l \times c$$

Loi de Beer-Lambert

A **absorbance** de l'échantillon, c et ε_λ concentration et coefficient d'absorption molaire de l'espèce absorbante, l longueur de la cuve

Méthodes pour obtenir un ordre de réaction

Méthode différentielle pour trouver l'ordre α d'une réaction à un réactif A : tracer la droite expérimentale $\ln v = f(\ln[A])$, son coefficient directeur est α .

Méthode intégrale pour confirmer l'ordre α d'une réaction à un réactif A : tracer $[A]$, $\ln[A]$ ou $1/[A]$ (selon l'ordre supposé 0, 1 ou 2) en fonction du temps, et vérifier qu'on obtient une droite ; son coefficient directeur donne la constante de vitesse k .

Structure de la matière et propriétés

Molécules et ions

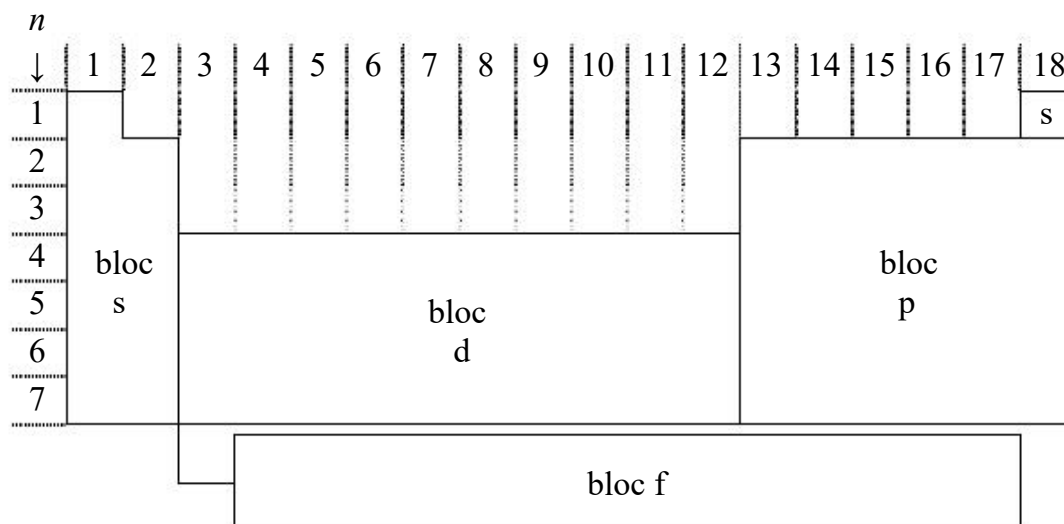
Électrons de valence d'un atome

Dans un atome, les électrons se répartissent en couches (repérées par un entier n de 1 à 7) et en sous-couches (1s, 2s, 2p...). Les **électrons de valence** sont les électrons de la couche de nombre n le plus élevé et ceux des sous-couches en cours de remplissage. Ce sont les électrons les plus faiblement liés au noyau, qui participent aux liaisons et aux réactions chimiques.

Structure du tableau périodique

Les éléments sont classés dans l'ordre croissant de leur numéro atomique Z . Chaque période (ligne) du tableau correspond au début du remplissage d'une nouvelle couche électronique (caractérisée par la valeur de n).

La structure en **blocs** correspond au remplissage des sous-couches.



Nombre d'électrons de valence (éléments des blocs s et p)

Colonne du tableau périodique	1	2	13	14	15	16	17	18
Bloc	s		p					
Nombre d'électrons de valence	1	2	3	4	5	6	7	8

Liaison covalente localisée

Une **liaison covalente** résulte de la mise en commun de deux électrons de valence (un **doublet liant**) par deux atomes.

Dans le **modèle de Lewis**, les électrons de valence sont localisés entre les atomes (liaisons covalentes) ou sur les atomes (**doublets non liants**).

Longueur et énergie de liaison

La **longueur de liaison** d_{A-B} d'une liaison covalente A–B est la distance entre les noyaux de A et de B. Ordre de grandeur : 100 à 250 pm.

L'**énergie de liaison** $E_l(A-B)$ est l'énergie qu'il faut fournir pour dissocier la liaison en ses atomes isolés A et B à l'état gazeux à 0 K. Ordre de grandeur : 150 à 800 kJ · mol⁻¹.

Règle de l'octet

Dans une molécule ou un ion, les atomes de la deuxième période de la classification périodique tendent à s'entourer de *huit électrons* de valence. L'hydrogène obéit à la **règle du duet** en s'entourant de *deux électrons*.

Charge formelle d'un atome

$$C_f = n_v - n_{v,\text{édifice}}$$

n_v et $n_{v,\text{édifice}}$ nombre d'électrons de valence
de l'atome isolé et de l'atome dans l'édifice

La somme des charges formelles des atomes dans un édifice polyatomique (ion ou molécule) est égale à la charge globale de l'édifice.

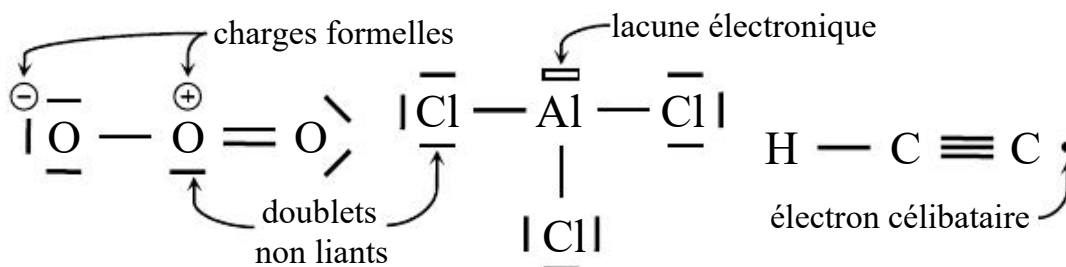
Exceptions à la règle de l'octet

Certains composés sont déficients en électrons : lorsqu'il manque un doublet électronique autour d'un atome pour que celui-ci respecte la règle de l'octet, on représente ce déficit par une **lacune électronique** sur l'atome.

Certains composés, appelés **radicaux**, font apparaître un électron non apparié, appelé **électron célibataire**.

À partir de la troisième période, les atomes peuvent s'entourer de plus de huit électrons : les composés correspondants sont dits **hypervalents**.

Schéma de Lewis



Électronégativité

Électronégativité χ : grandeur sans dimension strictement positive, traduisant l'aptitude d'un atome à attirer les électrons d'une liaison covalente.

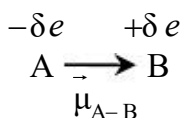
Dans une période, χ augmente lorsque Z augmente (de gauche à droite).

Dans une colonne, χ diminue lorsque Z augmente (de haut en bas).

Liaison polarisée

Lorsque les deux atomes d'une liaison covalente ont des électronégativités différentes, la liaison est **polarisée** : le nuage électronique est légèrement déplacé vers l'atome le plus électronégatif, d'où une charge partielle négative sur celui-ci, et une charge partielle positive sur l'autre atome.

Moment dipolaire de liaison



$$\mu_{A-B} = \delta e \cdot d_{A-B}$$

$\vec{\mu}_{A-B}$ **moment dipolaire** de la liaison A–B

$\pm \delta e$ charges partielles sur A et B

d_{A-B} longueur de liaison

Unité SI de moment dipolaire : le coulomb-mètre ($C \cdot m$). Unité usuelle pour les liaisons chimiques : le debye (D), $1 D = 3,336 \cdot 10^{-30} C \cdot m$.

Moment dipolaire d'une molécule

Moment dipolaire d'une molécule : en première approximation, somme vectorielle des moments dipolaires des liaisons.

S'il est non nul : molécule **polaire**. S'il est nul : molécule **apolaire**.

Polarisabilité d'un atome ou d'une molécule

$$\vec{\mu}_i = \alpha \vec{E}$$

$\vec{\mu}_i$ moment dipolaire **induit** par le champ $\vec{E}$

α **polarisabilité** de l'entité

La polarisabilité des atomes diminue de gauche à droite dans une période du tableau périodique ; elle augmente de haut en bas dans une colonne.

La polarisabilité d'une molécule a tendance à augmenter avec le volume de ses atomes constitutifs et avec les longueurs de liaison.

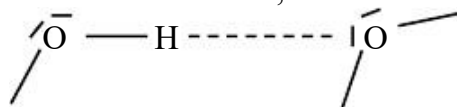
Forces de Van der Waals

Ce sont des interactions attractives électrostatiques à courte distance (quelques centaines de pm) ; énergie de l'ordre de 0,5 à 25 $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$.

- Interaction de **Keesom** : entre dipôles permanents (molécules polaires).
- Interaction de **Debye** : entre dipôle permanent et dipôle induit (molécule **polarisable**).
- Interaction de **London** : entre dipôle instantané et dipôle induit.

Liaison hydrogène

C'est une interaction attractive (énergie de l'ordre de 10 à 40 $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$) entre un atome d'hydrogène lié à un atome électronégatif, et un autre atome très électronégatif portant un doublet non liant ; les trois atomes s'alignent.



Une liaison hydrogène **intramoléculaire** peut s'établir entre différentes parties d'une même molécule si la géométrie le permet.

Conséquences des forces intermoléculaires

Dans un corps pur, plus les forces intermoléculaires sont importantes, plus les températures de fusion et d'ébullition sont élevées.

La **miscibilité** partielle, totale ou nulle de deux liquides peut aussi être interprétée à partir des interactions entre leurs molécules constitutives.

Soluté et solvant

La mise en solution d'une espèce chimique (**soluté**) dans un **solvant** met en jeu des interactions entre soluté et solvant, qui dépendent des caractéristiques physico-chimiques du soluté (ionique ou moléculaire) et du solvant.

La **solvatation** correspond à l'établissement d'interactions attractives entre soluté et solvant : interactions ion/dipôle, forces de Van der Waals, liaisons hydrogène.

Caractéristiques physico-chimiques d'un solvant

Pouvoir ionisant d'un solvant : capacité du solvant à transformer un soluté ionique, ou un composé moléculaire ionisable, en une paire d'ions ; d'autant plus élevé que son *moment dipolaire* est élevé.

Pouvoir dissociant d'un solvant : capacité du solvant à dissocier une paire d'ions (en affaiblissant l'interaction électrostatique entre les ions) ; d'autant plus élevé que sa **permittivité diélectrique relative** ϵ_r est élevée.

Solvant **protique** (ou **protogène**) : possède un atome d'hydrogène lié à un atome électronégatif, donc peut établir des *liaisons hydrogène* avec un soluté.

Solides cristallins

Solide cristallin

L'état solide est un état physique condensé, avec de fortes interactions entre les entités (atomes, ions, molécules). On distingue en général :

- les solides **amorphes** (l'arrangement des entités totalement désordonné) ;
- les solides **cristallins** (arrangement ordonné d'entités dans l'espace) ;
- les solides **semi-cristallins** (seules certaines zones sont ordonnées).

La plupart des solides cristallins sont en fait **polycristallins** : assemblages de cristaux, de tailles, de formes et d'orientations variées.

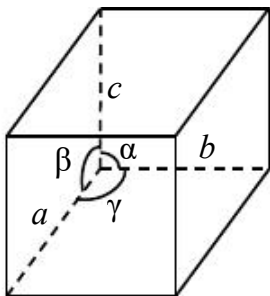
Un corps pur peut présenter des structures cristallines différentes, dites **variétés allotropiques**.

Modèle du cristal parfait

Cristal parfait : modèle idéal constitué d'un arrangement infini, périodique dans les trois dimensions, donc parfaitement ordonné, d'entités (atomes, ions, molécules), qui occupent les **nœuds** d'un **réseau cristallin**.

Motif : agencement des entités, dont la répétition périodique constitue le cristal. La structure cristalline peut ainsi être décrite à l'aide de la connaissance du réseau et du motif.

Maille



La **maille** est une structure parallélépipédique de base, permettant de reconstruire le cristal par translation selon les directions des axes cristallins.

Trois longueurs (a , b , c) – les **paramètres de maille** – et trois angles (α , β , γ) permettent de décrire la maille.

Population d'une maille

La **population** N d'une maille est le nombre d'entités (atomes, molécules, motif ionique) présentes dans la maille : on doit compter 1 pour une entité à l'intérieur de la maille, 1/2 pour une entité sur une face, 1/4 pour une entité sur une arête, 1/8 pour une entité sur un sommet.

Masse volumique

$$\rho = \frac{m_{\text{maille}}}{V_{\text{maille}}} = \frac{N \cdot M}{\mathcal{N}_A \cdot V}$$

M masse molaire des entités, V volume de la maille, N population de la maille

$\mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ nombre d'Avogadro

Modèles des sphères dures

Chaque entité constitutive d'un cristal est modélisée par une **sphère dure**, indéformable et impénétrable, de rayon r :

- **rayon métallique** de l'atome dans un cristal métallique (demi-distance entre les noyaux de deux atomes plus proches voisins dans le cristal) ;
- **rayon covalent** de l'atome dans un cristal covalent (demi-distance entre les noyaux de deux atomes liés par une liaison covalente) ;
- **rayon ionique** dans un cristal ionique, la distance entre un anion et un cation voisins étant la somme de leurs rayons ioniques ;
- **rayon de Van der Waals** dans un cristal moléculaire, la distance entre deux molécules voisines étant la somme de leurs rayons de Van der Waals.

Ordre de grandeur de tous ces rayons : 10^{-10} m.

Les espaces restants entre les sphères sont appelés **sites interstitiels** : des atomes d'autres éléments peuvent venir s'y loger.

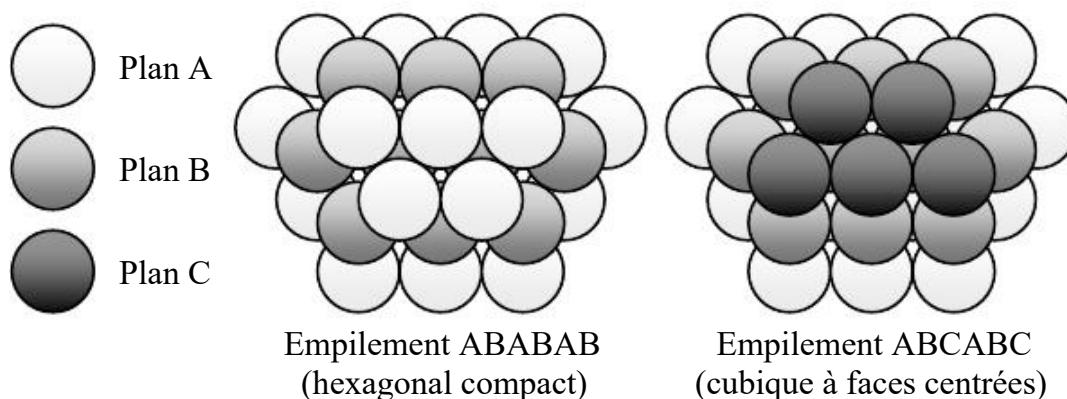
Compacité

La **coordinnence** est le nombre de plus proches voisins tangents à une sphère. La **compacité** est le rapport du volume occupé par les sphères sur le volume total de la maille.

Un **empilement compact** maximise les contacts entre sphères et minimise le volume : alors la coordinnence vaut 12 et la compacité 0,74 (ou 74 %). Il y a deux types d'empilements compacts : **hexagonal compact** et **cubique à faces centrées**. La **condition de compacité** est la relation entre le rayon r de la sphère et les paramètres de la maille pour obtenir un assemblage compact.

Modèles d'empilement compact

Dans un plan compact, une sphère est tangente à six sphères voisines. Un arrangement compact est obtenu en empilant des plans compacts successifs, un plan se positionnant dans les creux formés par le plan compact précédent. On distingue deux types d'empilement compact.



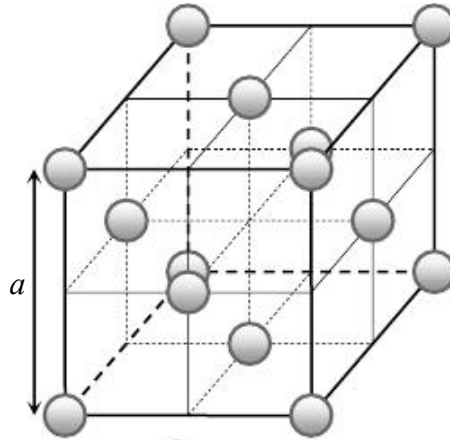
Maille conventionnelle cubique à faces centrées (CFC)

Maille conventionnelle
(particules aux sommets du cube et aux centres des faces)

Condition de compacité :

$$4r = a\sqrt{2}$$

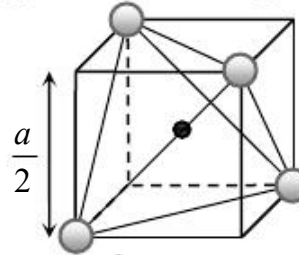
Population : 4 ($6 \times 1/2 + 8 \times 1/8$)



Sites interstitiels
tétraédriques

$$r_{\max} = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1 \right) r \approx 0,225 r$$

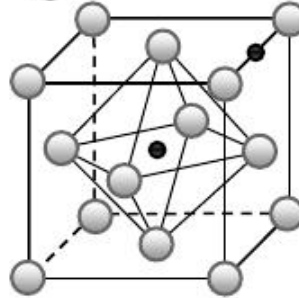
8 sites par maille



Sites interstitiels
octaédriques

$$r_{\max} = (\sqrt{2} - 1)r \approx 0,414r$$

4 sites par maille ($1 + 12 \times 1/4$)



Limites du modèle du cristal parfait

Un cristal réel comporte des défauts : un défaut ponctuel peut être dû à l'absence d'une entité (lacune), à l'insertion d'une entité dans le réseau cristallin (interstitiel), ou à la substitution d'une entité par une autre.

Les défauts modifient les propriétés macroscopiques du solide.

Solides ioniques

Liaison ionique forte (énergie de 100 à 600 $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$) et non directionnelle, à l'origine des propriétés macroscopiques des solides ioniques : température de fusion élevée ; grande dureté ; solubilité dans un solvant polaire.

Description : réseau hôte d'anions, cations dans les sites interstitiels ; tangence anion/cation, non-tangence anion/anion.

Coordinnence d'un ion : nombre de plus proches voisins de signe opposé (coordinnence de l'anion par rapport aux cations et inversement) ; la structure est d'autant plus stable que la coordinnence est élevée.

Solides covalents

Liaison covalente forte ($200 \text{ à } 800 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$) et directionnelle entre atomes, à l'origine des propriétés macroscopiques des solides macrocovalents : température de fusion élevée ; faible conductivité électrique ; grande dureté.

Solides moléculaires

Interactions faibles : forces de Van der Waals ($5 \text{ à } 10 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$), liaison hydrogène ($10 \text{ à } 30 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$), à l'origine des propriétés des solides moléculaires : température de fusion faible ; caractère isolant ; faible dureté.

Métaux, non-métaux

Les éléments de la partie gauche du tableau périodique (en blanc ci-dessous) sont des **métaux**. Ils possèdent une faible électronégativité, associée à un caractère réducteur. À température ambiante et sous pression atmosphérique, les corps simples sont stables à l'état solide (sauf le mercure). Les corps simples issus des **non-métaux** (à droite du tableau, en gris foncé ci-dessous) sont en général de bons isolants et possèdent plutôt un caractère oxydant.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1																		
2																		
3																		
4																		
5																		
6																		
7																		

Solides métalliques

Liaison métallique : électrons de valence des atomes délocalisés sur l'ensemble du cristal (modèle du **gaz d'électrons**), interagissant avec les cations métalliques situés aux nœuds du réseau.

Liaison métallique forte (énergie de $100 \text{ à } 800 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$) et non directionnelle, à l'origine des propriétés macroscopiques des métaux : température de fusion élevée ; conductivités électrique et thermique élevées ; dureté, malléabilité (aptitude à la déformation sans se rompre) et ductilité (aptitude au laminage et au filage) ; propriétés optiques d'opacité et de pouvoir réflecteur.

Transformations en solution aqueuse

Réactions acido-basiques

Couple acido-basique

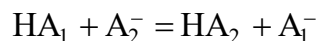
Acide (selon Brønsted) : espèce chimique pouvant céder un ou plusieurs protons H^+ . **Base** : espèce chimique pouvant capter un ou plusieurs protons. **Ampholyte** (ou espèce **amphotère**) : espèce pouvant se comporter comme acide ou comme base.



Demi-équation d'échange protonique pour le couple acide-base HA / A^-

Réaction acido-basique

Elle correspond à un transfert de proton entre l'acide d'un couple HA_1 / A_1^- et la base d'un autre couple HA_2 / A_2^- :



Couples acido-basiques de l'eau

L'eau est un ampholyte, associé aux couples H_3O^+ / H_2O et H_2O / HO^- .



Réaction d'autoprotolyse de l'eau

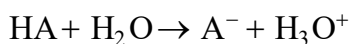
$$K_e = \frac{[H_3O^+] \cdot [HO^-]}{(c^\circ)^2}$$

Produit ionique de l'eau ($K_e = 10^{-14}$ à 25 °C)

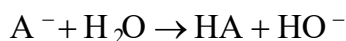
$c^\circ = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ concentration standard

Acides forts et bases fortes

Un **acide fort** (comme HCl , HNO_3) est un acide totalement dissocié en solution aqueuse :



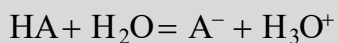
Une **base forte** (comme NH_2^- , $CH_3CH_2O^-$) est une base totalement protonée en solution aqueuse :



On ne peut pas comparer la force relative des acides forts ou des bases fortes dans l'eau : il y a un effet nivelant du solvant.

Constante d'acidité d'un couple acido-basique

Un **acide faible** ou une **base faible** a une réaction limitée avec l'eau.



Réaction entre l'acide d'un couple et l'eau

$$K_a = \frac{[\text{A}^-] \cdot [\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{HA}] \cdot c^\circ}$$

Constante d'acidité du couple HA / A⁻

$$\text{p}K_a = -\log K_a$$

pK_a du couple

L'acide est d'autant plus fort que la constante K_a est élevée et le $\text{p}K_a$ faible.

La base est d'autant plus forte que la constante K_a est faible et le $\text{p}K_a$ élevé.

À 25 °C : $K_a(\text{H}_3\text{O}^+ / \text{H}_2\text{O}) = 1$ et $K_a(\text{H}_2\text{O} / \text{HO}^-) = K_e = 10^{-14}$. L'acide le plus fort pouvant exister dans l'eau est H_3O^+ , la base la plus forte est HO^- .

Exemples de couples acido-basiques

Acide		Base	
HCl chlorure d'hydrogène	fort	Cl ⁻ chlorure	indifférente
HNO ₃ acide nitrique	fort	NO ₃ ⁻ nitrate	indifférente
H ₂ SO ₄ acide sulfurique	fort	HSO ₄ ⁻	indifférente
HSO ₄ ⁻	faible	SO ₄ ²⁻ sulfate	faible
H ₃ PO ₄ acide phosphorique	faible	H ₂ PO ₄ ⁻	faible
H ₂ PO ₄ ⁻	faible	HPO ₄ ²⁻	faible
HPO ₄ ²⁻	faible	PO ₄ ³⁻ phosphate	faible
CH ₃ COOH acide éthanoïque	faible	CH ₃ COO ⁻ éthanoate	faible
H ₂ CO ₃ acide carbonique	faible	HCO ₃ ⁻ hydrogénocarbonate	faible
HCO ₃ ⁻	faible	CO ₃ ²⁻ carbonate	faible
NH ₄ ⁺ ammonium	faible	NH ₃ ammoniac	faible
NH ₃	indifférent	NH ₂ ⁻ amidure	forte
H ₂ O	indifférent	HO ⁻ hydroxyde (NaOH soude, KOH potasse)	forte

pH d'une solution aqueuse

$$\text{pH} = -\log a(\text{H}_3\text{O}^+)$$

Définition générale

$a(\text{H}_3\text{O}^+)$ activité des ions oxonium

$$\text{pH} = -\log \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{c^\circ}$$

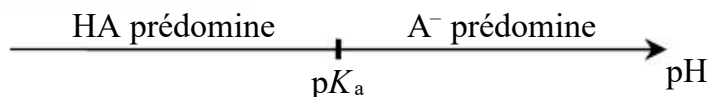
Formule pratique en solution diluée

$c^\circ = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ concentration standard

___ Domaines de prédominance des espèces acido-basiques ___

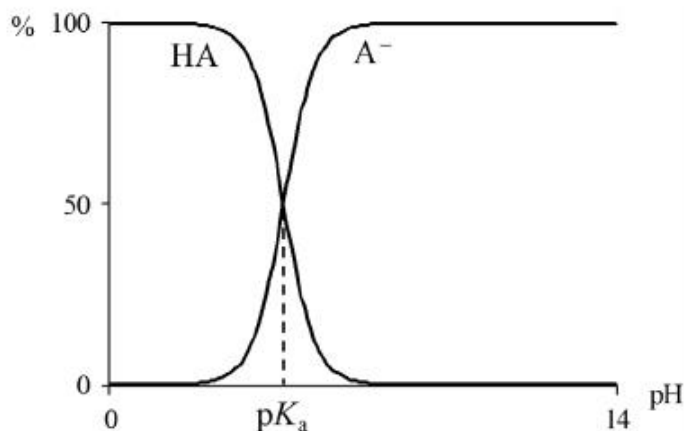
$$\text{pH} = \text{p}K_a + \log \frac{[\text{A}^-]}{[\text{HA}]}$$

HA acide du couple, A^- base du couple



___ Diagramme de distribution des espèces acido-basiques ___

Ce diagramme représente les proportions des deux espèces du couple HA/ A^- dans une solution de concentration totale $c_0 = [\text{HA}] + [\text{A}^-]$ en fonction du pH.



___ Réaction prépondérante ___

Dans un système chimique complexe, une réaction est **prépondérante** si son avancement est majoritaire devant celui des autres réactions possibles. C'est en général la réaction dont la constante d'équilibre est la plus élevée.

___ Titrage acido-basique ___

Un **titrage** est une méthode de **dosage**, permettant de déterminer la concentration d'une solution ; il nécessite une réaction totale et rapide.

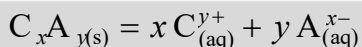
À l'**équivalence**, les réactifs ont été introduits dans les proportions stœchiométriques. L'équivalence d'un titrage acido-basique est marquée par un saut de pH, repéré par pH-métrie ou avec un indicateur coloré.

Réactions de dissolution ou de précipitation

Précipité

Précipité : solide ionique $C_x A_{y(s)}$ en *équilibre hétérogène* avec $C_{(aq)}^{y+}$ et $A_{(aq)}^{x-}$, ses ions constitutifs en solution. Si cet équilibre existe, la solution est **saturée**. $C_x A_{y(s)}$ et $A_{(aq)}^{x-}$ forment un couple donneur/accepteur de $C_{(aq)}^{y+}$ (et vice versa).

Constante de solubilité



Équation de dissolution du précipité

$$K_s = \frac{[C^{y+}]^x \cdot [A^{x-}]^y}{(c^o)^{x+y}}$$

K_s **constante de solubilité** (anciennement *produit de solubilité*)

Condition de précipitation

On détermine le quotient de réaction associé à l'équation de dissolution, dans un état donné du système chimique.

Si $Q < K_s$ le précipité n'existe pas, la solution n'est pas saturée.

Si $Q > K_s$ le système évolue dans le sens de la formation du précipité.

Si $Q = K_s$ l'équilibre hétérogène est réalisé, la solution est saturée.

Domaine d'existence d'un précipité

On peut visualiser le domaine d'existence du précipité sur un axe gradué en fonction de $pC = -\log([C^{y+}]/c^o)$ ou de $pA = -\log([A^{x-}]/c^o)$ selon le cas.

La frontière d'existence du précipité est définie comme la limite de son apparition : un grain de précipité est présent, en équilibre avec l'espèce dissoute correspondante (anion ou cation) à une concentration c_0 fixée arbitrairement. À la frontière, $K_s = [C^{y+}]^x \cdot [A^{x-}]^y / (c^o)^{x+y}$.

Solubilité

La **solubilité** s d'un solide est la quantité de matière maximale de solide que l'on peut dissoudre par unité de volume de solution. Lorsque la limite de solubilité du solide est atteinte, la solution est **saturée**.

La solubilité dépend de la température T . D'après le principe de Le Chatelier, à T constante, tout phénomène qui consomme un ion intervenant dans l'équilibre de précipitation augmente la solubilité.

Titration par précipitation

On peut utiliser une réaction de précipitation comme réaction support de titrage si elle est rapide et totale. Le suivi du titrage peut notamment se faire par colorimétrie, par conductimétrie, par potentiométrie.

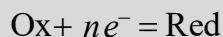
Réactions d'oxydo-réduction

Couple oxydant/réducteur

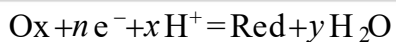
Oxydant : espèce susceptible de capter un ou plusieurs électrons.

Réducteur : espèce susceptible de céder un ou plusieurs électrons.

Ampholyte oxydo-réducteur : peut jouer le rôle d'oxydant ou de réducteur.



Demi-équation d'échange électronique pour le couple oxydant/réducteur Ox / Red



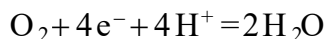
Demi-équation en solution aqueuse

Exemples de couples oxydant/réducteur

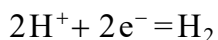
Oxydant	Réducteur
$\text{Cu}_{(\text{aq})}^{2+}$ ion cuivre(II) $\text{Cu}_{(\text{aq})}^+$	$\text{Cu}_{(\text{aq})}^+$ ion cuivre(I) $\text{Cu}_{(\text{s})}$ cuivre
$\text{Fe}_{(\text{aq})}^{3+}$ ion fer(III) $\text{Fe}_{(\text{aq})}^{2+}$	$\text{Fe}_{(\text{aq})}^{2+}$ ion fer(II) $\text{Fe}_{(\text{s})}$ fer
$\text{Ag}_{(\text{aq})}^+$ ion argent	$\text{Ag}_{(\text{s})}$ argent
$\text{MnO}_{4(\text{aq})}^-$ ion permanganate	$\text{Mn}_{(\text{aq})}^{2+}$ ion manganèse(II)
$\text{S}_4\text{O}_{6(\text{aq})}^{2-}$ ion tétrathionate $\text{S}_2\text{O}_{3(\text{aq})}^{2-}$	$\text{S}_2\text{O}_{3(\text{aq})}^{2-}$ ion thiosulfate $\text{S}_{(\text{s})}$ soufre
$\text{ClO}_{(\text{aq})}^-$ ion hypochlorite	$\text{Cl}_{(\text{aq})}^-$
$\text{Cl}_{2(\text{g})}$	$\text{Cl}_{(\text{aq})}^-$
$\text{O}_{2(\text{g})}$ $\text{H}_2\text{O}_{2(\text{aq})}$	$\text{H}_2\text{O}_{2(\text{aq})}$ peroxyde d'hydrogène $\text{H}_2\text{O}_{(\text{l})}$
$\text{O}_{2(\text{g})}$ $\text{H}_2\text{O}_{(\text{l})}$	$\text{H}_2\text{O}_{(\text{l})}$ $\text{H}_{2(\text{g})}$

Demi-équations des couples de l'eau

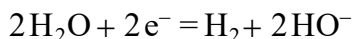
L'eau est associée aux couples $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$ et $\text{H}_2\text{O}/\text{H}_2$ (équivalent à H^+/H_2).



Demi-équation du couple $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$



Demi-équation de H^+/H_2 (milieu acide)



Demi-équation de $\text{H}_2\text{O}/\text{H}_2$ (mil. basique)

Nombre d'oxydation (NO)

Le **nombre d'oxydation** (NO) d'un élément au sein d'un édifice caractérise son déficit ou excès d'électrons. Il est généralement noté en chiffres romains.

Dans un couple, l'oxydant est l'espèce contenant l'élément au NO le plus élevé, le réducteur celle contenant l'élément au NO le plus faible.

Une *oxydation* correspond à une *augmentation* du NO, une *réduction* à une *diminution* du NO. Le nombre d'électrons échangés par l'élément dont le NO varie est égal à la variation de son NO.

Dans un édifice monoatomique, le nombre d'oxydation de l'élément est égal à la charge algébrique de l'édifice.

Pour un édifice polyatomique, on représente son schéma de Lewis et on attribue les deux électrons de chaque liaison covalente à l'élément le plus électronégatif (entre deux atomes identiques, les électrons sont partagés) ; le NO d'un atome de l'édifice est sa charge ainsi obtenue.

Réaction d'oxydo-réduction

C'est un transfert d'électron(s) entre l'oxydant d'un couple $\text{Ox}_1 / \text{Red}_1$ et le réducteur d'un autre couple $\text{Ox}_2 / \text{Red}_2$:

$$\text{Ox}_1 + \text{Red}_2 = \text{Ox}_2 + \text{Red}_1$$

Le réducteur du couple 2 est oxydé, son NO augmente.

L'oxydant du couple 1 est réduit, son NO diminue.

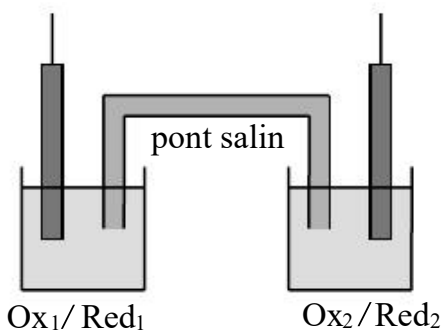
Dismutation et médiamutation

Une **dismutation** est une réaction d'oxydo-réduction au cours de laquelle une espèce ampholyte redox est à la fois réduite et oxydée. Le NO du même élément augmente et diminue simultanément.

Une **médiamutation** est la réaction inverse d'une dismutation.

Pile électrochimique

La pile électrochimique est l'association de deux demi-piles, chacune regroupant les espèces d'un couple Ox / Red , un électrolyte et une électrode (métallique).



Une réaction *spontanée* d'oxydo-réduction se produit par transfert d'électrons entre les espèces par l'intermédiaire du circuit. L'**anode** est l'électrode où se produit la réaction d'oxydation ; c'est le pôle – de la pile. La **cathode** est celle où se produit la réaction de réduction ; c'est le pôle + de la pile.

Le courant circule du pôle + de la pile vers le pôle – dans le circuit extérieur.

Capacité électrique d'une pile

$$Q = zF\xi_{\max}$$

Q capacité électrique d'une pile
 z nombre d'électrons dans l'équation de
réaction, $\xi_{\max}$ avancement maximal

$F = 96485 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$ constante de Faraday

Potentiel d'électrode et force électromotrice

Un conducteur électrique plongeant dans une solution électrolytique d'un couple d'oxydo-réduction acquiert un potentiel appelé **potentiel d'électrode**, égal au potentiel d'oxydo-réduction du couple.

Dans une solution à l'équilibre, les potentiels de tous les couples d'oxydo-réduction sont égaux.

On ne peut mesurer que des différences de potentiels (tensions).

$$\Delta E = E^+ - E^- > 0$$

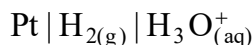
ΔE **force électromotrice** d'une pile
 E^+ et E^- potentiels des deux électrodes

Potentiel standard

Le **potentiel standard** d'oxydoréduction d'un couple Ox/Red, noté E° , est la valeur du potentiel d'oxydo-réduction du couple quand les constituants sont dans leur état standard.

Électrode standard à hydrogène (ÉSH)

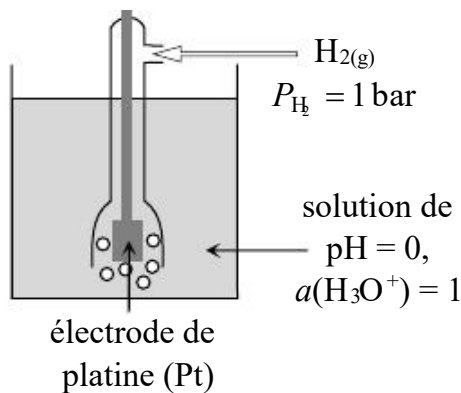
Représentation schématique :



Potentiel :

$$E_{\text{ÉSH}} = E_{\text{H}^+ / \text{H}_2}^\circ = 0,000 \text{ V}$$

à toute température, par convention.



Électrode au calomel saturée (ÉCS)

Représentation schématique : $\text{Pt} \mid \text{Hg}_{(\text{l})} \mid \text{Hg}_2\text{Cl}_{2(\text{s})} \mid (\text{K}^+ + \text{Cl}^-)_{\text{sat}}$

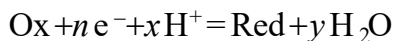
Potentiel : $E_{\text{ÉCS}} = 0,244 \text{ V}$ par rapport à l'ÉSH à 25°C .

Électrode au chlorure d'argent

Représentation schématique : $\text{Ag}_{(\text{s})} \mid \text{AgCl}_{(\text{s})} \mid (\text{K}^+ + \text{Cl}^-)_{\text{sat}}$

Potentiel : $E = 0,222 \text{ V}$ par rapport à l'ÉSH à 25°C .

Formule de Nernst



Demi-équation d'un couple en solution

$$E = E^\circ + \frac{RT}{nF} \ln \frac{a_{\text{Ox}} \cdot a_{\text{H}^+}^x}{a_{\text{Red}} \cdot a_{\text{H}_2\text{O}}^y}$$

E potentiel du couple Ox / Red

E° potentiel standard du couple

a_i activités des espèces

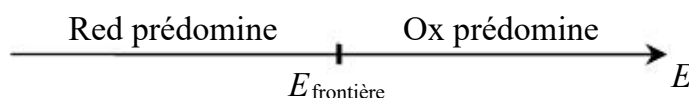
R constante des gaz parfaits, T température

$$E = E^\circ + \frac{0,06}{n} \log \frac{[\text{Ox}] \cdot [\text{H}^+]^x}{[\text{Red}]}$$

Formule pratique en solution à 25 °C, avec

E et E° en volts, concentrations en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$

Domaines de prédominance de l'oxydant et du réducteur

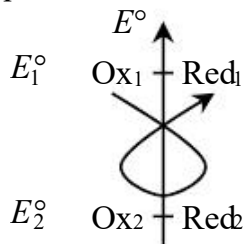


$E_{\text{frontière}}$ est déterminé par des conventions selon l'état physique des espèces.

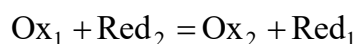
Prévision d'une réaction d'oxydo-réduction

Un oxydant est d'autant plus fort que le potentiel standard E° du couple est plus élevé. Un réducteur est d'autant plus fort que E° est plus faible.

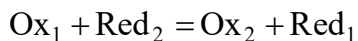
La transformation la plus favorisée thermodynamiquement est celle qui a lieu entre l'oxydant le plus fort et le réducteur le plus fort présents. Elle se déroule jusqu'à un état final d'équilibre où les potentiels des deux couples sont égaux, ou jusqu'à consommation du réactif limitant.



Réaction spontanée pour $E_1^\circ > E_2^\circ$:



Constante d'équilibre



Réaction d'oxydo-réduction

K constante d'équilibre à 25 °C

$$K = 10^{\frac{n(E_1^\circ - E_2^\circ)}{0,06}}$$

E_1° et E_2° potentiels standards en volts

n nombre d'électrons échangés

Titration d'oxydo-réduction

On peut utiliser une réaction d'oxydo-réduction comme support de dosage si elle est rapide et totale. Le suivi du dosage peut se faire par **potentiométrie**, en mesurant la différence de potentiel entre une électrode de mesure et une électrode de référence ; à l'équivalence, on observe un saut de potentiel.

Diagrammes potentiel-pH

___ Définition et construction d'un diagramme potentiel-pH ___

La précipitation ou la complexation, notamment avec les ions hydroxyde HO^- présents dans l'eau, peuvent influencer sur le caractère oxydant ou réducteur d'une espèce. Un **diagramme potentiel-pH** représente les domaines de stabilité (domaines de prédominance ou d'existence) d'espèces chimiques correspondant aux différents NO d'un même élément, en fonction du pH et du potentiel d'oxydo-réduction de la solution, à 25 °C.

– Une frontière verticale sépare deux espèces associées au même NO d'un élément, mais liées par un équilibre acido-basique, de précipitation ou de complexation. La position de cette frontière est obtenue à partir de constantes thermodynamiques telles que K_a , K_s , etc.

– Une frontière oblique ou horizontale sépare deux espèces constituant un couple Ox / Red. Son équation est obtenue à l'aide de la relation de Nernst. Des **conventions de tracé** (en fonction de l'état physique des deux espèces considérées) sont choisies pour établir ces équations.

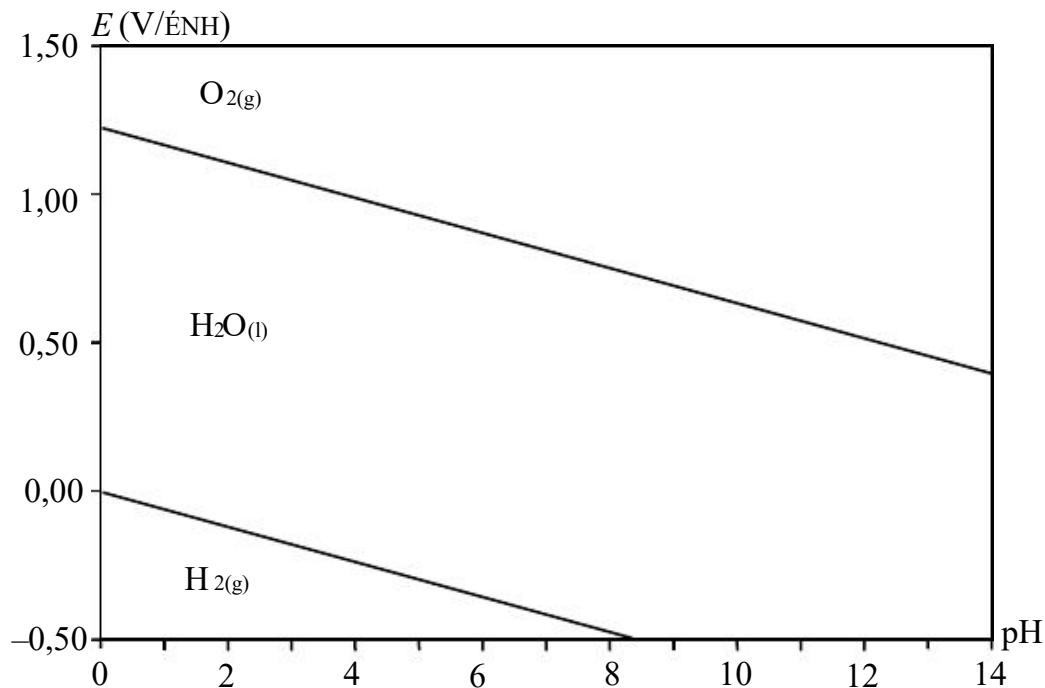
_____ Diagramme potentiel-pH de l'eau _____

Couple $\text{H}_{(\text{aq})}^+ / \text{H}_{2(\text{g})}$ (équivalent au couple $\text{H}_2\text{O}_{(\text{l})} / \text{H}_{2(\text{g})}$ en milieu acide) :

$E = -0,06 \text{ pH}$ (en V) pour $P_{\text{H}_2} = P^\circ = 1 \text{ bar}$.

Couple $\text{O}_{2(\text{g})} / \text{H}_2\text{O}$: $E = 1,23 - 0,06 \text{ pH}$ (en V) pour $P_{\text{O}_2} = P^\circ = 1 \text{ bar}$.

Ces deux frontières limitent le domaine d'inertie thermodynamique de l'eau.



Dismutation et médiamutation

Si un diagramme potentiel-pH fait apparaître un point d'intersection entre trois frontières séparant trois espèces de nombres d'oxydation différents, tels que $a > b > c$, le pH correspondant est le pH limite à partir duquel on observe une réaction de dismutation de l'espèce au NO b , ou une réaction de médiamutation entre les espèces aux NO a et c (selon le sens de lecture).

Utilisation des diagrammes potentiel-pH

Par superposition des diagrammes potentiel-pH associés aux espèces étudiées, il est possible de voir si un oxydant et un réducteur ont des domaines de prédominance (ou d'existence) disjoints au pH considéré. Si c'est le cas, la transformation chimique entre eux est thermodynamiquement favorisée. En particulier, on peut prévoir ainsi la stabilité d'une espèce dans l'eau.

Confrontation entre prévisions et données expérimentales

Il arrive que deux espèces coexistent expérimentalement, alors que les diagrammes potentiel-pH indiquent que leurs domaines de stabilité sont disjoints. Cela est dû au fait que la réaction entre ces deux espèces est extrêmement lente. Un tel état, théoriquement instable du point de vue thermodynamique, mais expérimentalement observable pour des raisons cinétiques, est dit **métastable**.

*La science, c'est ce que le père enseigne à son fils.
La technologie, c'est ce que le fils enseigne à son papa.*

Michel Serres

La science est devenue un moyen de la technique.

Jacques Ellul

Ingénierie système

Les systèmes pluritechniques

Généralités

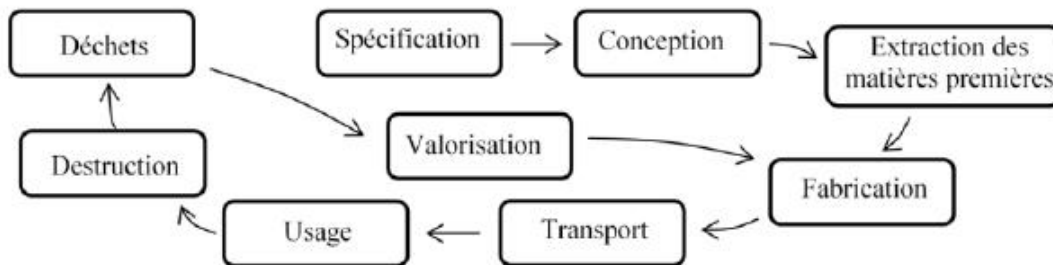
Système technique : ensemble technique conçu pour répondre à un **besoin**.

Fonction : verbe à l'infinitif, action exprimée en termes de finalité.

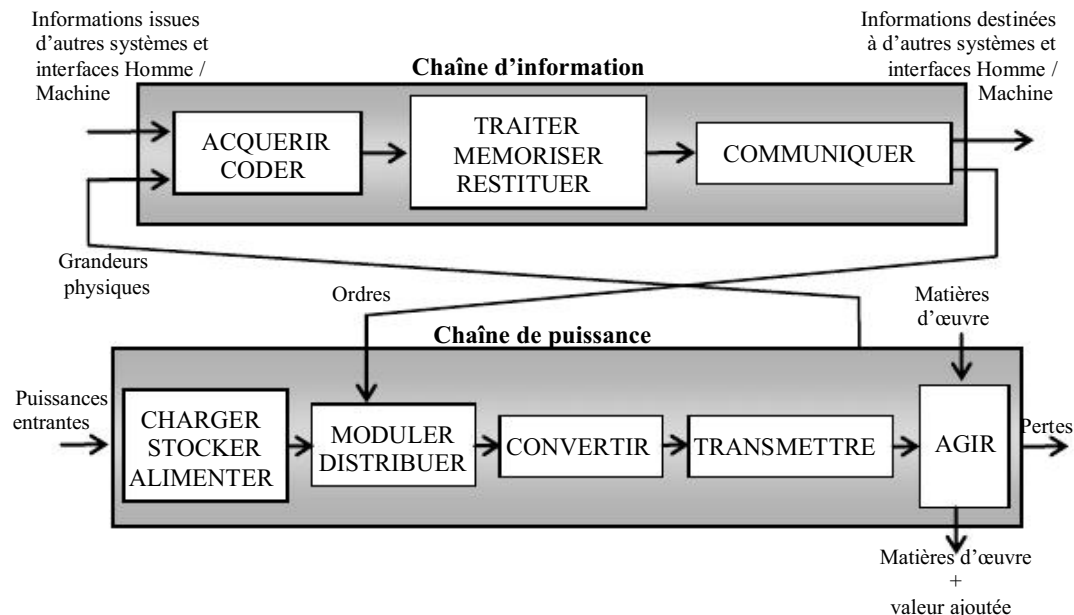
Matière d'œuvre (MO) : élément d'entrée sur lequel s'exercent les activités du système.

Valeur ajoutée (VA) : valeur supplémentaire apportée à la matière d'œuvre par l'activité du système.

Cycle de vie



Fonctions génériques



Le langage SysML (System Modeling Language)

Les neuf diagrammes

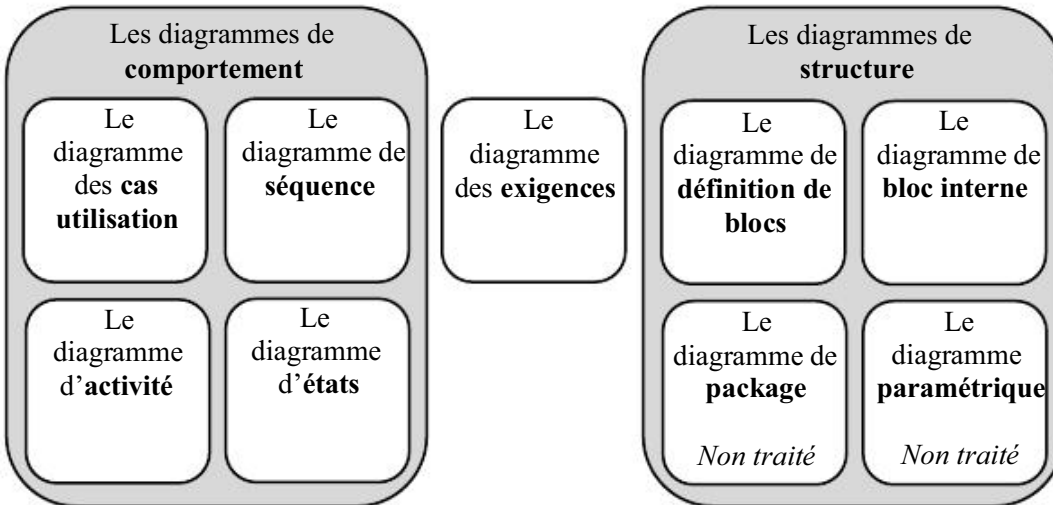


Diagramme de contexte

Diagramme particulier de définition de blocs, non normalisé.
Il montre **acteurs** et **interactions** sans les détailler.

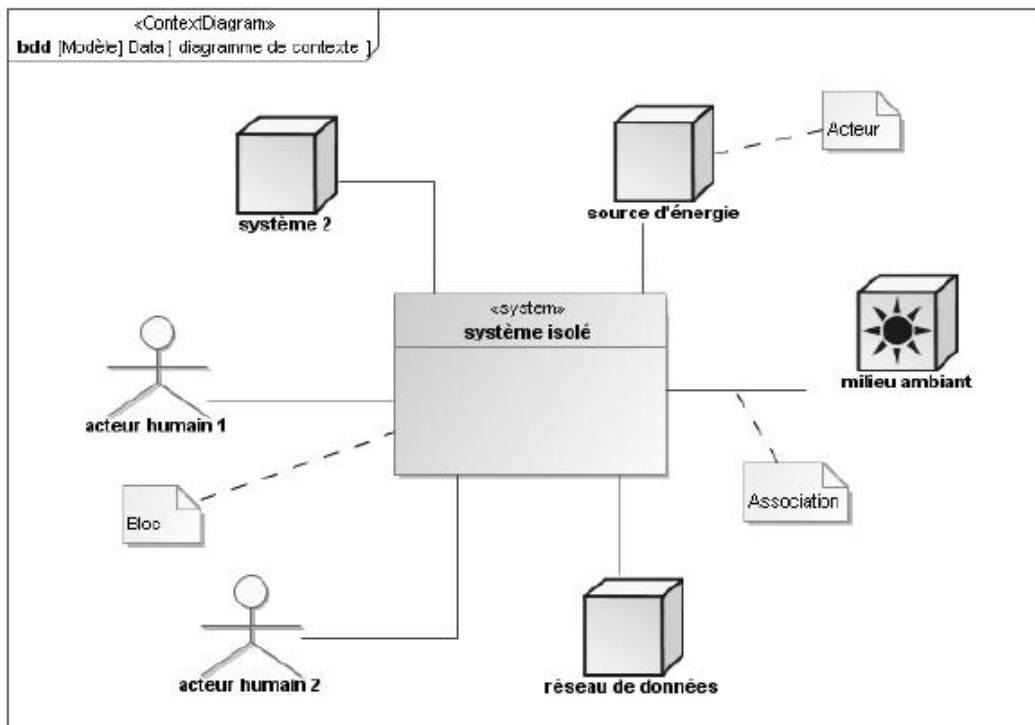
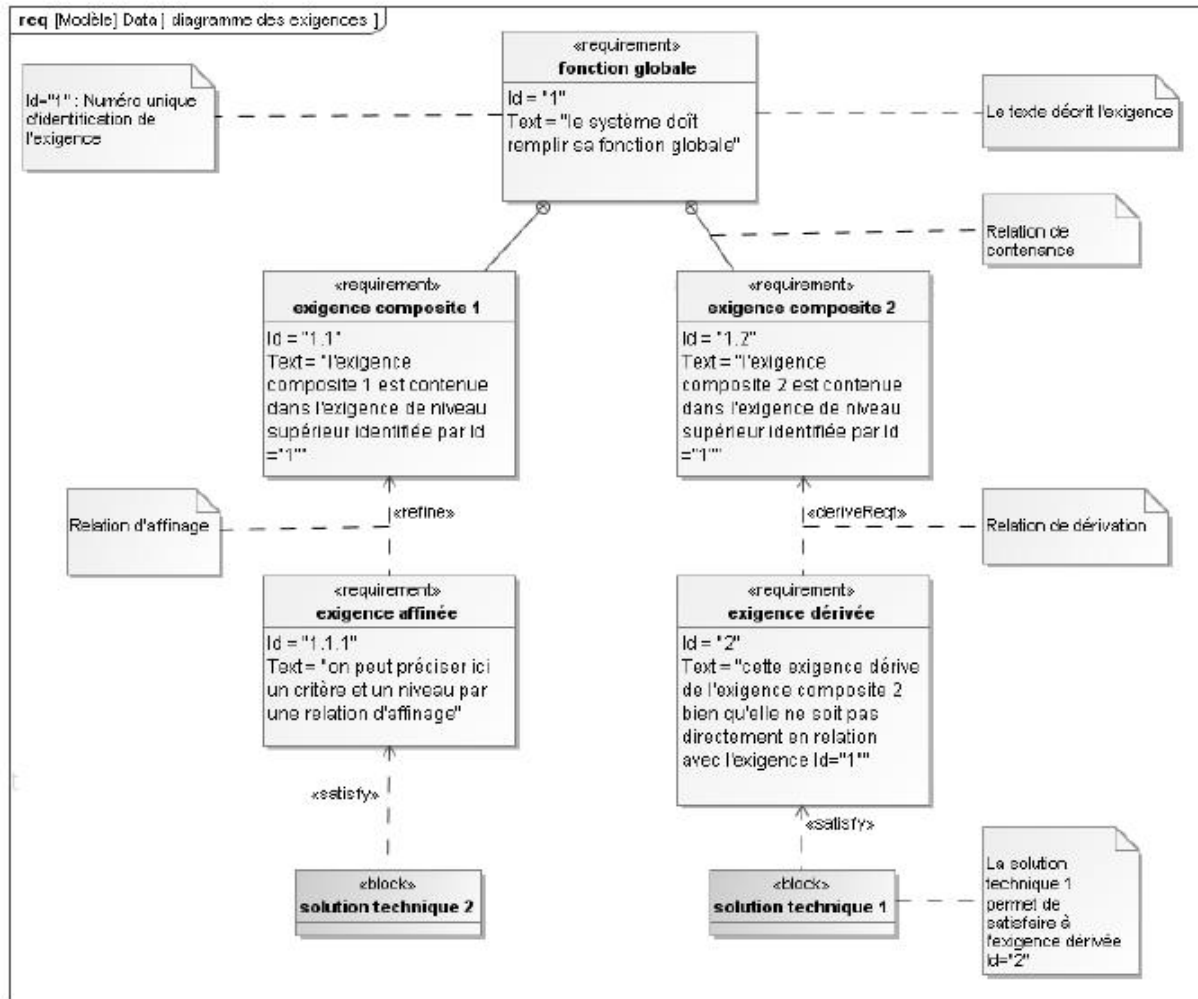


Diagramme des exigences (req)



IIIS

Cahier des charges fonctionnel (CdCF)

Document par lequel le demandeur exprime son besoin en termes de fonctions de service ou d'exigences. Pour chacune d'elles sont définis des critères d'appréciation, niveaux et flexibilité.

Exigences	Critères	Niveaux	Flexibilités
Exigence 1	Critère a	Niveau 1	nulle
	Critère b	Niveau 2	faible
Exigence 2	Critère c	Niveau 3	moyenne
...	...	...	...

Diagramme des cas d'utilisation (uc)

Cas d'utilisation : service attendu par un acteur

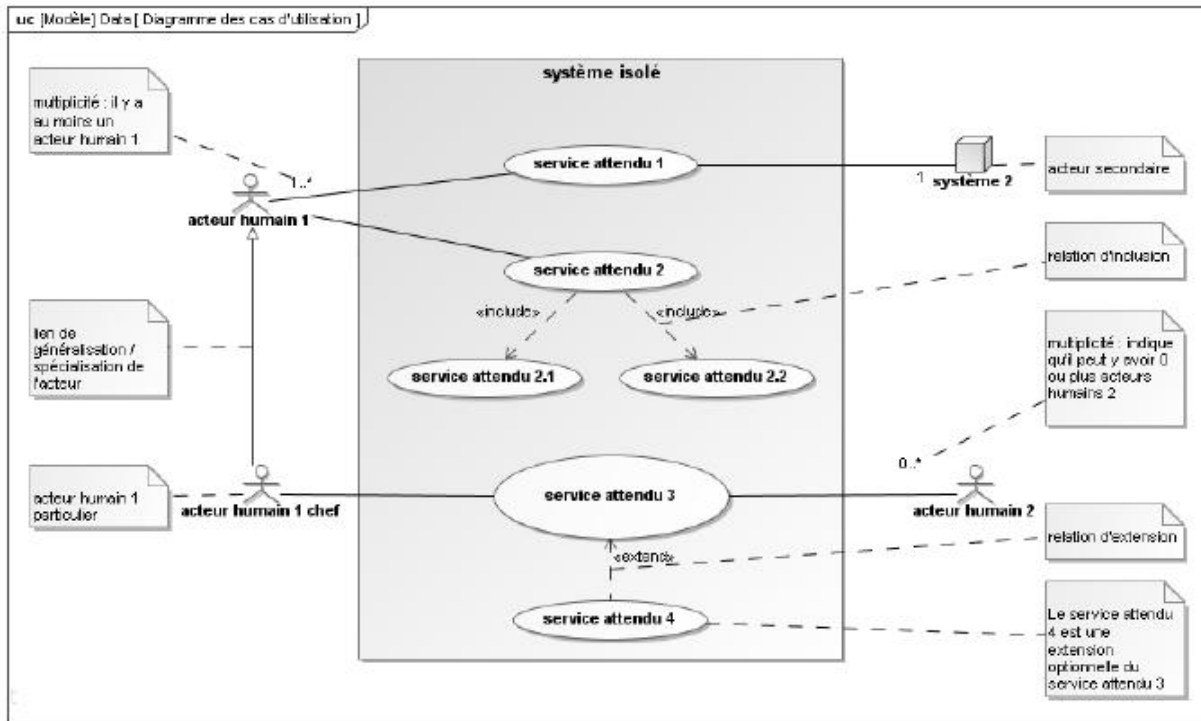
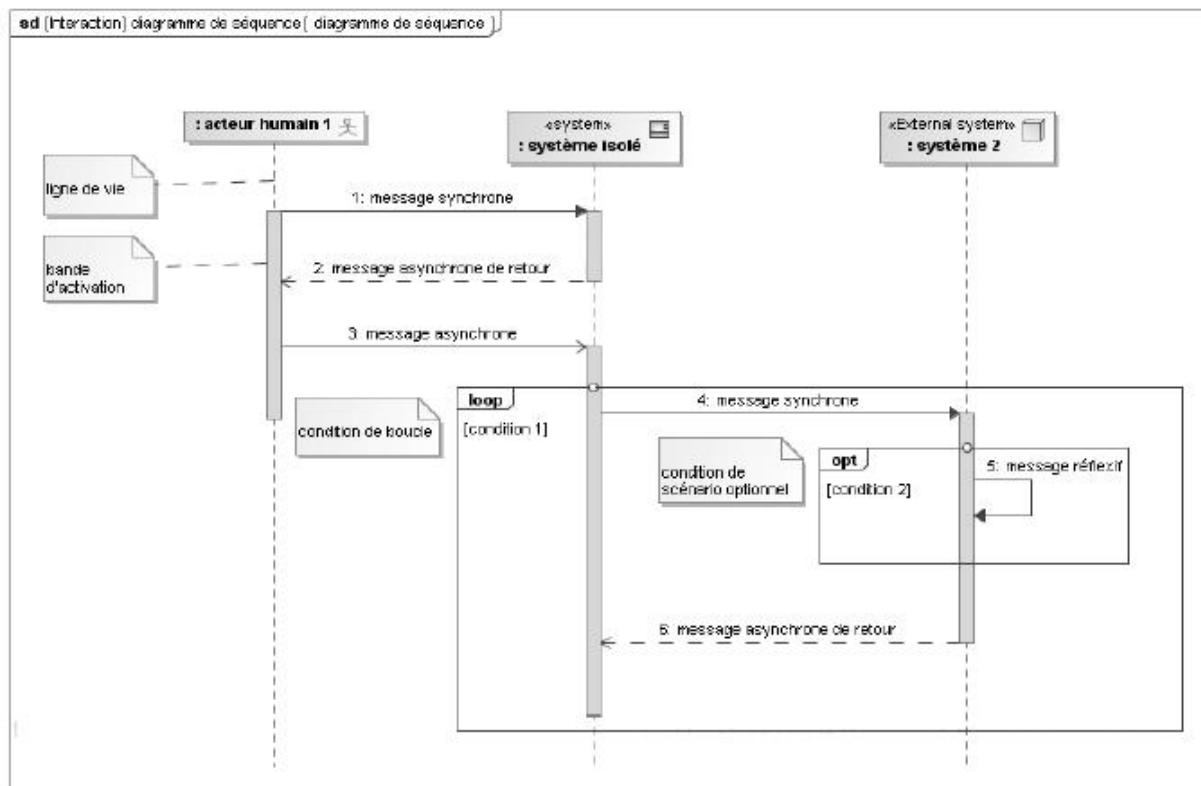


Diagramme de séquence (sd)

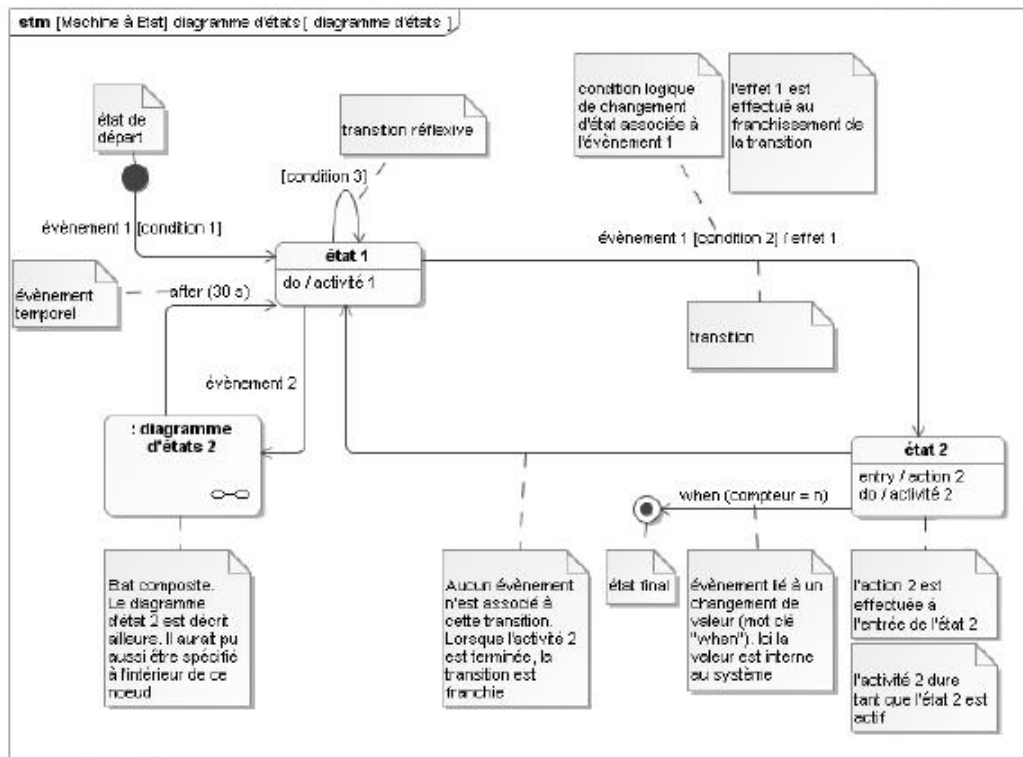
Il décrit un **scénario** pour un cas d'utilisation donné.



Fragments combinés :

- « par » : plusieurs scénarios se déroulent en parallèle ;
- « loop » : le scénario est à répéter en boucle tant qu'une condition est vraie ;
- « opt » : un scénario optionnel est possible selon une condition ;
- « alt » : plusieurs scénarios différents sont envisageables selon des conditions ;
- « ref » : un scénario est référencé. Il est décrit séparément.

Diagramme d'états (stm)



Le formalisme SysML admet neuf **pseudo-états** :

- « shallow history » **H** : permet à un état de niveau hiérarchique supérieur (état composite) de se souvenir du dernier sous-état, avant qu'il n'évolue vers un autre état,
- « deep history » **H'** : idem que précédemment mais avec la propagation de « l'histoire » à tous les sous-états composites de niveaux hiérarchiques inférieurs,
- « fork » **▬** et « join » **▬** : divergence et convergence de séquences parallèles,
- « choice » **◊** : sélection et convergence de séquences exclusives. Il est nécessaire qu'une condition située en aval soit vraie pour que l'évolution du système se poursuive. Les conditions de garde doivent être exclusives. Le mot clé « else » peut-être utilisé pour englober tout ce qui n'est pas décrit dans les autres expressions booléennes. Les conditions de garde situées en aval sont toutes évaluées une fois le pseudo-état atteint,

- « junction » ● : idem au pseudo-état « choice », à la différence que pour qu'un chemin soit emprunté, toutes les conditions de garde situées en aval et en amont, doivent être vraies. L'évaluation des conditions aval est réalisée avant que le pseudo-état soit atteint,
- « entry point » ○ et « exit point » ⊗ : permet de créer un point d'entrée du diagramme et un point de sortie vers un autre diagramme,
- « terminate » ✕ : permet de terminer une séquence sans destruction de l'instance de bloc.

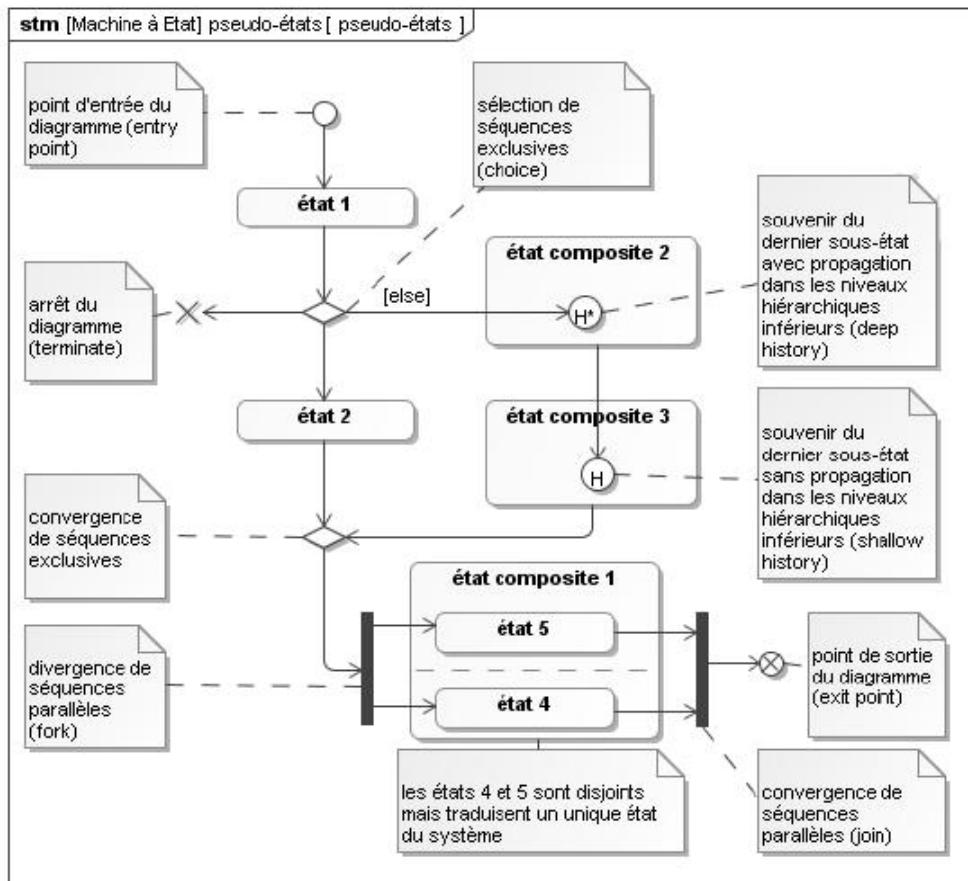
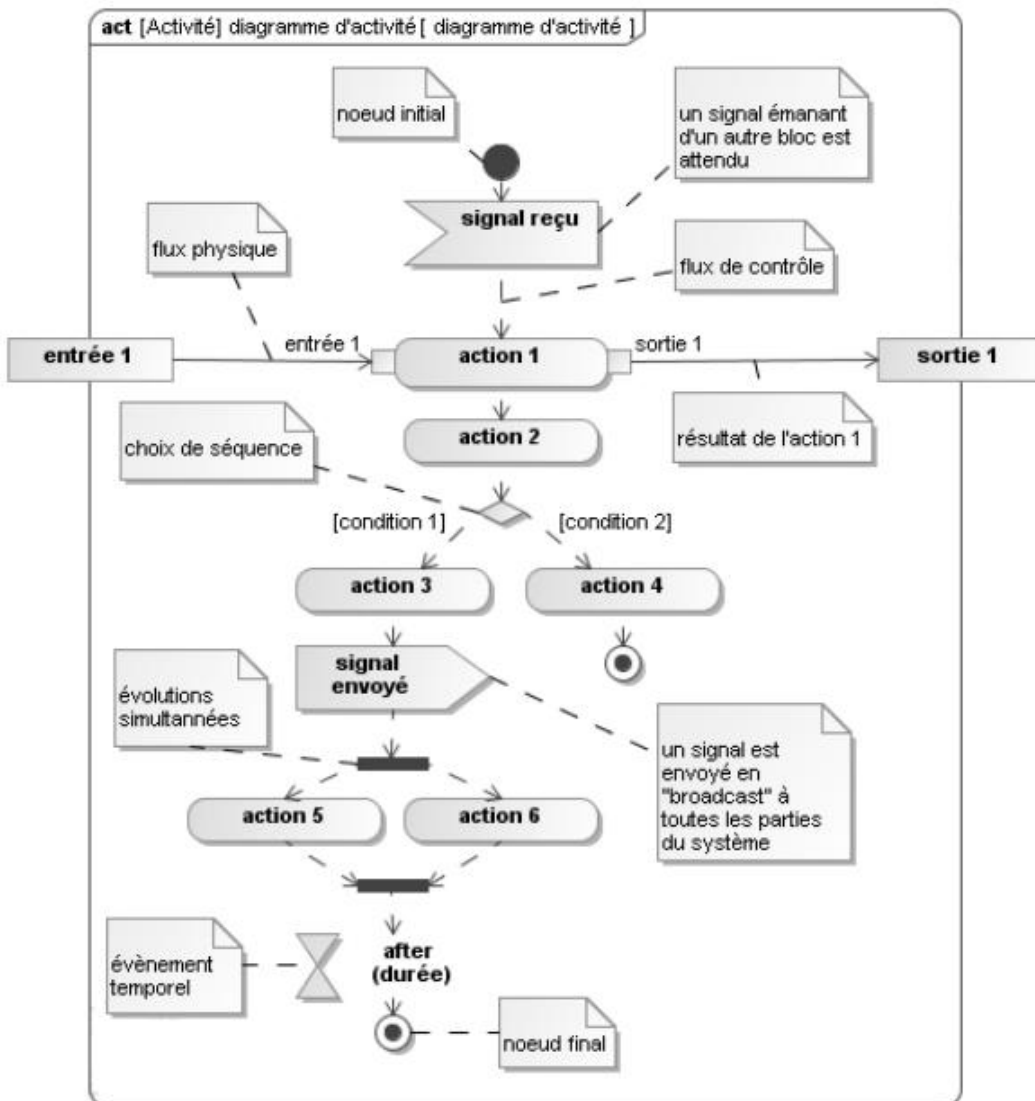


Diagramme d'activité (act)



SI

Le bloc

Propriétés (properties) structurelles et comportementales d'un bloc :

- valeurs (values) : caractéristiques avec valeur, dimension, etc. ;
- parties (parts) : sous-ensembles inclus obligatoirement ;
- relations (constraints) : lois de comportement du bloc
- fonctions (operations) : fonctionnalités disponibles ;
- ports (ports) : ils permettent de montrer des interactions bidirectionnelles ou unidirectionnelles, services (interfaces) ou flux (flow) physiques ;
- signaux (signals) : événements que le bloc est susceptible de traiter.

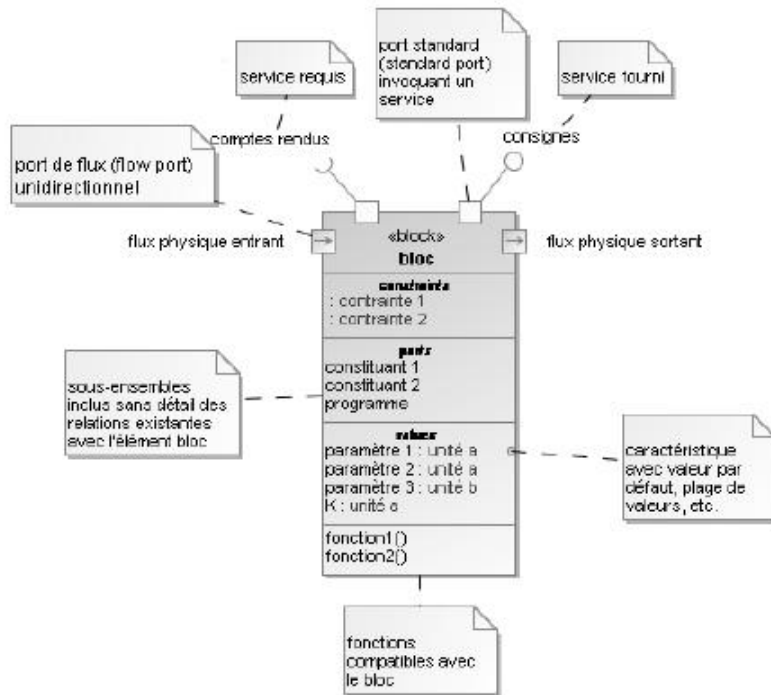


Diagramme de définition de blocs (bdd)

Relations entre blocs :

- l'association (trait plein simple) : indique une relation d'égal à égal entre blocs. Leur présence est simultanée ;
- la composition (trait plein et losange plein) : représentation graphique équivalente aux propriétés de type « parts », c'est une relation d'inclusion obligatoire ;
- l'agrégation (trait plein et losange évidé) : c'est une relation d'inclusion non obligatoire ;
- la généralisation / spécialisation (trait plein et triangle évidé) : selon le sens de lecture, un bloc se généralise ou se spécialise en un autre. Dans ce dernier cas, il hérite alors des propriétés du bloc généralisé ;
- la dépendance (trait en pointillés et flèche) : un bloc a un comportement qui dépend d'un autre.

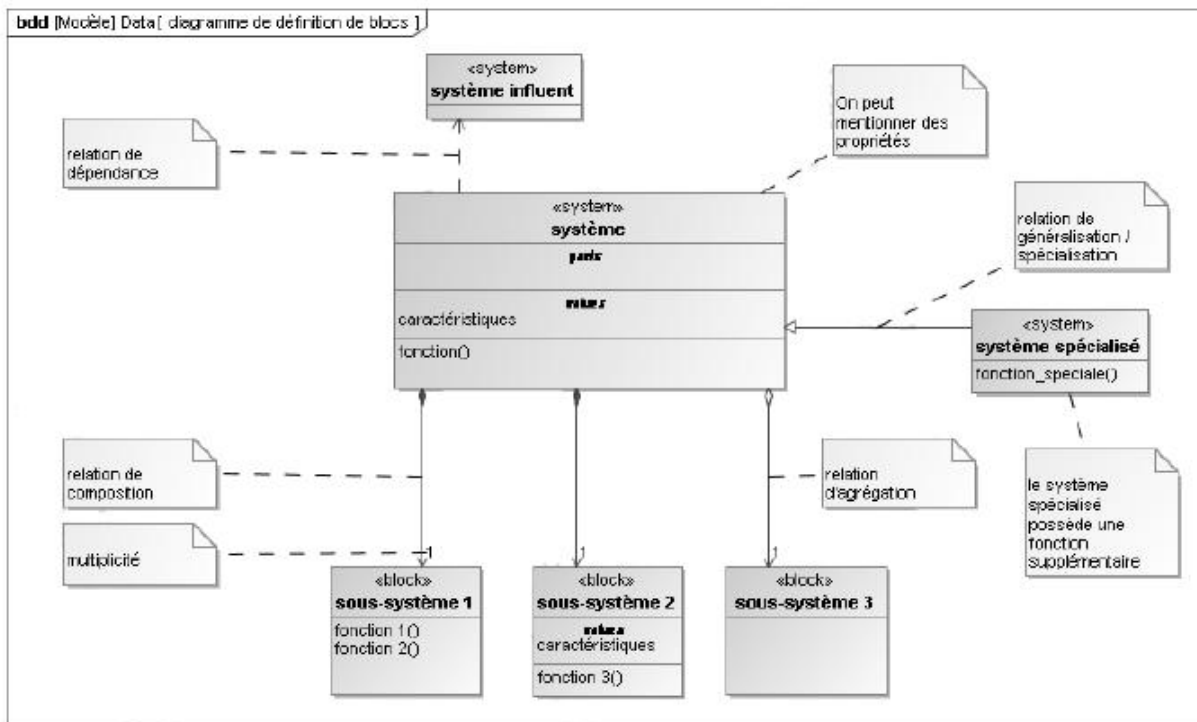
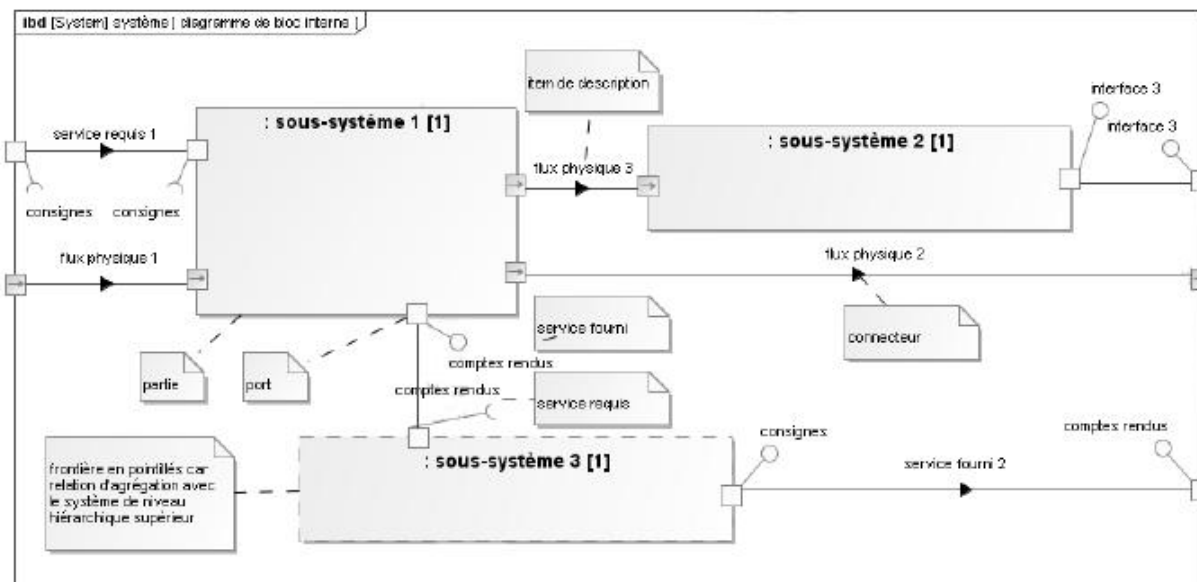


Diagramme de bloc interne (ibd)

Il montre :

- la structure interne d'un système. Les sous-ensembles liés au système par une relation de composition sont en trait plein, les autres en pointillés ;
- l'utilisation des sous-systèmes dans un contexte donné : on montre leurs connexions par le biais des connecteurs joignant les ports : les flux physiques pour les ports de flux, et les services fournis ou requis pour les ports standards.



Algorithmique

Introduction

Typage des variables

Les **types simples** sont notamment :

- le booléen (`bool`),
- l'entier (`int`),
- le réel codé en virgule flottante (`float`),
- le caractère (`chr`).

Les **types structurés** sont par exemple :

- la liste (`list`),
- la chaîne de caractères (`str`),
- le tableau (`array`),
- le tuple (`tuple`),
- le dictionnaire (`dict`).

Opérateurs

Opérateurs arithmétiques

addition	+
soustraction	-
produit	*
division	/

division entière	//
modulo	%
exposant	**

Opérateurs relationnels

identique	==
différent	!=
inférieur	<

supérieur	>
inférieur ou égal	<=
supérieur ou égal	>=

Opérateurs logiques

négation	not
ou	or
et	and

Opérateurs divers

affectation	=
concaténation	+
répétition	*

Fonctions

```
def fonction(arguments) :  
    corps de la fonction  
    return valeurs
```

Structure conditionnelle

```
if condition logique :  
    groupe d'instructions  
elif condition logique :  
    groupe d'instructions  
else :  
    groupe d'instructions
```

Structures itératives

```
for i in range(0,n,1) :  
    groupe d'instructions
```

```
i=0  
while i<n:  
    groupe d'instructions  
    i=i+1
```

Manipulation des listes

`L=[]` : création d'une liste vide
`L=[10, 2, 45, 3]` : création d'une liste de quatre entiers
`L.append(5)` : ajout de l'entier 5 à la fin de la liste L
`len(L)` : retourne la taille de la liste L
`L[0]` : premier élément de la liste L
`L[-1]` : dernier élément de la liste L
`L[:]` : liste de toutes les valeurs de la liste L
`L[2:4]` : liste avec le troisième et le quatrième élément de la liste L
`L[::2]` : liste des valeurs de la liste L d'indice pair
`[1, 2, 3]+[10, 12, 14]` : concaténation de deux listes
`3*[0, 1]` : trois répétitions de la liste

Manipulation des fichiers texte

`f=open("nom de fichier", "r")` : ouverture d'un fichier texte en lecture et retourne le contenu dans la variable `f`
`f.readline()` : retourne la ligne (type `str`) en cours et avance
`f.readlines()` : retourne la liste des lignes (type `list` de `str`)

`f.read()` : retourne tout le contenu du fichier texte en une chaîne de caractères
`for x in f` : parcourt toutes les lignes du fichier. `x` est une chaîne de caractères (type `str`)
`f=open("nom de fichier", "w")` : ouverture d'un fichier texte en écriture
`f.write(ligne)` : écriture d'une ligne (type `str`)
`f.close()` : ferme le fichier

Tracé d'une courbe

`import matplotlib.pyplot as plt` : importe et renomme la bibliothèque
`plt.plot(listeX, listeY)` : crée une courbe à partir d'une liste de valeurs en abscisse et une liste de valeurs en ordonnée
`plt.title("titre")` : définit un titre
`plt.xlabel("étiquette des abscisses")` : définit l'étiquette de l'abscisse
`plt.ylabel("étiquette des ordonnées")` : définit l'étiquette de l'ordonnée
`plt.show()` : affiche le tracé

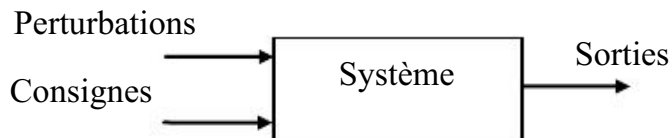
Exploitation des données

```
def moyenne(ListeValeurs):  
    m=0  
    for x in ListeValeurs:  
        m=m+x  
    return m/len(ListeValeurs)  
  
def ecartType(ListeValeurs):  
    v=0  
    m=moyenne(ListeValeurs)  
    for x in ListeValeurs:  
        v=v+x**2  
    return (v/len(ListeValeurs)-m**2)**0.5
```


Automatique

Les systèmes linéaires continus et invariants asservis

Représentation sous forme de boîte noire



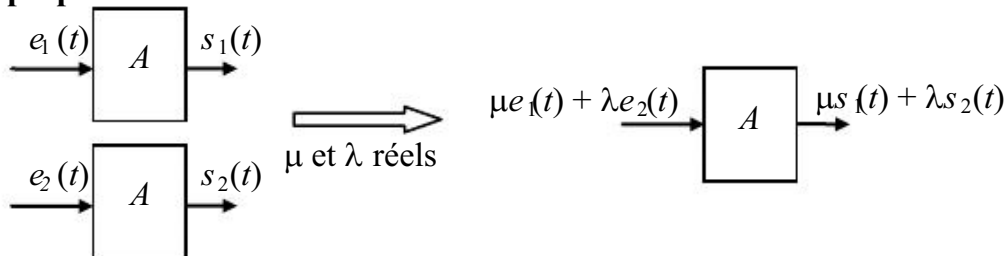
Entrées : **consignes** et **perturbations**.

Sorties : elles sont aussi appelées « **réponses** » du système.

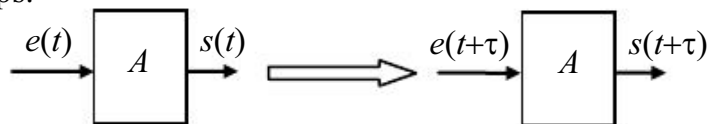
Les systèmes linéaires continus et invariants (SLCI)

Systèmes **continus** : les grandeurs régissant le fonctionnement sont **analogiques**.

Comportement **linéaire** : possède les propriétés de **proportionnalité** et de **superposition**.



Système **invariant** : les caractéristiques de comportement ne se modifient pas dans le temps.



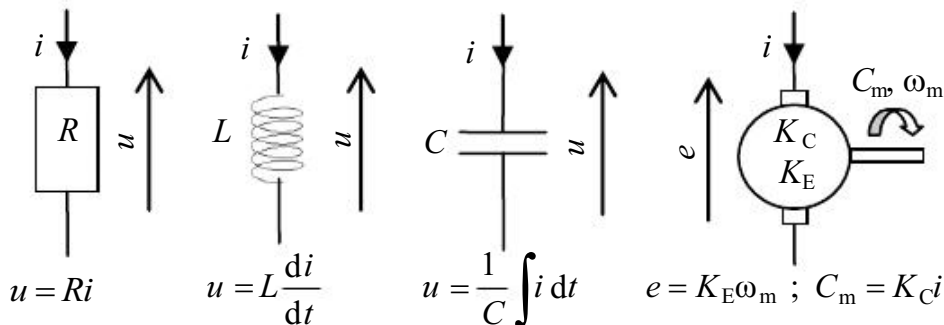
Modèle mathématique d'un SLCI monovariante

$$\sum_{i=0}^n b_i \frac{d^i}{dt^i} s(t) = \sum_{j=0}^m a_j \frac{d^j}{dt^j} e(t)$$

Équation différentielle
 b_i et a_j constantes réelles

Dans le cas des systèmes réels, sauf hypothèses simplificatrices, $n \geq m$.

Systèmes électriques et électromécaniques

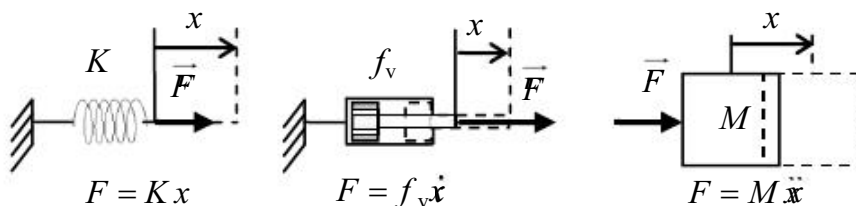


i intensité, u tension, e FCEM, R résistance, L inductance

C_m couple moteur, ω_m vitesse de rotation moteur

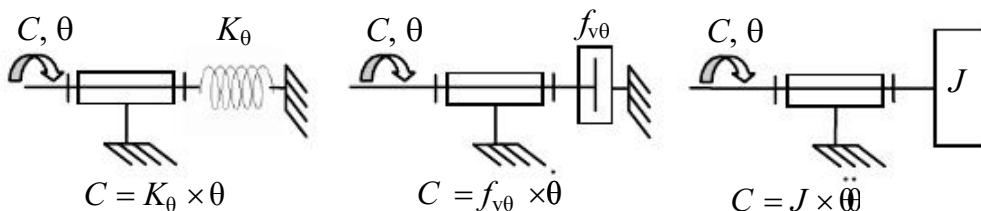
C capacité, K_E constante de FCEM, K_C constante de couple

Systèmes mécaniques



F force, M masse, K raideur, f_v coefficient de frottement visqueux

x déplacement, $\dot{x}$ vitesse, $\ddot{x}$ accélération

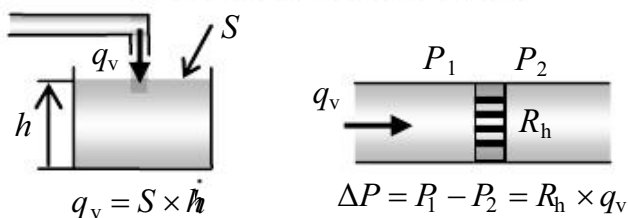


C couple, J moment d'inertie

K_θ raideur angulaire, $f_{v\theta}$ coefficient de frottement visqueux

θ angle, $\dot{\theta}$ vitesse angulaire, $\ddot{\theta}$ accélération angulaire

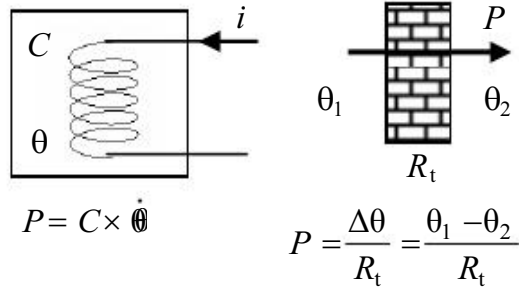
Systèmes hydrauliques



q_v débit volumique, S surface transversale

R_h résistance hydraulique, ΔP différence de pression

Systèmes thermiques



P flux de chaleur, C capacité calorifique
 R_t résistance thermique, $\Delta\theta$ différence de température

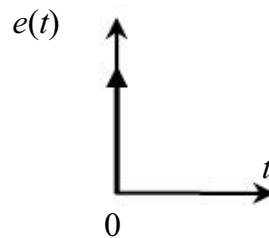
Les entrées canoniques

Impulsion d'aire A

$e(t) = A \times \delta(t)$ avec $\delta(t) = 0$ si t n'est pas au voisinage de 0

et $\int_{-a}^b A \times \delta(t) \times dt = A$, avec a et b réels au voisinage de 0.

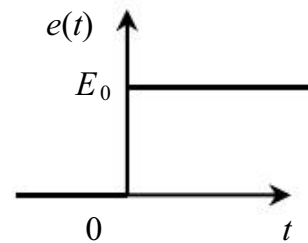
$\delta(t)$ impulsion de Dirac



Échelon d'amplitude E_0

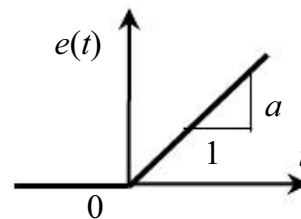
$e(t) = E_0 \times Y(t)$ avec $Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$

$Y(t)$ fonction de Heaviside



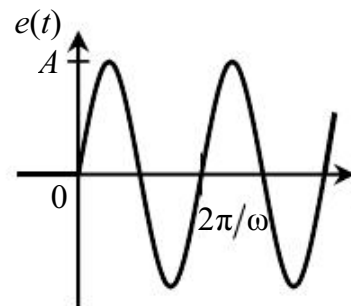
Rampe de pente a

$e(t) = a \times t \times Y(t)$

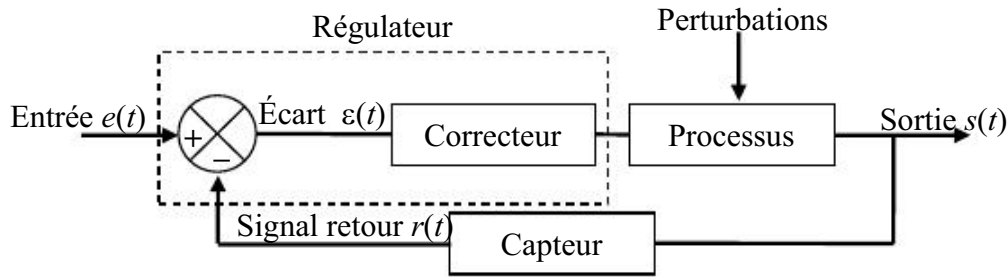


Entrée sinusoïdale de pulsation ω et d'amplitude A

$e(t) = A \times \sin(\omega t) \times Y(t)$



Structure d'un système asservi



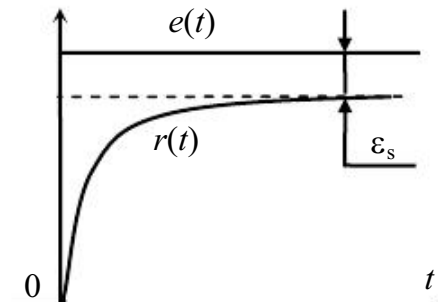
$$\varepsilon(t) = e(t) - r(t)$$

Précision d'un système asservi

Erreur statique ε_s :

caractéristique en régime permanent de la fonction écart $\varepsilon(t)$ lorsque le système est soumis à une entrée de type échelon, $\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\varepsilon(t))$

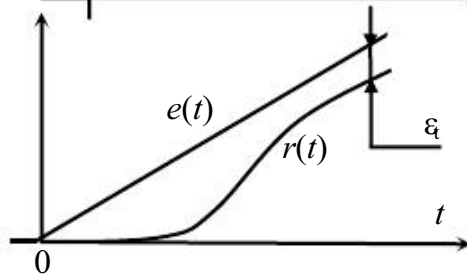
avec $e(t) = E_0 \times Y(t)$.



Erreur de traînage ε_t :

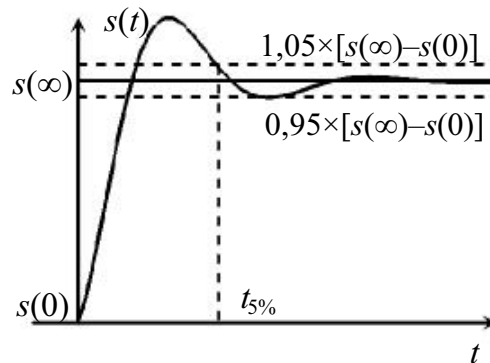
caractéristique en régime permanent de la fonction écart $\varepsilon(t)$ lorsque le système est soumis à une entrée de type rampe, $\varepsilon_t = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\varepsilon(t))$

avec $e(t) = a \times t \times Y(t)$.



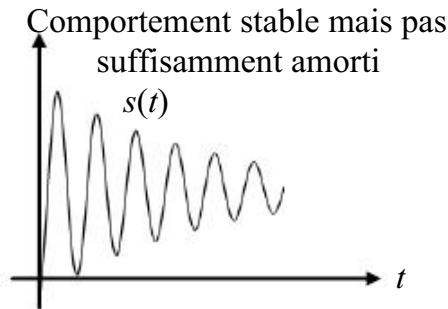
Rapidité d'un système asservi

Le **temps de réponse** $t_{5\%}$ caractérise le temps que met le système à réagir à une variation brusque de la grandeur d'entrée.



Stabilité d'un système asservi

Un système dynamique est stable si à une entrée bornée de type échelon correspond une sortie bornée.



Domaine symbolique et fonction de transfert

Transformée de Laplace

$F(p)$ transformée de Laplace de $f(t)$

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \times f(t) dt$$

Propriétés

Linéarité

$$\mathcal{L}[a \times f(t) + b \times g(t)] = a \times \mathcal{L}[f(t)] + b \times \mathcal{L}[g(t)]$$

Dérivation

$$\mathcal{L}[f'(t)] = p \times \mathcal{L}[f(t)] - f(0^+)$$

Théorème de la valeur finale

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} [p \times F(p)]$$

Théorème du retard

$$\mathcal{L}[f(t - \tau_R)] = e^{-\tau_R p} \times F(p)$$

Passage à la fonction de transfert

Dans le cas où toutes les conditions initiales sont nulles :

Équation différentielle

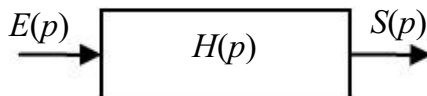


Transformée de Laplace

Équation algébrique

$$(b_n p^n + \dots + b_1 p + b_0) S(p) = (a_m p^m + \dots + a_1 p + a_0) E(p)$$

Fonction de transfert (FT) du



système : $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$

Forme de la fonction de transfert

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \times \frac{\prod_{i=1}^m (1 - p/z_i)}{\prod_{j=1}^{n-\alpha} (1 - p/p_j)}$$

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2}$$

$$H(p) = \frac{K}{p}$$

$$H(p) = K p$$

$$H(p) = e^{-\tau_R p}$$

Forme canonique

K gain du système, α classe ($\alpha \in \mathbb{N}$)

n ordre de la fonction de transfert

z_i zéros, racines du numérateur

p_i pôles, racines du dénominateur

Système du **premier ordre**

K gain statique, τ constante de temps

Système du **second ordre**

K gain statique, ξ coefficient

d'amortissement, ω_0 pulsation propre du système non amorti

Système **intégrateur**

K gain

Système **dérivateur**

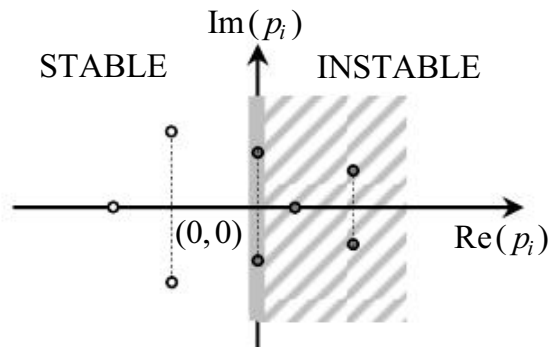
K gain

Système **retardeur**

τ_R : retard

Condition de stabilité nécessaire et suffisante

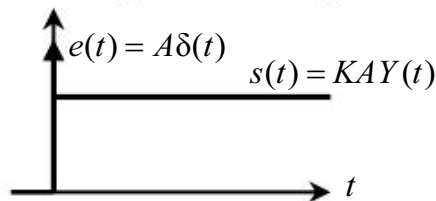
Tous les pôles p_i de la fonction de transfert $H(p)$ doivent être à partie réelle strictement négative.



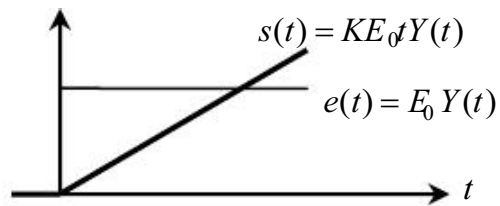
Comportement temporel des SLCI

Comportement temporel d'un système intégrateur

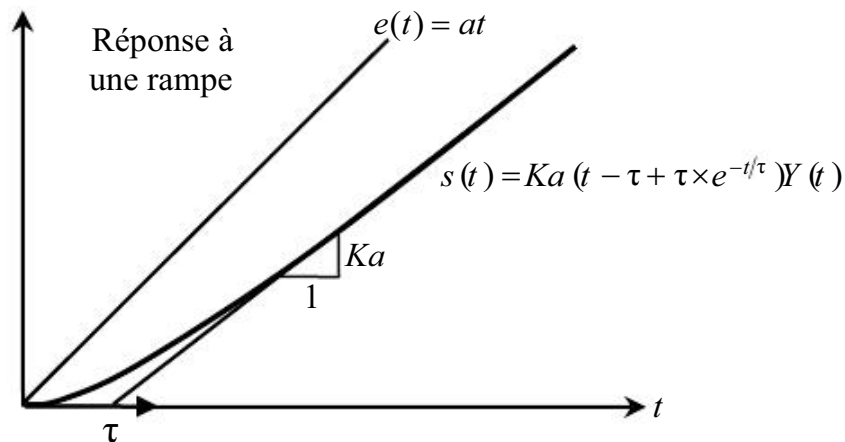
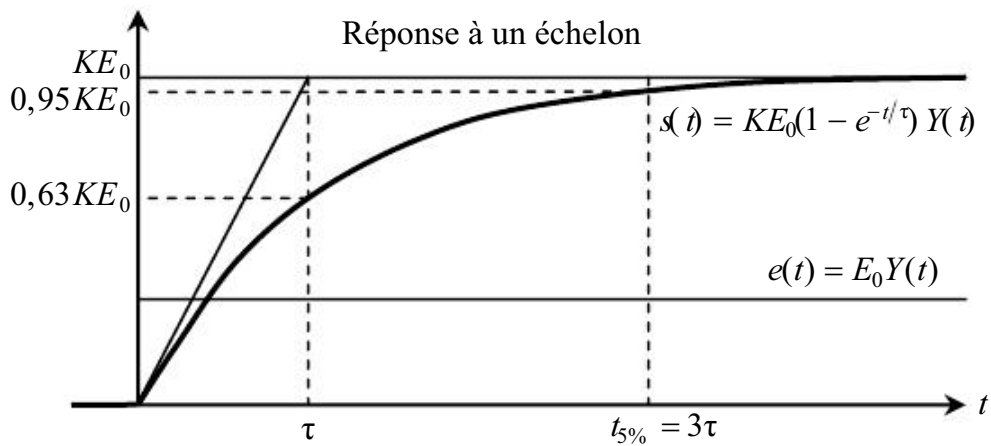
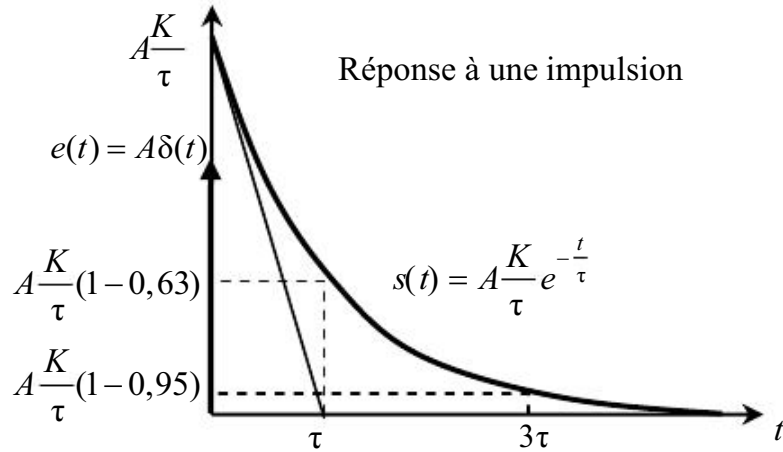
Réponse à une impulsion



Réponse à un échelon



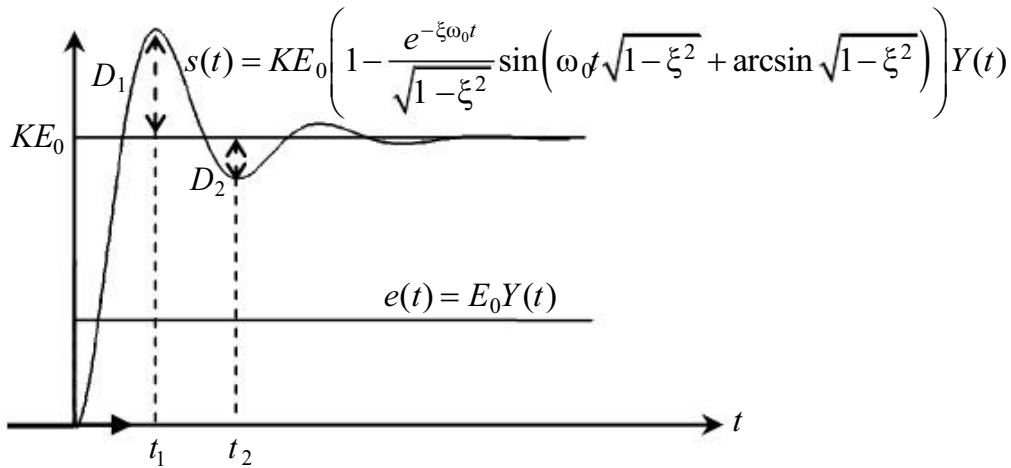
Comportement temporel d'un système du premier ordre



___ Comportement temporel d'un système du second ordre ___

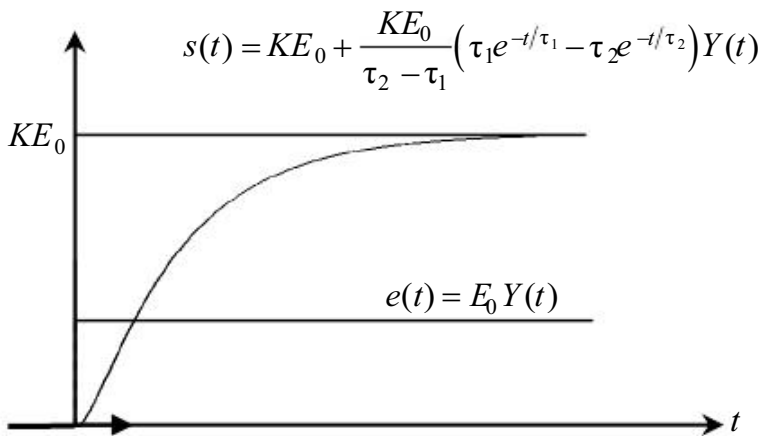
Réponse à un échelon

Régime pseudo-périodique : $\xi < 1$



Dépassements : $t_k = \frac{k\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}}$ et $D_k = -KE_0 (-1)^k e^{\frac{-\xi k\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$

Régime apériodique : $\xi > 1$



Temps caractéristiques :

$$\tau_1 = \frac{1}{\omega_0 (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})}, \quad \tau_2 = \frac{1}{\omega_0 (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})}$$

Temps de réponse minimal :

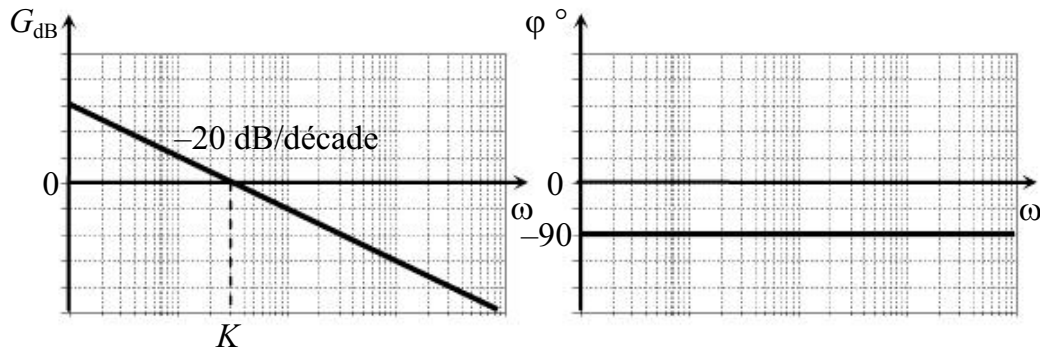
avec dépassement, $\xi \simeq 0,7$ et alors $t_{5\%} \omega_0 \simeq 3$

sans dépassement, $\xi = 1$ et alors $t_{5\%} \omega_0 \simeq 5$

Comportement fréquentiel des SLCI

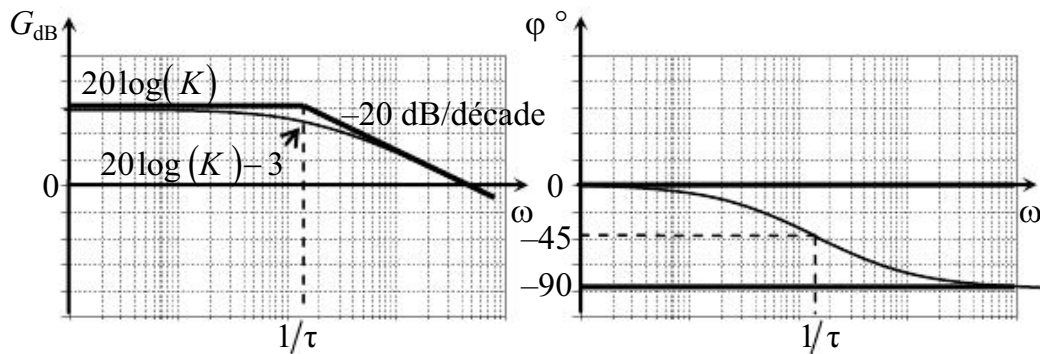
Comportement fréquentiel d'un système intégrateur

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log K - 20 \log \omega \quad \text{et} \quad \varphi(\omega) = -90^\circ$$



Comportement fréquentiel d'un système du premier ordre

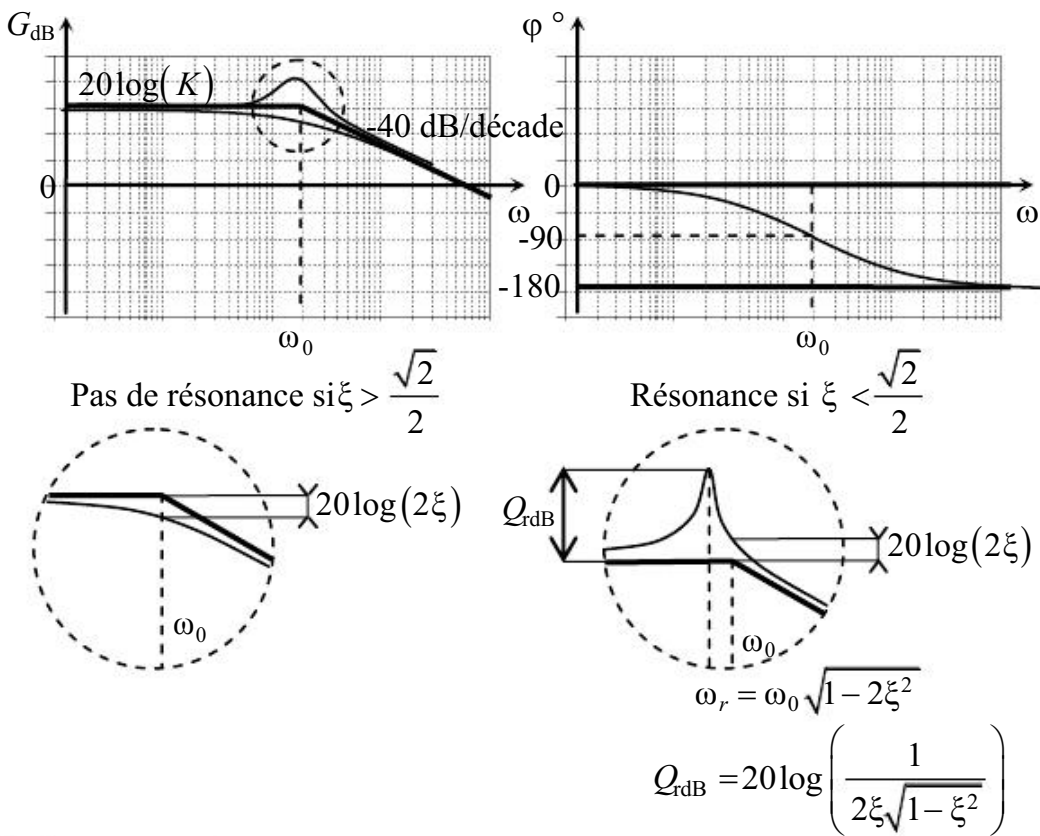
$$G_{dB}(\omega) = 20 \log K - 20 \log \sqrt{1 + (\omega\tau)^2} \quad \text{et} \quad \varphi(\omega) = -\arctan(\tau\omega)$$



Comportement fréquentiel d'un système du second ordre

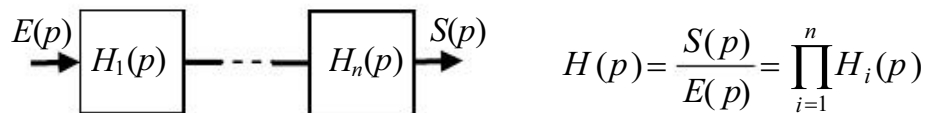
$$G_{dB}(\omega) = 20 \log K - 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan \frac{2\xi\omega/\omega_0}{1 - (\omega/\omega_0)^2}$$

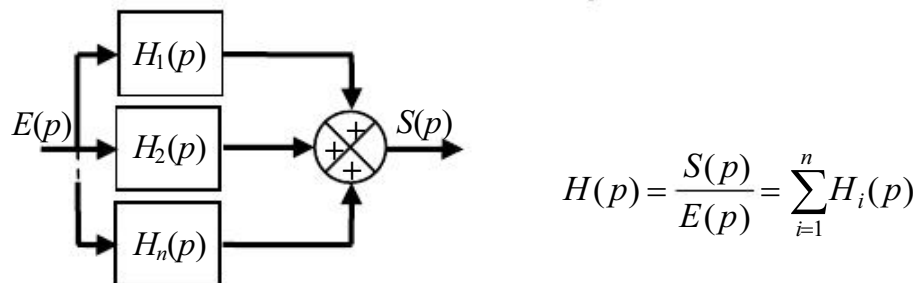


Schémas blocs

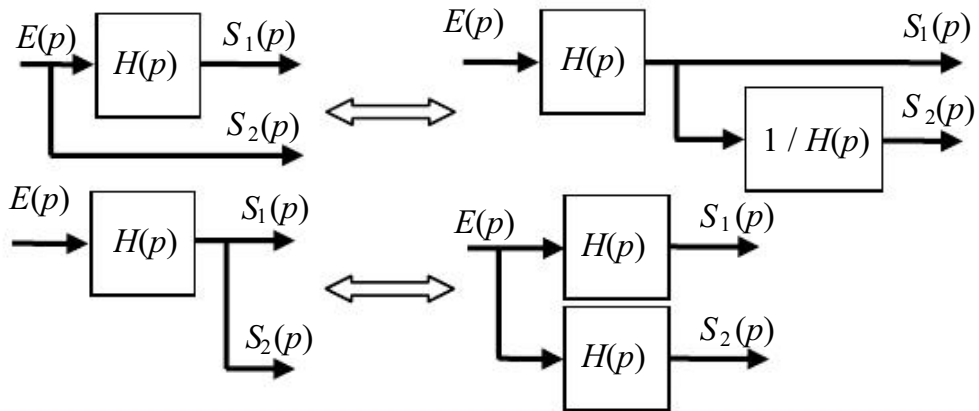
Éléments en série



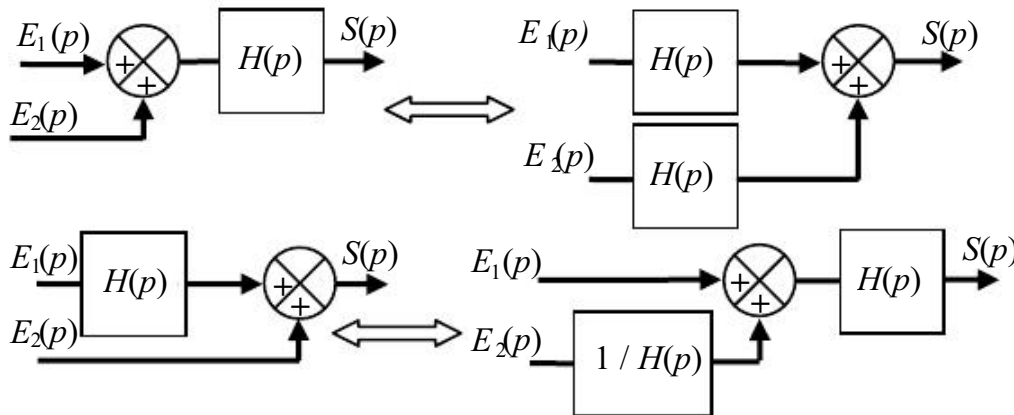
Éléments en parallèle



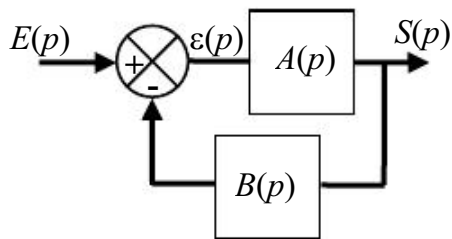
Déplacement de point de prélèvement



Déplacement de sommateur



Système bouclé



FT en **boucle fermée** (FTBF) :

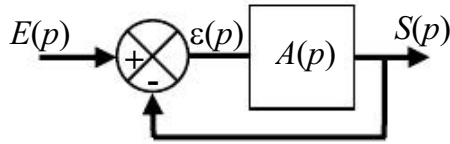
$$H_{BF}(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)}$$

FT en **boucle ouverte** (FTBO) :

$$H_{BO}(p) = A(p)B(p)$$

Écart : $\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + A(p)B(p)}$

Cas du système à retour unitaire



$$H_{BO}(p) = A(p)$$

$$H_{BF}(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H_{BO}(p)}{1 + H_{BO}(p)}$$

$$\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + H_{BO}(p)}$$

Marges de stabilité

Le gain en dB de la fonction de transfert isochrone en boucle ouverte $H_{bo}(\omega)$ doit être négatif lorsque le déphasage est inférieur à -180° .

Le déphasage de la fonction de transfert isochrone en boucle ouverte $H_{bo}(\omega)$ doit être supérieur à -180° tant que le gain en dB est positif.

– **Marge de gain :**

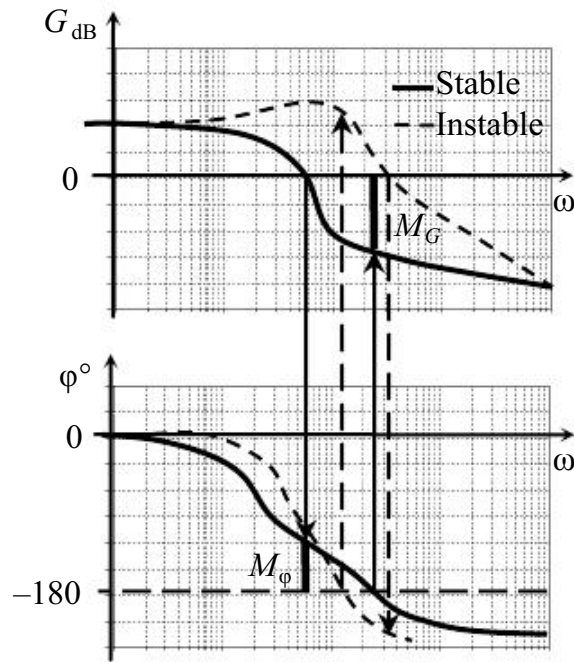
$$M_G = -20 \log(|H_{bo}(\omega_{-180})|)$$

avec $\varphi(H_{bo}(\omega_{-180})) = -180^\circ$

– **Marge de phase :**

$$M_\varphi = 180^\circ + \arg(H_{bo}(\omega_c))$$

avec $|H_{bo}(\omega_c)| = 1$



Précision

Erreur Classe	statique $\varepsilon_s\%$	vitesse $\varepsilon_v\%$	accélération $\varepsilon_a\%$
0	$\frac{1}{1 + K_{bo}}$	∞	∞
1	0	$\frac{1}{K_{bo}}$	∞
2	0	0	$\frac{1}{K_{bo}}$

Mécanique

Cinématique du solide indéformable

Positionnement d'un point

Coordonnées **cartésiennes** :

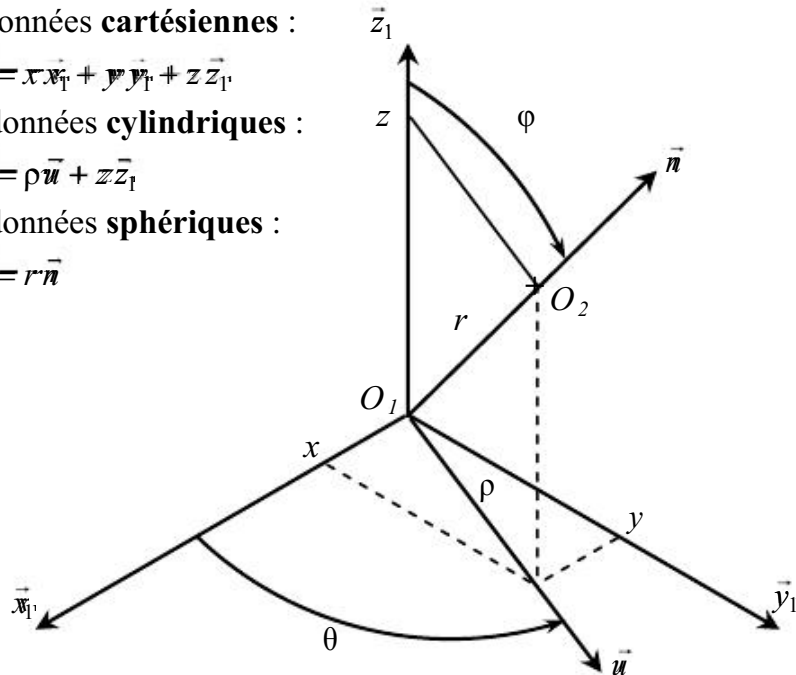
$$\overrightarrow{O_1O_2} = x\vec{x}_1 + y\vec{y}_1 + z\vec{z}_1$$

Coordonnées **cylindriques** :

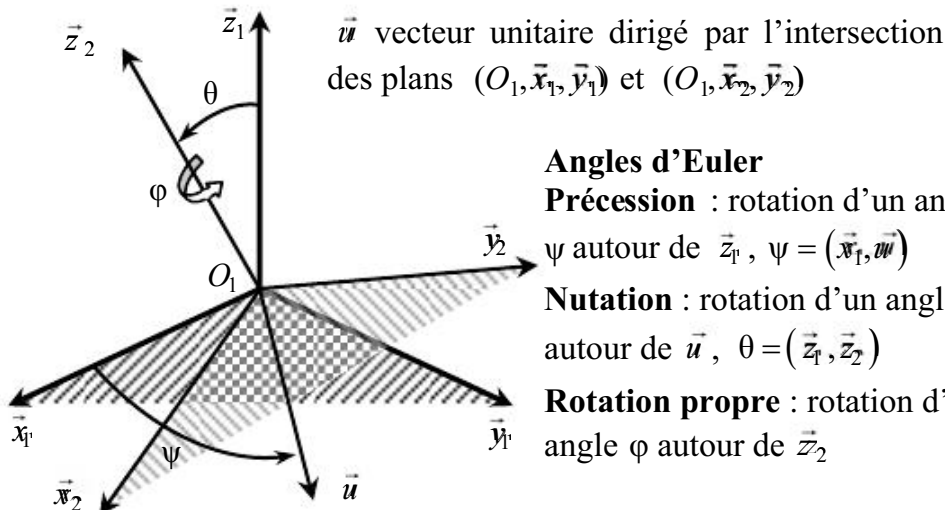
$$\overrightarrow{O_1O_2} = \rho\vec{u} + z\vec{z}_1$$

Coordonnées **sphériques** :

$$\overrightarrow{O_1O_2} = r\vec{n}$$



Orientation d'une base



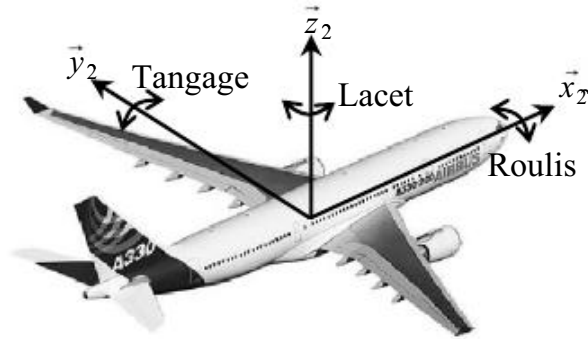
Angles d'Euler

Précession : rotation d'un angle ψ autour de $\vec{z}_1$, $\psi = (\vec{x}_1, \vec{u})$

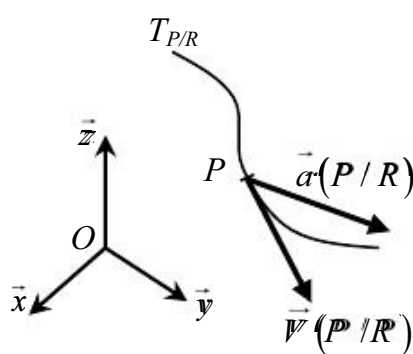
Nutation : rotation d'un angle θ autour de $\vec{u}$, $\theta = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$

Rotation propre : rotation d'un angle ϕ autour de $\vec{z}_2$

Mouvements de rotation d'un solide



Trajectoire, vitesse et accélération instantanées



$$\vec{V}(P/R) = \left. \frac{d\overline{OP}}{dt} \right|_R$$

$$\vec{a}(P/R) = \left. \frac{d\vec{V}(P/R)}{dt} \right|_R = \left. \frac{d^2 \overline{OP}}{dt^2} \right|_R$$

Si le point P est fixe dans le repère lié au solide indéformable (S) :

$$- \vec{V}(P/R) = \vec{V}(P, S/R)$$

$$- \vec{a}(P, S/R) = \left. \frac{d\vec{V}(P, S/R)}{dt} \right|_R$$

Formule de Bour

$$\left. \frac{d\vec{U}}{dt} \right|_R = \left. \frac{d\vec{U}}{dt} \right|_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{U}$$

Torseur distributeur des vitesses

$$\{V(i/j)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(i/j) \\ \vec{V}(M, i/j) \end{array} \right\}_M$$

Relation de Varignon : $\vec{V}(A, S/R) = \vec{V}(B, S/R) + \overline{AB} \wedge \vec{\Omega}(S/R)$

Addition $\{V(3/2)\} + \{V(2/1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(3/2) + \vec{\Omega}(2/1) \\ \vec{V}(M, 3/2) + \vec{V}(M, 2/1) \end{array} \right\}_M$

Premier invariant : la résultante $\vec{\Omega}(i/j)$

Second invariant : l'automoment

$$\vec{\Omega}(i/j) \cdot \vec{V}(A, i/j) = \vec{\Omega}(i/j) \cdot \vec{V}(B, i/j)$$

Axe instantané de rotation : ensemble des points pour lesquels la norme de la vitesse $\vec{V}(M, i/j)$ est nulle, la résultante $\vec{\Omega}(i/j)$ étant non nulle.

Composition de mouvements

$$\vec{\Omega}(R_n/R_0) = \sum_{i=1}^n \vec{\Omega}(R_i/R_{i-1})$$

$$\vec{V}(P, R_n/R_0) = \sum_{i=1}^n \vec{V}(P, R_i/R_{i-1})$$

$$\{V(n/0)\} = \sum_{i=1}^n \{V(i/i-1)\}, \text{ tous les torseurs étant réduits au même point.}$$

$$\vec{a}(P, R_n/R_0) \neq \sum_{i=1}^n \vec{a}(P, R_i/R_{i-1}) \text{ sauf si les termes de Coriolis sont nuls.}$$

Mouvements particuliers

Mouvement de **translation**

$$\{V(2/1)\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{V}(M, 2/1) \end{Bmatrix}_M$$

Mouvement de **rotation**
autour d'un point O

$$\{V(2/1)\} = \begin{Bmatrix} p_{21}\vec{x} + q_{21}\vec{y} + r_{21}\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O$$

Mouvement de **rotation**
autour d'un axe (O, $\vec{u}$)

$$\{V(2/1)\} = \begin{Bmatrix} p_{21}\vec{u} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{M \in (O, \vec{u})}$$

Mouvement **hélicoïdal** d'axe
(O, $\vec{u}$)

hélice à droite $u_{21} = \frac{\lambda p_{21}}{2\pi}$

$$\{V(2/1)\} = \begin{Bmatrix} p_{21}\vec{u} \\ u_{21}\vec{u} \end{Bmatrix}_M$$

hélice à gauche $u_{21} = -\frac{\lambda p_{21}}{2\pi}$

λ pas du système vis/écrou

Mouvement **plan sur plan**
de normale $\vec{z}$

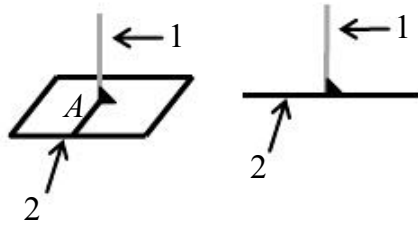
$$\{V(2/1)\} = \begin{Bmatrix} r_{21}\vec{z} \\ u_{21}\vec{x} + v_{21}\vec{y} \end{Bmatrix}_M$$

Modélisation cinématique des liaisons

Les liaisons normalisées

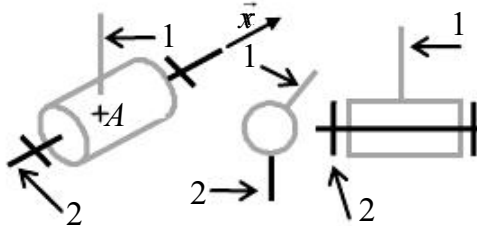
Liaison **encastrement**

$$\{V(2/1)\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$$



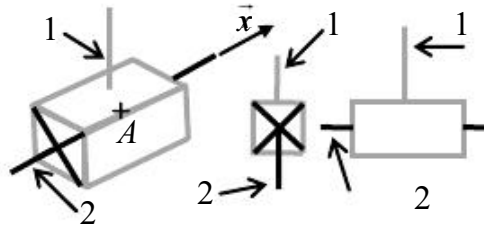
Liaison **pivot d'axe** $(A, \vec{x})$

$$\{V(2/1)\} = \begin{Bmatrix} p_{21}\vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$$



Liaison **glissière** de direction $\vec{x}$

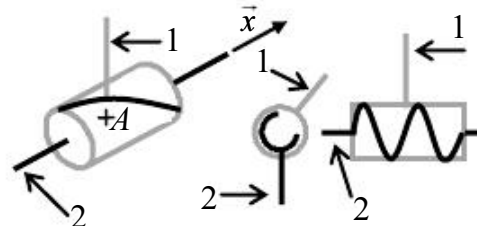
$$\{V(2/1)\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ u_{21}\vec{x} \end{Bmatrix}_A$$



Liaison **hélicoïdale** d'axe $(A, \vec{x})$

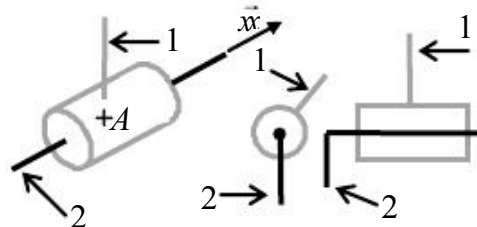
$$\{V(2/1)\} = \begin{Bmatrix} p_{21}\vec{x} \\ \pm \frac{\lambda p_{21}}{2\pi} \vec{x} \end{Bmatrix}_A$$

λ pas de l'hélice



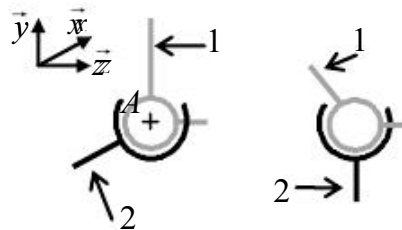
Liaison **pivot glissant** d'axe $(A, \vec{x})$

$$\{V(2/1)\} = \begin{Bmatrix} p_{21}\vec{x} \\ u_{21}\vec{x} \end{Bmatrix}_A$$



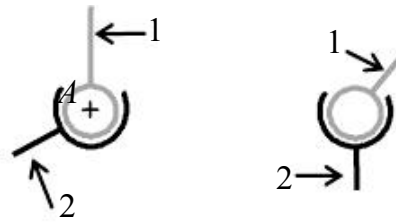
Liaison **sphérique à doigt** d'axes $(A, \vec{x})$ et $(A, \vec{z})$

$$\{V(2/1)\} = \begin{Bmatrix} p_{21}\vec{x} + r_{21}\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$$



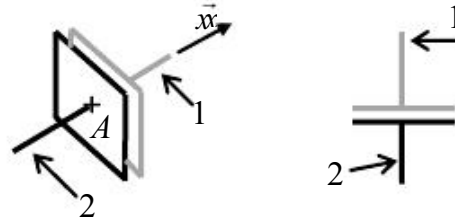
Liaison **sphérique** de centre A

$$\{V(2/1)\}_A = \begin{Bmatrix} p_{21}\vec{x} + q_{21}\vec{y} + r_{21}\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$



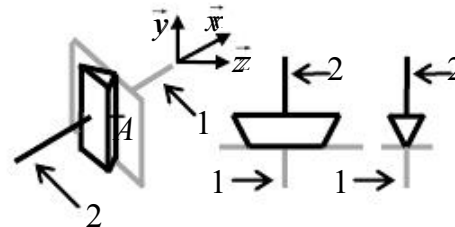
Liaison **appui plan** de normale $\vec{x}$

$$\{V(2/1)\}_A = \begin{Bmatrix} p_{21}\vec{x} \\ v_{21}\vec{y} + w_{21}\vec{z} \end{Bmatrix}$$



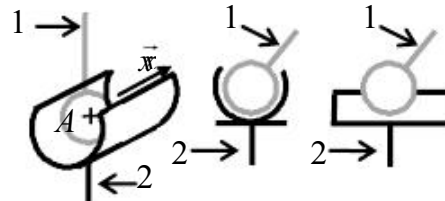
Liaison **arête plan** d'axe $(A, \vec{y})$ et de normale $\vec{x}$

$$\{V(2/1)\}_A = \begin{Bmatrix} p_{21}\vec{x} + q_{21}\vec{y} \\ v_{21}\vec{y} + w_{21}\vec{z} \end{Bmatrix}$$



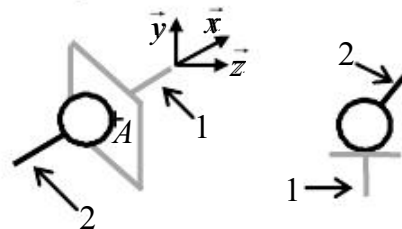
Liaison **sphère cylindre** de centre A et de direction $\vec{x}$

$$\{V(2/1)\}_A = \begin{Bmatrix} p_{21}\vec{x} + q_{21}\vec{y} + r_{21}\vec{z} \\ u_{21}\vec{x} \end{Bmatrix}$$



Liaison **sphère plan** de normale $(A, \vec{x})$

$$\{V(2/1)\}_A = \begin{Bmatrix} p_{21}\vec{x} + q_{21}\vec{y} + r_{21}\vec{z} \\ v_{21}\vec{y} + w_{21}\vec{z} \end{Bmatrix}$$



Cinématique du contact ponctuel

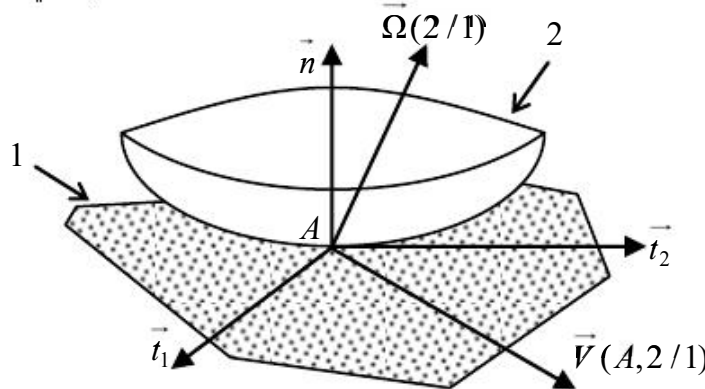
$$\vec{\Omega}(2/1) = \vec{\Omega}_p(2/1) + \vec{\Omega}_r(2/1) = p_{21} \vec{n} + q_{21} \vec{t}_1 + r_{21} \vec{t}_2$$

$$\vec{V}(A, 2/1) = v_{21} \vec{t}_1 + w_{21} \vec{t}_2$$

$$\|\vec{\Omega}_p(2/1)\| = p_{21} \text{ vitesse de rotation de } \mathbf{pivotement}$$

$$\|\vec{\Omega}_r(2/1)\| = \sqrt{(q_{21})^2 + (r_{21})^2} \text{ vitesse de rotation de } \mathbf{roulement}$$

$$\|\vec{V}(A, 2/1)\| = \sqrt{(v_{21})^2 + (w_{21})^2} \text{ vitesse linéaire de } \mathbf{glissement}$$

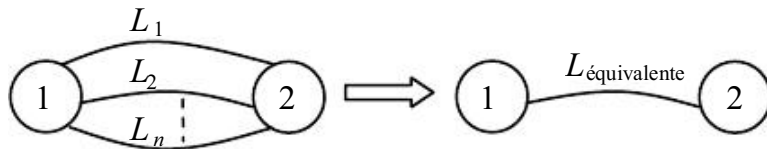


Condition de **non-glissement** : $\vec{V}(A, 2/1) = \vec{0}$

Condition de **maintien du contact** : $\vec{V}(A, 2/1) \cdot \vec{n} = 0$

Liaison équivalente – approche cinématique

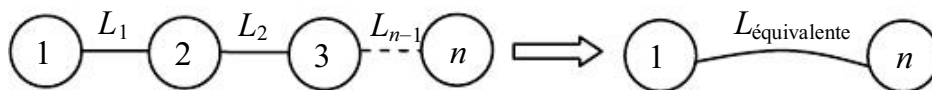
Association de liaisons en **parallèle**



Au même point de réduction :

$$\{V_{\text{équivalente}}(2/1)\} = \{V_{L_1}(2/1)\} = \{V_{L_2}(2/1)\} = \dots = \{V_{L_n}(2/1)\}$$

Association de liaisons en **série**



Au même point de réduction :

$$\{V_{\text{équivalente}}(n/1)\} = \{V_{L_1}(2/1)\} + \{V_{L_2}(3/2)\} + \dots + \{V_{L_{n-1}}(n/n-1)\}$$

Chaîne de solides

Analyse géométrique

Pour chaque cycle du graphe des liaisons :

fermeture dimensionnelle $\overrightarrow{O_0 O_1} + \dots + \overrightarrow{O_n O_0} = \vec{0}$

fermeture angulaire $\alpha_{01} + \alpha_{12} + \dots + \alpha_{n0} = 0$

Analyse cinématique

Pour chaque cycle du graphe des liaisons : **fermeture cinématique**

$$\{V(2/1)\} + \{V(3/2)\} + \dots + \{V(n/n-1)\} + \{V(1/n)\} = \{0\}$$

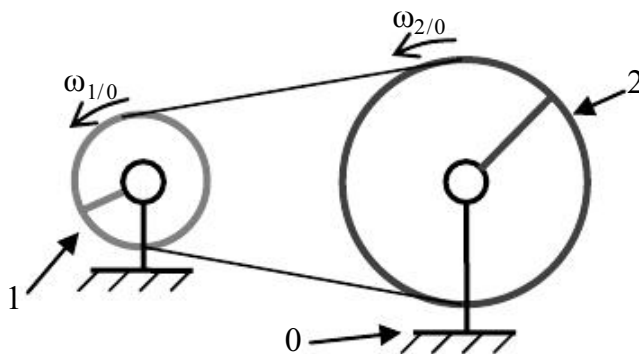
Quelques transmetteurs de puissance simples

Rapport de transmission

$$k = \frac{\omega_{E/0}}{\omega_{S/0}} = \frac{\theta_{E/0}}{\theta_{S/0}}$$

E entrée, S sortie, 0 bâti

Systèmes poulies/courroie et pignons/chaîne



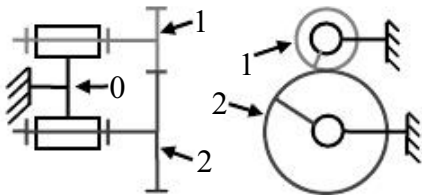
$$\frac{\omega_{1/0}}{\omega_{2/0}} = \frac{D_2}{D_1}$$

Engrenages

$$D = mZ$$

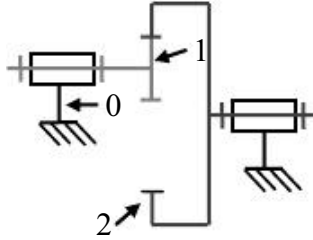
D diamètre primitif, Z nombre de dents, m module de l'engrenage

Engrenage parallèle pignon/roue



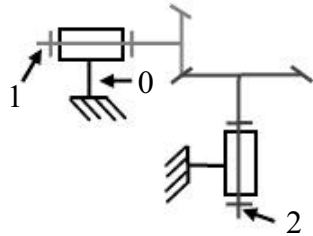
$$\frac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}} = \frac{\theta_{2/0}}{\theta_{1/0}} = -\frac{D_1}{D_2} = -\frac{Z_1}{Z_2}$$

Engrenage **parallèle pignon/couronne**



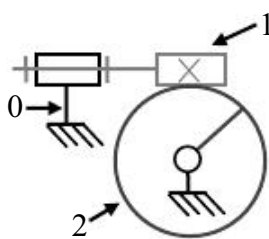
$$\frac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}} = \frac{\theta_{2/0}}{\theta_{1/0}} = \frac{D_1}{D_2} = \frac{Z_1}{Z_2}$$

Engrenage **conique pignon/roue**



$$\left| \frac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}} \right| = \left| \frac{\theta_{2/0}}{\theta_{1/0}} \right| = \frac{Z_1}{Z_2}$$

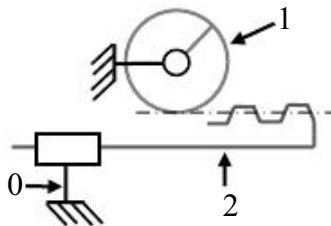
Engrenage **roue/vis sans fin**



$$\left| \frac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}} \right| = \left| \frac{\theta_{2/0}}{\theta_{1/0}} \right| = \frac{n_1}{Z_2}$$

n_1 nombre de filets de la vis

Engrenage **pignon/crémaillère**



$$\frac{v_{2/0}}{\omega_{1/0}} = \frac{d_{2/0}}{\theta_{1/0}} = R_1$$

R_1 rayon primitif
du pignon

Train d'engrenages **parallèles simple**

$$\frac{\omega_{S/0}}{\omega_{E/0}} = (-1)^n \frac{\text{produit des nombres de dents des roues menantes}}{\text{produit des nombres de dents des roues menées}}$$

n nombre de contacts extérieurs entre les roues

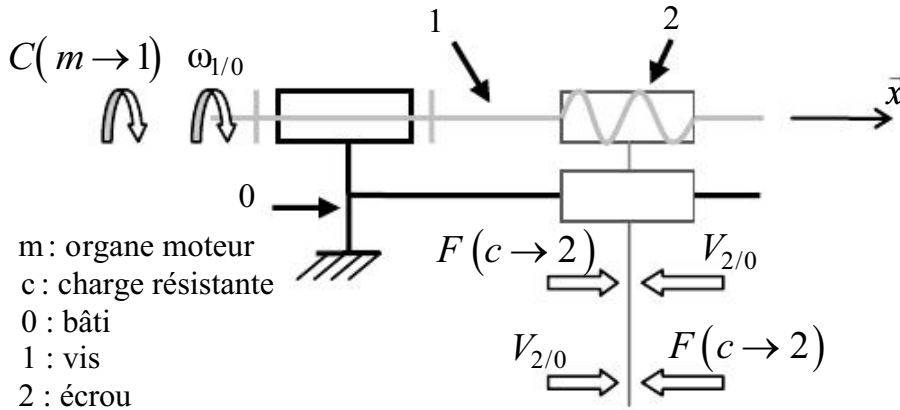
Train d'engrenages **parallèles épicycloïdal**

Formule de Willis :

$$\frac{\omega_{S/0} - \omega_{PS/0}}{\omega_{E/0} - \omega_{PS/0}} = (-1)^n \frac{\text{produit des nombres de dents des roues menantes}}{\text{produit des nombres de dents des roues menées}}$$

0 bâti, E première roue, S dernière roue, PS porte-satellite

n nombre de contacts extérieurs



Cas d'un pas p à droite $V_{2/0} = \frac{-p \times \omega_{1/0}}{2\pi}$ et $C(m \rightarrow 1) = \frac{p \times F(c \rightarrow 2)}{2\pi}$

Cas d'un pas p à gauche $V_{2/0} = \frac{p \times \omega_{1/0}}{2\pi}$ et $C(m \rightarrow 1) = \frac{-p \times F(c \rightarrow 2)}{2\pi}$

Modélisation des actions mécaniques

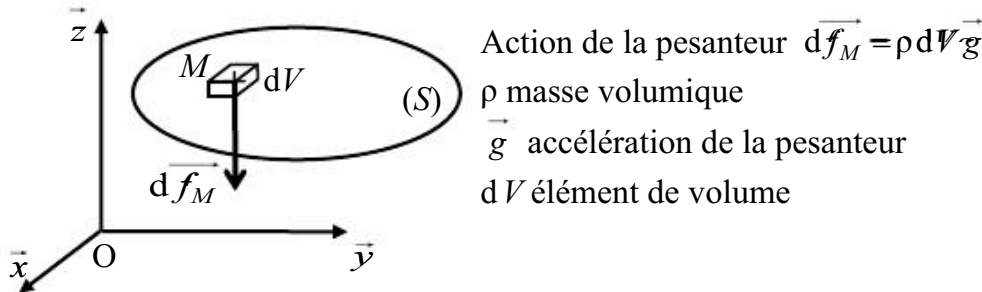
Actions mécaniques à distance : modèle local

Élément de volume infinitésimal (ou volume élémentaire) :

en coordonnées cartésiennes $dV = dx dy dz$

en coordonnées cylindriques $dV = \rho d\theta d\rho dz$

en coordonnées sphériques $dV = r^2 \sin\varphi d\theta d\varphi dr$



Actions mécaniques à distance : modèle global

$$\left\{ F(\text{pesanteur} \rightarrow S) \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(\text{pesanteur} \rightarrow S) = \iiint_V \rho dV \vec{g} \\ \vec{M}_A(A, \text{pesanteur} \rightarrow S) = \iiint_V \vec{AM} \wedge \rho dV \vec{g} \end{array} \right\}$$

Poids du solide S : $\vec{R}(\text{pesanteur} \rightarrow S) = \iiint_V \rho dV \vec{g}$

Au centre de gravité G : $\vec{M}(G, \text{pesanteur} \rightarrow S) = \vec{0}$

_____ Actions mécaniques de contact : modèle local _____

Élément de surface infinitésimal (ou surface élémentaire) :

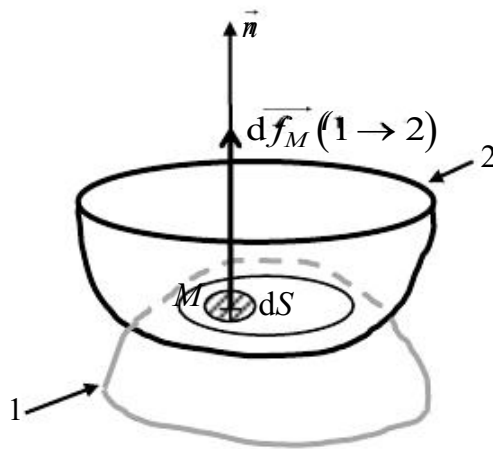
en coordonnées cartésiennes $dS = dx dy$

en coordonnées cylindriques $dS = \rho d\theta d\rho$ (surface plane)

ou $dS = R d\theta dz$ (surface cylindrique)

en coordonnées sphériques $dS = R^2 \sin \varphi d\theta d\varphi$ (surface sphérique)

_____ Contact surfacique, sans frottement _____



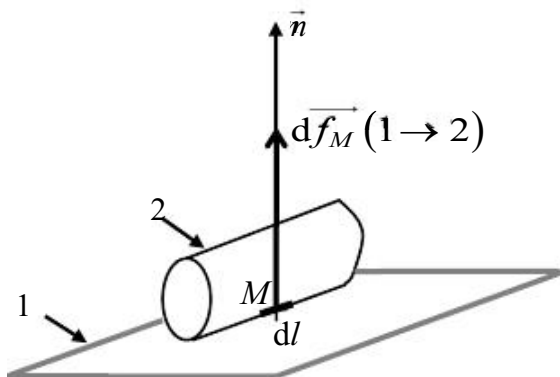
$$d\vec{f}_M(1 \rightarrow 2) = P dS \vec{n}$$

P pression de contact

dS élément de surface

$\vec{n}$ normale au contact

_____ Contact linéique, sans frottement _____



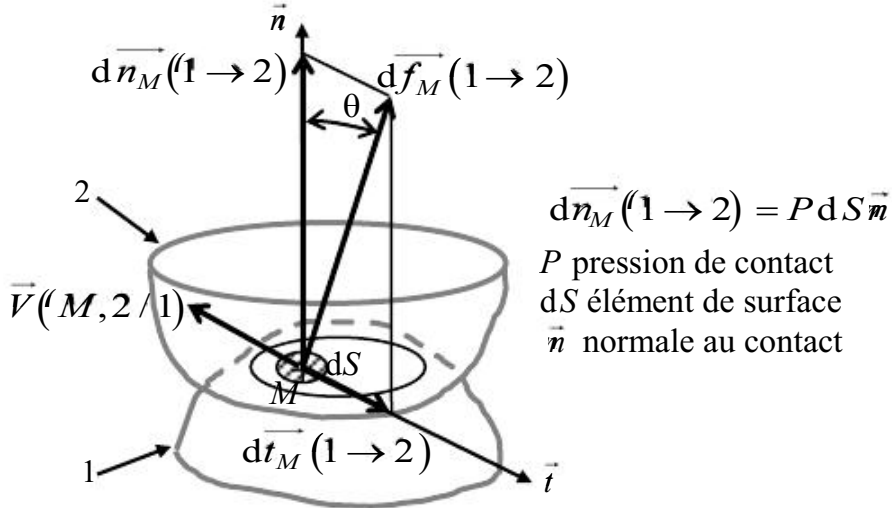
$$d\vec{f}_M(1 \rightarrow 2) = q dl \vec{n}$$

q charge linéique

dl élément de ligne

$\vec{n}$ normale au contact

Contact surfacique, avec frottement : lois de Coulomb



$$d\vec{n}_M(1 \rightarrow 2) = P dS \vec{n}$$

P pression de contact

dS élément de surface

$\vec{n}$ normale au contact

$$d\vec{f}_M(1 \rightarrow 2) = d\vec{n}_M(1 \rightarrow 2) + d\vec{t}_M(1 \rightarrow 2)$$

Facteur de frottement

$$f = \tan \varphi$$

Adhérence

$$\vec{V}(M, 2/1) = \vec{0} \text{ et } \theta < \varphi$$

Limite d'adhérence

$$\theta = \varphi, \quad \tan \varphi = \frac{\|d\vec{t}_M(1 \rightarrow 2)\|}{\|d\vec{n}_M(1 \rightarrow 2)\|}$$

$$\text{et } \vec{V}(M, 2/1) = \vec{0}$$

Glissement

$$\theta = \varphi, \quad \tan \varphi = \frac{\|d\vec{t}_M(1 \rightarrow 2)\|}{\|d\vec{n}_M(1 \rightarrow 2)\|}$$

$$\text{et } \vec{V}(M, 2/1) \cdot d\vec{f}_M(1 \rightarrow 2) < 0$$

Résistance au roulement

Effort normal au contact

$$\vec{N}(1 \rightarrow 2) = \iint_S d\vec{n}_M(1 \rightarrow 2)$$

Moment résistant au roulement

$$\vec{M}_r(O, 1 \rightarrow 2) = \iint_S \vec{OM} \wedge d\vec{n}_M(1 \rightarrow 2)$$

O point de l'axe de rotation du roulement

$$\|\vec{M}_r(O, 1 \rightarrow 2)\| \leq \mu_r \|\vec{N}(1 \rightarrow 2)\|$$

(égalité à la limite ou s'il y a roulement effectif $\vec{\Omega}_r(2/1) \neq \vec{0}$)

μ_r coefficient de résistance au roulement

Résistance au pivotement

Moment résistant au pivotement

$$\vec{M}_p(\vec{O}, 1 \rightarrow 2) = \iint_S \vec{OM} \wedge d\vec{t}_M(1 \rightarrow 2)$$

O point de l'axe de rotation du pivotement

$$\|\vec{M}_p(\vec{O}, 1 \rightarrow 2)\| \leq \mu_p \|\vec{N}(1 \rightarrow 2)\|$$

(égalité à la limite ou s'il y a pivotement effectif $\vec{\Omega}_p(2/1) \neq \vec{0}$)

μ_p coefficient de résistance au pivotement

Actions mécaniques de contact : modèle global

$$\left\{ F(\bar{2} \rightarrow 2) \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(\bar{2} \rightarrow 2) \\ \vec{M}(A, \bar{2} \rightarrow 2) \end{array} \right\}$$

$$\left\{ F(\bar{2} \rightarrow 2) \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i(\bar{2} \rightarrow 2) + \iint \vec{df}_M(\bar{2} \rightarrow 2) \\ \sum_{i=1}^n \vec{AM}_i \wedge \vec{F}_i(\bar{2} \rightarrow 2) + \iint \vec{AM} \wedge d\vec{f}_M(\bar{2} \rightarrow 2) \end{array} \right\}$$

$\vec{F}_i(\bar{2} \rightarrow 2)$ action mécanique modélisée ponctuelle, appliquée au point M_i

$d\vec{f}_M(\bar{2} \rightarrow 2)$ élément de force surfacique

Au centre de poussée P : $\vec{M}(P, 1 \rightarrow 2) = \vec{0}$

Actions transmissibles par les liaisons normalisées

Encastrement $\left\{ F(1 \rightarrow 2) \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} X_{12}\vec{x} + Y_{12}\vec{y} + Z_{12}\vec{z} \\ L_{12}\dot{x} + M_{12}\dot{y} + N_{12}\dot{z} \end{array} \right\}$

Pivot d'axe $(A, \vec{x})$ $\left\{ F(1 \rightarrow 2) \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} X_{12}\vec{x} + Y_{12}\vec{y} + Z_{12}\vec{z} \\ M_{12}\dot{y} + N_{12}\dot{z} \end{array} \right\}$

Glissière de direction $\vec{x}$ $\left\{ F(1 \rightarrow 2) \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} Y_{12}\vec{y} + Z_{12}\vec{z} \\ L_{12}\dot{x} + M_{12}\dot{y} + N_{12}\dot{z} \end{array} \right\}$

Hélicoïdale d'axe $(A, \vec{x})$
 λ pas de l'hélice $\left\{ F(1 \rightarrow 2) \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} X_{12}\vec{x} + Y_{12}\vec{y} + Z_{12}\vec{z} \\ \pm \frac{\lambda X_{12}}{2\pi} \dot{x} + M_{12}\dot{y} + N_{12}\dot{z} \end{array} \right\}$

Pivot glissant d'axe $(A, \vec{x})$	$\{F(1 \rightarrow 2)\} = {}_A \begin{Bmatrix} Y_{12}\vec{y} + Z_{12}\vec{z} \\ M_{12}\vec{y} + N_{12}\vec{z} \end{Bmatrix}$
Sphérique à doigt d'axes $(A, \vec{x})$ et $(A, \vec{z})$	$\{F(1 \rightarrow 2)\} = {}_A \begin{Bmatrix} X_{12}\vec{x} + Y_{12}\vec{y} + Z_{12}\vec{z} \\ M_{12}\vec{y} \end{Bmatrix}$
Sphérique de centre A	$\{F(1 \rightarrow 2)\} = {}_A \begin{Bmatrix} X_{12}\vec{x} + Y_{12}\vec{y} + Z_{12}\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$
Appui plan de normale $\vec{x}$	$\{F(1 \rightarrow 2)\} = {}_A \begin{Bmatrix} X_{12}\vec{x} \\ M_{12}\vec{y} + N_{12}\vec{z} \end{Bmatrix}$
Arête plan d'axe $(A, \vec{y})$ et de normale $\vec{x}$	$\{F(1 \rightarrow 2)\} = {}_A \begin{Bmatrix} X_{12}\vec{x} \\ N_{12}\vec{z} \end{Bmatrix}$
Sphère cylindre de centre A et de direction $\vec{x}$	$\{F(1 \rightarrow 2)\} = {}_A \begin{Bmatrix} Y_{12}\vec{y} + Z_{12}\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$
Sphère plan de normale $(A, \vec{x})$	$\{F(1 \rightarrow 2)\} = {}_A \begin{Bmatrix} X_{12}\vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$

Liaison équivalente – approche actions mécaniques

Association de n liaisons en **parallèle**

$$\{F_{L_{\text{équ}}}(2 \rightarrow 1)\} = \{F_{L_1}(2 \rightarrow 1)\} + \{F_{L_2}(2 \rightarrow 1)\} + \dots + \{F_{L_n}(2 \rightarrow 1)\}$$

Association de $n-1$ liaisons en **série**

$$\{F_{L_{\text{équ}}}(n \rightarrow 1)\} = \{F(2 \rightarrow 1)\} = \{F(3 \rightarrow 2)\} = \dots = \{F(n \rightarrow n-1)\}$$

Modélisation réduite plane

Cas d'un problème modélisé plan, de normale $\vec{z}$

$$\{F(1 \rightarrow 2)\} = {}_A \begin{Bmatrix} X_{12} & - \\ Y_{12} & - \\ - & L_{12} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{pmatrix}$$

Statique du solide indéformable

Principe fondamental de la statique (PFS)

Il existe au moins un repère (R) , appelé repère galiléen, tel que pour tout système matériel (S) en équilibre par rapport à ce repère, le torseur associé aux actions mécaniques extérieures à (S) est égal au torseur nul :

$$\{F(\bar{S} \rightarrow S)\} = \{0\}$$

Théorèmes généraux

Théorème de la résultante

$$\vec{R}(\bar{S} \rightarrow S) = \vec{0}$$

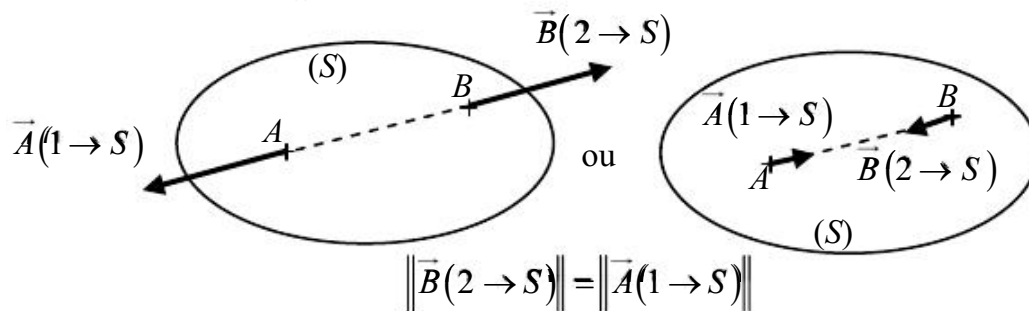
Théorème du moment statique

$$\forall A, \vec{M}(A, \bar{S} \rightarrow S) = \vec{0}$$

Théorème des actions réciproques

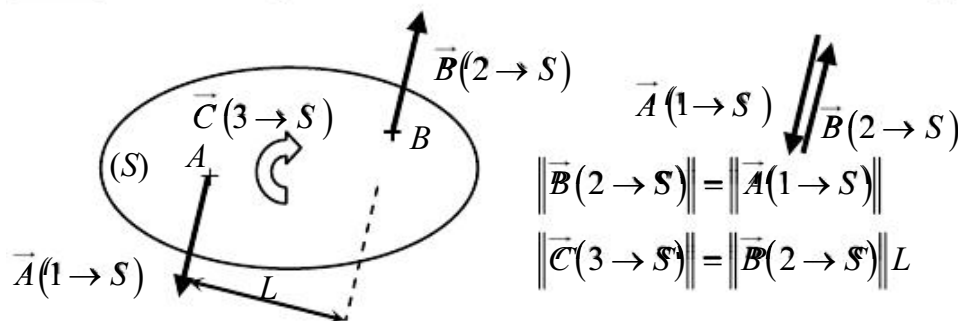
$$\{F(1 \rightarrow 2)\} = -\{F(2 \rightarrow 1)\}$$

Cas d'un système soumis à l'action de deux forces



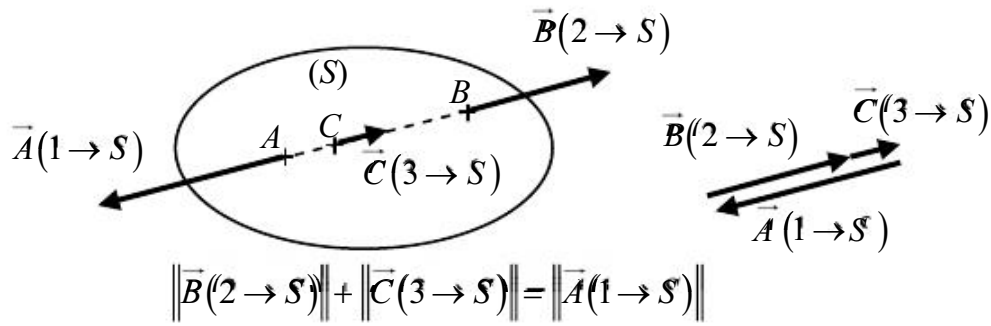
La droite d'action des deux forces est (AB)

Cas d'un système soumis à deux forces et un couple

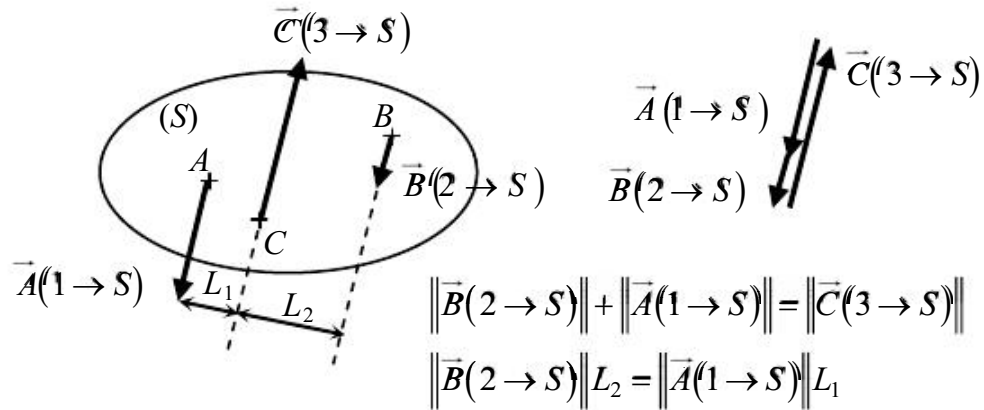


Cas d'un système soumis à l'action de trois forces

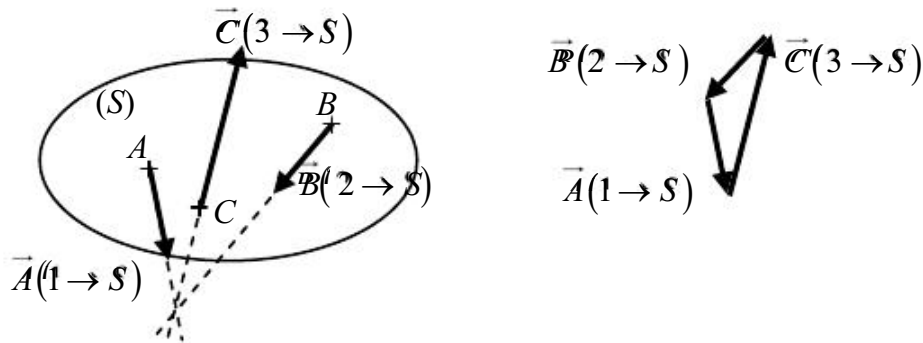
Supports identiques



Supports parallèles



Supports concourants



IIS

*Ce qui est incompréhensible,
c'est que le monde soit compréhensible.*

Albert Einstein

Deuxième année

*Le dessin est la géométrie des yeux,
la musique, celle des oreilles.*

Condorcet

Algèbre

Groupes

Morphismes de groupes

Soit $(G, \cdot)$ et $(G', \star)$ deux groupes. Une application $f : G \rightarrow G'$ est appelée

- un **morphisme de groupes** si $\forall (x, y) \in G \times G, \quad f(x \cdot y) = f(x) \star f(y)$;
- un **isomorphisme de groupes** si, de plus, f est bijective.

Soit $f : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupes. On définit

$$\text{Im } f = \{f(x) ; x \in G\}$$

$\text{Im } f$ est l'image de f

$$\text{Ker } f = \{x \in G \mid f(x) = 1_{G'}\}$$

$\text{Ker } f$ est le noyau de f

$\text{Im } f$ est un sous-groupe de G' et $\text{Ker } f$ est un sous-groupe de G .

- f est surjectif $\iff \text{Im } f = G'$
- f est injectif $\iff \text{Ker } f = \{1_G\}$

Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité

Sous-groupes, partie génératrice d'un sous-groupe

Soit $(G, \cdot)$ et $(G', \star)$ des groupes, $f : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupes et G_1 un sous-groupe de G . $f(G_1)$ est un sous-groupe de G' .

Image d'un sous-groupe par un morphisme de groupe

Toute intersection de sous-groupes de G est un sous-groupe de G .

Intersection de sous-groupes

Soit A une partie de G . L'intersection de tous les sous-groupes de G contenant A est le **sous-groupe de G engendré par A** .

C'est le plus petit sous-groupe, au sens de l'inclusion, contenant A .

Une partie X du groupe G est une **partie génératrice** lorsque le sous-groupe engendré par X est égal à G .

Sous-groupes de $\mathbb{Z}$

Les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ sont les ensembles $n\mathbb{Z} = \{nz, z \in \mathbb{Z}\}$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

Sous-groupes de $\mathbb{Z}$

Congruence modulo n

Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé et $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, on dit que a est congru à b modulo n et on note $a \equiv b [n]$ lorsque $b - a \in n\mathbb{Z}$, soit : $n \mid b - a$.

La congruence modulo n est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

$$\bar{k} = k + n\mathbb{Z}$$

Classe d'équivalence de k

L'ensemble des classes d'équivalence est noté $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est fini de cardinal n .

Groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un groupe commutatif pour l'addition définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, \bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}.$$

L'application $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, z \mapsto \bar{z}$ est un morphisme de groupes surjectif, appelé morphisme (ou surjection) canonique.

Tout $\bar{k}$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est tel que : $\bar{k} = \bar{1} + \bar{1} + \dots + \bar{1}$ (k fois). On dit que $\bar{1}$ est un **générateur** de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Plus généralement :

Les générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont les $\bar{k}$ avec $k \wedge n = 1$.

Générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Groupe monogène, groupe cyclique

Soit $(G, \times)$ un groupe, $a \in G$.

$G_a = \{a^k, k \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de G

Sous-groupe engendré par a

Un groupe G est dit **monogène** lorsqu'il est engendré par un seul élément. Tout élément qui l'engendre s'appelle un **générateur**.

Un groupe **cyclique** est un groupe monogène fini.

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est donc cyclique.

- Un groupe monogène infini est isomorphe à $\mathbb{Z}$.
- Un groupe cyclique de cardinal n est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

U_n est cyclique, donc isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Groupe des racines n -ièmes de l'unité

Ordre d'un élément d'un groupe

L'ordre d'un élément x d'un groupe est le cardinal du sous-groupe engendré par cet élément.

Si x est d'ordre fini et si e désigne le neutre de G , alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$x^n = e \iff d \mid n.$$

Ordre d'un élément et divisibilité

L'ordre d'un élément d'un groupe fini divise le cardinal du groupe.

Anneaux. Idéaux d'un anneau

Produit fini d'anneaux

Soit $((A_i, +, \times))_{1 \leq i \leq n}$ une famille finie de n anneaux.

Si on pose : $\forall (a_i)_{1 \leq i \leq n} \in \prod_{i=1}^n A_i, \forall (b_i)_{1 \leq i \leq n} \in \prod_{i=1}^n A_i,$

$$\begin{aligned} (a_i)_{1 \leq i \leq n} + (b_i)_{1 \leq i \leq n} &= (a_i + b_i)_{1 \leq i \leq n} \\ (a_i)_{1 \leq i \leq n} \times (b_i)_{1 \leq i \leq n} &= (a_i \times b_i)_{1 \leq i \leq n} \end{aligned} \quad , \text{ alors :}$$

$\left(\prod_{i=1}^n A_i, +, \times \right)$ est un anneau.

Produit fini d'anneaux

Morphismes d'anneaux

Une application f de l'anneau $(A, +, \times)$ dans l'anneau $(B, +, \times)$ est appelée un **morphisme d'anneaux** lorsqu'elle vérifie les assertions suivantes :

- $\forall (a, b) \in A^2, f(a + b) = f(a) + f(b);$
- $\forall (a, b) \in A^2, f(a \times b) = f(a) \times f(b);$
- $f(1_A) = 1_B.$

L'image d'un sous-anneau par un morphisme d'anneau est un sous-anneau.

Idéal d'un anneau commutatif

Une partie I de l'anneau commutatif A est appelée un **idéal** de A si c'est un sous-groupe additif I qui vérifie :

$$\forall a \in A, \forall x \in I, ax \in I.$$

I idéal ssi $\left\{ \begin{array}{l} \bullet I \neq \emptyset \\ \bullet \forall (x, y) \in I^2, x + y \in I \\ \bullet \forall (a, x) \in A \times I, ax \in I \end{array} \right.$

Caractérisation d'un idéal

Le noyau d'un morphisme $f : A \rightarrow B, \text{Ker } f = \{a \in A \mid f(a) = 0_B\}$, est un idéal de A .

Un idéal qui contient un élément inversible est égal à l'anneau tout entier.

Toute intersection d'idéaux est un idéal.

L'idéal engendré par une partie P de A est l'intersection de tous les idéaux contenant P , c'est donc le plus petit idéal, au sens de l'inclusion, contenant P .

Étant donné deux idéaux I et J , le plus petit idéal contenant I et J , c'est-à-dire celui engendré par $I \cup J$, est $I + J = \{a + b, a \in I, b \in J\}$.

L'idéal engendré par un élément a de A est :
 $aA = \{ax, x \in A\}$.

Idéal engendré par un élément

Divisibilité dans un anneau commutatif intègre

Soit A un anneau intègre, donc vérifiant :

$$(\forall (a, b) \in A^2) (ab = 0 \implies a = 0 \text{ ou } b = 0)$$

Étant donné deux éléments a, b , non nuls de A , on dit que a **divise** b et on note $a \mid b$ lorsqu'il existe $c \in A$ tel que $b = ac$.

La relation « divise » est réflexive et transitive.

$$\forall (a, b) \in (A \setminus \{0\})^2, (a \mid b \iff bA \subset aA)$$

Interprétation en terme d'idéaux

Idéaux de $\mathbb{Z}$

Les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont les $n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Idéaux de $\mathbb{Z}$

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, \forall d \in \mathbb{N}, \\ (d = a \wedge b \iff a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z})$$

PGCD et idéaux

On rappelle qu'on a convenu : $0 \wedge 0 = 0$.

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, \forall d \in \mathbb{N}, \\ (d = a \wedge b \implies \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 \mid au + bv = d)$$

Relation de Bézout

Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $n \geq 2$

Muni de l'addition, et de la multiplication : $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, \bar{a} \times \bar{b} = \overline{a \times b}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un anneau commutatif.

L'application $\sigma_n : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, z \mapsto \bar{z}$ est un morphisme d'anneaux surjectif, appelé **surjection canonique**.

Soit $k \in \mathbb{Z}$.

$\bar{k}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ssi $k \wedge n = 1$

Inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps $\iff p$ est premier. On note alors $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p$.

Théorème des restes chinois

Soit m et n deux entiers plus grands que 2 **premiers entre eux** et $f : \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ associant à tout $\bar{a} \in \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ le couple $(\bar{p}, \bar{q}) \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que : $\begin{cases} a \equiv p \pmod{m} \\ a \equiv q \pmod{n} \end{cases}$.

f est un isomorphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Théorème des restes chinois

En conséquence, le système, d'inconnue x , $\begin{cases} x \equiv p \left[\frac{m}{p} \right] \\ x \equiv q \left[\frac{n}{q} \right] \end{cases}$, où $m \wedge n = 1$, admet une unique solution modulo mn .

Si $n_1, n_2, \dots, n_p$ sont p entiers plus grands que 2 **deux à deux premiers entre eux**, $\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/n_p\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/n_1 n_2 \dots n_p \mathbb{Z}$ sont isomorphes.

Généralisation du théorème chinois

Indicatrice et théorème d'Euler

La fonction **indicatrice d'Euler** est l'application $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ définie par : $\varphi(1) = 1$ et, pour $n \geq 2$, $\varphi(n)$ est le nombre d'entiers compris entre 1 et n premiers avec n .

$$\varphi(n) = \text{Card}(\{k \in [1, n] \mid k \wedge n = 1\}) = \text{Card } U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

Si $p \in \mathfrak{P}$ est un nombre premier, alors $\varphi(p) = p - 1$.

Si $a \wedge b = 1$, alors $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$

Indicatrice d'Euler d'un produit

Soit $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ un entier naturel décomposé en produit de puissances de nombres premiers (les p_i étant premiers et distincts, les α_i non nuls). Alors

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

Indicatrice d'Euler de n en décomposition primaire

Soit $n \geq 2$ un entier naturel. Soit a un entier relatif premier avec n . Alors

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 [n]$$

Théorème d'Euler

On retrouve le petit théorème de Fermat :

Si n est un nombre premier et si $a \wedge n = 1$, alors $a^{n-1} \equiv 1 [n]$.

Anneaux $\mathbb{K}[X]$

Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$.

Pour tout idéal I non nul de $\mathbb{K}[X]$, il existe un unique polynôme unitaire P tel que $I = (P) = P\mathbb{K}[X] = \{PQ, Q \in \mathbb{K}[X]\}$.

Idéaux de $\mathbb{K}[X]$

La somme de n idéaux d'un anneau étant un idéal de cet anneau :

Soit $P_1, \dots, P_n$ n polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$. Le PGCD de ces polynômes est l'unique polynôme unitaire D tel que : $P_1 \mathbb{K}[X] + \dots + P_n \mathbb{K}[X] = D\mathbb{K}[X]$.

PGCD de polynômes et idéaux

P et Q étant deux polynômes non nuls et D un polynôme unitaire de $\mathbb{K}[X]$, si D est le PGCD de P et Q , alors :

$$\exists (U, V) \in \mathbb{K}[X]^2 \mid PU + QV = D$$

Relation de Bézout

Polynômes irréductibles

Un polynôme P de $\mathbf{K}[X]$ est **irréductible** dans $\mathbf{K}[X]$ s'il n'est pas constant et :
 $\forall (Q, R) \in (\mathbf{K}[X])^2, (P = QR \implies \deg(Q) = 0 \text{ ou } \deg(R) = 0)$

Soit P un polynôme non constant de $\mathbf{K}[X]$, il existe :

- $c \in \mathbf{K}$;
 - des polynômes irréductibles unitaires $P_1, \dots, P_r$ deux à deux distincts de $\mathbf{K}[X]$;
 - des entiers $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ dans $\mathbf{N}^*$
- tels que : $P = c P_1^{\alpha_1} \dots P_r^{\alpha_r}$.

De plus, cette décomposition est unique.

Décomposition en facteurs irréductibles unitaires

Les polynômes irréductibles de $\mathbf{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1. Autrement dit :

Tout polynôme de $\mathbf{C}[X]$ est scindé, c'est-à-dire se décompose en un produit de polynômes du premier degré de $\mathbf{C}[X]$.

Théorème de d'Alembert-Gauss

Les polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif.

Algèbres

K désigne un corps commutatif.

K -algèbre

On appelle K -**algèbre** tout quadruplet $(A, +, \times, .)$ tel que :

- $(A, +, .)$ est un K -espace vectoriel ;
- $(A, +, \times)$ est un anneau ;
- $\forall \lambda \in K, \forall (a, b) \in A^2, (\lambda.a) \times b = a \times (\lambda.b) = \lambda.(a \times b)$.

Elle est dite **commutative** (resp. **intègre**) lorsque l'anneau $(A, +, \times)$ est commutatif (resp. intègre).

$(A, +, \times, .)$ est une K -algèbre ssi $(A, +, .)$ est un K -espace vectoriel et l'application $A^2 \rightarrow A, (x, y) \mapsto x \times y$ est K -bilinéaire et est une LCI associative qui a un neutre $1_A \neq 0_A$.

$\mathbf{K}[X], \mathcal{L}(E), \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), \mathcal{F}(X, \mathbf{K})$ sont des $\mathbf{K}$ -algèbres.

Sous-algèbre

Soit A une K -algèbre. On appelle **sous-algèbre** de A toute partie de A qui est à la fois un sev de A et un sous-anneau de A .

Une partie B de A est une sous-algèbre de A si (et seulement si) elle vérifie les conditions suivantes :

$$\begin{cases} 1_A \in B \\ \forall(\alpha, \beta) \in K^2, \forall(x, y) \in B^2, \alpha x + \beta y \in B \\ \forall(x, y) \in B^2, xy \in B \end{cases}$$

Caractérisation des sous-algèbres

Morphisme d'algèbres

Soit A et B deux K -algèbres. On appelle **morphisme d'algèbres** de A dans B toute application $f : A \longrightarrow B$ qui est K -linéaire et un morphisme d'anneaux de A dans B , c'est-à-dire vérifie :

- $\forall(\alpha, \beta) \in K^2, \forall(x, y) \in A^2, f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$
- $\forall(x, y) \in A^2, f(xy) = f(x)f(y)$
- $f(1_A) = 1_B$

Réduction des endomorphismes

Éléments propres d'un endomorphisme

- Un vecteur $x \in E$ est un **vecteur propre** de u si $x \neq 0_E$ et s'il existe $\lambda \in K$ tel que $u(x) = \lambda x$.
- Le scalaire λ est alors unique, on l'appelle **valeur propre** (V.P.) de u associée au vecteur propre x .
- Le sous-espace $E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)$ est appelé l'**espace propre** associé à la VP λ .
- x est vecteur propre si et ssi $\text{Vect}(x)$ est une droite stable par u .
- λ est valeur propre de u si et ssi $u - \lambda \text{id}_E \notin GL(E)$.
- Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre.
- La somme d'une famille de sous-espaces propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est directe.

En dimension finie, l'ensemble des VP de u est le **spectre** de u , noté $\text{Sp}(u)$.

Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension n est de cardinal au plus n .

Si les endomorphismes u et v commutent, alors les espaces propres de u sont stables par v .

Éléments propres d'une matrice carrée

Les éléments propres (valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres) d'une matrice M de $\mathcal{M}_n(K)$ sont ceux de $u \in \mathcal{L}(K^n)$ canoniquement associé à cette matrice, i.e. de l'endomorphisme de matrice M en base canonique. Le **spectre** d'une matrice est l'ensemble de ses valeurs propres.

Deux matrices semblables ont même spectre.

Si K est un sous-corps de K' et si $M \in \mathcal{M}_n(K)$, le spectre de M dans K est contenu dans le spectre de M dans K' .

Polynôme caractéristique

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. $\chi_A(X) = \text{Det}(XI_n - A)$ est un polynôme unitaire de $\mathbf{K}[X]$, de degré égal à n , appelé **polynôme caractéristique** de A .

Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

Si b est une base de E , $\text{Det}(XI_n - \text{Mat}(u, b)) \in \mathbf{K}[X]$ est un polynôme de degré égal à $n = \dim E$. Ce polynôme ne dépend pas de la base b considérée. On l'appelle le **polynôme caractéristique** de u , on le note

$$\chi_u(X) = \text{Det}(XI_n - \text{Mat}(u, b))$$

Polynôme caractéristique d'un endomorphisme u

$$\chi_u(X) = X^n - \text{Tr}(u)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \text{Det}(u)$$

Les valeurs propres de u sont les racines de son polynôme caractéristique.

Polynôme caractéristique et valeurs propres

On appelle **ordre de multiplicité d'une valeur propre** son ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique.

Tout endomorphisme d'un $\mathbf{C}$ -ev de dimension finie non réduit à $\{0\}$ admet au moins une valeur propre.

Si $T = (t_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est triangulaire, alors $\chi_T(X) = \prod_{p=1}^n (X - t_{p,p})$.

Soit F un sev de E stable par u , $\hat{u}$ l'endomorphisme induit par u sur F .

Le polynôme caractéristique de $\hat{u}$ divise le polynôme caractéristique de u .

Polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit

Soit λ une valeur propre de u d'ordre de multiplicité m_λ . Alors

$$1 \leq \dim E_\lambda \leq m_\lambda$$

Dimension du sous-espace propre et ordre de multiplicité

Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables

On dit que u est **diagonalisable** lorsqu'il existe une base b de E dans laquelle sa matrice est diagonale, ce qui revient à dire qu'il existe une base b de E formée de vecteurs propres de u .

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $\begin{array}{c} \updownarrow \\ \updownarrow \\ \updownarrow \end{array}$

 - u est diagonalisable
 - $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$
 - $\dim E = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_\lambda$

Caractérisations de la diagonalisabilité par les espaces propres

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $\begin{array}{l} \bullet u \text{ est diagonalisable} \\ \bullet \chi_u \text{ est scindé et pour tout } \lambda \in \text{Sp}(u) \\ \dim E_\lambda = m_\lambda \end{array}$

Caractérisation de la diagonalisabilité par le polynôme caractéristique

On dit que la matrice carrée M est **diagonalisable** lorsque l'endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ canoniquement associé à M est diagonalisable.

Si M est diagonalisable, alors elle s'écrit sous la forme : $M = PDP^{-1}$, où D est diagonale avec les valeurs propres sur la diagonale et où P est la matrice de passage de la base canonique vers une base de vecteurs propres de M .

M est diagonalisable si et ssi elle est semblable à une matrice diagonale.

_____ Endomorphismes et matrices carrées trigonalisables _____

L'endomorphisme u est **trigonalisable** lorsqu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $\begin{array}{l} \bullet u \text{ est trigonalisable} \\ \bullet \text{ le polynôme } \chi_u \text{ est scindé} \end{array}$

Caractérisation de la trigonalisabilité par le polynôme caractéristique

Tout endomorphisme d'un $\mathbf{C}$ -ev de dimension finie est trigonalisable.

Si $\chi_u(X) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)$ est scindé alors

- $\begin{array}{l} \bullet \text{Tr}(u) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \lambda \quad \bullet \text{Det}(u) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \lambda \end{array}$

Trace et déterminant d'un endomorphisme trigonalisable

On dit que la matrice carrée M est **trigonalisable** lorsque l'endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ canoniquement associé à M est trigonalisable.

M est trigonalisable ssi M est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Toute matrice carrée à coefficients dans $\mathbf{C}$ est trigonalisable.

_____ Endomorphismes et matrices nilpotents _____

$u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$) est dit **nilpotent** lorsqu'il existe $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $u^k = 0$ (resp. $M^k = 0$). Le plus petit entier p tel que $u^p = 0$ (resp. $M^p = 0$) est appelé l'**indice de nilpotence** de u (resp. M).

Un endomorphisme est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0.

L'indice de nilpotence est majoré par la dimension de E .

_____ Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice carrée _____

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On pose : $u^0 = \text{id}_E$ et $\forall k \in \mathbf{N}^*$, $u^k = u \circ u^{k-1} = u^{k-1} \circ u$.

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ de $\mathbf{K}[X]$, on définit l'endomorphisme

$$P(u) = \sum_{k=0}^d a_k u^k \in \mathcal{L}(E)$$

Polynôme de l'endomorphisme u

L'application $\phi_u : P \mapsto P(u)$ est un morphisme d'algèbres de $\mathbf{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$.

- L'image de ϕ_u est l'ensemble $\mathbf{K}[u]$ des polynômes de l'endomorphisme u . C'est la plus petite sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ contenant u . Elle est commutative.
- Le noyau de ϕ_u est un idéal de $\mathbf{K}[X]$ appelé **idéal annulateur** de u . Ses éléments sont les **polynômes annulateurs** de u . On sait qu'il est de la forme $\pi_u \mathbf{K}[X]$, où π_u est unitaire. π_u est le **polynôme minimal** de u .

Si d est le degré de π_u , alors la famille $(u^k)_{0 \leq k \leq d-1}$ est une base de $\mathbf{K}[u]$.

Polynôme minimal et base de $\mathbf{K}[u]$

Soit $P(X) = a_p X^p + \dots + a_1 X + a_0 \in \mathbf{K}[X]$. La matrice $P(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est définie par : $P(A) = a_p A^p + \dots + a_1 A + a_0 I_n$.

L'application $\phi_M : P \mapsto P(M)$ est un morphisme d'algèbres de $\mathbf{K}[X]$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Son image est la sous-algèbre $\mathbf{K}[M]$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ engendrée par M . Son noyau est un idéal de $\mathbf{K}[X]$ appelé **idéal annulateur** de M .

On sait qu'il est de la forme $\pi_M \mathbf{K}[X]$, où π_M est unitaire. π_M est le **polynôme minimal** de M .

Si d est le degré de π_M , alors la famille $(M^k)_{0 \leq k \leq d-1}$ est une base de $\mathbf{K}[M]$.

Polynôme minimal et base de $\mathbf{K}[u]$

Si P annule u , alors toute valeur propre de u est racine de P .

Valeurs propres et polynôme annulateur

Les racines de π_u sont les valeurs propres de u .

Valeurs propres et polynôme minimal

Théorème de décomposition des noyaux

Soit $P_1, \dots, P_r$ des polynômes deux à deux premiers entre eux. Alors

$$\text{Ker}(P_1 P_2 \dots P_r)(u) = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker} P_i(u)$$

Lemme de décomposition des noyaux

Polynômes annulateurs et réduction

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- u est diagonalisable;
- il existe un polynôme scindé à racines simples qui annule u ;
- π_u est scindé à racines simples.

Caractérisation de la diagonalisabilité par les polynômes annulateurs

En ce cas, le polynôme minimal de u est $\pi_u = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)$.

Un endomorphisme est trigonalisable si et ssi il annule un polynôme scindé, ou encore si son polynôme minimal est scindé.

Caractérisation de la trigonalisabilité par les polynômes annulateurs

Soit F un sev de E stable par u , $\hat{u}$ l'endomorphisme induit par u sur F .

Le polynôme minimal de $\hat{u}$ divise le polynôme minimal de u .

Polynôme minimal de l'endomorphisme induit

En conséquence, si u est diagonalisable (*resp.* trigonalisable), alors $\hat{u}$ est diagonalisable (*resp.* trigonalisable).

Théorème de Cayley-Hamilton et conséquences

Le polynôme caractéristique de u est un polynôme annulateur de u : $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Théorème de Cayley-Hamilton

Soit u un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est scindé :

$$\chi_u = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i}.$$

Le sous-espace caractéristique de u associé à la valeur propre λ_i est :

$$C_{\lambda_i} = \text{Ker}((\lambda_i \text{Id}_E - u)^{m_i}).$$

La dimension du sous-espace caractéristique de u associé à la valeur propre λ_i est m_i , ordre de multiplicité de la valeur propre λ_i . De plus, u induit sur C_{λ_i} la somme d'une homothétie de rapport λ_i et d'un endomorphisme nilpotent.

Dimension d'un sous-espace caractéristique

$$E = \bigoplus_{i=1}^r C_{\lambda_i}$$

E est somme directe des sous-espaces caractéristiques de u

Toute matrice carrée dont le polynôme caractéristique est scindé est semblable à une matrice diagonale par blocs, chaque bloc diagonal étant triangulaire et à terme diagonaux égaux.

Traduction matricielle de la décomposition en somme directe des sous-espaces caractéristiques

Il suffit d'écrire la matrice de l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé

à cette matrice dans une base adaptée à la décomposition : $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^r C_{\lambda_i}$.

Espaces euclidiens

$(E, (|))$ est un espace euclidien.

Adjoint d'un endomorphisme

Pour toute forme linéaire f de E , il existe un unique vecteur a de E tel que :

$$\forall x \in E, f(x) = (a|x).$$

Représentation des formes linéaires

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe une unique application u^* de E dans lui-même telle que : $\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|y) = (x|u^*(y))$.

On l'appelle l'endomorphisme **adjoint** de u .

L'application $u \mapsto u^*$ a les propriétés suivantes :

1. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (u, v) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E), (\lambda u + \mu v)^* = \lambda u^* + \mu v^*$;
2. $\forall u \in \mathcal{L}(E), (u^*)^* = u$;
3. $\text{Id}_E^* = \text{Id}_E$;
4. $\forall (u, v) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E), (u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.

$u \mapsto u^*$ est donc un automorphisme involutif de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si e est une base **orthonormée** de E , la matrice associée à u^* dans cette base est : $\text{Mat}(u^*, e) = \text{Mat}(u, e)^\top$.

Matrice de l'adjoint en base orthonormée

u^* et u ont la même trace, le même déterminant et le même polynôme caractéristique, donc le même spectre.

Si le sous-espace vectoriel F de E est stable par u , alors $F^\perp$ est stable par u^* .

Matrices orthogonales, groupe $O_n(\mathbb{R})$

Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **orthogonale** lorsque $A^\top A = I_n$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. A est une matrice orthogonale ;
2. les vecteurs colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$;
3. les vecteurs lignes de M forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$;
4. $AA^\top = I_n$;
5. A est inversible et $A^{-1} = A^\top$.

Une matrice est orthogonale si et ssi elle est la matrice d'un changement de base orthonormée.

Caractérisation comme matrice d'un changement de base orthonormée

Deux matrices carrées A et B sont **orthogonalement semblables** lorsqu'il existe une matrice orthogonale P telle que : $A = PBP^\top$.

L'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$, noté $\mathcal{O}(n)$ ou $O_n(\mathbb{R})$, appelé le **groupe orthogonal d'indice n** .

Si $M \in O_n(\mathbf{R})$, alors :

- les valeurs propres réelles de M appartiennent à $\{-1, 1\}$;
- $\text{Det } M = \pm 1$.

Les matrices orthogonales de déterminant $+1$ sont dites **positives ou directes**, celles de déterminant -1 **négatives ou indirectes**.

Groupe spécial orthogonal d'indice n

L'ensemble des matrices orthogonales positives est un sous-groupe de $O_n(\mathbf{R})$ appelé le **groupe spécial orthogonal d'indice n** . On le note $SO(n)$ ou $SO_n(\mathbf{R})$ ou $O_n^+(\mathbf{R})$.

Orientation d'un espace euclidien

Dans un espace euclidien E , la matrice de passage d'une base orthonormée b à une autre base orthonormée b' de E est une matrice orthogonale. Si cette matrice est de déterminant $+1$, on dit que b et b' ont la même orientation, sinon (déterminant égal à -1), on dit qu'elles sont d'orientations contraires.

Orienter un espace euclidien, c'est choisir l'une de ses bases orthonormées comme base de référence.

Toutes les bases orthonormées de même orientation que celle-ci sont alors dites **orthonormées directes**.

Isométries vectorielles

Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est une **isométrie vectorielle** (ou **automorphisme orthogonal**) lorsqu'il conserve la norme, i.e. $\forall x \in E, \|f(\vec{x})\| = \|x\|$.

Exemples : symétries orthogonales, réflexion

Si F est un sev d'un espace euclidien E , tout vecteur x de E se décompose de manière unique en $x = x_F + x_{F^\perp}$, où $x_F \in F$ et $x_{F^\perp} \in F^\perp$.

La **symétrie orthogonale d'axe F** est l'application S qui, à tout $x = x_F + x_{F^\perp}$ de E , associe $S(x) = x_F - x_{F^\perp}$.

Une symétrie orthogonale est une isométrie vectorielle de E .

$$\|S(x)\|^2 = \|x_F\|^2 + \|-x_{F^\perp}\|^2 = \|x\|^2$$

Dans le cas particulier où F est un hyperplan de E , S est la **réflexion d'axe F** .

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- u est une isométrie vectorielle de E ;
- $\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|u(y)) = (x|y)$ (« u conserve le produit scalaire »);
- u transforme une base ON de E en base ON;
- $u^* = u^{-1}$.

e étant une base orthonormée de E :

$$u \in \mathcal{O}(E) \iff \text{Mat}(u, e) \in O_n(\mathbf{R})$$

Caractérisation matricielle des isométries vectorielles

Groupe orthogonal

L'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries vectorielles de E est un sous-groupe de $\text{GL}(E)$, appelé **groupe orthogonal** de E .

Le déterminant, dans une base orthonormée, d'une isométrie vectorielle vaut ± 1 .

Déterminant d'une isométrie vectorielle

Les isométries de déterminant $+1$ sont dites **positives ou directes**, celles de déterminant -1 **négatives ou indirectes**.

Groupe spécial orthogonal d'un espace euclidien

L'ensemble des isométries vectorielles de déterminant égal à 1 est appelé le **groupe spécial orthogonal** de E , on le note $\text{SO}(E)$ ou $\mathcal{O}^+(E)$. $\text{SO}(E)$ est un sous-groupe de $\mathcal{O}(E)$.

Le groupe $\text{O}_2(\mathbb{R})$

Les éléments du groupe $\text{SO}_2(\mathbb{R})$ sont les matrices $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, pour $\theta \in \mathbb{R}$.

Les éléments de $\text{O}_2(\mathbb{R}) \setminus \text{SO}_2(\mathbb{R})$ sont les matrices $S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$, pour $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, R(\alpha) R(\beta) = R(\alpha + \beta)$$

la multiplication est commutative sur $\text{SO}_2(\mathbb{R})$.

Isométries vectorielles d'un plan euclidien

Soit $\mathcal{P}$ un plan euclidien orienté. Soit $f \in \mathcal{O}(\mathcal{P})$. Alors :

- ou bien $\text{Det } f = 1$ et alors il existe un réel θ , unique à un multiple entier de 2π près, tel que, pour toute base b ON directe de $\mathcal{P}$, $\text{Mat}_b(f) = R(\theta)$. On dit alors que f est la **rotation d'angle** θ ;
- ou bien $\text{Det } f = -1$ et alors f est une réflexion du plan, c'est-à-dire une symétrie orthogonale par rapport à une droite.

Mesures d'un angle orienté de deux vecteurs non nuls

Si x et y sont deux vecteurs **unitaires** de $\mathcal{P}$, il existe une unique rotation r de $\mathcal{P}$ tel que : $r(x) = y$.

L'angle de cette rotation r est une **mesure de l'angle orienté** $\widehat{(x, y)}$. Si u et v sont des vecteurs **non nuls**, une **mesure de l'angle orienté** $\widehat{(u, v)}$ est une mesure de $\left(\frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|} \right)$.

• Une mesure est définie modulo 2π , la **mesure principale** étant la seule appartenant à $] -\pi, \pi]$.

• Pour tout triplet (u, v, w) de vecteurs non nuls : $\widehat{(u, v)} + \widehat{(v, w)} = \widehat{(u, w)} [2\pi]$. En effet, u et v étant unitaires, si $r_\theta(u) = v$ et $r_{\theta'}(v) = w$, alors $w = r_{\theta'} \circ r_\theta(u) = r_{\theta+\theta'}(u)$.

La relation de Chasles est une égalité à un multiple de 2π près (modulo 2π).
Soit E un espace euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$ et e une base ON de E .

Réduction des isométries

Soit $u \in \mathcal{O}(E)$. Si F est un sous-espace de E stable par u , alors $F^\perp$ est stable par u .

Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. Soit $u \in \mathcal{O}(E)$. Il existe une base orthonormée e de E telle que $\text{Mat}(u; e)$ soit une matrice diagonale par blocs de la forme

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -I_q & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & R(\theta_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & R(\theta_s) \end{pmatrix}$$

où p, q, s sont trois entiers naturels tels que $p + q + 2s = n$, et pour chaque $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, $\theta_i \in \mathbf{R} \setminus \pi\mathbf{Z}$.

(Rappel : $R(\theta)$ désigne $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$).

Si p, q ou s est nul, le ou les blocs correspondants n'existent pas.

Cas particulier d'une isométrie vectorielle directe en dimension 3 : il existe

une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) de E telle que $\text{Mat}(u; e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$,

où $\theta \in \mathbf{R}$.

Endomorphismes autoadjoints

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit **autoadjoint** (ou **symétrique**) s'il vérifie $u^* = u$.

On a donc : $\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|y) = (x|u(y))$.

Les endomorphismes autoadjoints forment un sev de $\mathcal{L}(E)$, noté $\mathcal{S}(E)$.

Si u est autoadjoint, l'orthogonal d'un sous-espace stable par u est aussi stable par u .

Stabilité de l'orthogonal d'un sev stable

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, e une base orthonormée de E .

u est autoadjoint $\Leftrightarrow \text{Mat}(u, e)$ est symétrique.

Caractérisation matricielle des endomorphismes autoadjoint

$p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur orthogonal si et ssi $p^2 = p$ et p est autoadjoint.

Caractérisation des projections orthogonales

Réduction des endomorphismes autoadjoints

$u \in \mathcal{E}$ est autoadjoint si et ssi E est somme orthogonale des sous-espaces propres de u ou, de manière équivalente, s'il existe une base orthonormée diagonalisant u .

Théorème spectral

Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est symétrique si et ssi elle est orthogonalement diagonalisable, ou de manière équivalente, s'il existe une matrice orthogonale $P \in O_n(\mathbf{R})$ et une matrice D diagonale telles que :

$$S = PDP^\top.$$

Traduction matricielle du théorème spectral

Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif

Un endomorphisme autoadjoint u de E est **positif** (respectiv. **défini positif**) lorsque :

$$\forall x \in E \setminus \{0_E\}, (x|u(x)) \geq 0 \text{ (respectiv. } (x|u(x)) > 0).$$

L'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs (respectiv. définis positifs) de E est noté $\mathcal{S}^+(E)$ (respectiv. $\mathcal{S}^{++}(E)$).

Un endomorphisme autoadjoint de E est :

- positif si et ssi ses valeurs propres sont positives ;
- défini positif si et ssi ses valeurs propres sont strictement positives.

Caractérisation spectrale

Un endomorphisme autoadjoint positif est défini positif si et ssi il est bijectif.

Matrice symétrique positive, définie positive

Une matrice symétrique A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est **positive** (respectivement **définie positive**) lorsque :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \setminus \{0_{n,1}\}, X^\top AX \geq 0 \text{ (respectivement } X^\top AX > 0).$$

L'ensemble des matrices symétriques positives (respectivement définies positives) de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est noté $\mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$ (respectivement $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$).

Une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est :

- positive si et ssi ses valeurs propres sont positives ;
- définie positive si et ssi ses valeurs propres sont strictement positives.

Caractérisation spectrale

Une matrice symétrique positive est définie positive si et ssi elle est inversible.

Topologie

Espaces vectoriels normés

Dans tout ce chapitre, E est un $\mathbf{K}$ -ev, où $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Norme, distance associée

On appelle **norme** sur E une application N de E dans $\mathbf{R}_+$ qui vérifie :

- $\forall x \in E, (N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E)$ (séparation);
- $\forall (\lambda, x) \in \mathbf{K} \times E, N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$ (homogénéité);
- $\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire).

On appelle **espace vectoriel normé** (evn) un couple (E, N) , où N est une norme sur E .

Un vecteur de E de norme 1 est dit **unitaire**.

L'application $d : E^2 \rightarrow \mathbf{R}$ qui à (x, y) associe $N(y - x)$ est appelée la **distance associée** sur E ,

- $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) \geq 0$;
- $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = 0 \iff x = y$;
- $\forall (x, y) \in E^2, d(y, x) = d(x, y)$;
- $\forall (x, y, z) \in E^3, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Propriétés de la distance associée à la norme

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ une partie non vide de E , $x \in E$. On appelle **distance de x à A** le nombre réel positif $d(x, A) = \inf\{d(x, y), y \in A\}$.

Boules, parties, suites et fonctions bornées

Soit $a \in E$ et $r > 0$.

$B_f(a, r) = \{x \in E \mid N(x - a) \leq r\}$: boule fermée de centre a et de rayon r ;

$B_o(a, r) = \{x \in E \mid N(x - a) < r\}$: boule ouverte de centre a et de rayon r ;

$S(a, r) = \{x \in E \mid d(x, a) = r\}$: sphère de centre a et de rayon r .

Une partie A de E est dite **convexe** lorsque :

$$\forall t \in [0, 1], \forall (x, y) \in A^2, (1 - t)x + ty \in A.$$

Toute boule est convexe.

- Une partie de E est dite **bornée** lorsqu'elle est incluse dans une boule.
- Une application f de I dans E est **bornée** lorsque $f(I)$ est une partie bornée de E , i.e. lorsque : $\exists M \in \mathbf{R}_+ \mid \forall x \in I, N(f(x)) \leq M$.
- Une suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de E est **bornée** lorsque $\{u_n, n \in \mathbf{N}\}$ est une partie bornée de E , i.e. lorsque : $\exists M \in \mathbf{R}_+ \mid \forall n \in \mathbf{N}, N(u_n) \leq M$.

Exemples de normes

Si $(E, (| |))$ est un préhilbertien réel,
 $x \mapsto \|x\| = \sqrt{(x | x)}$ est une norme sur E .

Norme associée à un produit scalaire

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n$.

$\| \cdot \|_1, \| \cdot \|_2, \| \cdot \|_\infty : \mathbf{K}^n \rightarrow \mathbf{R}$ définies
 ci-dessous sont des normes sur $\mathbf{K}^n$.

- $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
- $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$
- $\|x\|_\infty = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_i|$

Normes usuelles sur $\mathbf{K}^n$

$\| \cdot \|_\infty : f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|$ est une
 norme sur $\mathcal{B}(I, \mathbf{K})$, espace vectoriel des ap-
 plications bornées de I dans $\mathbf{K}$.

Norme de la convergence uniforme

Notons $\mathcal{C}([a, b], \mathbf{K})$ l'espace vectoriel des applications continues sur le segment $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

$\| \cdot \|_1 : f \mapsto \|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$ est une
 norme sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbf{K})$.

Norme de la convergence en moyenne

$\| \cdot \|_1 : f \mapsto \|f\|_1 = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$ est
 une norme sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbf{K})$.

Norme de la convergence en moyenne quadratique

Suite convergente de vecteurs

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$. On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ **converge** lorsqu'il existe $\ell \in E$ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N} \text{ t.q. } n \geq N \Rightarrow N(u_n - \ell) \leq \varepsilon.$$

ℓ est alors unique : on l'appelle la **limite** de la suite u , on note $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Une suite qui ne converge pas est dite **divergente**.

Toute suite convergente est bornée.

Opérations algébriques sur les suites convergentes

Si $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ convergent respectivement vers b et c , alors :
pour $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$, $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $\lambda b + \mu c$.

L'ensemble des suites convergentes de (E, N) est un sev de $\ell^\infty(E) = \mathcal{B}(\mathbf{N}, E)$.

Suites d'un produit d'espaces vectoriels normés

Soit $(E_i, || \cdot ||_i)_{1 \leq i \leq k}$ des $\mathbf{K}$ -evn, $(x_n)_{n \in \mathbf{N}} = (x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(k)})_{n \in \mathbf{N}} \in (E_1 \times \dots \times E_k)^{\mathbf{N}}$ et $b = (b_1, \dots, b_k) \in E_1 \times \dots \times E_k$. $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers b ssi pour chaque $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, la suite $(x_n^{(j)})_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers b_j (dans $(E_j, || \cdot ||_j)$).

Suite extraite

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$. On appelle *suite extraite* (ou *sous-suite*) de $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbf{N}$ dans lui-même.

On dit que $x \in E$ est une **valeur d'adhérence** de $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ lorsque x est limite d'une suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

Une suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence diverge

Comparaison des normes

Deux normes sur E , N et N' , sont **équivalentes** si et ssi :

$$\exists (a, b) \in (\mathbf{R}_+^*)^2 \text{ tel que : } \forall x \in E, aN(x) \leq N'(x) \leq bN(x).$$

Si deux normes sont équivalentes, alors :

- toute partie, toute suite, toute application bornée pour l'une l'est pour l'autre ;
- si une suite converge vers ℓ pour l'une, elle converge vers ℓ pour l'autre.

Pour montrer que deux normes de E ne sont pas équivalentes, on peut exhiber une suite d'éléments de E de limite ℓ pour l'une et pas pour l'autre.

Voisinages

Soit $a \in E$. Soit V une partie de E . On dit que V est un **voisinage** de a lorsqu'il existe $R > 0$ tel que $B_o(a, R) \subset V$.

On note $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a .

- E est un voisinage de chacun de ses éléments.
- Un élément de E appartient à chacun de ses voisinages.
- Une partie de E contenant un voisinage de a est aussi un voisinage de a .
- L'intersection d'un nombre fini de voisinages de a est un voisinage de a .

Deux éléments distincts admettent des voisinages disjoints.

Ouverts

On dit qu'une partie A de E est un **ouvert** (ou une **partie ouverte**) de E lorsqu'elle est voisinage de chacun de ses points.

- E et $\emptyset$ sont des ouverts.
- La réunion d'une famille quelconque d'ouverts est un ouvert.
- L'intersection d'une famille finie d'ouverts est un ouvert.

Toute boule ouverte est un ouvert de E . Les ouverts non vides d'un espace vectoriel normé E sont les réunions de boules ouvertes.

Fermés

On dit qu'une partie A de E est un **fermé** de E lorsque son complémentaire est un ouvert de E .

Toute boule fermée de E est un fermé.

- E et $\emptyset$ sont des fermés.
- La réunion d'une famille finie de fermés est un fermé.
- L'intersection d'une famille quelconque de fermés est un fermé.

Intérieur d'une partie

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. On appelle **intérieur** de A , et on note $\overset{\circ}{A}$, l'union des ouverts contenus dans A . $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A .

Le point $x \in E$ est intérieur à A ssi $A \in \mathcal{V}(x)$.

Pour toutes parties A, B de E , on a :

- $\overset{\circ}{A} \subset A$;
- $\overset{\circ}{A} = A \iff A$ est ouvert ;
- $A \subset B \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.

Adhérence d'une partie

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. On appelle **adhérence** de A , et on note $\overline{A}$, l'intersection des fermés contenant A . $\overline{A}$ est le plus petit fermé de E , au sens de l'inclusion, contenant A .

Pour toute $A \in \mathcal{P}(E)$, on a :

- $E \setminus \overline{A} = (E \setminus A)^\circ$
- $E \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{E \setminus A}$

Pour toutes parties A, B de E , on a :

- $A \subset \overline{A}$ (tout élément de A est adhérent à A) ;
- $A = \overline{A} \iff A$ est fermé ;
- $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.

Un élément de $\overline{A}$ s'appelle un **point adhérent** à A .

Soit $x \in E$ et $A \in \mathcal{P}(E)$:

- $\updownarrow$

 - $x \in \overline{A}$;
 - $\forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap A \neq \emptyset$;
 - $\forall \varepsilon > 0, B_o(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

Point adhérent à une partie

$x \in \overline{A}$ si et ssi x est la limite d'une suite d'éléments de A .

Caractérisation séquentielle de l'adhérence

A est fermée $\Leftrightarrow$ toute suite convergente d'éléments de A a sa limite dans A .

Partie dense

On dit que $D \in \mathcal{P}(E)$ est **dense** dans E lorsque $\overline{D} = E$.

- $\Updownarrow$
- A est dense dans E ;
 - tout ouvert non vide de E rencontre A ;
 - tout élément $x \in E$ est la limite d'une suite d'éléments de A .

Point frontière, frontière

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. On appelle **frontière** de A et on note $Fr(A)$ l'ensemble $\overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$. Un élément de $Fr(A)$ est appelé un **point frontière** de A .

Topologie induite sur une partie

Soit A une partie de l'espace vectoriel normé (E, N) .

- U est un **voisinage relatif** de $x \in A$ s'il existe un voisinage V de x dans E tel que $U = V \cap A$.
- U est un **ouvert relatif** de A si U est un voisinage relatif de chacun de ses points.
- W est un **fermé relatif** de A s'il est le complémentaire dans A d'un ouvert relatif de A .

U est un ouvert (resp. un fermé) relatif de A si et ssi il existe un ouvert (resp. un fermé) Ω de E tel que $U = \Omega \cap A$.

Caractérisation comme intersection

U est un fermé relatif de A si et ssi toute suite convergente d'éléments de U a sa limite dans U .

Caractérisation séquentielle

Limites et continuité

$(E, \| \cdot \|_E)$ et $(F, \| \cdot \|_F)$ sont deux evn. Dans ce chapitre, on étudie des applications $f : A \rightarrow F$, où A partie non vide de E .

Limite en un point

Soit $a \in \overline{A}$, $\ell \in F$. On dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, \|x - a\|_E \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

ℓ est alors unique et s'appelle la **limite** de f en a , on note $\ell = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

$$\Updownarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$$

$$\Downarrow \forall (x_n) \in A^{\mathbb{N}}, \lim x_n = a \Rightarrow \lim f(x_n) = \ell$$

Caractérisation séquentielle de la limite

On définit les extensions suivantes :

- Si A est non bornée :

$$\lim_{\|x\|_E \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, \forall x \in A, \|x\|_E \geq M \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

- Si $A = [a, +\infty[$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, \forall x \in A, x \geq M \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

- Si $F = \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, \|x - a\|_E \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq M.$$

_____ Limite d'une fonction à valeurs dans un produit d'evn _____

Soit $(F_i, \|\cdot\|_i)_{1 \leq i \leq k}$ des $\mathbb{K}$ -evn, $F = F_1 \times \dots \times F_k$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ (rappel : $\|(x_i)_{1 \leq i \leq k}\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq k} \|x_i\|_i$).

Soit $f : A \rightarrow F, x \mapsto (f_1(x), \dots, f_k(x)), a \in \overline{A}, \ell = (\ell_1, \dots, \ell_k) \in F$.

f admet ℓ pour limite en a si et ssi $\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket, f_j$ admet ℓ_j pour limite en a .

_____ Opérations sur les limites _____

Soit E, F, G des evn, $(A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F), (a, b) \in \overline{A} \times \overline{B}, f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow G$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \\ \bullet \lim_{y \rightarrow b} g(y) = c \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = c. \quad \text{Limite d'une composée}$$

Soit $f, g : A \rightarrow F$ qui ont des limites en $a \in \overline{A}$. Alors, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$

$$\lim_{x \rightarrow a} (\alpha f + \beta g)(x) = \alpha \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \beta \lim_{x \rightarrow a} g(x) \quad \text{Limite d'une combinaison linéaire}$$

_____ Continuité, prolongement par continuité _____

Soit $a \in \overline{A}$. On suppose que f a une limite en $a : b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

- Si $a \in A$, alors $b = f(a)$ et on dit que f est continue en a .
- Si $a \notin A$, on dit que f est **prolongeable par continuité** en a .

Lorsque $a \in A$, et $b = f(a)$, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Uparrow f \text{ est continue en } a \\ \Downarrow \forall (x_n) \in A^{\mathbb{N}}, \lim x_n = a \Rightarrow \lim f(x_n) = f(a) \end{array} \right\} \quad \text{Caractérisation séquentielle de la continuité}$$

_____ Opérations sur les fonctions continues sur une partie _____

$f : A \rightarrow F$ est dite **continue sur A** lorsque f est continue en tout point de A .

On note $\mathcal{C}(A, F)$ l'ensemble des applications continues de A dans F .

- La composée de deux applications continues est continue.
- Une combinaison linéaire d'applications continues est continue.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \mathcal{C}(A, F) \text{ est un sev de } F^A = \mathcal{F}(A, F). \\ \bullet \mathcal{C}(A, \mathbb{K}) \text{ est une sous-algèbre de } \mathbb{K}^A. \end{array} \right. \quad \text{Stabilités de } \mathcal{C}(A, F) \text{ par opérations algébriques}$$

Continuité des applications coordonnées

Soit F un $\mathbf{K}$ -evn de dim. finie, $e = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F .

L'application $f : A \rightarrow F, x \mapsto f(x) = \sum_{i=1}^p f_i(x)e_i$ est continue sur A ssi ses applications coordonnées $f_1, \dots, f_p$ sont toutes continues sur A .

Traduction topologique de la continuité sur une partie

Soit E et F deux evn et $f : A \rightarrow F$ continue sur A .

- l'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert relatif de A ;
- l'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé relatif de A .

Soit $f, g : A \rightarrow F$ deux applications continues qui coïncident sur une partie B de A dense dans A . Alors f et g sont égales.

Principe de prolongement des identités

Continuité uniforme

Soit E et F deux evn, $f : A \rightarrow F$. On dit que f est **uniformément continue** (sur A) lorsque :

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \eta > 0) (\forall (x, y) \in A^2), (\|x - y\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_F \leq \varepsilon).$$

Si f est uniformément continue sur A , elle est continue sur A .

Applications lipschitziennes

Soit f une application d'une partie A non vide de E dans F .

Pour $k \in \mathbf{R}_+$, on dit que f est **k -lipschitzienne** lorsque :

$$\|f(y) - f(x)\|_F \leq k \|y - x\|_E \quad (x, y) \in A^2.$$

Si f est k -lipschitzienne et $k \leq k'$, alors f est k' -lipschitzienne. On dit que f est **lipschitzienne** lorsqu'il existe $k \in \mathbf{R}_+$ tel que f est k -lipschitzienne.

Exemples :

- Les applications 0-lipschitziennes sont les applications constantes.
- $x \mapsto \|x\|$ est 1-lipschitzienne de $(E, \|\cdot\|)$ dans $(\mathbf{R}, |\cdot|)$.
- Une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ dont la dérivée est bornée sur I est lipschitzienne.
- Soit A une partie non vide de E . L'application : $E \rightarrow \mathbf{R}_+, x \mapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne.

Si f est lipschitzienne sur A , alors f est uniformément continue sur A .

Applications linéaires et multilinéaires continues

Soit $u : E \rightarrow F$ une application linéaire entre deux evn.

- $\begin{array}{c} \uparrow \\ \parallel \\ \downarrow \end{array}$

 - u est continue ;
 - u est uniformément continue ;
 - u est lipschitzienne ;
 - $\exists C \geq 0, \forall x \in E, \|u(x)\| \leq C \|x\|$;

Caractérisations de la continuité d'une application linéaire

$\mathcal{L}_c(E, F)$, ensemble des applications $\mathbb{K}$ -linéaires *continues* de E dans F , est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$.

Norme subordonnée

Soit u une application linéaire continue de E dans F . Alors les trois nombres réels suivants sont bien définis, et sont égaux :

$$\sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}, \quad \sup_{x \in E, \|x\|_E \leq 1} \|u(x)\|_F \quad \text{et} \quad \sup_{x \in E, \|x\|_E = 1} \|u(x)\|_F.$$

On note $\|u\|$ leur valeur commune.

L'application $u \mapsto \|u\|$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{L}_c(E, F)$.

Norme subordonnée (ou norme d'opérateur) de u

Notation : Elle peut aussi se noter $\|u\|_{\text{op}}$.

- On sous-entend qu'elle est subordonnée aux normes de travail $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$.
- Par définition, on a : $\forall x \in E \setminus \{0\}, \|u(x)\|_F \leq \|u\| \|x\|_E$.

Soit E, F, G trois espaces vectoriels normés sur le même corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications linéaires continues.

$g \circ f$ est une application linéaire continue de E dans G , et : $\|g \circ f\| \leq \|g\| \|f\|$.

Sous-multiplicativité de la norme d'opérateur

Adaptation aux matrices

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}^n$ étant muni d'une norme $\|\cdot\|$, la **norme subordonnée de A** est la norme subordonnée de l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A pour la norme $\|\cdot\|$.

Continuité d'une application multilinéaire

Soit $(E_i, \|\cdot\|_i)_{1 \leq i \leq p}$ un p -uplet de $\mathbb{K}$ -evn de dimensions finies, $(F, \|\cdot\|_F)$ un $\mathbb{K}$ -evn. Soit $M : E_1 \times \dots \times E_p \rightarrow F$ une application p -linéaire. Alors, les propositions suivantes sont équivalentes :

- il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que :
 $\forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p, \|M(x_1, \dots, x_p)\|_F \leq k \|x_1\|_1 \cdots \|x_p\|_p$.
- M est continue sur l'evn produit $E_1 \times \dots \times E_p$.

Si E est un $\mathbb{K}$ -evn, alors l'application $\mathbb{K} \times E \rightarrow E, (\lambda, x) \mapsto \lambda x$, bilinéaire, est continue ($M = 1$).

Si E est un espace euclidien, le produit scalaire $E \times E \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto (x|y)$, bilinéaire, est continu ($M = 1$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

Soit E un evn de dimension n , e une base fixée de E . Le déterminant en base e , $\text{Det}_e : E^n \rightarrow \mathbb{K}, x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \text{Det}_e(x_1, \dots, x_n)$ est continu sur E^n .

Partie compacte

On dit que $A \in \mathcal{P}(E)$ est un **compact** de E lorsque toute suite d'éléments de A admet une suite extraite qui converge vers un élément de A .

- Toute partie compacte est fermée et bornée.

- Un fermé relatif d'une partie compacte est compact.

Une suite d'éléments d'une partie compacte converge si, et seulement si, elle admet une unique valeur d'adhérence.

Convergence d'une suite dans un compact

Le produit d'une famille finie de compacts de E est un compact de E .

Produits de compacts

Image continue d'une partie compacte

Soit $f \in \mathcal{C}(A, F)$. L'image par f d'un compact de E inclus dans A est une partie compacte de F .

Toute application continue sur un compact est uniformément continue sur ce compact.

Théorème de Heine

Soit A une partie compacte de E , si f est une application continue de A dans $\mathbf{R}$, alors f est bornée et atteint ses bornes sur A .

Connexité par arcs

Une partie C d'un evn E est dite **connexe par arcs** lorsque : pour tout $(a, b) \in C^2$, il existe une application continue γ de $[0, 1]$ dans E telle que $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$ et $\gamma([0, 1]) \subset C$.

Toute partie convexe de E est connexe par arcs.

Les parties connexes par arcs de $\mathbf{R}$ sont les intervalles de $\mathbf{R}$.

Parties connexes de $\mathbf{R}$

Soit E et F des evn, A une partie non vide de E , $f : A \rightarrow F$ continue.

Soit C une partie connexe par arcs de E , contenue dans A . Alors $f(C)$ est connexe par arcs.

Image continue d'une partie connexe par arcs

Lorsque $F = \mathbf{R}$, nous obtenons :

Soit C une partie connexe par arcs de l'evn E , $f : C \rightarrow \mathbf{R}$ une application continue. Alors $f(C)$ est un intervalle.

Théorème des valeurs intermédiaires

Espaces vectoriels normés de dimension finie

Dans tout ce chapitre, E est un $\mathbf{K}$ -ev, avec $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Équivalence des normes en dimension finie

Soit E un $\mathbf{K}$ -ev de dimension finie.
Toutes les normes sur E sont équivalentes.

Équivalence des normes en dimension finie

Exemple : Les trois normes classiques $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbf{K}^n$ sont équivalentes. Plus précisément :

$$\forall x \in \mathbf{K}^n, \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2 \leq n \|x\|_\infty.$$

Conséquence : Les différentes notions topologiques sont invariantes lorsqu'on change de normes.

Soit E un $\mathbf{K}$ -ev de dim. finie p rapporté à une base $(e_1, \dots, e_p)$. Soit (u_n) une suite de vecteurs de E , $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} = \left(\sum_{k=1}^p u_{n,k} e_k \right)_{n \in \mathbf{N}}$. Alors

$(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge dans E .
ssi
 $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $(u_{n,k})_{n \in \mathbf{N}}$ converge dans $\mathbf{K}$.

Convergence en coordonnées

En ce cas $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sum_{k=1}^p \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n,k} \right) e_k$.

Soit F un $\mathbf{K}$ -ev de dim. finie, $(b_1, \dots, b_p)$ une base de F . Soit $f : A \rightarrow F$,
 $x \mapsto f(x) = \sum_{i=1}^p f_i(x) b_i$. f est continue en $a \in A$ [resp. sur A] ssi ses fonctions coordonnées $f_1, \dots, f_p$ sont continues en a [resp. sur A].

Parties compactes d'un evn de dimension finie

Dans un evn de dim. finie, les parties compactes sont les parties fermées bornées.

Parties compactes en dimension finie

Une suite **bornée** d'un espace normé de dimension finie converge si et ssi elle a une unique valeur d'adhérence.

Convergence d'une suite en dimension finie

Conséquence : Un sous-espace de dimension finie d'un espace normé est fermé.

Application linéaire sur un evn de dim. finie

Si E est de dimension finie,
 $\mathcal{L}(E, F) = \mathcal{L}_c(E, F)$.

Une application linéaire sur un ev de dim. finie et continue

Application p -linéaire sur des evn. de dim. finies

Soit $(E_i, \| \cdot \|_{E_i})$, $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, des evn de dimensions finies sur $\mathbf{K}$ et $(F, \| \cdot \|_F)$ un evn sur $\mathbf{K}$. Soit $M : E_1 \times \dots \times E_p \rightarrow F$ une application p -linéaire.

- $\exists K \in \mathbf{R}_+ / \forall (x_1, \dots, x_p) \in \prod_{i=1}^p E_i, \|M(x_1, \dots, x_p)\|_F \leq K \prod_{i=1}^p \|x_i\|_{E_i}$;
- M est continue sur $E_1 \times \dots \times E_p$.

Exemples : le produit matriciel, le déterminant sont continus.

Analyse

Séries d'éléments d'un espace vectoriel normé

$(E, \| \cdot \|)$ désigne un evn de dimension finie.

Série associée à une suite

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E . Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on appelle **somme partielle d'indice n** , la somme $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. On appelle **série de terme général**

u_n , et on note $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^n u_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Lien suite-série : La somme partielle d'indice N de la série de terme général $x_{n+1} - x_n$ (série télescopique) est : $x_{N+1} - x_0$.

Série convergente

La série $\sum u_n$ est **convergente** lorsque la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de ses sommes partielles est convergente. La limite S de cette suite est alors appelée **somme** de la série et notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Sinon, elle est divergente.

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N u_n$$

Somme d'une série convergente

Espace vectoriel des séries convergentes

L'ensemble des séries convergentes d'éléments de E est un $\mathbf{K}$ -ev. L'application de cet ev dans E qui à toute série convergente $\sum u_n$ associe $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est linéaire.

Caractérisation de la convergence à l'aide d'une base de E

Soit E un $\mathbf{K}$ -evn de dim. finie, $(e_1, \dots, e_p)$ une base de E . Soit $\sum u_n$ une série d'éléments de E . Notons : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=1}^p u_{n,k} e_k$. Alors $\sum u_n$ est

convergente ssi $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\sum (u_{n,k})_{n \in \mathbf{N}}$ converge dans $\mathbf{K}$.

On a alors : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,k} \right) e_k$.

Cas d'une série de nombres complexes

La série $\sum z_n$ de complexes est convergente ssi les séries réelles $\sum \Re(z_n)$ et $\sum \Im(z_n)$ sont convergentes, et alors : $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \Re(z_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \Im(z_n)$.

Reste d'une série convergente

On suppose que $\sum u_n$ converge et a pour somme S .

Pour $n \in \mathbf{N}$, $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est appelé **reste d'indice n** .

La suite (R_n) des restes converge vers 0.

Condition nécessaire de convergence

Si la série $\sum u_n$ converge, alors le terme général u_n converge vers 0.

Condition nécessaire de convergence

La réciproque est fautive. Par exemple, la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Si son terme général u_n ne tend pas vers 0, on dit que la série $\sum u_n$ **diverge grossièrement**.

Séries absolument convergentes

On dit que la série $\sum_{n \in \mathbf{N}} u_n$ d'éléments de E est **absolument convergente** (ACV)

lorsque la série (de nombres réels positifs) $\sum_{n \in \mathbf{N}} \|u_n\|$ converge.

Soit E un evn de dim. finie. Toute série absolument convergente d'éléments de E est convergente. En ce cas

$$\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|$$

La convergence absolue entraîne la convergence

L'ensemble des séries ACV d'éléments de E est un sev de l'espace des séries convergentes d'éléments de E .

Technique de comparaison série-intégrale

f étant une fonction continue et monotone sur $\mathbf{R}^+$, pour déterminer la nature de la série $\sum f(n)$, mais aussi pour encadrer une somme partielle ou un reste de cette série :

- on constate que $f(k) = \int_{k-1}^k f(t) dt$ ou $f(k) = \int_k^{k+1} f(t) dt$.
- La monotonie de f et la croissance de l'intégrale permettent alors d'obtenir des encadrements de $f(n)$. Par exemple, si f est décroissante :

$$\forall t \in [k, k+1], f(k+1) \leq f(t) \leq f(k) \implies f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k).$$

$$\text{Puis, si } k-1 \geq 0, \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt.$$

- On somme membre à membre, sous réserve de convergence, ces encadrements :

$$\int_1^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_0^n f(t) dt$$

ou

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leq \int_n^{+\infty} f(t) dt.$$

- On calcule les intégrales pour obtenir une minoration par une intégrale divergente, une majoration par une intégrale convergente, un encadrement, puis, éventuellement, un équivalent de la somme partielle ou du reste.

Par ce procédé, on obtient, par exemple :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ est convergente si et ssi } \alpha > 1.$$

Règle de d'Alembert

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs :

Si le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a une limite ℓ (finie ou infinie) quand n tend vers $+\infty$, on a :

- Si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ converge.
- Si $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Sommation des relations de comparaison

Soit (u_n) une suite de nombres complexes, (a_n) et (b_n) deux suites de nombres réels positifs.

- On suppose que $u_n = \mathcal{O}(a_n)$, alors :

$$\text{– Si } \sum a_n \text{ converge, alors } \sum u_n \text{ est ACV et } \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \mathcal{O} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \right).$$

$$\text{– Si } \sum a_n \text{ diverge, alors } \sum_{k=0}^n a_k = \mathcal{O} \left(\sum_{k=0}^n u_k \right).$$

- On suppose que $u_n = o(a_n)$, alors :

$$\text{– Si } \sum a_n \text{ converge, alors } \sum u_n \text{ est ACV et } \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \right).$$

$$\text{– Si } \sum a_n \text{ diverge, alors } \sum_{k=0}^n u_k = o \left(\sum_{k=0}^n a_k \right).$$

• On suppose que $b_n \sim a_n$, alors :

– Si $\sum a_n$ converge, alors $\sum b_n$ converge et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.

– Si $\sum a_n$ diverge, alors $\sum b_n$ diverge et $\sum_{k=0}^n b_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=0}^n a_k$.

Si la suite complexe (u_n) converge vers ℓ , alors :

$$\frac{\sum_{k=1}^n u_k}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell.$$

Théorème de Cesàro

Suites de fonctions

On considère des applications de A dans F où $A \in \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$, E et F evn de dimensions finies.

_____ Modes de convergence d'une suite de fonctions _____

On dit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ **converge simplement** (CVS) sur A lorsque : pour tout x de A , $(f_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ converge. Dans ce cas, on appelle **limite simple** de la suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sur A l'application $f : A \rightarrow F, x \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$.

On dit que $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ **converge uniformément** (CVU) vers f sur A lorsque :

$(\forall \varepsilon > 0) (\exists N \in \mathbf{N}) (\forall n \in \mathbf{N}) (n \geq N \Rightarrow \forall x \in A, \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon)$
c'est-à-dire lorsque la suite $(\sup_{x \in A} \|f_n(x) - f(x)\|)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers 0 dans $\mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Si la suite (f_n) CVU vers f sur A , alors (f_n) CVS vers f sur A .

La convergence uniforme entraîne la convergence simple

La réciproque est fausse.

La suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de fonctions bornées de A dans F converge uniformément sur A vers la fonction bornée f si et ssi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

À l'aide de la norme de la convergence uniforme

_____ Continuité d'une limite uniforme _____

- Si $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ CVU vers f sur A ;
 - Si $\forall n \in \mathbf{N}, f_n$ est continue en $a \in A$,
- Alors f est continue en a .

Continuité d'une limite uniforme de fonctions continues

Toute limite uniforme de fonctions continues sur A est continue sur A .

La continuité étant une *propriété locale* d'une fonction :

Soit (f_n) une suite d'applications continues de A dans $\mathbb{F}$ et $f \in \mathbb{F}^A$. Si (f_n) converge vers f uniformément sur tout compact inclus dans A , alors f est continue sur A .

La convergence uniforme sur tout compact suffit

En pratique, on vérifie donc la convergence uniforme sur tout compact, en particulier sur tout segment. On peut aussi vérifier la CVU sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Théorème de la double limite

Soit $f_n : A \rightarrow F$ et $a \in \overline{A}$ ou $a = +\infty$ (resp. $a = -\infty$) si $A \subset \mathbb{R}$ est une partie non majorée (resp. non minorée).

Si (f_n) CVU vers f sur A , $\bullet$ la suite $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une limite ℓ ;
 alors $\bullet f$ a une limite en $a : \ell$;
 $\bullet \forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_n$, $\bullet f$ a une limite en $a : \ell$.

Autrement dit,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$$

Intervention des limites

Intégration d'une limite uniforme sur un segment

Soit (u_n) une suite de fonctions continues définies sur un intervalle I et à valeurs dans F , a un point de I . On suppose que (u_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction u . Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$, soit

$$U_n(x) = \int_a^x u_n, \quad U(x) = \int_a^x u.$$

Alors U_n converge uniformément vers U sur tout segment de I .

En particulier, si (u_n) converge uniformément vers u sur le segment $[a, b]$, alors :

$$\int_a^b u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b u.$$

Avec des bornes fixes

Dérivation de la limite d'une suite de fonctions

Soit (u_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans F . On suppose que

- (u_n) CVS sur I vers $u : I \rightarrow F$;
- (u'_n) CVU sur tout segment de I vers $v : I \rightarrow F$.

Alors (u_n) CVU vers u sur tout segment de I , u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $u' = v$.

En pratique, on vérifie la convergence uniforme de (u'_n) sur des intervalles adaptés à la situation.

Plus généralement, pour $k \geq 2$, si (u_n) est une suite d'applications de classe $\mathcal{C}^k$ sur I qui CVS sur I vers u , telle que pour chaque $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, la suite $(u_n^{(j)})$ CVS sur I , et que $(u_n^{(k)})$ CVU sur tout segment de I vers v . Alors u est

de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et $u^{(k)} = v$. De plus (u_n) CVU sur tout segment de I vers u .

En pratique, on vérifie la convergence uniforme de $(u_n^{(k)})$ sur des intervalles adaptés à la situation.

Approximations uniformes

Dans cette section, on considère des applications de l'intervalle réel I dans F , evn de dim. finie.

Soit $\sigma = (x_0 = a < \dots < x_n = b)$ une subdivision de $[a, b]$.

- $\varphi : [a, b] \rightarrow F$ est dite **en escalier** sur $[a, b]$ lorsqu'il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in F^n$ telle que pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, φ est constante égale à λ_k sur $]x_k, x_{k+1}[$.
- $f : [a, b] \rightarrow F$ est dite **continue par morceaux (CPM)** sur $[a, b]$ si pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $f|_{]x_k, x_{k+1}[}$ est continue sur $]x_k, x_{k+1}[$ et est prolongeable par continuité aux points x_k et x_{k+1} .

On dit alors que la subdivision σ est **adaptée** à φ ou à f .

Soit $f : [a, b] \rightarrow F$ une fonction CPM sur $[a, b]$ et $\varepsilon > 0$ fixé. Il existe une fonction en escalier $\varphi : [a, b] \rightarrow F$ telle que :

$$\sup_{x \in [a, b]} \|f(x) - \varphi(x)\|_F \leq \varepsilon$$

Approximation uniforme d'une fonction CPM par des fonctions en escalier

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{K}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et $\varepsilon > 0$ fixé. Il existe une fonction polynomiale $P : [a, b] \rightarrow \mathbf{K}$ telle que :

$$\sup_{x \in [a, b]} \|f(x) - P(x)\|_F \leq \varepsilon$$

Théorème de Weierstrass

Séries de fonctions

On considère le même type d'applications qu'au chapitre précédent.

Modes de convergence d'une série de fonctions

Soit $f_n : A \rightarrow F$ une suite de fonctions. On note pour $n \in \mathbf{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$ la somme partielle d'indice n .

- On dit que la série $\sum f_n$ **converge simplement** sur A si la suite $(S_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge simplement sur A . En ce cas, la fonction $S : A \rightarrow F$ définie par :

$$\forall x \in A, S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \text{ est appelée la fonction somme de la série } \sum f_n.$$

- On dit que la série $\sum f_n$ **converge uniformément** sur A lorsque la suite $(S_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément sur A .
- On dit que la série $\sum f_n$ **converge normalement** sur A lorsque la série numérique $\sum \|f_n\|_{\infty, A} = \sum \sup_{x \in A} |f_n(x)|$ est convergente.

La série $\sum f_n$ converge uniformément sur A si et ssi la série $\sum f_n$ CVS sur A et la suite des restes $(R_n) = \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k \right)$ CVU sur A vers 0.

Caractérisation de la CVU d'une série de fonctions

$\sum f_n$ converge normalement sur A si et ssi il existe une série numérique convergente $\sum \alpha_n$ majorante, i.e. une série $\sum \alpha_n$ de réels positifs convergente et telle que :
 $\forall n \in \mathbb{N} \quad \|f_n\|_{\infty, A} \leq \alpha_n.$

Caractérisation de la CVN d'une série de fonctions

Une série $\sum f_n$ normalement convergente sur A est absolument et uniformément convergente sur A . Alors,

$$\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right\|_{\infty, A} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_{\infty, A}.$$

CVN $\Rightarrow$ CVU

Hiérarchie des modes de convergence

- La convergence normale entraîne la convergence uniforme et la convergence absolue en tout point.
- La convergence normale entraîne la convergence normale sur tout compact.
- La convergence normale sur tout compact entraîne la convergence uniforme sur tout compact.
- La convergence uniforme entraîne la convergence uniforme sur tout compact.
- La convergence uniforme sur tout compact entraîne la convergence simple.

Continuité et convergence uniforme sur tout compact

Si, $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n est continue sur A et si $\sum f_n$ CVU sur tout compact contenu dans A , alors la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur A .

Théorème d'interversion somme-limite (double limite)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, a une borne ouverte de l'intervalle I .

Si

- $\sum f_n$ CVU sur I ,
- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_n$,

alors

- la série $\sum \ell_n$ converge, de somme ℓ ;
- la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ a ℓ pour limite en a .

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right)$$

Interversion somme-limite

Intégration terme à terme sur un segment

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues sur un intervalle I à valeurs dans F , a un point de I . On suppose que $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I . Pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in I$, soit

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \int_a^x f_k, \quad S(x) = \int_a^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right).$$

Alors (S_n) converge uniformément vers S sur tout segment de I .

En particulier, si $\sum f_n$ converge uniformément sur un segment $[a, b]$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n \right) = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)$$

Intégration terme à terme

Dérivation terme à terme

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions numériques de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I . On suppose que

- $\sum f_n$ CVS sur I ,
- la série des dérivées $\sum f'_n$ CVU sur tout segment de I .

Alors la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $S' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$.

Plus généralement, pour $k \geq 2$, si $\sum f_n$ est une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans F telle que

- la série $\sum f_n$ converge simplement sur I et a pour somme S ;
- pour tout $p \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$, $\sum f_n^{(p)}$ CVS sur I , de somme S_p ;
- $\sum f_n^{(k)}$ CVU sur tout segment de I , de somme S_k .

Alors S est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et, pour tout entier non nul $p \leq k$, $S^{(p)} = S_p$.

En pratique, on vérifie la CVU de $\sum f_n^{(p)}$ sur des intervalles adaptés à la situation.

Séries entières

Rayon de convergence

On appelle **série entière** (SE) de la variable réelle (resp. complexe) z associée à la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ la série de fonctions $\sum a_n z^n$ de $\mathbf{R}$ (resp. $\mathbf{C}$) dans $\mathbf{C}$.

Soit $z_0 \in \mathbf{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbf{N}}$ soit **bornée**. Alors :

Pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Lemme d'Abel

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Il existe un élément $R \in \mathbf{R}^+ \cup \{+\infty\}$ tel que

$$\begin{aligned} R &= \sup\{r \geq 0 \mid \sum a_n r^n \text{ ACV}\} \\ &= \sup\{t \geq 0 \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n t^n = 0\} \\ &= \sup\{r \geq 0 \mid (a_n r^n)_{n \in \mathbf{N}} \text{ est bornée}\} \end{aligned}$$

Rayon de convergence

R , noté aussi $R(\sum a_n z^n)$, est le **rayon de convergence** de la série entière $\sum a_n z^n$.

- Si $|z| < R$, $\sum a_n z^n$ converge absolument.
- Si $|z| > R$, $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

$C(0, R) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = R\}$ s'appelle le **cercle d'incertitude** de la SE.
 $B_o(0, R) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < R\}$ (resp. $] - R, R[$) s'appelle le **disque** (resp. **intervalle**) ouvert **de convergence**.

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux SE de rayons de CV respectifs R_a et R_b .

- Si $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ et donc en particulier si $a_n = o(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$.
- Si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.

Le rayon de convergence de $\sum n^\alpha x^n$ vaut 1. **Cas particulier usuel**

On suppose que $a_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell, \text{ alors } R = \frac{1}{\ell}$$

Règle de d'Alembert pour les séries entières

avec les conventions $\frac{1}{0^+} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$.

Opérations sur les séries entières

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux SE de rayons de CV respectifs R_a et R_b .
 Alors le rayon de convergence R_s de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie $R_s \geq \min(R_a, R_b)$ avec égalité si $R_a \neq R_b$. Pour tout $z \in B_o(0, R_s)$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

Somme de deux SE

Le **produit de Cauchy** de ces deux SE est la SE $\sum (c_n z^n)_{n \in \mathbf{N}}$ où, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{i+j=n} a_i b_j$$

Produit de Cauchy de deux SE

Le rayon de convergence R_c de la SE produit vérifie : $R_c \geq \min(R_a, R_b)$, et pour tout $z \in B_o(0, \min(R_a, R_b))$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right)$$

Somme du produit de Cauchy de deux SE

Continuité de la somme d'une SE de la variable complexe

Soit $\sum a_n z^n$ une SE de rayon de CV $R > 0$. Alors elle est normalement convergente, *a fortiori* uniformément convergente, sur tout compact inclus dans le disque ouvert de convergence $B_o(0, R)$.

Soit $\sum a_n z^n$ une SE de rayon de CV $R > 0$. La fonction somme $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur le disque ouvert de convergence $B_o(0, R)$.

Régularité de la somme d'une SE de la variable réelle

Si $\sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence $R \in \mathbf{R}_+^*$ et si $\sum a_n R^n$ converge, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow{x \rightarrow R^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n.$$

Théorème d'Abel radial

La somme d'une série entière est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence et ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme.

$\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n \geq 0} n a_n x^n$ ont le même rayon de convergence.

$$R(\sum a_n x^n) = R(\sum n a_n x^n)$$

Soit $\sum a_n z^n$ une SE dont le rayon de CV R est > 0 . On note $f :]-R, R[\rightarrow \mathbf{R}$ sa somme. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] - R, R[$ et

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \forall t \in]-R, R[, f^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n t^{n-k}$$

$$\forall k \in \mathbf{N}, a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0).$$

Expression des coefficients d'une SE

Si $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ coïncident sur un intervalle $]0, \alpha]$ avec $\alpha > 0$, alors :

$$\forall n \in \mathbf{N}, a_n = b_n.$$

Unicité des coefficients d'une série entière

Fonctions développables en série entière

Une application f de D dans $\mathbf{C}$ est dite **développable en série entière** (en abrégé : DSE) sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon r (resp. sur l'intervalle $] - r, r[$), où $r > 0$, lorsque $B_o(0, r) \subset D$ (resp. $] - r, r[\subset D$) et qu'il existe une SE $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R \geq r$ et qui vérifie :

$$\forall z \in B_o(0, r) \text{ (resp. }] - r, r[), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Dans le cas réel, si f est DSE sur $] - r, r[$, on a :

$$f \text{ de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur un intervalle }] - r, r[\text{ et, } \\ \forall x \in] - r, r[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Une fonction DSE est égale à la somme de sa **série de Taylor**

Développements en série entière usuels

$$\begin{aligned}
 \forall z \in \mathbb{C} \quad \exp(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n & R = +\infty \\
 \forall z \in \mathbb{D}(0, 1) \quad \frac{1}{1-z} &= \sum_{n=0}^{+\infty} z^n & R = 1 \\
 \forall z \in \mathbb{D}(0, 1) \quad \frac{1}{(1-z)^{p+1}} &= \sum_{k=p}^{+\infty} \binom{k}{p} z^{k-p} & R = 1 \\
 \forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} & R = +\infty \\
 \forall x \in \mathbb{R} \quad \sin(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} & R = +\infty \\
 \forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{ch}(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} & R = +\infty \\
 \forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{sh}(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} & R = +\infty \\
 \forall x \in [-1, 1] \quad \operatorname{Arctan}(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} & R = 1 \\
 \forall x \in]-1, 1] \quad \ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n & R = 1 \\
 \forall x \in]-1, 1[\quad (1+x)^\alpha &= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n & R = 1
 \end{aligned}$$

où pour tout réel $\alpha \in \mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{N}$, on a noté $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$.

La série entière $\sum \frac{1}{n!} z^n$ a un rayon de CV infini. Sa somme est appelée fonction **exponentielle complexe**, notée $\exp$. C'est une application $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{C}$.

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

Exponentielle complexe

Dérivation des fonctions à valeurs vectorielles

Dans tout le chapitre, on considère une fonction $f : I \rightarrow E$ et $a \in I$, où I est un intervalle réel et E un evn de dimension finie.

Dérivabilité en un point

f est **dérivable en** a lorsque $\varphi_a : I \setminus \{a\} \rightarrow E, x \mapsto \frac{1}{x-a}(f(x) - f(a))$ admet une limite en a . Celle-ci est alors appelée **la dérivée de f au point a** et notée $f'(a)$, $Df(a)$, ou $\frac{df}{dx}(a)$.

On dit que f est **dérivable à droite** (resp. gauche) en a lorsque la fonction φ_a admet une limite à droite (resp. gauche) en a . Cette limite est alors appelée **dérivée à droite** (resp. gauche) de f en a , et notée $f'_d(a)$ ou $Df(a^+)$ ou $\frac{df}{dx}(a^+)$ (resp. $f'_g(a)$ ou $Df(a^-)$ ou $\frac{df}{dx}(a^-)$).

Soit $a \in \overset{\circ}{I}$ un point intérieur à I . Alors f est dérivable en a ssi f est dérivable à droite et dérivable à gauche en a et $f'_d(a) = f'_g(a)$.

f est dérivable en a ssi f admet un DL d'ordre 1 au voisinage de a . En ce cas,

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + o(x - a).$$

Caractérisation à l'aide d'un DL d'ordre 1

Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .

Condition nécessaire de dérivabilité

Dérivabilité sur un intervalle, fonction dérivée

On dit que f est **dérivable** sur l'intervalle I lorsqu'elle est dérivable en tout point de I . La fonction $I \rightarrow E, x \mapsto f'(x)$ est alors appelée **la fonction dérivée** de f et notée f' ou Df ou $\frac{df}{dx}$.

On dit que f est **de classe C^1 sur I** lorsqu'elle est dérivable sur I et f' est continue sur I .

Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(f_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ la famille des fonctions coordonnées de f dans cette base de sorte que $\forall x \in I, f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x)e_i$.

Alors f est dérivable en a ssi ses fonctions coordonnées sont dérivables en a . On a alors :

$$f'(a) = \sum_{i=1}^n f'_i(a)e_i$$

Dérivabilité des fonctions coordonnées

Opérations sur les fonctions dérivables

Soit $f, g : I \rightarrow E$ deux fonctions dérivables en un point $a \in I$. Alors, pour tout couple $\lambda, \mu \in \mathbb{K}^2$ de scalaires, $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et

$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a).$$

Linéarité de la dérivation

Soit I, J intervalles réels. Soit $\varphi : J \rightarrow I$ et $f : I \rightarrow E$. Soit $a \in J$. On suppose que $\begin{cases} \bullet & \varphi \text{ est dérivable en } a \\ \bullet & f \text{ dérivable en } \varphi(a) \end{cases}$ Alors $f \circ \varphi$ est dérivable en a et on a :

$$(f \circ \varphi)'(a) = \varphi'(a) f'(\varphi(a))$$

Dérivabilité d'une fonction composée

Soit E et F deux $\mathbf{K}$ -evn de dimensions finies, $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $f : I \rightarrow E$ et $a \in I$. Si f est dérivable en a , alors $u \circ f$ est dérivable en a et on a

$$(u \circ f)'(a) = (u \circ f')(a) = u(f'(a))$$

Dérivabilité d'une fonction composée avec une application linéaire

Soit E, F et G trois $\mathbf{K}$ -evn de dimensions finies, $B : E \times F \rightarrow G$ une application bilinéaire et $f : I \rightarrow E$, $g : I \rightarrow F$ deux fonctions dérivables en $a \in I$. Alors l'application $B(f, g) : x \mapsto B(f(x), g(x))$ est dérivable en a et on a

$$B(f, g)'(a) = B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a))$$

Dérivabilité d'un « produit » de deux fonctions

Soit $E_1, \dots, E_p$ et F des espaces vectoriels normés de dimensions finies, et soit $M : E = E_1 \times \dots \times E_p \rightarrow F$ une application p -linéaire. Soit, pour chaque $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $f_j : I \rightarrow E_j$ une application dérivable en $a \in I$. Alors $M(f_1, \dots, f_p)$ est dérivable en a , de dérivée :

$$\sum_{i=1}^p M(f_1(a), \dots, f'_i(a), \dots, f_p(a)).$$

Dérivabilité d'une application multilinéaire et d'applications dérivables

Applications de classe $\mathcal{C}^k$

Soit $f : I \rightarrow E$ et $k \in \mathbf{N}$ un entier naturel. f est dite de classe :

- $\mathcal{C}^0$ sur I lorsqu'elle est continue sur I ,
- $\mathcal{C}^{k+1}$ sur I lorsque f est dérivable sur I et f' est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I ,
- $\mathcal{C}^\infty$ sur I lorsque f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I pour tout $k \in \mathbf{N}$.

On note $\mathcal{C}^k(I, E)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ de I vers E .

Si $f \in \mathcal{C}^k(I, E)$, avec $k \geq 2$, on définit les **dérivées successives** de f par

$$f^{(0)} = f \text{ et } \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, f^{(i)} = (f^{(i-1)})'.$$

On note aussi $D^k f$, ou $\frac{d^k f}{dx^k}$, au lieu de $f^{(k)}$.

Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(f_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ les fonctions coordonnées de f relativement à cette base : pour tout $x \in I$, $f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) e_i$.

f est de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans E ssi chaque fonction coordonnée de f est de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans $\mathbb{K}$. On a alors pour tout $p \in \llbracket 1, k \rrbracket$,

$$\forall x \in I, f^{(p)}(x) = \sum_{i=1}^n f_i^{(p)}(x) e_i$$

Caractérisation des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ par les coordonnées

Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Soit E, F et G trois evn de dimensions finies, $B : E \times F \rightarrow G$ une application bilinéaire, $f : I \rightarrow E$ et $g : I \rightarrow F$ fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Alors $B(f, g) \in \mathcal{C}^k(I, G)$ et pour tout $p \in \llbracket 0, k \rrbracket$:

$$[B(f, g)]^{(p)} = \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} B(f^{(i)}, g^{(p-i)})$$

Formule de Leibniz

Soit $f, g : I \rightarrow E$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$. Alors, pour tout couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ de scalaires, $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ dans I et

$$\forall p \in \llbracket 0, k \rrbracket, (\lambda f + \mu g)^{(p)} = \lambda f^{(p)} + \mu g^{(p)}$$

Linéarité des dérivées successives

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $\varphi : J \rightarrow I$ et $f : I \rightarrow E$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, alors

La fonction composée $f \circ \varphi : J \rightarrow E$ est de classe $\mathcal{C}^k$.

Composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Intégration sur un segment des fonctions vectorielles

Dans tout ce chapitre E est un evn de dim. finie n .

Intégrale sur un segment d'une fonction CPM

Soit (a, b) un couple de réels tels que $a < b$, on pose $J = [a, b]$. Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Étant donné $f : J \rightarrow E$ une fonction CPM on note

$(j_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ les coordonnées de f dans cette base de sorte que $f = \sum_{i=1}^n f_i e_i$. On

l'appelle **intégrale de f sur J** le vecteur :

$$\int_J f = \int_J f_1 e_1 + \dots + \int_J f_n e_n = \sum_{i=1}^n \int_J f_i e_i$$

Intégrale d'une fonction continue par morceaux à valeurs vectorielles

On vérifie que le vecteur $\sum_{i=1}^n \int_J f_i e_i$ est indépendant de la base e de E choisie.

Propriétés de l'intégrale

Soit f et g deux fonctions CPM sur J et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, alors :

$$\int_J (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_J f + \mu \int_J g$$

Linéarité de l'intégrale

$$\text{Soit } L \in \mathcal{L}(E, F), L \left(\int_J f \right) = \int_J L(f).$$

Intégrale de la composée par une application linéaire

$$\left\| \int_J f \right\| \leq \int_J \|f\|$$

Inégalité triangulaire

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et f CPM de I dans E . Pour $(a, b) \in I^2$, on appelle **intégrale entre a et b de f** et on note : $\int_a^b f(t) dt$ le vecteur de E défini par :

- si $a < b$, $\int_a^b f(t) dt = \int_{[a,b]} f$;
- si $a > b$, $\int_a^b f(t) dt = - \int_{[b,a]} f$;
- si $a = b$, $\int_a^b f(t) dt = 0$. Soit $f : I \rightarrow E$ une fonction continue par morceaux. Pour tout $(a, b, c) \in I^3$,

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

Relation de Chasles

Sommes de Riemann

Soit f CPM de $J = [a, b]$ dans E . On appelle **somme de Riemann** de f sur

$[a, b]$ un vecteur de la forme : $S_n(f, \alpha) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\alpha_k)$,

où, notant $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\alpha = (\alpha_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ vérifie : $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\alpha_k \in [x_k, x_{k+1}]$.

Si f est continue sur $[a, b]$ alors toute suite de sommes de Riemann $(S_n(f, \alpha))$

associées à f converge vers $\int_{[a,b]} f$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Intégrale fonction de sa borne supérieure

Soit $f : I \rightarrow E$ une application continue et $a \in I$. Alors

- $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a .
- Soit G une primitive de f sur I , on a : $\forall x \in I$, $\int_a^x f(t) dt = G(x) - G(a)$.

Soit $f : [a, b] \rightarrow E$ continue et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$ (avec $a < b$).

Si $\|f'\| \leq M$ alors $\|f(b) - f(a)\| \leq M(b-a)$

Inégalité des accroissements finis

Formules de Taylor

Soit $f : I \rightarrow E$ de classe $\mathcal{C}^n$, $a \in I$. On note $R_{n,a}$ le reste d'ordre n de la série de Taylor de f en a .

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_{n,a}(x)$$

Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, E)$, alors

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

Formule de Taylor avec reste intégral.

Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, E)$ et $\|f^{(n+1)}\| \leq M$, alors pour tout $x \in I$, $\|R_n(x)\| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$

Inégalité de Taylor-Lagrange

Si $f \in \mathcal{C}^n(I, E)$, alors pour tout $x \in I$, $R_n(x) = o_{x \rightarrow a}(|x-a|^n)$

Formule de Taylor-Young

Intégration sur un intervalle

Dans ce chapitre, les fonctions considérées sont CPM sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Intégrales généralisées sur $[a, +\infty[$

Pour f CPM sur $[a, +\infty[$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ (ou $\int_a^{+\infty} f$) est **convergente**

(CV) lorsque $\int_a^x f(t) dt$ a une limite quand x tend vers $+\infty$; on a alors :

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt.$$

Dans le cas contraire, l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est dite **divergente**.

Soit f **continue** sur $[a, +\infty[$. Si $\int_a^{+\infty} f$ converge, alors pour tout $x \geq a$,

$\int_x^{+\infty} f$ converge. De plus, $F : x \mapsto \int_x^{+\infty} f$ est dérivable sur $[a, +\infty[$ avec : $\forall x \geq a, F'(x) = -f(x)$.

Si f est CPM et à valeurs positives sur $[a, +\infty[$, $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge si et ssi $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est majorée.

En cas de divergence, on écrit : $\int_a^{+\infty} f = +\infty$.

Si f et g sont deux fonctions CPM sur $[a, +\infty[$ t. q. $0 \leq f \leq g$, la convergence de $\int_a^{+\infty} g$ implique celle de $\int_a^{+\infty} f$.

Convergence par majoration

Exemples :

- $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$, dite de Riemann, est convergente et vaut $\frac{1}{\alpha - 1}$ si et ssi $\alpha > 1$.
- $\int_0^{+\infty} e^{-at} dt$ est convergente et vaut $\frac{1}{a}$ si et ssi, $a > 0$.

_____ **Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$** _____

Une fonction f est **intégrable** sur $[a, +\infty[$ si elle est CPM sur $[a, +\infty[$ et si $\int_a^{+\infty} |f|$ converge.

On dit indifféremment que « f est intégrable sur $[a, +\infty[$ » ou que « l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge absolument » ou même que « f est intégrable en $+\infty$ ».

Pour f de signe constant, $\int_a^{+\infty} f$ converge si et ssi f est intégrable sur $[a, +\infty[$.

Un calcul montrant que $\int_a^{+\infty} |f| < +\infty$ vaut intégrabilité.

Si f est intégrable sur $[a, +\infty[$, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge.

La convergence absolue entraîne la convergence

Pour f et g deux fonctions CPM sur $[a, +\infty[$:

- si $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(g(t))$, alors l'intégrabilité de g en $+\infty$ implique celle de f ;
- si $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} g(t)$, alors l'intégrabilité de g en $+\infty$ est équivalente à celle de f .

Intégrabilité et comparaisons

Le premier résultat s'applique évidemment lorsque $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(g(t))$ ou lorsque $|f| \leq |g|$;

Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

Soit f une fonction CPM sur un intervalle I .
Si I est :

- soit **non borné** ($] - \infty, a]$ ou $] - \infty, a[$ ou $[a, +\infty[$ ou $]a, +\infty[$)
- soit **borné** ($[a, b[$ ou $]a, b[$ ou $[a, b]$), **sans que f soit continue par morceaux sur le segment $[a, b]$,**

alors l'intégrale $\int_{\inf I}^{\sup I} f(t) dt$ est une **intégrale généralisée**.

Description des intégrales généralisées

Si f est une application CPM sur $[a, b[$ (b réel ou $+\infty$), l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ est **convergente** lorsque $\int_a^x f(t) dt$ a une limite finie quand x tend vers b , $x \in [a, b[$. Dans ce cas, on pose :

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt = \int_a^b f$$

Dans le cas contraire, l'intégrale généralisée est dite **divergente**.

La définition s'étend aux intervalles de la forme $]a, b]$ (a réel ou $-\infty$).

Si f est une application CPM sur $[a, b[$ (b réel ou $+\infty$), $\int_a^b f(t) dt$ converge si et ssi,

il existe c de $[a, b[$ tel que $\int_c^b f(t) dt$ est convergente. Alors, $\int_c^b f(t) dt$ est convergente pour tout $c \in [a, b[$ et on a la relation de Chasles : $\forall c \in [a, b[$,

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

La nature de $\int_a^b f(t) dt$ ne dépend que du comportement local de f en b

Si f est CPM sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ est **convergente** si et ssi il existe un réel c de $]a, b[$ pour lequel $\int_a^c f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ sont convergentes. Dans ce cas, on a la relation de Chasles :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

Dans le cas contraire, l'intégrale généralisée est dite **divergente**.

L'ensemble des applications f CPM sur un intervalle I telles que l'intégrale généralisée $\int_{\inf I}^{\sup I} f$ converge est un sev de l'ensemble des applications CPM sur I .

Si f et g sont dans cet ensemble et si λ est un scalaire :

$$\int_{\inf I}^{\sup I} (\lambda f + g) = \lambda \int_{\inf I}^{\sup I} f + \int_{\inf I}^{\sup I} g.$$

Linéarité

Soit f et g deux applications réelles CPM sur un intervalle I telles que $\int_{\inf I}^{\sup I} f$ et $\int_{\inf I}^{\sup I} g$ convergent.

- Si f est positive sur I , alors $\int_{\inf I}^{\sup I} f \geq 0$;
- Si $f \leq g$ sur I , alors $\int_{\inf I}^{\sup I} f \leq \int_{\inf I}^{\sup I} g$.

Positivité et croissance

Soit f et g deux application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$. Si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)g(x)$ existent et sont finies, alors les intégrales généralisées $\int_a^b f'g$ et $\int_a^b fg'$ sont de même nature. En cas de convergence, en notant

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)g(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)g(x) = [fg]_a^b :$$

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'.$$

Intégration par parties

La vérification du caractère fini des limites en a et b du produit est plus importante que la vérification des hypothèses de régularité des fonctions en cause.

Dans ce qui suit, α , β , a et b sont réels ou infinis.

Si $\varphi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$ et si $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ est continue, alors

$\int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(u) \varphi'(u) du$ est convergente si et ssi $\int_a^b f(t) dt$ est convergente et, si tel est le cas, elles sont égales.

Changement de variable

Si $\varphi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$ est une bijection strictement **décroissante** de classe $\mathcal{C}^1$, et en cas de convergence :

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(u) \varphi'(u) du = \int_b^a f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt.$$

— Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables —

Une fonction f CPM sur I a une intégrale sur I **absolument convergente** lorsque l'intégrale sur I de $t \mapsto |f(t)|$ est convergente.

Une intégrale absolument convergente est convergente.

La convergence absolue entraîne la convergence

Une fonction f est **intégrable** sur I si elle est CPM sur I et son intégrale sur I est absolument convergente.

On dit indifféremment que « f est intégrable sur $[a, b[$ » ou que « l'intégrale

$\int_a^b f$ converge absolument » ou même que « f est intégrable en b ».

_____ Espace vectoriel $L^1(I, \mathbb{K})$ _____

L'ensemble des fonctions intégrables sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un sev de l'espace des applications CPM sur I . On le note $L^1(I, \mathbb{K})$.

Si f est une fonction **continue, intégrable** et **positive** sur un intervalle I , et si $\int_I f = 0$, alors f est identiquement nulle sur I .

Intégrale nulle d'une fonction continue, intégrable et positive

_____ Comparaisons et fonctions de référence _____

Pour f et g deux fonctions CPM sur $]a, b]$:

- si $f(t) \underset{t \rightarrow a^+}{=} O(g(t))$, alors l'intégrabilité de g en a implique celle de f ;
- si $f(t) \underset{t \rightarrow a}{\sim} g(t)$, alors l'intégrabilité de f en a est équivalente à celle de g .

Adaptation du théorème de comparaison en une borne quelconque

- Le premier résultat s'applique évidemment lorsque $f(t) \underset{t \rightarrow a}{=} o(g(t))$ ou lorsque $|f| \leq |g|$;
- Ces résultats s'adaptent naturellement à un intervalle du type $] -\infty, a]$ ou $[a, b[$.

Si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\int_a^b \frac{dx}{|x-a|^\alpha}$ converge si et ssi $\alpha < 1$.

Intégrale de Riemann en a

- Plus généralement, f est intégrable en a^+ (respectivement en b^-) si $t \mapsto f(a+t)$ (respectivement $t \mapsto f(b-t)$) l'est en 0^+ .

_____ Intégration des relations de comparaison _____

Soit a et b éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$. Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ et $g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}_+$ des fonctions CPM.

- On suppose que g est **intégrable**.

Si $f(x) = \mathcal{O}_{x \rightarrow b}(g(x))$, alors f est intégrable

$$\text{et } \int_x^b f(t) dt = \mathcal{O}_{x \rightarrow b} \left(\int_x^b g(t) dt \right)$$

Intégration d'une relation de domination

Si $f(x) = o_{x \rightarrow b}(g(x))$, alors f est intégrable

$$\text{et } \int_x^b f(t) dt = o_{x \rightarrow b} \left(\int_x^b g(t) dt \right)$$

Intégration d'une relation de négligeabilité

Si $f(x) \sim_{x \rightarrow b} g(x)$, alors f est intégrable et

$$\int_x^b f(t) dt \sim_{x \rightarrow b} \left(\int_x^b g(t) dt \right)$$

Intégration d'une relation d'équivalence

- On suppose que g est **non intégrable**.

Si $f(x) = \mathcal{O}_{x \rightarrow b}(g(x))$, alors

$$\int_a^x f(t) dt = \mathcal{O}_{x \rightarrow b} \left(\int_a^x g(t) dt \right)$$

Intégration d'une relation de domination

Si $f(x) = o_{x \rightarrow b}(g(x))$, alors

$$\int_a^x f(t) dt = o_{x \rightarrow b} \left(\int_a^x g(t) dt \right)$$

Intégration d'une relation de négligeabilité

Si $f(x) \sim_{x \rightarrow b} g(x)$, alors f est non intégrable

$$\text{et } \int_a^x f(t) dt \sim_{x \rightarrow b} \left(\int_a^x g(t) dt \right)$$

Intégration d'une relation d'équivalence

Intégrales dépendant d'un paramètre

Théorème de convergence dominée

Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'applications de I dans $\mathbf{K}$. On suppose que :

- Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f_n : I \rightarrow \mathbf{K}$ est CPM sur I .
- $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f CPM sur I .
- Il existe une fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbf{R}^+$ CPM et intégrable sur I telle que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, |f_n| \leq \varphi$$

Alors f est intégrable sur I et

$$\int_I f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I f$$

Théorème de la convergence dominée

Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in J}$, où J est un intervalle de $\mathbf{R}$, une famille de fonctions CPM de I dans $\mathbf{K}$. Soit a un point adhérent à J . Si :

- Pour tout $t \in I$, $f_\lambda(t) \xrightarrow{\lambda \rightarrow a} \ell(t)$;
- pour tout $\lambda \in J$, $t \mapsto f_\lambda(t)$ et $t \mapsto \ell(t)$ sont CPM sur I ;
- il existe une fonction φ intégrable sur I telle que :

$$\forall (\lambda, t) \in J \times I, |f_\lambda(t)| \leq \varphi(t) ;$$

alors ℓ est intégrable sur I et :

$$\int_I f_\lambda(t) dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow a} \int_I \ell(t) dt$$

Extension du théorème de la convergence dominée

Intégration terme à terme d'une série de fonctions

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications de I dans $\mathbf{R}^+$. On suppose que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : I \rightarrow \mathbf{K}$ est CPM et intégrable sur I .
- La série $\sum f_n$ converge simplement et a pour somme une fonction CPM sur I , S .

Alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I , et

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$$

Intégration terme à terme des fonctions positives

En particulier, l'intégrabilité de $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur I équivaut à $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt$.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications de I dans $\mathbf{K}$. On suppose que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : I \rightarrow \mathbf{K}$ est CPM et intégrable sur I .
- La série $\sum f_n$ converge simplement et a pour somme une fonction CPM, S .
- La série $\sum \int_I |f_n|$ converge.

Alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I , et

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$$

Intégration terme à terme

Continuité sous le signe $\int$

Soit $f : A \times I \rightarrow \mathbf{K}$, où A est une partie d'un espace normé de dimension finie. On suppose que :

- Pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x, t)$ (ou $f(x, \cdot)$) est CPM sur I .
- Pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x, t)$ (ou $f(\cdot, t)$) est continue sur A .
- Pour tout compact K contenu dans A , il existe une fonction $\varphi_K : I \rightarrow \mathbf{K}$ CPM et intégrable sur I telle que

$$\forall (x, t) \in K \times I, |f(x, t)| \leq \varphi_K(t)$$

Alors

La fonction $g : A \rightarrow \mathbf{K}$ définie sur A par

$$g(x) = \int_I f(x, t) dt$$
 est continue sur A .

Continuité d'une intégrale à paramètre

_____ Dérivation sous le signe $\int$: formule de Leibniz _____

Soit I et A des intervalles de $\mathbf{R}$, $f : A \times I \rightarrow \mathbf{K}$. On suppose que :

- pour tout $t \in I$, $f(., t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A ;
- Pour tout $x \in A$, $f(x, .)$ est intégrable sur I et $\frac{\partial f}{\partial x}(x, .)$ est CPM sur I .
- Il existe une fonction φ intégrable sur I telle que :

$$\forall x \in A, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, .) \right| \leq \varphi$$

Alors $g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et

$$\forall x \in A, g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$$

Dérivabilité d'une intégrale à paramètre

Le caractère $\mathcal{C}^1$ étant une *propriété locale*, il suffit de vérifier les hypothèses de domination sur tout **segment inclus dans** A , ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

_____ Caractère $\mathcal{C}^k$ sous le signe $\int$ _____

Soit $k \in \mathbf{N}^* \cup \{+\infty\}$. Soit I et A des intervalles de $\mathbf{R}$ et $f : A \times I \rightarrow \mathbf{K}$. On suppose que :

- pour tout $t \in I$, $f(., t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur A ;
- pour tout $x \in A$ et tout $p \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $f(x, .)$ et, pour tout $p \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, $\text{frac} \partial^p f \partial x^p(x, .)$ sont intégrables sur I ;
- il existe une fonction positive φ_k intégrable sur I telle que :

$$\forall x \in A, \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, .) \right| \leq \varphi_k$$

Alors $g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur A et, $\forall x \in A, \forall p \in \llbracket 1, k \rrbracket$,

$$g^{(p)}(x) = \int_I \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x, t) dt$$

Caractère $\mathcal{C}^k$ d'une intégrale à paramètre

Le caractère $\mathcal{C}^k$ étant une *propriété locale*, il suffit de vérifier l'hypothèse de domination sur tout **segment inclus dans** J , ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Probabilités

Espaces probabilisés

Ensembles dénombrables

Un ensemble est dit (au plus) **dénombrable** s'il est en bijection avec (une partie de) $\mathbf{N}$.

Un ensemble E est au plus dénombrable s'il peut être décrit en extension sous la forme $E = \{x_n, n \in I\}$, où $I \subset \mathbf{N}$.

- Le produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.
- Une union au plus dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.
- Une partie d'un ensemble dénombrable est dénombrable.
- $\mathbf{N}^p$ ($p \in \mathbf{N}^*$), $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Q}$ sont dénombrables.
- Le support d'une famille sommable de nombres complexes est dénombrable.
- $\mathbf{R}$ n'est pas dénombrable.

Espace probabilisable

L'ensemble Ω des résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé **l'univers** associé à celle-ci, les éléments de Ω les **éventualités**.

Une **tribu** sur Ω une partie $\mathcal{A}$ de l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω telle que :

- $\Omega \in \mathcal{A}$;
- $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire, i.e. pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\bar{A} \in \mathcal{A}$;
- $\mathcal{A}$ est stable par réunion dénombrable, i.e.

pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ appartient à $\mathcal{A}$.

Les éléments de $\mathcal{A}$ s'appellent **événements**.

L'événement $\bar{A} = \Omega \setminus A$ est **l'événement contraire** de l'événement A . Ω est **l'événement certain**, $\emptyset$ **l'événement impossible**. Deux événements sont **incompatibles** lorsque leur intersection est l'événement impossible.

Si $\mathcal{A}$ est une tribu, alors :

- $\emptyset \in \mathcal{A}$.
- Toute réunion finie ou dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$ appartient à $\mathcal{A}$.
- Toute intersection finie ou dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$ appartient à $\mathcal{A}$.

Un couple $(\Omega, \mathcal{A})$, où $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω , s'appelle un **espace probabilisable**.

Espace probabilisé

On appelle **probabilité** sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{R}_+$ telle que :

- $P(\Omega) = 1$, et
- Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'événements deux à deux disjoints,

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

Additivité dénombrable ou σ -additivité

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est appelé **espace probabilisé**.

Si P est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$, alors, pour tout $(A, B) \in \mathcal{A}^2$,

- $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$;
- $P(\emptyset) = 0$;
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;
- si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$;
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
- $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$.

Propriétés élémentaires des probabilités

Si $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite croissante d'événements, alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

Continuité croissante

Si $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite décroissante d'événements, alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

Continuité décroissante

Application : pour une suite $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'événements (non nécessairement monotone), les suites $\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right)_{n \in \mathbf{N}}$ et $\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right)_{n \in \mathbf{N}}$ sont respectivement croissante et décroissante. On a donc :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) &= P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right) &= P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \end{aligned}$$

Applications des continuités croissantes et décroissantes

Soit $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'événements telle que $\sum P(A_n)$ converge. Alors :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

Sous-additivité dénombrable

• Un événement A tel que $P(A) = 0$ (resp. $P(A) = 1$) est un **événement négligeable** (resp. **presque sûr**).

• Un **système complet** (resp. **quasi complet**) **dénombrable d'événements** est une famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles et dont l'union

est égale à Ω (resp. telle que : $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1$).

Une réunion (resp. intersection) finie ou dénombrable d'événements négligeables (resp. presque sûrs) est un événement négligeable (resp. presque sûr).

Probabilités conditionnelles

Soit A et B événements avec $P(B) > 0$. On définit

$$P(A | B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Probabilité conditionnelle de A sachant B

- $P_B : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{R}_+$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
- Si B est négligeable, on pose par convention $P(A | B) = 0$.

Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'événements tels que $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$. Alors

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1) \times P(A_2 | A_1) \times \dots \times P(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Formule des probabilités composées

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système complet ou quasi complet d'événements. Alors, pour tout événement B , la série $\sum P(B \cap A_n)$ converge et, avec la convention : si $P(A_n) = 0$, alors $P(A_n)P(B | A_n) = 0$, on a :

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)P(B | A_n) \end{aligned}$$

Formule des probabilités totales

Soit A et B deux événements, tous deux non négligeables. Alors :

$$P(A | B) = \frac{P(A)P(B | A)}{P(B)}$$

Formule de Bayes

Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet ou quasi complet d'événements non négligeables, $k \in I$. Alors, pour tout événement non négligeable B

$$P(A_k | B) = \frac{P(A_k)P(B | A_k)}{\sum_{i \in I} P(A_i)P(B | A_i)}$$

Formule de Bayes généralisée

Événements indépendants

Deux événements sont **indépendants** lorsque : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

- Si $P(B) > 0$, alors A et B sont indépendants si et ssi $P_B(A) = P(A)$.

Si A et B sont indépendants, A et $\bar{B}$ le sont aussi.

$(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une **famille d'événements indépendants** lorsque, pour toute partie J non vide de $\llbracket 1, n \rrbracket$:

$$P\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} P(A_i)$$

Famille finie d'événements indépendants

Si $(A_1, \dots, A_n)$ est une famille finie d'événements indépendants, les A_i sont deux à deux indépendants ; la réciproque est fausse lorsque $n \geq 3$.

Espaces probabilisés discrets

Si Ω est un ensemble, une **distribution de probabilités discrètes** sur Ω est une famille d'éléments de $\mathbf{R}^+$ indexée par Ω et de somme 1.

Ω est alors le **support d'une distribution de probabilités discrètes**.

Le support d'une distribution de probabilités discrètes est au plus dénombrable.

Dénombrabilité du support d'une distribution de probabilités discrètes

Si Ω est le support d'une distribution de probabilités discrètes $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$, alors l'application $P : \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbf{R}^+$ définie par : $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), P(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$ est une probabilité $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Probabilité associée à une distribution de probabilités discrètes

Si Ω est au plus dénombrable, toute probabilité sur Ω est définie par une distribution de probabilités discrètes sur cet ensemble.

Variables aléatoires discrètes

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé.

Variable aléatoire discrète et loi de probabilité associée

Une **variable aléatoire discrète** (v.a.d.) sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application X définie sur Ω telle que $X(\Omega)$ est au plus dénombrable et, pour tout $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A}$.

Si X est une v.a.d. :

- Pour $x \in X(\Omega)$, on note $(X = x)$ ou $\{X = x\}$, l'événement $X^{-1}(\{x\})$. $((X = x), x \in X(\Omega))$ est un système complet d'événements ;
- pour A partie de $X(\Omega)$, $(X \in A) = X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in A\} \in \mathcal{A}$, car $(X \in A)$ est la réunion au plus dénombrable des $(X = x)$, $x \in A$, qui sont dans $\mathcal{A}$.

- Lorsque X est à valeurs réelles (X est alors dite **réelle**),
 $(X \geq x) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \geq x\}.$

Soit X une v.a.d. sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que $X(\Omega) = \{x_n, n \in I\}$, où $I \subset \mathbb{N}$.

La suite $(p_n)_{n \in I}$, où :

$$\forall n \in I, p_n = P(X = x_n)$$

est une **distribution de probabilités discrètes** sur $X(\Omega)$.

Distribution de probabilités d'une v.a.d discrète

la loi de X est l'application P_X qui, à tout $A \subset X(\Omega)$, associe :

$$P_X(A) = P(X \in A) = \sum_{x \in A} P(X = x).$$

La loi de X peut, au besoin, être définie sur un ensemble contenant $X(\Omega)$.

$$X \sim Y$$

X et Y suivent la même loi

Si X est une variable aléatoire discrète et si f est une application de $X(\Omega)$ dans un ensemble F , alors $Z = f(X) = f \circ X$ est une variable aléatoire discrète.

Si $X \sim Y$, alors $f(X) \sim f(Y)$.

Images de deux v.a.d. suivant la même loi

Soit $A \subset X(\Omega)$ tel que $P(X \in A) > 0$, la **loi conditionnelle de Y sachant que $(X \in A)$** est la probabilité $P_{Y/A}$ sur $Y(\Omega)$ définie par :

$$\forall y_j \in Y(\Omega), P_{Y/A}(y_j) = P_A(Y = y_j) = \frac{P(A \cap (Y = y_j))}{P(A)}.$$

Couples de variables aléatoires discrètes

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A})$, (X, Y) , application de Ω dans $X(\Omega) \times Y(\Omega)$, est un **couple de variables aléatoires discrètes** sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Un couple de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeurs dans l'ensemble dénombrable $X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

Un couple de v.a.d. est une v.a.d.

La loi de probabilité de la v.a.d (X, Y) est la **loi conjointe de (X, Y)** .

Sa distribution de probabilités est définie par :

$$\forall (x_i, y_j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), P((X, Y) = (x_i, y_j)) = P(X = x_i, Y = y_j).$$

Les lois de X et Y sont les **lois marginales de (X, Y)** .

Si la loi conjointe est connue, alors les lois marginales le sont.

$\forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega) :$

$$P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x, Y = y)$$

$$P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x, Y = y).$$

La loi conjointe détermine les lois marginales

La réciproque est fausse.

On étend facilement ce qui précède à un n -uplet de v.a.d. sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Variables aléatoires discrètes indépendantes

Deux v.a.d. X et Y définies sur Ω sont **indépendantes**, si, pour tout $A \subset X(\Omega)$ et tout $B \subset Y(\Omega)$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.

Notation : $X \perp Y$.

Deux v.a.d. X et Y sont indépendantes si et ssi la distribution de probabilités de (X, Y) est donnée par : $\forall (x_i, y_j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$
 $P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$.

Distribution de probabilités de la loi conjointe de 2 v.a.d. indépendantes

n v.a.d. sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont **indépendantes** lorsque, pour tout $(A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \prod_{i=1}^n \mathcal{P}(X_i(\Omega))$, les événements $(X_i \in A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ sont indépendants.

n v.a.d. $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes si et ssi, la distribution de probabilités de $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est donnée par :

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \prod_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} X_i(\Omega),$$

$$P((X_i) = (x_i)) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i).$$

Distribution de probabilités de la loi conjointe de n v.a.d. indépendantes

$(X_i)_{i \in I}$ est **une famille quelconque de variables aléatoires indépendantes** si, pour toute partie finie J de I , $(X_j)_{j \in J}$ est une famille finie de variables aléatoires indépendantes.

Lemme des coalitions

Si $X \perp Y$ alors, pour toutes fonctions f et g définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$:

$$f(X) \perp g(Y).$$

Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors, pour toutes fonctions $f_1, f_2, \dots, f_n$, $f_1(X_1), f_2(X_2), \dots, f_n(X_n)$ sont indépendantes.

Fonctions de variables aléatoires indépendantes

Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes, si f et g sont des fonctions définies respectivement sur $X_1(\Omega) \times \dots \times X_p(\Omega)$ et $X_{p+1}(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$, alors $f(X_1, \dots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Lemme des coalitions

Plus généralement, si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et $n = n_1 + \dots + n_p$, alors $f_1(X_1, \dots, X_{n_1}), f_2(X_{n_1+1}, \dots, X_{n_1+n_2}), \dots, f_p(X_{n-n_p+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) lorsque c'est une suite de variables aléatoires indépendantes telles que les X_n suivent toutes la même loi.

Ainsi, le jeu de pile ou face infini (on jette indéfiniment une pièce en l'air et on note le résultat) est modélisé par une suite i.i.d. de variables de Bernoulli $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$ ($\frac{1}{2}$ si la pièce est équilibrée).

Lois discrètes usuelles

Soit $p \in]0, 1[$, la variable aléatoire X de Ω dans $\mathbb{N}$ suit la loi géométrique de paramètre p lorsque :

$$P(X = 0) = 0 \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}.$$

Loi géométrique $X \sim \mathcal{G}(p)$

- X s'interprète comme donnant le rang du premier succès lors d'une succession illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p .
- Si $X \sim \mathcal{G}(p)$ et si $k \in \mathbb{N}$, $P(X > k) = \sum_{j=k+1}^{+\infty} p(1 - p)^{j-1} = (1 - p)^k$.

La variable aléatoire X de Ω dans $\mathbb{N}$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ lorsque :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}.$$

Loi de Poisson $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

- On a bien : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \geq 0$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = 1$.
- Si on considère une épreuve répétée un très grand nombre de fois, avec une probabilité de succès très faible, λ le nombre moyen de succès et X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès, alors X suit approximativement la loi de Poisson de paramètre λ : la loi de Poisson est la loi des événements rares.

Espérance d'une variable aléatoire discrète

L'espérance d'une variable aléatoire discrète X à valeurs dans $[0, +\infty]$ est :

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x).$$

On adopte la convention $x P(X = x) = 0$ si $x = +\infty$ et $P(X = +\infty) = 0$.

X , v.a.d. réelle ou complexe est d'espérance finie lorsque la famille $(x P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas, sa somme est l'espérance de X .

v.a.d. d'espérance finie ou $X \in L^1$

Une v.a.d. d'espérance finie est dite **centrée** lorsque son espérance est nulle. Pour X v.a.d. à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$:

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n).$$

Espérance d'une v.a.d. à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$

- Pour $p \in]0, 1[$, si $X \sim \mathcal{G}(p)$, $E(X) = \frac{1}{p}$;
- Pour $\lambda > 0$, si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $E(X) = \lambda$.

Espérances des lois usuelles

Théorème de transfert

Si X est une variable aléatoire discrète et f une application numérique définie sur l'image $X(\Omega)$ de X , alors $f(X)$ est d'espérance finie si et ssi la famille $\{f(x) P(X = x)\}_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas :

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) P(X = x).$$

Formule de transfert

Linéarité, positivité et croissance de l'espérance

Soit X et Y deux v.a.d. réelles d'espérances finies.

- $\forall \lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda X + Y$ est d'espérance finie et $E(\lambda X + Y) = \lambda E(X) + E(Y)$: l'espérance est linéaire.
- Si $X \geq 0$, alors : $E(X) \geq 0$: l'espérance est positive.
- En conséquence, si $X \leq Y$, alors $E(X) \leq E(Y)$: l'espérance est croissante.

Si $|X| \leq Y$ et si $Y \in L^1$, alors $X \in L^1$.

Comparaison et espérance finie

Si X est positive et d'espérance nulle, alors $(X = 0)$ est presque sûr.

v.a.d. positive d'espérance nulle

Si X et Y sont dans L^1 et indépendantes, alors XY est dans L^1 et $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Espérance du produit de deux v.a.d. indépendantes

Variance, écart-type d'une variable aléatoire discrète réelle

Si X^2 est d'espérance finie (on dit $X \in L^2$), alors X est d'espérance finie.

$$L^2 \subset L^1$$

Si X et Y sont dans L^2 , alors XY est dans L^1 et :

$$E(XY)^2 \leq E(X^2) E(Y^2).$$

L'égalité a lieu si et ssi il existe un réel t tel que $(X + tY = 0)$ est presque sûr.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Si $X \in L^2$, on pose :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Variance de X

$$V(X) = E((X - E(X))^2)$$

Formule de Koenig-Huyghens

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ est appelé l'**écart-type** de X .

$$\forall (a, b) \in \mathbf{R}^2, V(aX + b) = a^2 V(X).$$

Une v.a.d. est réduite lorsque sa variance vaut 1.

Si $V(X) > 0$, $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors $X \in L^2$ et $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors $X \in L^2$ et $V(X) = \lambda$.

Variances des loi usuelles

Covariance de deux v.a.d. réelles

Si X et Y sont L^2 , leur **covariance** est :

$$\text{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) .$$

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$$

Symétrie de la covariance

$$\text{Cov}(\lambda X + X', Y) = \lambda \text{Cov}(X, Y) + \text{Cov}(X', Y)$$

Bilinéarité de la covariance

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Autre expression de la covariance

Si X et Y sont deux v.a.d. indépendantes, alors $\text{Cov}(X, Y) = 0$. Réciproquement, si $\text{Cov}(X, Y) = 0$, on dit que X et Y sont **décorrélées**, mais elles ne sont pas nécessairement indépendantes.

Soit $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille finie de variables aléatoires réelles de L^2 :

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + \sum_{\substack{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \\ i \neq j}} (E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j)).$$

Si les X_i sont, de plus, **deux à deux décorrélées** :

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i).$$

Variance de la somme de v.a.d. décorrélées

Inégalités probabilistes et loi faible des grands nombres

Si X v.a.d. positive d'espérance finie :

$$\forall t > 0, P(X \geq t) \leq \frac{E(X)}{t}$$

Inégalité de Markov

Si X v.a.d. réelle telle que $X \in L^2$:

$$\forall \varepsilon > 0, P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Si $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite i.i.d. de v.a. de variance finie, si $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $m = E(X_1)$ et $\sigma = \sigma(X_1)$, alors, $\forall \varepsilon > 0$,

$$P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Inégalité de concentration

Par suite, $P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Loi faible des grands nombres

Fonctions génératrices

Si X est une v.a. à valeurs dans $\mathbf{N}$, alors le rayon de convergence R_X de la série entière $\sum P(X = n)t^n$ est au moins égal à 1.

La fonction génératrice d'une v.a. X à valeurs dans $\mathbf{N}$ est :

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n$$

$t \in]-R_X, R_X[$.

La série entière $\sum P(X = n)t^n$ converge normalement sur $[-1, 1]$, donc G_X est continue au moins sur $[-1, 1]$.

Continuité d'une fonction génératrice

Si X est une v.a. à valeurs dans $\mathbf{N}$ de fonction génératrice $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$, alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $P(X = n) = a_n$.

Si deux v.a. ont même fonction génératrice, alors elles ont même loi de probabilité.

La fonction génératrice caractérise la loi de la v.a.d.

X admet une espérance si et ssi G_X est dérivable en 1, et alors : $E(X) = G'_X(1)$.

Calcul de l'espérance à l'aide de la fonction génératrice

X admet une variance si et ssi G_X est deux fois dérivable en 1, et alors :

$$V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2.$$

Calcul de la variance à l'aide de la fonction génératrice

Si X et Y sont deux v.a. à valeurs dans $\mathbf{N}$ **indépendantes**, alors :

$$G_{X+Y} = G_X \times G_Y.$$

Fonction génératrice de la somme de 2 v.a.d. indépendantes

Si $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est une famille de v.a. indépendantes à valeurs dans $\mathbf{N}$, alors :

$$G_{\sum_{i=1}^n X_i} = \prod_{i=1}^n G_{X_i}$$

Fonction génératrice de la somme de n v.a.d. indépendantes

Si $p \in]0, 1[$ et $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors :

$$\forall t \in \mathbf{R}, G_X(t) = 1 - p + pt.$$

Si $n \geq 2, p \in]0, 1[$ et $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors :

$$\forall t \in \mathbf{R}, G_X(t) = (1 - p + pt)^n.$$

Si $p \in]0, 1[$ et $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors :

$$R_X = \frac{1}{1-p} > 1 \text{ et}$$

$$G_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1} t^n$$

$$= \frac{pt}{1 - (1-p)t}.$$

Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors : $R_X = +\infty$ et

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} t^n = e^{\lambda(t-1)}.$$

**Fonctions génératrices
des lois usuelles**

***La théorie des probabilités, n'est, au fond,
que le bon sens réduit au calcul.***

Pierre-Simon Laplace

Calcul différentiel

Équations différentielles linéaires

I désigne un intervalle de $\mathbf{R}$, E un evn de dim. finie n sur $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Équations différentielles linéaires d'ordre 1

On considère l'équation différentielle linéaire (EDL) d'ordre 1 :

$$x' = a(t).x + b(t) \quad (E_1)$$

où $a : I \rightarrow \mathcal{L}(E)$ et $b : I \rightarrow E$ sont des applications continues. La fonction b est appelée le **second membre** de (E_1) , $x : I \rightarrow E$ est l'inconnue.

On appelle équation **homogène** associée à (E) l'équation différentielle :

$$x' = a(t).x \quad (E_1)$$

L'équation (E_1) s'appelle alors l'équation **complète**.

Une **solution sur** I de (E_1) est une application $x : I \rightarrow E$ dérivable et telle que : $\forall t \in I, x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t)$.

Toute solution de (E_1) sur I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

Si x_1 (resp. x_2) est une solution sur I de $x' = a(t).x + b_1(t)$ (resp. $x' = a(t).x + b_2(t)$), alors, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2, \lambda x_1 + \mu x_2$ est une solution de $x' = a(t).x + \lambda b_1(t) + \mu b_2(t)$.

Principe de superposition

Forme matricielle : système différentiel linéaire

Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Notant $\forall t \in I, A(t) = \mathbf{Mat}_e(a(t)) = (a_{i,j}(t))_{1 \leq i,j \leq n}$, $B(t) = (b_i(t))_{1 \leq i \leq n}$ la matrice-colonne de $b(t)$ en base e , et enfin $X(t) = (x_i(t))_{1 \leq i \leq n}$ la matrice-colonne de $x(t)$ en base e , (E_1) se traduit par : $X' = A(t)X + B(t)$; ou encore par :

$$\begin{cases} x'_1(t) = a_{1,1}(t)x_1(t) + \dots + a_{1,j}(t)x_j(t) + \dots + a_{1,n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\ \vdots \\ x'_i(t) = a_{i,1}(t)x_1(t) + \dots + a_{i,j}(t)x_j(t) + \dots + a_{i,n}(t)x_n(t) + b_i(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) = a_{n,1}(t)x_1(t) + \dots + a_{n,j}(t)x_j(t) + \dots + a_{n,n}(t)x_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

Problème de Cauchy

a, b, x étant définies comme ci-dessus, un **problème de Cauchy** est un système S_0 $\left\{ \begin{array}{l} x' = a(t).x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right.$, où t_0 est fixé dans I et x_0 dans E .

$x \in \mathbf{C}^1(I, E)$ est solution sur I de S_0 si et ssi $x \in \mathbf{C}^0(I, E)$ vérifie :

$$\forall t, x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (a(s)(x(s)) + b(s)) \, ds$$

Forme intégrale d'un problème de Cauchy

EDL scalaires d'ordre n

On appelle **équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n** une équation du type :

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t) \quad (E_n)$$

où $(a_0, \dots, a_{n-1})$ est un n -uplet d'applications continues de I dans $\mathbf{K}$ et b une application de I dans $\mathbf{K}$, fixés.

On appelle **solution** (sur I) de cette équation différentielle toute application $x : I \rightarrow \mathbf{K}$ n -fois dérivable dans I et telle que :

$$\forall t \in I, x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = b(t).$$

L'équation **homogène associée** à (E_n) est :

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0 \quad (H_n)$$

x est solution de (E_n) [resp. (H_n)] si et ssi la matrice colonne des dérivées successives de $x : X = \begin{pmatrix} x & x' & \dots & x^{(n-1)} \end{pmatrix}^\top$ est solution de l'équation différentielle linéaire : $X' = A(t)X + B(t)$, (resp. $X' = A(t)X$), où

$$\forall t \in I, A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \dots & \dots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \text{ et } B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

Soit $t_0 \in I$ et $X_0 = (x_i)_{0 \leq i \leq n-1} \in \mathbf{K}^n$ fixés.

Le système

$\left\{ \begin{array}{l} (E_n) \\ \forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, x^{(i)}(t_0) = x_i \end{array} \right.$
est un problème de Cauchy pour (E_n) .

Pb de Cauchy pour une EDL scalaire d'ordre n

Solutions d'une équation différentielle linéaire

Soit $a \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(E))$, $b \in \mathcal{C}(I, E)$. Soit $(t_0, x_0) \in I \times E$.

Le problème de Cauchy

$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \quad x' = a(t)(x) + b(t) \\ \bullet \quad x(t_0) = x_0 \end{array} \right.$
possède une unique solution sur I .

Théorème de Cauchy linéaire

Bien noter les hypothèses de continuité sur les coefficients.

Soit $A \in \mathcal{C}(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$, $B \in \mathcal{C}(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$. Soit $(t_0, X_0) \in I \times \mathbb{K}^n$.

Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \bullet & X' = A(t)X + B(t) \\ \bullet & X(t_0) = X_0 \end{cases}$$
 possède une unique solution sur I .

Adaptation du théorème de Cauchy linéaire aux systèmes différentiels linéaires

Soit $(a_0, \dots, a_{n-1})$ un n -uplet d'applications continues de I dans $\mathbb{K}$ et b une application de I dans $\mathbb{K}$. Soit $(t_0, X_0 = (x_i)_{1 \leq i \leq n}) \in I \times \mathbb{K}^n$.

Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \bullet & (E_n) \\ \bullet & \forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, x^{(i)}(t_0) = x_i \end{cases}$$
 possède une unique solution sur I .

Adaptation du théorème de CL aux ED scalaires d'ordre n

• Solutions de l'équation homogène

L'ensemble $S_I(H_1)$ des solutions sur I de (H_1) est un sev de $\mathcal{C}^1(I, E)$ isomorphe à E . Plus précisément, étant donné $t_0 \in I$, l'application de $S_I(H_1)$ dans E , qui à $x \in S_I(H)$ associe $x(t_0)$ est un isomorphisme.

En particulier $\dim S_I(H) = n = \dim E$. Du fait de son interprétation matricielle, une équation différentielle scalaire homogène d'ordre n admet un espace de solutions de dimension n .

• Solutions de l'équation complète

L'ensemble $S_I(E_1)$ des solutions sur I de l'équation complète (E_1) est un sous-espace affine de l'espace $\mathcal{C}^1(I, E)$, de direction $S_I(H)$. Plus précisément, si x_p est un élément fixé de $S_I(E_1)$, (i.e. une *solution particulière* de (E_1) sur I), alors $S_I(E_1)$ est le sous-espace affine : $S_I(E_1) = x_p + S_I(H_1)$.

On appelle système fondamental de solutions de (H_1) (en abrégé SFS) toute base $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ de l'ev $S_I(H_1)$, i.e. toute famille libre $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ de n éléments de $S_I(H_1)$.

Exemple de l'EDL scalaire d'ordre 1 non normalisée :

$$a(t)x' + b(t)x = c(t), \text{ où } a, b \text{ et } c \text{ sont dans } \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$$

On suppose de plus que a ne s'annule pas sur I . L'ensemble des solutions est la droite affine $x_p + \text{Vect}(\varphi_1)$, où x_p est une solution particulière de l'équation complète et $\text{Vect}(\varphi_1)$ la droite vectorielle des solutions de l'équation homogène associée : $\varphi_1 : t \mapsto e^{-A(t)}$, où A est une primitive sur I de $t \mapsto \frac{b(t)}{a(t)}$.

Exemple de l'EDL scalaire d'ordre 2 non normalisée :

$$a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = d(t), \text{ où } a, b, c \text{ et } d \text{ sont dans } \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$$

On suppose de plus que a ne s'annule pas sur I . L'ensemble des solutions est le plan affine $x_p + \text{Vect}(\varphi_1, \varphi_2)$, où x_p est une solution particulière de l'équation complète et $\text{Vect}(\varphi_1, \varphi_2)$ le plan vectoriel des solutions de l'équation homogène associée.

— Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice carrée —

$(E, \|\cdot\|)$ étant un evn de dimension finie, $\mathcal{L}(E)$, muni de n'importe laquelle de ses normes (équivalentes), est aussi un evn de dimension finie. On peut utiliser, par exemple, $\|\cdot\|$, la norme subordonnée à $\|\cdot\|$.

L'exponentielle de $a \in \mathcal{L}(E)$ est l'endomorphisme de E somme de la série absolument convergente $\sum \frac{a^n}{n!}$.

$$\exp(a) = e^a = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$$

Exponentielle de l'endomorphisme a

$\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, muni de n'importe laquelle de ses normes (équivalentes), est un evn de dimension finie.

L'exponentielle de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ somme de la série absolument convergente $\sum \frac{A^n}{n!}$.

$$\exp(A) = e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$$

Exponentielle de la matrice carrée A

Si $A = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$, alors :
 $\exp(A) = \text{diag}(\exp(a_1), \exp(a_2), \dots, \exp(a_n))$

Exponentielle d'une matrice diagonale

Si $B = P^{-1}AP$, alors :
 $\exp(B) = P^{-1}\exp(A)P$.

Les exponentielles de matrices semblables sont semblables

$$\text{Sp}(\exp(A)) = \{\exp(\lambda), \lambda \in \text{Sp}(A)\}$$

Spectre de l'exponentielle d'une matrice

L'application $\exp$ est continue sur $\mathcal{L}(E)$ (resp. $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$).

En effet, la série de fonctions continues $a \mapsto \frac{a^n}{n!}$ (resp. $A \mapsto \frac{A^n}{n!}$) définissant l'exponentielle est normalement convergente sur tout compact de $\mathcal{L}(E)$ (resp. $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$).

$\varphi : t \mapsto \exp(ta)$ (resp. $\psi : t \mapsto \exp(tA)$) est dérivable sur $\mathbf{R}$ et :
 $\forall t \in \mathbf{R}, \varphi'(t) = a \circ \exp(ta)$
 (resp. $\psi'(t) = A \exp(tA)$)

Dérivabilité

Si a et b sont deux endomorphismes de E tels que $a \circ b = b \circ a$, alors :
 $\exp(a + b) = \exp(a) \circ \exp(b)$

Exponentielle d'une somme d'endomorphismes qui commutent

Si A et B sont deux endomorphismes de E telles que $AB = BA$, alors :
 $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$

Exponentielle d'une somme de matrices qui commutent

— Systèmes différentiels homogène à coefficients constants —

On cherche à résoudre le problème de Cauchy $C_e \left\{ \begin{array}{l} x' = a(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right.$, où $a \in \mathcal{L}(E)$ et $x_0 \in E$.

Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Notant $A = \mathbf{Mat}(a; e) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $X(t)$ et X_0 les matrices-colonnes de $x(t)$ et x_0 en base e , la traduction matricielle du problème est :

$$C_M \begin{cases} X' = AX \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

La solution sur $\mathbf{R}$ de C_e est :

$$t \mapsto \exp((t - t_0)a)(x_0)$$

Solution du problème de Cauchy à base d'une EDL d'ordre 1 à coefficients constants

La solution sur $\mathbf{R}$ de C_M est :

$$t \mapsto \exp((t - t_0)A)X_0$$

Solution du problème de Cauchy matriciel

Si on suppose que A est diagonalisable et si $(V_1, \dots, V_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ formée de vecteurs propres de A , associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Les solutions de $X' = AX$ sur $\mathbf{R}$ sont les fonctions de la forme :

$$t \mapsto C_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + \dots + C_n e^{\lambda_n t} V_n, \\ \text{où } (C_1, \dots, C_n) \in \mathbf{K}^n$$

Cas où la matrice A est diagonalisable

Variation des constantes

On considère une *équation différentielle linéaire scalaire homogène du second ordre* :

$$a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = 0 \quad (H_2)$$

où a, b et c sont des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbf{K}$.

Si I est un intervalle sur lequel a ne s'annule pas, l'ensemble $S_I(H_2)$ des solutions sur I de (H_2) est un sev de dimension 2 de $\mathcal{C}^2(I, \mathbf{K})$.

On rappelle qu'un **système fondamental de solutions (SFS)** de H_2 est une base (φ_1, φ_2) de $S_I(H_2)$ du plan vectoriel des solutions de (H_2) sur I .

Le **wronskien** de deux solutions sur I , f_1 et f_2 , de l'équation homogène (H_2) est la fonction définie sur I par :

$$\forall t \in I, w(t) = \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) \end{vmatrix} = f_1(t)f_2'(t) - f_2(t)f_1'(t).$$

Si (f_1, f_2) est un couple de solutions de (H_2) sur I , alors le wronskien w de ce couple est solution sur I de : $a(t)w' + bw = 0$.

Soit (f_1, f_2) un couple de solutions de (H) sur I , intervalle sur lequel a ne s'annule pas. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ est un SFS de (H_2)
- $\exists t_0 \in I$ tel que $w(t_0) \neq 0$
- $\forall t \in I, w(t) \neq 0$

Caractérisation d'un SFS par le wronskien

On considère une *équation différentielle linéaire scalaire du second ordre* :

$$a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = d(t) \quad (E_2)$$

où a, b, c et d sont des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbf{K}$.

Soit (f_1, f_2) un SFS de (H_2) sur un intervalle I sur lequel a ne s'annule pas.
 Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur I . Alors
 f est solution de (E_2) ssi $f = \lambda f_1 + \mu f_2$ où λ et μ sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbf{K}$ qui vérifient pour tout $t \in I$:

$$\begin{cases} \lambda'(t)f_1(t) + \mu'(t)f_2(t) &= 0 \\ \lambda'(t)f_1'(t) + \mu'(t)f_2'(t) &= \frac{d(t)}{a(t)} \end{cases}$$

Méthode de variation des constantes

Calcul différentiel

Dans ce chapitre, on étudie des applications f définies sur un ouvert Ω de E à valeurs dans F , où E et F sont des evn de dimensions finies.

Dérivée suivant un vecteur, dérivées partielles

Soit $a \in \Omega$ et v un vecteur non nul de E . Ω étant un ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que : $\forall t \in]-\delta, \delta[$, $a + tv \in \Omega$.

On pose alors, pour $t \in]-\delta, \delta[$, $\varphi_v(t) = f(a + tv)$.

*Si φ_v , fonction réelle de la variable réelle t , est dérivable en 0, on dit que f **admet une dérivée suivant le vecteur v en a** que l'on note $D_v f(a)$. On a donc :*

$$D_v f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}.$$

Dérivée en un point suivant un vecteur

*Si f admet une dérivée suivant le vecteur v en tout point $a \in \Omega$, l'application $D_v f$ de Ω dans F qui, à tout a , associe $D_v f(a)$, est **la dérivée selon le vecteur v de f** .*

Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , si $(x_1, \dots, x_n)$ est le n -uplet des coordonnées du vecteur x dans cette base fixée, on identifie usuellement $f(x)$ et $f(x_1, \dots, x_n)$.

*f **admet une dérivée partielle en a par rapport à la j -ième variable** lorsque f admet une dérivée en a suivant le vecteur e_j , j -ième vecteur de la base canonique de $\mathbf{R}^p$. Cette dérivée partielle est notée $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$, parfois $\partial_j f(a)$.*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + t, a_2) - f(a_1, a_2)}{t} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2 + t) - f(a_1, a_2)}{t} \end{aligned}$$

Cas d'une fonction de deux variables

Différentielle

*Soit $a \in \Omega$. On dit que f est **différentiable** en a lorsqu'il existe une application linéaire $df(a) \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que :*

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{1}{\|h\|} [f(a + h) - f(a) - df(a)(h)] = 0$$

Cette application est alors unique, on l'appelle la **différentielle** de f en a ou **application linéaire tangente** à f en a . Elle vérifie :

$$f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + o_{h \rightarrow 0}(h).$$

Développement limité à l'ordre 1 de f en a

Lorsque $E = F = \mathbf{R}$ et $f : \Omega \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, on a :
 f est différentiable en $a \in \Omega$ ssi elle est dérivable en a et dans ce cas, $df(a) \in \mathcal{L}(\mathbf{R})$ est l'homothétie de rapport $f'(a)$:

$$\forall h \in \mathbf{R}, df(a)(h) = f'(a)h$$

Cas d'une fonction réelle

Soit $f_1, f_2, \dots, f_p$ les applications coordonnées relativement à une base de F d'une application f de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^n$.

f est différentiable en a si et ssi toutes les f_i le sont.

Si f est différentiable en a , alors, pour tout v non nul de E :

$$\frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = df(a)(v) + \frac{o(tv)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} df(a)(v)$$

Si f est différentiable en a , alors f est continue en a et dérivable en a selon tout vecteur, avec, de plus, $df(a)(v) = D_v f(a)$.

La différentiabilité entraîne la continuité et la dérivabilité suivant tout vecteur

f est **différentiable sur l'ouvert** Ω lorsqu'elle est différentiable en tout point de Ω . L'application qui, à tout $a \in \Omega$, associe la différentielle en a de f , est la **différentielle de f sur Ω** . Elle est notée df .

- Si f est constante sur Ω , alors f est différentiable sur Ω et $df = \tilde{0}$.
- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors f est différentiable sur Ω et $df = f$.

Cas particuliers

_____ Lien entre différentielle et dérivées partielles _____

$$df(a)(h) = D_h f(a) = \sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

Expression de la différentielle à l'aide des dérivées partielles

Si Ω est un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et si f est à valeurs dans $\mathbf{R}^p$, la **matrice jacobienne de f en a** est la matrice de $df(a)$ dans les bases canoniques.

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Matrice jacobienne de f en a

_____ Cas des fonctions réelles définies sur E euclidien _____

On suppose que E est un espace euclidien. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ différentiable en $a \in \Omega$. Il existe un unique vecteur de E , noté $\nabla f(a)$, tel que :

$$df(a)(h) = (\nabla f(a)|h)$$

Gradient de f en a

Si $e = (e_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une base orthonormée de E , $df(a)(h) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i$.

En ce cas,

$$\nabla f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) e_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) e_p$$

Expression du gradient en base orthonormée

Si $\nabla f(a) \neq 0$, $\nabla f(a)$ est positivement colinéaire au vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale.

Interprétation géométrique du gradient

Opérations sur les applications différentiables

Si f et $g : \Omega \rightarrow F$ sont différentiables en $a \in \Omega$, et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ est différentiable en a et :

$$d(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda df(a) + \mu dg(a)$$

Combinaison linéaire d'applications différentiables

Soit M une application p -linéaire de $F_1 \times \cdots \times F_p$ sur F et $f_1, f_2, \dots, f_p$ p applications différentiables sur Ω à valeurs respectivement dans les F_i , alors $M(f_1, \dots, f_p)$ est différentiable sur Ω et pour tout $a \in \Omega$, on a :

$$d[M(f_1, \dots, f_p)](a) = \sum_{i=1}^p M(f_1(a), \dots, df_i(a), \dots, df_p(a))$$

Différentielle de $M(f_1, \dots, f_p)$

Soit f définie sur l'ouvert Ω de E à valeurs dans l'ouvert V de F , différentiable en $a \in \Omega$, et g de V dans G , evn de dim. finie, différentiable en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est différentiable en a , et :

$$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$$

Règle de la chaîne

Dérivée le long d'un arc

Si γ est une application définie sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, dérivable en t , si f est différentiable en $\gamma(t)$, alors $f \circ \gamma$ est dérivable sur I et :

$$(f \circ \gamma)'(t) = df(\gamma(t))(\gamma'(t))$$

Si $\gamma'(t)$ n'est pas nul, $df(\gamma(t))(\gamma'(t))$ dirige la tangente à la courbe paramétrée par $f \circ \gamma$ en $f(\gamma(t))$.

Cas particulier : si $\gamma(t) = x + tV$, où $x \in \Omega$ et $t \in I$ tel que $x + tV \in \Omega$, V dirige la tangente à la courbe paramétrée par $t \mapsto f(x + tV)$.

Règle de la chaîne

Soit f définie sur l'ouvert U de E , à valeurs dans l'ouvert V de F , différentiable en $a \in U$, et g une application de V dans G , espace normé de dimension finie sur $\mathbb{R}$, différentiable en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est différentiable en a , et :

$$J_{(g \circ f)}(a) = J_g(f(a)) \times J_f(a)$$

Matrice jacobienne d'une composée

En égalisant les coefficients de cette égalité matricielle, on obtient pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$,

$$\frac{\partial (g_i \circ f)}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)$$

Règle de dérivation en chaîne

Lorsque $f : t \mapsto (f_1(t), \dots, f_n(t)) \in \mathcal{C}^1(I, V)$, où V est un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $g \in \mathcal{C}^1(V, \mathbf{R}^m)$, alors $g \circ f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbf{R}^m)$ et $\forall t \in I, (g \circ f)'(t) = \sum_{k=1}^n f'_k(t) \frac{\partial g}{\partial y_k}(f(t))$.

Fonction de classe $\mathcal{C}^1$

On dit que f est **de classe $\mathcal{C}^1$** sur Ω lorsque f est différentiable sur Ω et sa différentielle df est continue sur Ω .

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert Ω si et ssi les dérivées partielles de f relativement à une base de E existent en tout point de Ω et sont continues sur Ω .

Caractérisation des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans F forment un $\mathbf{R}$ -ev, noté $\mathcal{C}^1(U, F)$.

Opérations algébriques sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Soit $f, g : U \rightarrow F$ deux applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U . Alors, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U .

$$d(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda df(a) + \mu dg(a)$$

Combinaison linéaire d'applications de classe $\mathcal{C}^1$

Soit $f : U \rightarrow F$ et $g : V \rightarrow G$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $f(U)$ soit contenu dans l'ouvert V . Alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U .

$$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$$

Composition d'applications de classe $\mathcal{C}^1$

Si $f, g : U \rightarrow \mathbf{R}$ sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U , alors $f g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U .

$$d(fg)(a) = f(a)dg(a) + g(a)df(a)$$

Produit de fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^1$

Si f est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans F , si γ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, 1]$ dans U avec $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$, alors :

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 df(\gamma(t)) (\gamma'(t)) dt$$

Accroissement d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U connexe par arcs. Alors f est constante sur U si, et seulement si : $\forall x \in U, df(x) = 0$.

_____ Vecteurs tangents à une partie d'un evn de dim. finie _____

Soit X une partie de E , $x \in X$. $v \in E$ est dit **tangent à X en x** lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ et un arc γ défini sur $] -\varepsilon, \varepsilon[$ dérivable en 0 à valeurs dans X , tels que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$.

Notation : $T_x X$ désigne l'ensemble des vecteurs tangents à X en x .

Si g est une fonction numérique définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert Ω de E , si $x \in X$ et $dg(x) \neq 0$, alors $T_x X$ est égal au noyau de $dg(x)$.

Cas particulier :

Soit E un espace euclidien, U un ouvert de E , $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction différentiable, $k \in f(U)$, $X = \{M \in U / f(M) = k\}$ la ligne de niveau k de f . Pour chaque point x de X , les vecteurs tangents à X en x sont orthogonaux au gradient de f en x .

Exemple : Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^2$ et $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ différentiable. On appelle **surface d'équation** $z = f(x, y)$, la partie de $\mathbf{R}^3$:

$$X = \{(x, y, f(x, y)), (x, y) \in U\}.$$

Soit $(x_0, y_0) \in U$, $z_0 = f(x_0, y_0)$ et $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in X$. Les vecteurs tangents à X en M_0 sont les $a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$, $(a, b) \in \mathbf{R}^2$.

Le plan tangent à X en M_0 est le plan d'équation cartésienne :

$$Z - z_0 = (X - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (Y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

_____ Optimisation du premier ordre _____

• La fonction f admet un **maximum local** (respectivement un **minimum local**) au point a de U lorsque : $\exists r > 0$ tel que : $\forall x \in B(a, r) \cap U$, $f(x) \leq f(a)$ (respectivement $\exists r > 0$ tel que : $\forall x \in B(a, r) \cap U$, $f(x) \geq f(a)$).

Dans ce cas, le maximum local (respectivement minimum local) est le réel $f(a)$.

• La fonction f admet un **extremum local** au point a de U si f admet un minimum local ou un maximum local au point a .

Soit f une fonction définie sur un ouvert U , à valeurs réelles.

Si f admet un extremum local en $a \in U$ et est différentiable en a , alors $df(a) = 0$

Condition nécessaire d'optimalité

($df(a) = 0$ correspond à l'annulation de toutes les dérivées partielles.)

Soit $f : U \rightarrow \mathbf{R}$. Un point a de U tel que f est différentiable en a et $df(a) = 0$ est un **point critique** de f .

Si f est une fonction numérique définie sur l'ouvert Ω , si X est une partie de Ω , si la restriction de f à X admet un extremum local en x et si f est différentiable en x , alors $df(x)$ s'annule en tout vecteur tangent à X en x .

CN d'optimalité locale sur une partie

Si f et g sont des fonctions numériques définies et de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert Ω de E , si X est l'ensemble des zéros de g , si $x \in X$ et $dg(x) \neq 0$ et si la restriction de f à X admet un extremum local en x , alors $df(x)$ est colinéaire à $dg(x)$.

Théorème d'optimisation sous contrainte

Remarque : lorsque E est euclidien, sous les mêmes hypothèses, si la restriction de f à X admet un extremum local en x , alors $\nabla f(x)$ et $\nabla g(x)$ sont colinéaires.

Dérivées partielles successives

Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $f : U \rightarrow F$ une application. Soit $a \in U$. Soit $(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, p\}^k$. On dit que f admet **une dérivée partielle k -ième en a par rapport aux variables $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ successivement** lorsque :

- $\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}, \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}} \right), \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}} \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{k-2}}} \left(\dots \left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}} \right) \dots \right) \right)$ existent sur un voisinage de a ;
- $\frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}} \left(\dots \left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}} \right) \dots \right) \right)(a)$ existe.

Alors $\frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}} \left(\dots \left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}} \right) \dots \right) \right)(a)$ est noté $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}}(a)$, et appelé la **dérivée partielle k -ième** de f en a , par rapport aux variables $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ successivement.

La fonction $a \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}}(a)$, définie éventuellement sur une partie de U , est la dérivée partielle de f par rapport aux variables $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ successivement.

Soit U un ouvert de E . Soit $f : U \rightarrow F$ une application.

- Soit $k \geq 1$. On dit que f est **de classe $\mathcal{C}^k$** sur l'ouvert U lorsqu'elle admet des dérivées partielles successives sur U , jusqu'à l'ordre k inclus, par rapport à toutes les variables et ces dérivées partielles sont continues sur U .
- On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U lorsque f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U pour tout $k \in \mathbf{N}^*$.

Soit $k \geq 2$. L'application f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U si et ssi elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et ses fonctions dérivées partielles sont de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur U .

La fonction $f : U \rightarrow F$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U si et ssi chacune de ses applications coordonnées est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U .

Soit $f, g : U \rightarrow F$ deux applications de classe $\mathcal{C}^k$ sur l'ouvert U . Alors, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U .

L'ensemble $\mathcal{C}^k(U)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur U à valeurs dans $\mathbf{R}$ muni de l'addition, de la multiplication par un réel et de la multiplication des fonctions, est une **$\mathbf{R}$ -algèbre commutative**.

Soit $f : U \rightarrow F$ et $g : V \rightarrow G$ de classe $\mathcal{C}^k$ telles que $f(U)$ soit contenu dans l'ouvert V . Alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U .

Soit U un ouvert de E , $f \in \mathcal{C}^2(U, F)$ sur U . Alors, en tout point a de U :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Théorème de Schwarz

Optimisation : étude au second ordre

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Soit $a \in U$. On appelle matrice hessienne de f en a la matrice $H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$. Il découle du théorème de Schwarz que $H_f(a)$ est une matrice symétrique réelle.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$. Alors :
 $\forall x \in U, f(x+h) = f(x) + df(x).h + \frac{1}{2} \langle H_f(x).h, h \rangle + o(\|h\|^2)$
 $= f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(x).h, h \rangle + o(\|h\|^2)$, autrement dit

$$f(x+h) = f(x) + \nabla f(x)^\top h + \frac{1}{2} h^\top H_f(x) h + o(\|h\|^2).$$

Formule de Taylor-Young

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et $a \in U$. On note : $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$ et $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$. Alors la matrice hessienne de f en a est $H_f(a) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ et la formule de Taylor-Young s'écrit : lorsque $h = (h_1, h_2)$ tend vers 0 de sorte que $a+h \in U$, alors

$$f(a+h) = f(a) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a) + \frac{1}{2} (h_1^2 r + 2s h_1 h_2 + h_2^2 t) + o(\|h\|^2).$$

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, $x \in U$.

- 1) Si f admet un minimum local [resp. maximum local] en x , alors x est point critique de f et $H_f(x) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ [resp. $-H_f(x) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$].
- 2) Si x est point critique de f et si $H_f(x) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ [resp. $-H_f(x) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$] alors f atteint un minimum local strict [resp. maximum local strict] en x .

Mécanique

Référentiels non galiléens

Axe instantané de viration

C'est un axe Δ parallèle au vecteur rotation instantanée du solide $\vec{\omega}$ (par rapport au référentiel $\mathcal{R}$). En tout point de Δ la vitesse est colinéaire à $\vec{\omega}$. Δ est le lieu des points de vitesse minimum du solide.

Relation de Varignon

C'est la relation de changement de point du torseur cinétique.

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AM}$$

A et M deux points du solide

$\vec{v}_A$ et $\vec{v}_M$ leurs vitesses

Mouvement instantané

$$\vec{v}_M = \vec{v}_{\parallel} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

$\vec{v}_{\parallel}$ vitesse de glissement le long de l'axe instantané de viration Δ

$\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$ terme de rotation autour de Δ

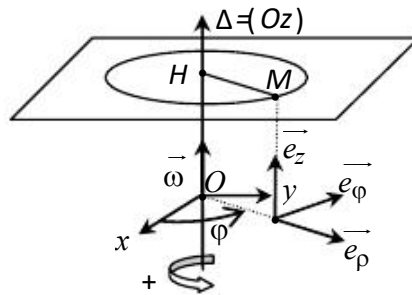
Mouvement de rotation pure autour d'un axe fixe

$$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z = \dot{\varphi} \vec{e}_z, \vec{v}_M = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

$$\text{Accélération : } \vec{a} = \vec{a}_e(M) = -\omega^2 \overrightarrow{HM}$$

Δ axe fixe passant par une origine O fixe d'un référentiel

H projeté orthogonal de M sur l'axe Δ



Mouvement de translation

$$\overrightarrow{AM} = \text{cte}, \vec{\omega} = \vec{0}$$

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A, \vec{a}_M = \vec{a}_A$$

A et M deux points du solide, $\vec{v}_A$ et $\vec{v}_M$ leurs vitesses, $\vec{a}_A$ et $\vec{a}_M$ leurs accélérations

Loi de composition des vitesses

$$\vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = \vec{v}(M)_{\mathcal{R}'} + \vec{v}_e(M)_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$$

$\vec{v}_e(M)_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ vitesse
d'entraînement de M

Cas d'une translation de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$

$$\vec{v}_e(M)_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \vec{v}(O')_{\mathcal{R}}$$

Cas d'une rotation
autour d'un axe fixe contenant O'

$$\vec{v}_e(M)_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ vecteur rotation de
 $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$

Loi de composition des accélérations

$$\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = \vec{a}(M)_{\mathcal{R}'} + \vec{a}_e(M)_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} + \vec{a}_c(M)_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$$

$\vec{a}_e(M)_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ accélération d'entraînement de M

Cas d'une translation de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$

$$\vec{a}_e(M)_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \vec{a}(O')_{\mathcal{R}}$$

Cas d'une rotation uniforme
autour d'un axe fixe

$$\vec{a}_e(M)_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = -\omega^2 \overrightarrow{HM}$$

ω vitesse angulaire
 H projeté de M sur l'axe

Cas général

$$\vec{a}_e(M)_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \vec{a}(O')_{\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge (\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}) + \left(\frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$\vec{a}_c(M)_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ accélération de Coriolis (ou complémentaire) de M

$$\vec{a}_c(M)_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = 2 \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}(M)_{\mathcal{R}'}$$

$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ vecteur rotation

Formule de dérivation dans un trièdre mobile

$$\left. \frac{d\vec{K}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{K}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{K}$$

$\vec{K}$ vecteur quelconque, $\mathcal{R}$ référentiel
« absolu » rapporté à $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, $\mathcal{R}'$
référentiel « relatif » rapporté à
 $(O', \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'})$, $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ vecteur rotation
instantanée de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$

Composition des vecteurs rotation

$$\vec{\Omega}_{2/1} = \vec{\Omega}_{2/0} + \vec{\Omega}_{0/1}$$

$\vec{\Omega}_{i/j}$ vecteur rotation du référentiel i par
rapport au référentiel j

PFD dans un référentiel non galiléen

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}'} = \vec{R}_{\text{ext}} + \vec{f}_{\text{ie}} + \vec{f}_{\text{ic}}$$

Cas d'un point matériel de masse m et de vitesse $\vec{v}$ dans $\mathcal{R}'$ non galiléen

$\vec{R}_{\text{ext}}$ résultante des forces extérieures,

$\vec{f}_{\text{ie}} = -m\vec{a}_e$, $\vec{f}_{\text{ic}} = -m\vec{a}_c$ **forces d'inertie**

d'entraînement et de Coriolis

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}'} = \vec{R}_{\text{ext}} + \vec{f}_{\text{ie}} + \vec{f}_{\text{ic}}$$

Cas d'un système de quantité de mouvement $\vec{p}$, $\vec{R}_{\text{ext}}$ résultante des actions

extérieures (forces et couples), $\vec{f}_{\text{ie}}$, $\vec{f}_{\text{ic}}$

forces d'inertie totales

TMC dans un référentiel non galiléen

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} \Big|_{\mathcal{R}'} = \vec{\mathcal{M}}_{A\text{ext}} + \vec{\mathcal{M}}_{A\text{ie}} + \vec{\mathcal{M}}_{A\text{ic}}$$

$\vec{L}_A$ moment cinétique du système en A

(fixe dans $\mathcal{R}$), $\vec{\mathcal{M}}_{A\text{ext}}$ moment résultant en

A des actions extérieures, $\vec{\mathcal{M}}_{A\text{ie}}$, $\vec{\mathcal{M}}_{A\text{ic}}$

moments en ce même point des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis

TÉC dans un référentiel non galiléen

$$\frac{dE_c}{dt} \Big|_{\mathcal{R}'} = \mathcal{P}_{\text{ext}} + \mathcal{P}(\vec{f}_{\text{ie}})$$

E_c énergie cinétique du système

$\mathcal{P}_{\text{ext}}$ puissance des actions extérieures

$\mathcal{P}(\vec{f}_{\text{ie}})$ puissance des forces d'inertie d'entraînement (la force d'inertie de Coriolis ne travaillant pas)

Énergie potentielle centrifuge

$$E_{\text{pcf}}(M) = -\frac{1}{2} m \omega^2 H M^2$$

E_{pcf} énergie potentielle centrifuge dont

dérive la force d'inertie d'entraînement (centrifuge) pour une rotation uniforme à la vitesse angulaire ω

H projeté de M sur l'axe de rotation

TÉM et énergie potentielle centrifuge

$$E_m(M)_R = E_c(M)_R + E_p(M)$$

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}_{\text{ext}}^{\text{nc}}$$

E_m énergie mécanique, E_c énergie cinétique, E_p énergie potentielle totale incluant E_{pcf} énergie potentielle centrifuge, $\mathcal{P}_{\text{ext}}^{\text{nc}}$ puissance des actions non conservatives

Variation du champ de pesanteur entre pôle et équateur

$$\vec{g}(M) \approx -G \frac{M_{\text{Terre}}}{R_{\text{Terre}}^2} \vec{e}_r + \omega^2 \overrightarrow{HM}$$

$\vec{g}(M)$ champ de pesanteur en un point M de la surface terrestre
 G constante de gravitation, M_{Terre} , R_{Terre} masse et rayon de la Terre, ω vitesse angulaire de la Terre, H projeté de M sur l'axe des pôles, $\vec{e}_r$ vecteur unitaire radial

Contact entre deux solides

Actions de contact entre deux solides

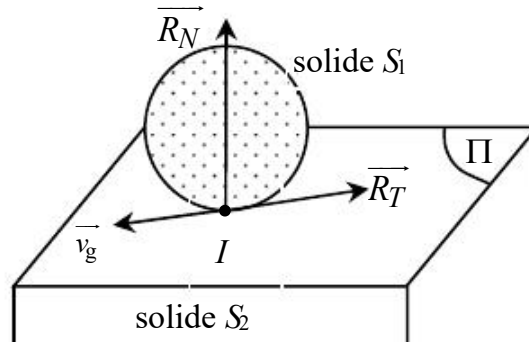
$$\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{R}_T$$

$\vec{R}$ résultante des actions de contact entre le solide S_1 et le solide S_2 ramenée au point de contact I

Π plan commun tangent aux deux solides en contact ponctuel

$\vec{R}_N$ composante normale de $\vec{R}$

$\vec{R}_T$ composante tangentielle de $\vec{R}$ dite de résistance au glissement



Vitesse de glissement une roue et le sol

$$\begin{aligned} \vec{v}_g &= \vec{v}_{S_1/S_2} = \vec{v}_{I_1/S_2} \\ &= \vec{v}_{I_1 \in S_1/R} - \vec{v}_{I_2 \in S_2/R} \end{aligned}$$

$$\vec{v}_g \in \Pi$$

$I_1 \in S_1$ et $I_2 \in S_2$ points appartenant à S_1 et S_2 coïncidant avec le point de contact I à l'instant t

Propriété de la vitesse de glissement

Condition de roulement sans glissement

$$\vec{v}_g = \vec{0}$$

Nullité de la vitesse de glissement

Lois de Coulomb sur le frottement sec

$$\|\vec{R}_T\| \leq \mu_s \|\vec{R}_N\|$$

Loi du frottement statique

μ_s coefficient de frottement statique

$$\|\vec{R}_T\| = \mu_d \|\vec{R}_N\|$$

Loi du frottement dynamique

μ_d coefficient de frottement dynamique

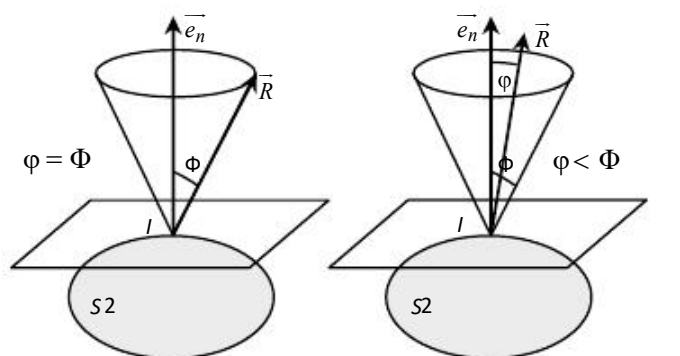
$$\vec{R}_T \cdot \vec{v}_g < 0, \quad \vec{R}_T \wedge \vec{v}_g = \vec{0}$$

En pratique, on peut considérer $\mu_d \approx \mu_s$ (coefficient de frottement, noté μ).

Cône de frottement

$$\frac{\|\vec{R}_T\|}{\|\vec{R}_N\|} = \mu = \tan(\Phi)$$

$\vec{e}_n$ vecteur unitaire normal à Π , φ angle entre la réaction $\vec{R}$ et $\vec{e}_n$, Φ demi-angle au sommet du cône



Au glissement En l'absence de glissement

Puissance des actions de contact

$$\mathcal{P}_{\text{contact}} = \vec{R}_T \cdot \vec{v}_g$$

En l'absence de glissement : $\mathcal{P}_{\text{contact}} = 0$

Au glissement : $\mathcal{P}_{\text{contact}} < 0$, dissipation d'énergie mécanique

*Donnez-moi un point fixe et un levier
et je soulèverai la Terre.*

Archimède

Électromagnétisme

Champ électrostatique

__ Champ électrostatique créé par une distribution discrète __

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{PM^3}$$

Champ créé en M par une charge ponctuelle q placée en P , ϵ_0 permittivité du vide

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i \vec{P_i M}}{P_i M^3}$$

Champ créé en M par des charges ponctuelles q_i placées aux points P_i

_____ Distributions continues de charges _____

$$dq(P) = \rho(P) d\tau(P)$$

Distribution volumique :
 $d\tau(P)$ volume élémentaire contenant la charge $dq(P)$ en P , $\rho(P)$ densité volumique de charge en P en $C \cdot m^{-3}$

$$dq(P) = \sigma(P) dS(P)$$

Distribution surfacique :
 $dS(P)$ surface élémentaire de charge $dq(P)$ en P , $\sigma(P)$ densité surfacique de charge en P en $C \cdot m^{-2}$

$$dq(P) = \lambda(P) d\ell(P)$$

Distribution linéique :
 $d\ell$ élément de longueur de charge $dq(P)$ en P , $\lambda(P)$ densité linéique de charge en P en $C \cdot m^{-1}$

$$dq = \rho d\tau = \sigma dS = \lambda d\ell$$

Correspondance entre les distributions

_____ Plans de symétrie _____

Un plan Π est plan de symétrie d'une distribution de charges si tous les couples de points symétriques par rapport à Π portent les mêmes charges.

Ce plan est alors *aussi un plan de symétrie pour le champ électrostatique* : pour M et M' symétriques, $\vec{E}(M')$ est le symétrique de $\vec{E}(M)$.

En particulier, *si M appartient à un plan de symétrie, le champ $\vec{E}(M)$ est parallèle à ce plan.*

Plans d'antisymétrie

Un plan Π^* est plan d'antisymétrie d'une distribution de charges si tous les couples de points symétriques par rapport à Π^* portent des charges opposées. Ce plan est alors *aussi un plan d'antisymétrie pour le champ électrostatique* : pour M et M' symétriques, $\vec{E}(M')$ est l'opposé du symétrique de $\vec{E}(M)$.

En particulier, *si M appartient à un plan d'antisymétrie, le champ $\vec{E}(M)$ est orthogonal à ce plan.*

Invariances

Si la distribution de charges est **invariante par translation** selon un axe, le champ l'est aussi : il ne dépend donc pas de la coordonnée le long de cet axe.

Si la distribution de charges est **invariante par rotation** autour d'un axe, les composantes du champ le sont aussi : elles ne dépendent donc pas de la coordonnée angulaire qui définit la rotation autour de cet axe.

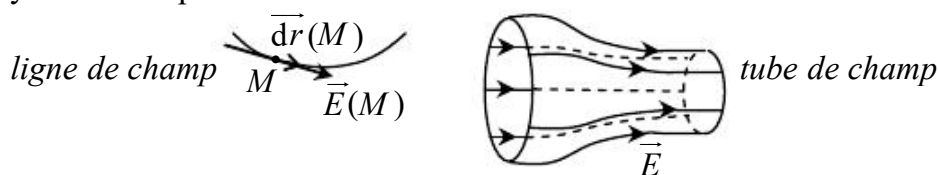
La **symétrie cylindrique** d'axe Δ est l'invariance à la fois par translation parallèlement à Δ et par rotation autour de Δ .

La **symétrie sphérique** de centre O est l'invariance par toute rotation autour de tout axe passant par le point O .

Lignes et tubes de champ

Ligne de champ : courbe tangente au champ électrique en tout point. Un plan de symétrie contient entièrement une infinité de lignes de champ. Un plan d'antisymétrie est orthogonal aux lignes de champ en chacun de ses points.

Équation d'une ligne de champ : $\vec{E}(M) \wedge d\vec{r}(M) = \vec{0}$, $d\vec{r}(M)$ élément de la ligne de champ au point M explicité dans le système de coordonnées adapté aux symétries du problème.



Tube de champ : surface formée par l'ensemble des lignes de champ s'appuyant sur une courbe fermée.

Théorème de Gauss

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E}(M) \cdot d\vec{s} \vec{n} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$\vec{E}(M)$ champ électrostatique, $\vec{n}$ vecteur unitaire normal sortant d'une surface fermée Σ , $d\vec{s}$ élément de surface de Σ , Q_{int} charge totale à l'intérieur de Σ , ϵ_0 permittivité du vide

Conséquence : le champ électrostatique créé à l'extérieur d'une distribution à symétrie sphérique est le même que si la charge totale était placée au centre.

Formulation locale du théorème de Gauss

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{ou} \quad \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \begin{array}{l} \text{Équation de Maxwell-Gauss} \\ \rho \text{ densité volumique de charge} \end{array}$$

Théorème de Gauss gravitationnel

$$\oiint_{\Sigma} \vec{g}(M) \cdot d\vec{s} \vec{n} = -4\pi G M_{\text{int}}$$

$\vec{g}(M)$ champ gravitationnel, $\vec{n}$ vecteur unitaire normal sortant d'une surface fermée Σ , $d\vec{s}$ élément de surface de Σ , M_{int} masse totale à l'intérieur de Σ , G constante de gravitation

Conséquence : le champ gravitationnel créé à l'extérieur d'une distribution à symétrie sphérique est le même que si la masse totale était placée au centre.

Potentiel électrostatique

Relations entre champ et potentiel

$$\vec{E}(M) = -\vec{\text{grad}} V(M)$$

Relation locale

$\vec{E}(M)$ et $V(M)$ champ et potentiel électrostatiques au point M

$$\int_A^B \vec{E}(M) \cdot d\vec{\ell} = V(A) - V(B)$$

Circulation conservative du champ de A à B

Topographie

Surface équipotentielle : ensemble des points où le potentiel a la même valeur. En un point où une ligne de champ et une surface équipotentielle se coupent, elles sont orthogonales ; en particulier, un plan d'antisymétrie est toujours une surface équipotentielle.

Potentiel électrostatique créé par une distribution discrète

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 PM}$$

Potentiel créé en M par une charge ponctuelle q placée en P , ϵ_0 permittivité du vide

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{P_i M}$$

Potentiel créé en M par des charges ponctuelles q_i placées aux points P_i

Équations locales de Poisson et de Laplace

$$\Delta V = \nabla^2 V = 0$$

Équation de Laplace dans le vide local
 V potentiel électrostatique

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

Équation de Poisson
 ρ densité volumique de charge

Énergie potentiel électrostatique

Énergie potentielle d'interaction

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -\frac{dE_p}{dr} \vec{e}_r$$

Forces intérieures conservatives entre M_1 et M_2 tels que $\vec{M}_1 \vec{M}_2 = r \vec{e}_r$

$$E_p = -\frac{Gm_1 m_2}{r}$$

Cas d'une énergie potentielle d'interaction gravitationnelle, m_1 et m_2 masses de M_1 et M_2

$$E_p = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Cas d'une énergie potentielle d'interaction électrostatique, q_1 et q_2 charges de M_1 et M_2

Énergie potentielle d'une charge dans un champ extérieur

$$E_p(M) = qV(M)$$

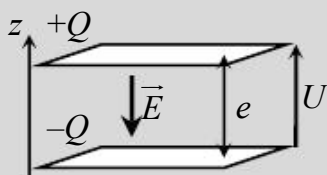
$$\delta W = -q \vec{\nabla}(V) \cdot d\vec{r} = -dE_p$$

$$W_{AB} = q(V_A - V_B) = qU$$

$E_p(M)$ énergie potentielle d'une charge q dans un potentiel $V(M)$. δW travail élémentaire de la force de Coulomb lors d'un petit déplacement $d\vec{r}$ de la charge q en M
 W_{AB} travail sur un trajet fini AB où $U = V_A - V_B$ est la différence de potentiel entre A et B

Condensateur plan idéal

$$\vec{E} = -\frac{U}{e} \vec{e}_z = -\frac{Q}{\epsilon_0 S} \vec{e}_z$$



$$C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$$

$\vec{E}$ champ uniforme entre les armatures (modélisées comme des plans infinis).
 Q charge d'une armature, U tension, ϵ_0 permittivité du vide, S aire des armatures, e écartement entre les armatures
 $\vec{e}_z$ vecteur unitaire orthogonal aux armatures

C capacité du condensateur

Dipôle électrostatique

Modèle du dipôle électrostatique

Un doublet électrostatique est constitué de deux charges $-q$ et $+q$ immobiles, séparées par une distance a . On le qualifie de **dipôle électrostatique** si on étudie ses effets à grande distance ($r \gg a$).

Plus généralement, ce modèle décrit les propriétés à grande distance de toute **distribution dipolaire**, c'est-à-dire dont la charge totale est nulle et dont les barycentres de charges positives (P) et négatives (N) sont distincts.

Moment dipolaire

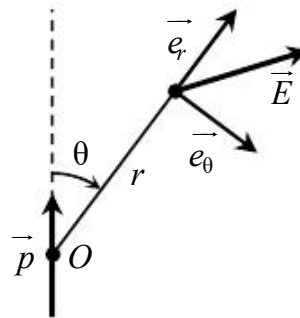
$$\vec{p} = q \overrightarrow{NP}$$

P position de la charge positive $+q$

N position de la charge positive $-q$

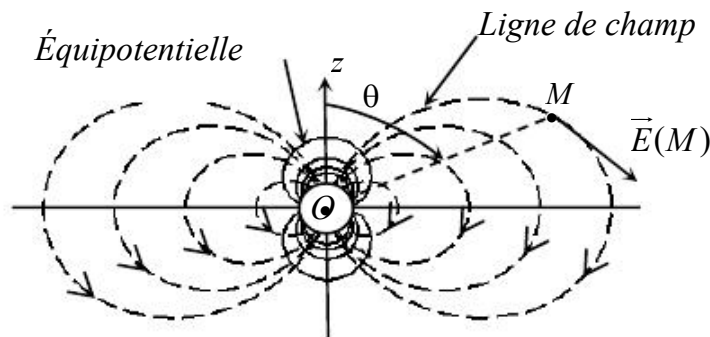
Potentiel et champ créés par un dipôle électrostatique

$$\begin{aligned} V(M) &= \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ &= \frac{\vec{p} \cdot \overrightarrow{OM}}{4\pi\epsilon_0 OM^3} \end{aligned}$$



$$\vec{E}(M) = \frac{p(2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{3(\vec{p} \cdot \overrightarrow{OM}) \overrightarrow{OM} - OM^2 \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 OM^5}$$

Forme des lignes de champ et équipotentiels



Perpendicularité entre les équipotentiels et les lignes de champ. Tracé valable à grande distance du point O pour assurer la validité de l'approximation dipolaire (zone centrale non représentée).

__ Action d'un champ électrostatique extérieur sur un dipôle __

$$\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}$$

Moment des forces électrostatiques (en O , ou en tout point si $\vec{E}$ est uniforme)

La résultante (somme des forces) est nulle si le champ $\vec{E}$ est uniforme. Elle est non nulle s'il n'est pas uniforme : après s'être orienté selon le champ, le dipôle a alors tendance à dériver vers les régions de champ plus fort.

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

Énergie potentielle d'un dipôle rigide dans un champ $\vec{E}$ extérieur

Champ magnétostatique**_____ Courant électrique dans un conducteur _____**

$$\vec{j} = nq\vec{v} = \rho_m \vec{v}$$

$\vec{j}$ vecteur densité volumique de courant
 n densité volumique de porteurs de charges mobiles (charge q , vitesse moyenne $\vec{v}$)
 ρ_m densité volumique de charges mobiles

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{s}$$

I intensité du courant à travers une surface S

_____ Distribution surfacique de courant _____

Cas limite d'une réalité volumique où les courants sont répartis sur une petite épaisseur a avec une densité volumique de courant $\vec{j}$, la densité surfacique correspondante est, si la distribution est uniforme, $\vec{j}_S = \lim_{a \rightarrow 0} (\vec{j} a)$.

_____ Distribution linéique de courant _____

C'est la limite d'une réalité volumique « filiforme » lorsque sa section tend vers zéro. La densité linéique de courant n'est autre que l'intensité dans le fil.

_____ Équivalence entre les distributions _____

Les éléments de courant dans les descriptions volumiques, surfaciques et linéiques sont liés par : $d\vec{C} = \vec{j} d\tau = \vec{j}_S dS = I d\vec{l}$.

Plans de symétrie

Π est un plan de symétrie d'une distribution de courant si tous les couples de points symétriques par rapport à Π sont traversés par les mêmes courants.

Ce plan est alors *un plan d'antisymétrie pour le champ magnétostatique* : pour M et M' symétriques, $\vec{B}(M')$ est l'opposé du symétrique de $\vec{B}(M)$.

En particulier, *si M appartient à un plan de symétrie du courant, le champ $\vec{B}(M)$ est orthogonal à ce plan.*

Plans d'antisymétrie

Π^* est un plan d'antisymétrie d'une distribution de courant si tous les couples de points symétriques par rapport à Π^* ont des courants opposés.

Ce plan est alors *un plan de symétrie pour le champ magnétostatique* : pour M et M' symétriques, $\vec{B}(M')$ est le symétrique de $\vec{B}(M)$.

En particulier, *si M appartient à un plan d'antisymétrie du courant, le champ $\vec{B}(M)$ est parallèle à ce plan.*

Invariances

Si la distribution de courant est **invariante par translation** selon un axe, le champ l'est aussi : il ne dépend donc pas de la coordonnée le long de cet axe.

Si la distribution de courant est **invariante par rotation** autour d'un axe, les composantes du champ le sont aussi : elles ne dépendent donc pas de la coordonnée angulaire qui définit la rotation autour de cet axe.

Théorème d'Ampère

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_e$$

$\vec{B}(M)$ champ magnétostatique, $d\vec{\ell}$ élément de longueur du contour fermé C
 I_e intensité totale des courants enlacés par C
 μ_0 perméabilité du vide

Formulation locale du théorème d'Ampère

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad \text{ou} \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Équation de Maxwell-Ampère statique
 $\vec{j}$ densité volumique de courant

Conservation du flux du champ magnétostatique

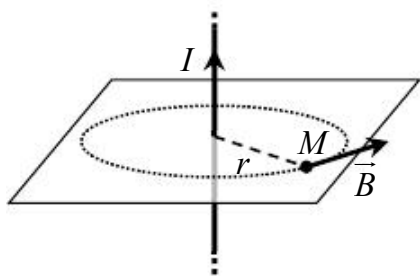
$$\oiint_{\Sigma} \vec{B}(M) \cdot d\vec{s} \vec{n} = 0$$

$\vec{B}(M)$ champ magnétostatique, $\vec{n}$ vecteur unitaire normal sortant d'une surface fermée Σ , $d\vec{s}$ élément de surface de Σ

Conséquence : les lignes de champ magnétostatique sont toujours des courbes fermées (ou des droites).

Champ d'un fil rectiligne infini

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$



M point de l'espace repéré en cylindriques (r, θ, z) autour d'axe de symétrie (Oz) confondu avec le fil

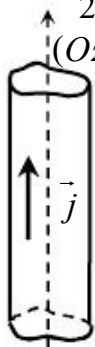
$\vec{B}(M)$ champ magnétostatique en tout point M de l'espace

I intensité, $\vec{e}_\theta$ vecteur unitaire orthoradial
 μ_0 perméabilité du vide

Champ d'un fil rectiligne épais

$$\vec{B}(M_{\text{ext}}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

$$\vec{B}(M_{\text{int}}) = \frac{\mu_0 r j}{2} \vec{e}_\theta$$



M_{ext} point extérieur au fil de section S parcouru par l'intensité $I = jS$, repéré en cylindriques (r, θ, z) autour de l'axe de symétrie (Oz) du fil

M_{int} point intérieur

$\vec{j}$ densité volumique de courant uniforme et axiale dans le fil

Champ d'un solénoïde infini

$$\vec{B}(M_{\text{int}}) = \mu_0 n I \vec{e}_z$$

$$\vec{B}(M_{\text{ext}}) = \vec{0}$$

M_{int} point intérieur d'un solénoïde supposé infini, n nombre de spires par unité de longueur, I intensité dans chaque spire, μ_0 perméabilité du vide. M_{ext} point extérieur

Dipôle magnétostatique

Modèle du dipôle magnétostatique

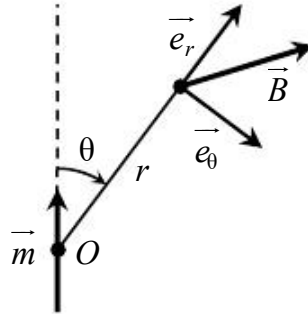
Une boucle de courant est un circuit fermé, de taille caractéristique a , parcouru par un courant constant d'intensité I . Elle est qualifiée de **dipôle magnétostatique** si on étudie ses effets à grande distance ($r \gg a$).

Moment magnétique

$$\vec{m} = I \vec{S}$$

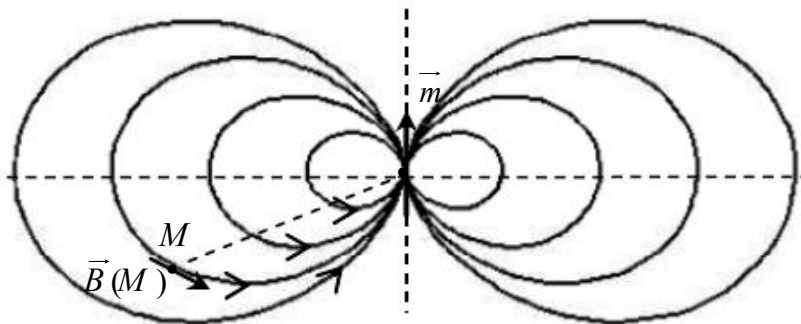
I intensité, $\vec{S}$ vecteur surface de la boucle de courant (pour une boucle plane, $\vec{S} = S\vec{n}$ avec $\vec{n}$ vecteur unitaire normal, S aire délimitée)

Potentiel et champ créés par un dipôle magnétostatique



$$\vec{B}(M) = \frac{m(2\cos\theta\vec{e}_r + \sin\theta\vec{e}_\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{(3(\vec{m} \cdot \vec{e}_r)\vec{e}_r - \vec{m})}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{(3(\vec{m} \cdot \vec{OM})\vec{OM} - OM^2\vec{m})}{4\pi\epsilon_0 OM^5}$$

Lignes de champ d'un dipôle magnétique



Quelques lignes de champ

Action d'un champ magnétostatique extérieur sur un dipôle

$$\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$$

Moment des forces magnétostatiques (en O , ou en tout point si $\vec{B}$ est uniforme)

La résultante (somme des forces) est nulle si le champ $\vec{B}$ est uniforme. Elle est non nulle s'il n'est pas uniforme : après s'être orienté selon le champ, le dipôle a alors tendance à dériver vers les régions de champ plus fort.

$$E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

Énergie potentielle d'un dipôle rigide dans un champ $\vec{B}$ extérieur

Rapport gyromagnétique, magnéton de Bohr

$$\begin{aligned}\vec{m} &= \gamma_0 \vec{L} \\ \gamma_0 &= -\frac{e}{2m_e} \\ \mu_B &= \frac{e\hbar}{2m_e} \\ &= 9,3 \cdot 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2\end{aligned}$$

$\vec{m}$ moment magnétique dit orbital de l'électron dans un modèle semi-classique de l'atome, à un électron de charge $-e$ et de masse m_e , en orbite autour du noyau

$\vec{L}$ moment cinétique orbital de l'électron
 γ_0 rapport gyromagnétique de l'électron
 μ_B magnéton de Bohr (ordre de grandeur du moment magnétique atomique)

Équations locales de l'électromagnétisme

$\vec{E}$ et $\vec{B}$ champs électrique et magnétique dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$

$\mu_0 = 1,2566 \cdot 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ perméabilité magnétique du vide

$\epsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ permittivité diélectrique du vide

Équation locale de conservation de la charge

$$\text{À 1D : } \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\text{À 3D : } \text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

j_x restriction à une dimension suivant (Ox)
 du vecteur densité volumique de courant $\vec{j}$
 ρ densité volumique de charge

Équations de Maxwell

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \text{ou } \text{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

Équation de Maxwell–Gauss
 (forme locale du théorème de Gauss)

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \text{ou } \text{div} \vec{B} &= 0\end{aligned}$$

Équation de Maxwell–flux ou **Maxwell–Thomson** (conservativité du flux de $\vec{B}$)

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{ou } \text{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\end{aligned}$$

Équation de Maxwell–Faraday
 (liée au phénomène d'induction de Neumann)

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

ou $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$

Équation de Maxwell–Ampère

(donnant en statique la forme locale du théorème d'Ampère)

Relations de passage pour les champs

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma(M)}{\varepsilon_0} \vec{n}_{12}$$

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s(M) \wedge \vec{n}_{12}$$

$\vec{n}_{12}$ vecteur unitaire normal à la surface de séparation entre deux milieux, orienté du milieu 1 vers le milieu 2

$\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ et $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$ champs dans les milieux 1 et 2 au voisinage immédiat du point M de l'interface

$\sigma(M)$, $\vec{j}_s(M)$ densité surfacique de charge ou de courant en M

Loi d'Ohm locale et résistance

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

Loi d'Ohm locale

σ conductivité électrique

$\vec{j}$ densité de courant due au champ $\vec{E}$

$$R = \frac{L}{\sigma S} = \frac{\rho_r L}{S}$$

R résistance d'un conducteur de section S et de longueur L , ρ_r résistivité électrique

Conductivité en régime statique

$$\sigma_0 = \frac{n e^2 \tau}{m}$$

n , m densité volumique et masse des porteurs de charges, e charge élémentaire, $\tau \approx 10^{-14}$ s temps de relaxation dans un bon conducteur

Conductivité en régime variable

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{1 + i\omega\tau}$$

ω pulsation du champ électrique variable dans le milieu conducteur

Dans l'ARQS : $\omega\tau \ll 1$, $\sigma \approx \sigma_0$ (réelle, $\vec{j}$ et $\vec{E}$ en phase).

Si $\omega\tau \gg 1$: $\sigma \approx -i \frac{\sigma_0}{\omega\tau}$ (imaginaire pure, $\vec{j}$ et $\vec{E}$ en quadrature).

Conductivité d'un plasma

$$\sigma = -i \frac{n e^2}{m \omega}$$

n , m densité particulaire et masse des porteurs de charges, e charge élémentaire

Puissance cédée

$$\mathcal{P}_{\text{cédée}} = \iiint_{\text{espace}} \vec{j} \cdot \vec{E} \, d\tau$$

$\mathcal{P}_{\text{cédée}}$ puissance algébriquement cédée aux porteurs de charge par le champ électromagnétique

Effet Joule dans conducteur ohmique

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{cédée}} &= \iiint_{\mathcal{V}} \frac{j^2}{\sigma} \, d\tau \\ &= \iiint_{\mathcal{V}} \rho_r j^2 \, d\tau \end{aligned}$$

$\mathcal{P}_{\text{cédée}}$ puissance cédée à la matière par effet Joule dans un conducteur ohmique de volume $\mathcal{V}$ et de conductivité électrique σ

$\rho_r = \frac{1}{\sigma}$ résistivité électrique du conducteur

Densité volumique d'énergie électromagnétique

$$u_{\text{ém}} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Densité volumique d'énergie électromagnétique en un point où règnent les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$

$$u_e = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$$

En statique : densité volumique d'énergie électrostatique

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

En statique : densité volumique d'énergie magnétostatique

Vecteur de Poynting et puissance rayonnée

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

Vecteur de Poynting ou densité volumique de courant d'énergie électromagnétique

$$P_{\text{ray}} = \oiint_S \vec{R} \cdot \vec{n} \, ds = \frac{\delta W_S}{dt}$$

Puissance transportée (rayonnée) par le champ électromagnétique à travers une surface S fermée

δW_S énergie traversant S entre t et $t + dt$

Bilan local de puissance

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{R} + \frac{\partial u_{\text{ém}}}{\partial t} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

Bilan en présence de porteurs de charge mobiles

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{R} + \frac{\partial u_{\text{ém}}}{\partial t} = 0$$

Bilan dans le vide (conservation de l'énergie)

Approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS)

_____ Équation de conservation de la charge dans l'ARQS _____

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \approx 0 \right) \quad \text{Conservation du flux de } \vec{j}$$

_____ L'ARQS magnétique _____

Effets des courants prédominants sur ceux des charges :

$\vec{B}(M, t)$ a les mêmes caractéristiques qu'en statique, mais pas $\vec{E}(M, t)$.

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} \approx \mu_0 \vec{j} \quad \begin{array}{l} \text{Équation de Maxwell-Ampère approximée} \\ \left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ négligeable devant } \vec{j} \right) \end{array}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{Équation de Maxwell-Faraday inchangée}$$

$$\frac{B^2}{2\mu_0} \gg \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \quad \text{Énergie électromagnétique essentiellement magnétique}$$

_____ Conducteur dans l'ARQS _____

Conductivité : $\sigma \approx \sigma_0$

Loi d'Ohm : $\vec{j} \approx \sigma_0 \vec{E}$

Électroneutralité : $\rho \approx 0$

Validité : $\omega\tau \ll 1$ (voir conductivité), pour un bon conducteur limite de validité $f_{\text{lim}} \approx 100 \text{ GHz}$

Physique des ondes

Propagation unidimensionnelle non dispersive

Définitions concernant les ondes

Onde : phénomène physique décrit par une grandeur $\xi(\vec{r}, t)$ variant dans l'espace et au cours du temps, $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ repérant la position d'un point M de l'espace par rapport une origine O fixe d'un repère d'espace (O, x, y, z) .

Surface d'onde (ou **front d'onde**) : lieu des points tels que l'argument de la fonction ξ est constant à t donné.

Onde plane : à tout instant, les surfaces d'onde sont des plans orthogonaux à une direction fixe, dite direction de propagation, de vecteur unitaire $\vec{n}$.

Onde plane homogène : en plus de la condition précédente portant sur la phase de la fonction ξ , son amplitude est uniforme sur une surface d'onde.

Onde progressive : couplage spatio-temporel dans le terme de phase.

Onde stationnaire : découplage spatio-temporel dans le terme de phase, l'onde ne se propage pas.

Équation de D'Alembert unidimensionnelle (1D)

$$\frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} = 0$$

Équation de D'Alembert pour une grandeur physique $\xi(x, t)$ se propageant à la vitesse c suivant l'axe (Ox)

Solution de l'équation de D'Alembert en OPP à 1D

$$\xi(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

Solution générale de l'équation de D'Alembert à une dimension

$f(x - ct)$ **onde plane progressive** (OPP) se propageant suivant le vecteur unitaire $\vec{e}_x$ (vers les x croissants) à la vitesse c

$g(x + ct)$ onde plane progressive (parfois dite régressive) se propageant suivant le vecteur unitaire $-\vec{e}_x$ (vers les x décroissants) à la vitesse c

Solution en OPP à 3D

$$\xi(\vec{r}, t) = f(\vec{r} \cdot \vec{n} - ct) + g(\vec{r} \cdot \vec{n} + ct)$$

$\vec{n} = \alpha \vec{e}_x + \beta \vec{e}_y + \gamma \vec{e}_z$ vecteur unitaire directeur de la propagation

Solution en ondes stationnaires à 1D

$$\xi(x, t) = F(x) G(t) \quad \text{Forme imposée par les conditions aux limites}$$

Structure de l'onde stationnaire

La solution s'écrit alors sous la forme : $\xi(x, t) = \xi_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi)$

L'onde stationnaire vibre « sur place » entre deux enveloppes correspondant aux valeurs extrémales de son amplitude, l'énergie ne se propage pas.

$$kx_N + \psi = \frac{\pi}{2} [\pi] \quad \begin{array}{l} x_N \text{ abscisses des } \mathbf{n\ddot{o}uds} \text{ de vibration (points} \\ \text{où } \xi \text{ est toujours nulle)} \end{array}$$

$$kx_V + \psi = 0 [\pi] \quad \begin{array}{l} x_V \text{ abscisses des } \mathbf{ventres} \text{ de vibration} \\ \text{(points où } \xi \text{ est d'amplitude maximale } \xi_0) \end{array}$$

Deux nœuds successifs, ou deux ventres successifs, sont distants de $\frac{\lambda}{2}$.

OPP monochromatique (OPPM)

$$\xi(\vec{r}, t) = A \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi) \quad \begin{array}{l} A \text{ amplitude de l'onde, } \varphi \text{ phase à l'origine} \\ \vec{k} \text{ vecteur d'onde, } \vec{n} \text{ vecteur unitaire de la} \\ \text{direction de propagation} \end{array}$$

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n}$$

Relation de dispersion de l'OPPM

$$k = \|\vec{k}\| = \frac{\omega}{c} \quad \begin{array}{l} \text{Relation de dispersion caractéristique des} \\ \text{phénomènes de propagation non dispersive} \\ \text{régis par une équation de D'Alembert} \end{array}$$

L'OPPM en notation complexe

Pour une onde progressive suivant $(Ox)^+$:

$$\underline{\xi}(x, t) = \underline{\xi}_0 \exp(i(kx - \omega t)), \quad \underline{\xi}_0 = \xi_0 \exp(i\varphi), \quad \xi(x, t) = \operatorname{Re}\{\underline{\xi}(x, t)\}$$

$$\text{Les opérateurs de dérivation deviennent : } \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \times i k \text{ et } \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \times (-i\omega)$$

$$\text{Avec la convention de phase contraire } (\omega t - kx) : \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \times (-ik), \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \times i\omega$$

Vitesse de phase d'une OPPM sans dispersion

$$\vec{V}_\varphi = \frac{\omega}{k} \vec{n} = c \vec{n} \quad \begin{array}{l} \vec{V}_\varphi \text{ vitesse de déplacement d'une surface} \\ \text{d'onde dans la direction de propagation } \vec{n} \end{array}$$

indépendante de ω

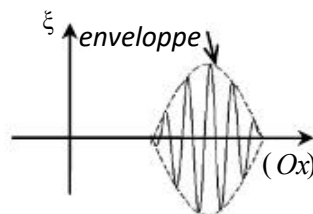
Double périodicité de l'OPPM

Période temporelle $T = \frac{2\pi}{\omega}$, fréquence temporelle $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

Longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} = cT$, fréquence spatiale $\sigma = \frac{1}{\lambda}$

Paquet d'ondes, vitesse de groupe

Définition : un paquet d'ondes est la superposition d'OPPM de pulsations ω réparties dans une bande spectrale de largeur $\Delta\omega$. Il transporte une énergie finie (contrairement à l'OPPM unique). Chaque OPPM dans la bande spectrale voit son amplitude modulée par l'enveloppe du paquet d'onde.



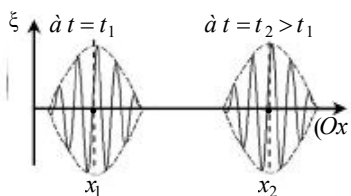
$$V_g = \frac{d\omega}{dk}$$

$$V_e = V_g$$

Vitesse de groupe (vitesse du maximum de l'enveloppe du paquet d'ondes)

Vitesse de l'énergie en l'absence d'absorption

Dans un milieu *non dispersif*, toutes les composantes monochromatiques du paquet d'ondes se propagent avec même vitesse de phase $V_\phi = c$ indépendante de ω . L'enveloppe du paquet d'ondes se propage sans déformation à la même vitesse c que la phase de chaque OPPM qui le compose : alors $V_g = c = V_\phi$.



Ondes électromagnétiques dans le vide

Équations de D'Alembert

$$\Delta(\vec{E}) - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\Delta(\vec{B}) - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

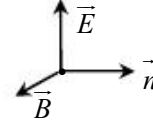
Équation de D'Alembert tridimensionnelle pour les champs électrique et magnétique dans le vide

c célérité (ou vitesse de propagation) dans le vide

Structure de l'OPP électromagnétique dans le vide

$$\vec{B} = \frac{\vec{n} \wedge \vec{E}}{c}$$

$(\vec{n}, \vec{E}, \vec{B})$ direct,
 $\vec{E}$ et $\vec{B}$ transversaux



$$\frac{\|\vec{E}\|}{\|\vec{B}\|} = c$$

c célérité dans le vide

Force de Lorentz dans un problème d'OPP

$$\vec{F} \approx q \vec{E}$$

Composante magnétique de la force de Lorentz négligeable devant la composante électrique

OPPM dans le vide

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

Structure d'une OPPM dans le vide

$$k = \|\vec{k}\| = \frac{\omega}{c}$$

Relation de dispersion d'une OPPM dans le vide

État de polarisation d'une OPPM dans un plan d'onde

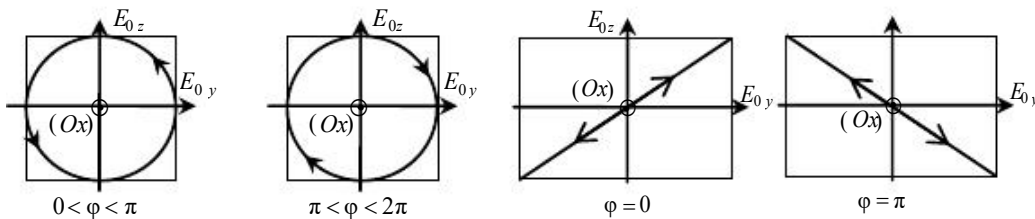
OPPM progressive suivant l'axe (Ox) :

$$\begin{cases} 0 \\ E_y = E_{0y} \cos(kx - \omega t + \varphi_y) \\ E_z = E_{0z} \cos(kx - \omega t + \varphi_z) \end{cases}$$

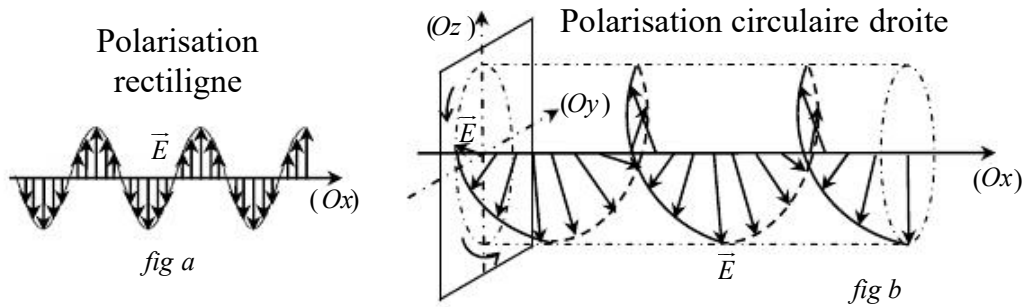
Cas général ($\varphi_y \neq \varphi_z$, $\varphi_y, \varphi_z \in [0, 2\pi[$, E_{0y} et E_{0z} positifs) : à x fixé, l'extrémité de $\vec{E}$ décrit une ellipse.

Si $E_{0y} = E_{0z}$: polarisation circulaire gauche ou droite.

Si $\varphi = 0$ ou bien $\varphi = \pi$: polarisation rectiligne.



État de polarisation à un instant donné



Vecteur de Poynting

$$\vec{R} = \epsilon_0 c E^2 \vec{n} = u_{\text{ém}} c \vec{n}$$

En valeur moyenne pour l'OPPM :

$$\langle \vec{R} \rangle = \left\langle \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right\rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right)$$

$\vec{R}$ vecteur de Poynting instantané porté par la direction de propagation $\vec{n}$

$\langle \vec{R} \rangle$ valeur moyenne temporelle

$\vec{E}$ champ électrique complexe, $\vec{B}^*$ champ magnétique complexe conjugué

Vitesse de l'énergie

$$\vec{V}_e = \vec{V}_\phi = c \vec{n}$$

Vitesse de l'énergie égale à la vitesse de phase pour une propagation non dispersive

Densité d'énergie électromagnétique

$$u_{\text{ém}} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

$$= \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$$

Équipartition de l'énergie

$$\langle u_{\text{ém}} \rangle = \frac{\epsilon_0 \langle E^2 \rangle}{2} + \frac{\langle B^2 \rangle}{2\mu_0}$$

$$= \frac{\epsilon_0}{4} |\vec{E}|^2 + \frac{1}{4\mu_0} |\vec{B}|^2$$

Valeur moyenne pour l'OPPM

Puissance traversant une surface et éclairement

$$\langle \mathcal{P}_S \rangle = \frac{\epsilon_0 c S}{2} E_0^2$$

$$\mathcal{E} = \frac{\langle \mathcal{P}_S \rangle}{S} = \frac{\epsilon_0 c}{2} E_0^2$$

$\langle \mathcal{P}_S \rangle$ puissance moyenne à travers une surface S orthogonale à la propagation

E_0 amplitude de $\vec{E}$ attaché à l'OPPM

$\mathcal{E}$ éclairement

OPPM dans un plasma

Dans cette partie on envisage la propagation dans le plasma d'une OPPM de la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i(\omega t - k x))$.

Plasma sans interaction

Modèle simple : un plasma est un milieu dilué homogène et isotrope, dont les propriétés thermomécaniques sont assimilables à celles d'un gaz ionisé globalement neutre. Il est composé de cations supposés fixes et d'électrons libres. Le poids de l'électron ainsi que la composante magnétique de la force de Lorentz sont négligeables devant la composante électrique. Les interactions électrons-électrons et électrons-cations sont négligées : le plasma est dit sans interaction.

Pulsation plasma

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n e^2}{\epsilon_0 m}}$$

n densité particulaire des électrons, m masse d'un électron, e charge élémentaire

Conductivité d'un plasma

$$\sigma = -i \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega}$$

Conductivité imaginaire pure
 ω pulsation, ω_p pulsation plasma

Puissance moyenne cédée

$$\left\langle \frac{d P_{\text{cédée}}}{d \tau} \right\rangle = 0$$

Densité volumique de puissance moyenne cédée par le champ au plasma

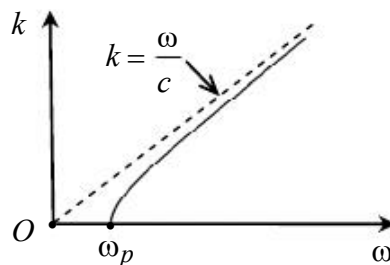
Relation de dispersion dans un plasma

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)$$

Le plasma est un milieu dispersif.

Domaine réactif ou de transparence

Pour $\omega < \omega_p$: plasma dans son domaine réactif.
La propagation d'une OPPM de pulsation ω n'est possible que dans le cas où $\omega > \omega_p$: domaine de transparence du plasma.



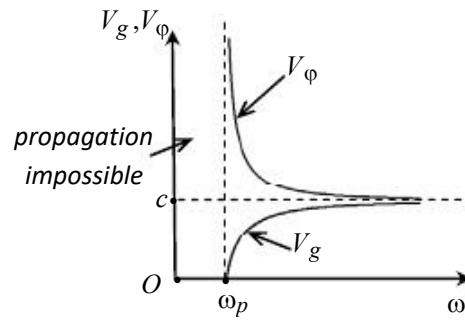
Vitesses de phase et de groupe

$$V_\phi = \frac{\omega}{k(\omega)} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}} > c$$

$$V_g = \frac{d\omega}{dk} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2} < c$$

Pour $\omega \gg \omega_p$: $V_\phi \approx V_g \approx c$

Relation utile : $V_g V_\phi = c^2$



Indice d'un plasma

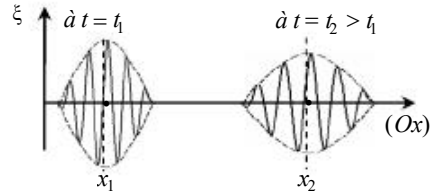
$$n = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$$

Pour $\omega > \omega_p$: n réel

Pour $\omega < \omega_p$: n imaginaire pur

Paquet d'ondes dans un plasma

Chaque composante monochromatique du paquet d'ondes se propage avec sa propre vitesse de phase, l'enveloppe du paquet d'onde se déforme en se propageant : il y a étalement du paquet d'ondes.



Propagation dans un conducteur dans l'ARQS

Dans cette partie on envisage, dans le cadre de l'ARQS magnétique, la propagation dans un conducteur ohmique d'une OPPM de pulsation ω de la forme $\vec{E} = \underline{E}_0 \exp(i(\omega t - k z)) \vec{e}_x$ où k est a priori complexe. On notera σ_0 la conductivité réelle du conducteur.

ARQS et loi d'Ohm locale

Pour $\omega \tau \ll 1$, la conductivité est réelle : $\sigma \approx \sigma_0$.

Loi d'Ohm locale dans le conducteur : $\vec{j} = \sigma_0 \vec{E}$.

Électroneutralité locale et équation de M.-G.

Dans un bon conducteur, le temps caractéristique d'écoulement d'un excédent de charge est très inférieur aux périodes autorisées dans l'ARQS.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{Équation de Maxwell-Gauss avec } \rho \approx 0$$

Équation de diffusion du champ dans le conducteur

Dans le cadre de l'ARQS magnétique on néglige le courant de déplacement devant le courant de conduction.

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad \text{Équation de Maxwell-Ampère approximée}$$

$$\Delta(\vec{E}) - \mu_0 \sigma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad \text{Équation de diffusion du champ}$$

Relation de dispersion et épaisseur de peau

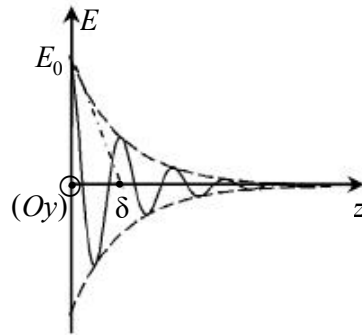
Relation de dispersion : $k^2 = -\mu_0 \sigma_0 i \omega$

$$\text{Épaisseur de peau : } \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma_0 \omega}}$$

Forme du champ dans le conducteur :

$$\vec{E} = E_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \vec{e}_x$$

(atténué sur une distance de quelques δ)



Réflexion sur un conducteur parfait

Les résultats présentés ci-après sont relatifs à une OPPM incidente de la forme

$$\vec{E}_i = E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{e}_x, \quad \vec{B}_i = \frac{E_0}{c} \exp(i(\omega t - kz)) \vec{e}_y \quad \text{se propageant dans}$$

le vide suivant les z positifs, et tombant en incidence normale sur la surface (Oxy) d'un conducteur parfait occupant le demi espace infini ($z > 0$).

Conducteur parfait

$\vec{E}_{\text{int}} = \vec{0}$ et $\vec{B}_{\text{int}} = \vec{0}$: dans un conducteur parfait, l'épaisseur de peau tend vers 0, les champs sont nuls à l'échelle macroscopique. Les charges et courants ne sont localisés qu'en surface, de densité surfacique respectives σ et $\vec{j}_s$.

Champs totaux en un point de la surface

$$\begin{aligned}\vec{E}_{\text{total}}(H, t) &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n} & H \text{ point de la surface, } \vec{n} \text{ vecteur unitaire} \\ & & \text{normale à la surface pointant vers l'extérieur} \\ \vec{B}_{\text{total}}(H, t) &= \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n} & \sigma \text{ densité surfacique de charge} \\ & & \vec{j}_s \text{ densité surfacique de courant} \\ \vec{E}_{\text{total}}(H, t) &= \vec{0}, \sigma = 0 & \text{Cas d'une incidence normale}\end{aligned}$$

Champs réfléchis

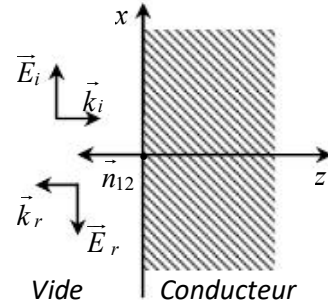
$$\vec{E}_r = -E_0 \exp(i(\omega t + kz)) \vec{e}_x, \quad \vec{B}_r = \frac{E_0}{c} \exp(i(\omega t + kz)) \vec{e}_y$$

Champs réfléchis, de même pulsation ω que l'onde incidente, $\vec{E}_r$ en opposition de phase avec

$\vec{E}_i$, $\vec{B}_r$ en phase avec $\vec{B}_i$

Directions de propagation opposées :

$$\vec{k}_r = -\vec{k}_i = -\frac{\omega}{c} \vec{e}_z$$



Onde stationnaire devant la surface

$$\begin{aligned}\vec{E}_{\text{total}}(M, t) &= 2E_0 \sin(\omega t) \sin(kz) \vec{e}_x & M \text{ point devant la surface} \\ \vec{B}_{\text{total}}(M, t) &= \frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(kz) \vec{e}_y & \vec{E}_{\text{total}} \text{ et } \vec{B}_{\text{total}} \text{ en quadrature spatiale et temporelle}\end{aligned}$$

Absence de propagation de l'énergie

$$\langle u_{\text{ém}} \rangle = \epsilon_0 E_0^2 = \text{cte} \quad \text{et} \quad \langle \vec{R} \rangle = \vec{0}$$

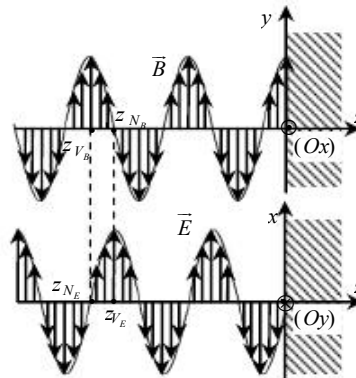
Ventres et nœuds de l'onde stationnaire

$$\text{Nœuds de } \vec{E}_{\text{total}} : z_{N_E} = \frac{n\lambda}{2} \quad (n \text{ entier négatif})$$

$$\text{Ventres de } \vec{E}_{\text{total}} : z_{V_E} = \frac{n\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}$$

$$\text{Nœuds de } \vec{B}_{\text{total}} : z_{N_B} = \frac{n\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}$$

$$\text{Ventres de } \vec{B}_{\text{total}} : z_{V_B} = \frac{n\lambda}{2}$$

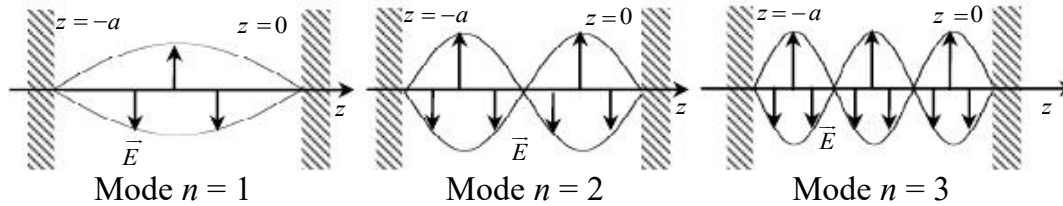


Les nœuds de $\vec{E}_{\text{total}}$ correspondent aux ventres de $\vec{B}_{\text{total}}$ et réciproquement.

Modes propres d'une cavité

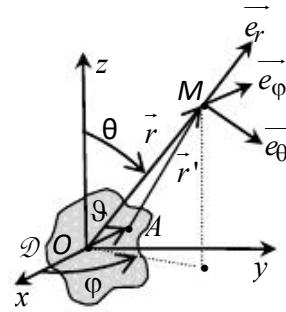
Une cavité simple est formée de deux plans conducteurs parfaits parallèles en $z=0$ et $z=-a$. Le champ électrique dans la cavité présente un nœud de vibration sur les surfaces en $z=-a$ et $z=0$. Seules les fonctions vérifiant ces conditions aux limites peuvent exister dans la cavité, ce sont les modes propres de la cavité.

Longueur d'onde du mode propre d'ordre n dans la cavité : $\lambda_n = \frac{2a}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.



Rayonnement dipolaire et diffusion

Dans cette partie on désigne par $\mathcal{D}$ un point quelconque d'une distribution continue de charges de volume $\mathcal{V}$, variable temporellement de façon harmonique à la pulsation ω et d'extension spatiale de l'ordre de a autour du point O . M désigne un point quelconque de l'espace, repéré en coordonnées sphériques de centre O par $r = OM$.



Approximation dipolaire

Elle consiste à poser $r \gg a$ et $a \ll \lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$, cette dernière hypothèse revient

à considérer que la vitesse V des charges en mouvement est faible devant la vitesse de la lumière : $V \ll c$.

Champs à grande distance

Expressions des champs dans la zone de rayonnement, dans le cadre de l'approximation $a \ll \lambda \ll r$, en coordonnées sphériques de centre O , avec

$$\vec{p} = p_0 \cos(\omega(t - r/c)) \vec{e}_z : \quad \vec{E} \approx \frac{\sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r c^2} \ddot{\vec{p}} \cdot \vec{e}_\theta = \frac{\pi \sin \theta}{\epsilon_0 r \lambda^2} p_0 \cos(\omega t') \vec{e}_\theta$$

$$\vec{B} \approx \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi r c} \ddot{\vec{p}} \cdot \vec{e}_\phi = \frac{\mu_0 \pi c \sin \theta}{r \lambda^2} p_0 \cos(\omega t') \vec{e}_\phi \quad (\text{onde localement plane}).$$

Puissance rayonnée

Vecteur de Poynting moyen rayonné : $\langle \vec{R} \rangle = \left\langle \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right\rangle = \frac{\pi^2 c p_0^2 \sin^2 \theta}{2 \epsilon_0 r^2 \lambda^4} \vec{e}_r$

Diagramme de rayonnement (Rayonnement anisotrope et assez peu directif) :

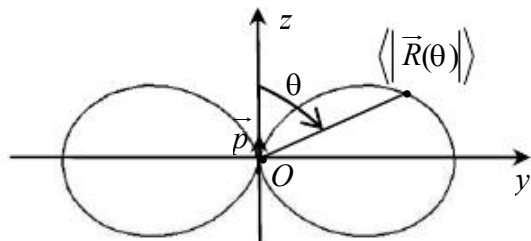
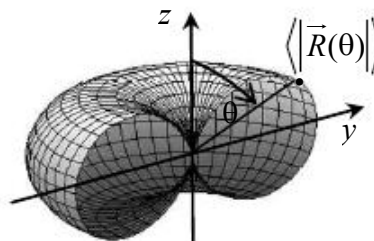


Diagramme de rayonnement



Vue en 3D coupée par un plan méridien

Diffusion Rayleigh

Diffusion d'une onde électromagnétique polarisée rectilignement par une molécule dans cadre du modèle de la charge élastiquement liée.

$\vec{E}_i = E_0 \exp(i(\omega t - k z)) \vec{e}_x$ champ incident

$\langle \vec{R}_i \rangle$ vecteur de Poynting moyen de l'onde incidente

Puissance moyenne diffusée dans le domaine de Rayleigh (loi de la

résonnance) $\langle P \rangle \approx \frac{q^4}{6 \pi \epsilon_0^2 c^2 m^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 \langle \vec{R}_i \rangle$ en $\frac{1}{\lambda^4}$

***Je vais rendre l'électricité si bon marché
que seuls les riches pourront se payer le luxe
d'utiliser des bougies.***

Thomas Edison

Optique ondulatoire

Modèle scalaire de la lumière

Dans cette partie le champ associé à l'onde lumineuse scalaire (le caractère vectoriel du champ n'est pas pris en compte) au point M de l'espace et à l'instant t est pris de la forme $E(M, t) = A(M) \cos(\omega t - k r - \varphi_S)$ où

$\omega = 2\pi \nu = \frac{2\pi c}{\lambda_0}$ est la pulsation, $A(M)$ est l'amplitude en M , φ_S la phase à l'origine (c'est-à-dire phase au point source en S et à l'instant de l'émission).

λ_0 est la longueur d'onde dans le vide. Dans un milieu d'indice n on a la même fréquence et une longueur d'onde $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$ plus courte.

Chemin optique

$$L_{SM} = \int_S^M n \, ds$$

L_{SM} chemin optique entre S et M

s abscisse curviligne entre S et M

En milieu homogène, $L_{SM} = n \int_S^M ds = n SM$: les rayons lumineux sont des droites de S à M .

Phase initiale et convention d'écriture

$$\varphi_M = \varphi_S + \frac{2\pi L_{SM}}{\lambda_0}$$

φ_M phase initiale de l'onde au point M

Notation réelle : $E(M, t) = A(M) \cos(\varphi_M - \omega t)$

Notation complexe : $\underline{E}(M, t) = A(M) \exp(i(\varphi_M - \omega t))$, où $E = \text{Re}\{\underline{E}\}$

Retard de phase

$$\varphi_{SM} = \varphi_M - \varphi_S = \frac{2\pi L_{SM}}{\lambda_0}$$

φ_{SM} retard de phase lors de sa propagation de S à M

Différence de marche, déphasage

$$\delta = L_{(AB)_2} - L_{(AB)_1}$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta$$

δ **différence de marche** entre deux points A et B , ou différence de chemin optique entre deux trajets possibles (1) et (2) pour la lumière entre A et B

$\Delta\varphi$ déphasage correspondant

Surface d'onde

C'est l'ensemble des points M tels que $L_{SM} = \text{cte}$ à t fixé. Entre deux surfaces d'onde, le chemin optique est donc identique le long de tout rayon lumineux. Si l'onde est monochromatique, c'est une surface équiphase (ou isophase) : la phase à l'origine φ_S est constante sur une surface d'onde.

Théorème de Malus

Les rayons lumineux issus d'une source ponctuelle, après un nombre quelconque de réflexions et de réfractions, sont orthogonaux aux surfaces d'onde.

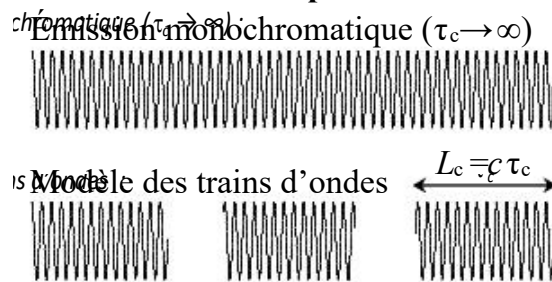
Stigmatisme rigoureux ou approché

Pour deux points A et B conjugués par un système optique stigmatique, L_{AB} a la même valeur le long de tous les rayons issus de A et se croisant en B : « l'image d'un point est un point ».

On se contente du stigmatisme approché dont le caractère est automatique dans le cadre des conditions de Gauss.

Cohérence temporelle, modèle des trains d'onde

φ_S reste constante pendant une durée moyenne finie τ_c appelée **durée de cohérence** (ou **temps de cohérence**). $L_c = c\tau_c$: longueur moyenne d'un train d'ondes ou **longueur de cohérence temporelle**.



Cohérence spatiale, source étendue

On modélise une source étendue par l'association de plusieurs sources ponctuelles distribuées dans l'espace, émettant chacune des ondes incohérentes : la phase φ_S varie aléatoirement d'une source élémentaire à l'autre.

Interférences entre deux ondes isochrones et cohérentes

Principe de superposition, champ d'interférences

$E(M, t) = E_1(M, t) + E_2(M, t)$: le champ total est la superposition des champs émis par deux sources S_1 et S_2 isochrones (même pulsation).

Le lieu de superposition s'appelle le **champ d'interférences**.

Intensité mesurée par un capteur optique

$$I(M, t) = E(M, t)^2 \\ = |\underline{E}(M, t)|^2$$

$I(M, t)$ intensité instantanée en M à t

$$I(M) = \langle I(M, t) \rangle_{\tau_d}$$

Intensité mesurée par un capteur optique :
valeur moyenne de $I(M, t)$ sur son temps
de réponse τ_d

Terme d'interférences

$$I(M) = I = I_1 + I_2 + I_{12}$$

$$I_{12} = 2\sqrt{I_1 I_2} \left\langle \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_0} + \varphi_2 - \varphi_1\right) \right\rangle$$

$$\delta = L_{S_2 M} - L_{S_1 M}$$

$I(M)$ intensité moyenne au point M du champ d'interférences

I_{12} terme d'interférences en un point M , δ différence de marche en M

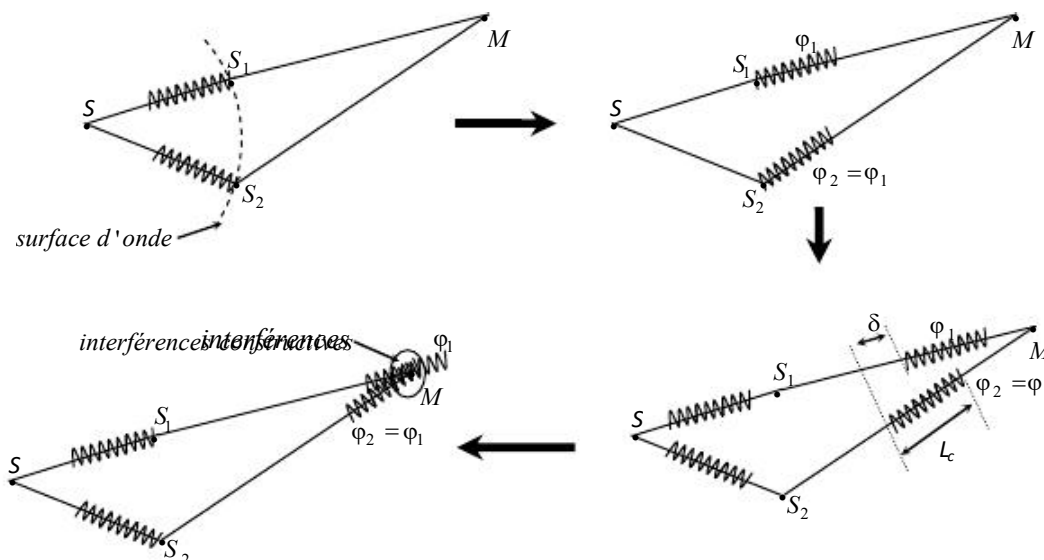
Condition de cohérence mutuelle

Lorsque les sources sont mutuellement cohérentes $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$ (ou =cte) :

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_0}\right), \text{ il y a interférence en } M.$$

Dans le cas contraire $I(M) = I_1 + I_2$.

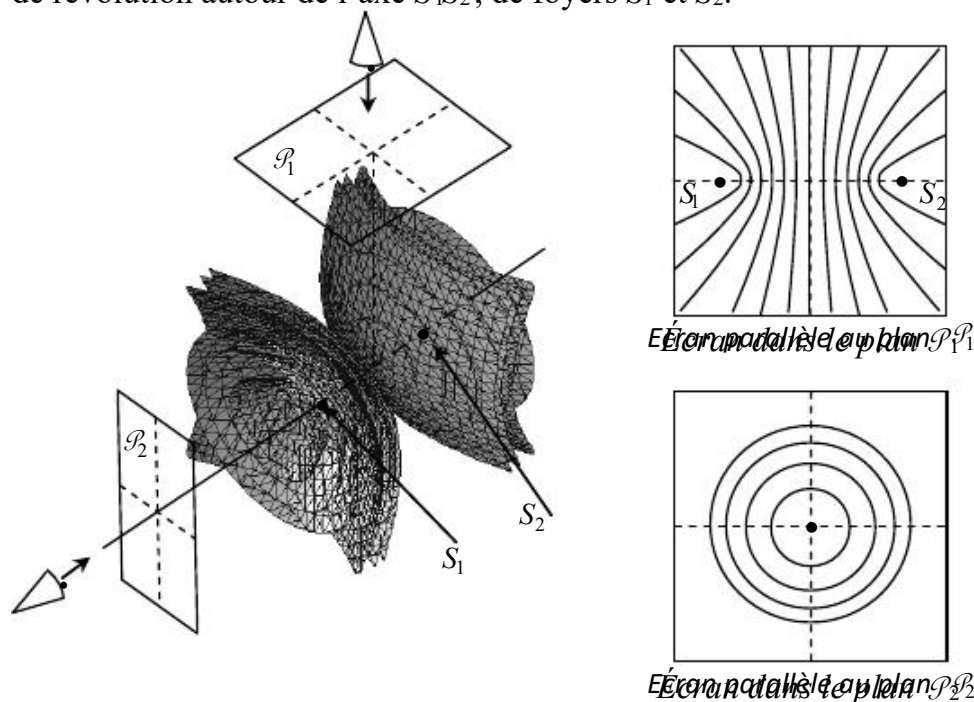
Interprétation dans le modèle des trains d'ondes



Tant que $\delta < L_c = c\tau_c$, au point M $\varphi_2 = \varphi_1$: il y a interférence.

Franges d'interférences : deux situations expérimentales

Équation des franges pour deux sources ponctuelles cohérentes S_1 et S_2 dans un milieu homogène : $S_2M - S_1M = \text{cte}$. Les franges sont des hyperboloïdes de révolution autour de l'axe S_1S_2 , de foyers S_1 et S_2 .



Contraste

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$$

$$I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$$

$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \leq 1$$

$I_{\max}$ maximum d'intensité (interférences constructives, les ondes se superposent en phase); $I_{\min}$ minimum d'intensité (interférences destructives, les ondes se superposent en opposition de phase)
C contraste (ou visibilité) des franges

Intensité en fonction de la différence de marche

Si $I_1 \neq I_2$: I varie périodiquement avec δ entre un maximum et un minimum non nul ; $C < 1$.

Si $I_1 = I_2 = I_0$: $I(\delta) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_0} \right) \right)$; $I_{\max} = 4I_0$ et $I_{\min} = 0$; $C = 1$.

Ordre d'interférences

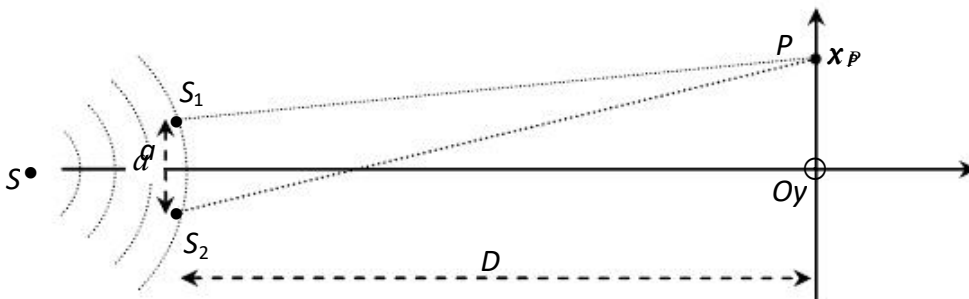
$$p = \frac{\Phi}{2\pi} = \frac{\delta}{\lambda_0}$$

$\Phi = \Delta\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0}$ phase du cosinus interfé-

rentiel

p **ordre d'interférences**, varie d'une unité lorsqu'on passe d'une frange brillante à la suivante

Écran orthogonal à l'axe médiateur des deux sources



a distance entre S_1 et S_2 , D distance entre le plan des sources et l'écran qui sont tous deux orthogonaux à (Oz) ; indice de l'air assimilé au vide ($n = 1$)

$$\delta = S_2P - S_1P \approx \frac{a x_P}{D}$$

δ différence de marche au point P pour $D \gg a$ et $D \gg x_P$

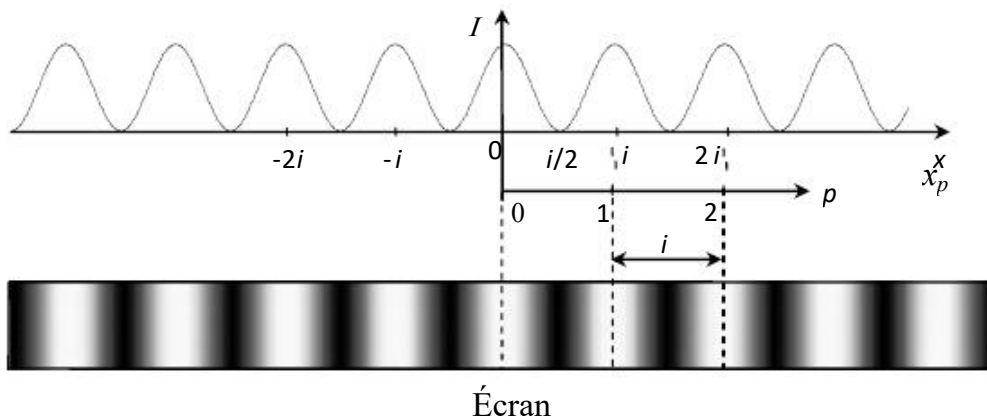
$$i = \frac{\lambda D}{a}$$

i **interfrange** interférentielle, distance à l'écran entre deux franges successives de même nature : $\Delta x_P = i$ lorsque $\Delta p = 1$

Intensité en fonction de l'abscisse sur l'écran

$$\text{Si } I_1 = I_2 = I_0, I(x_p) = \frac{I(0)}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi x_p}{i}\right) \right)$$

$I(0)$ intensité au centre de l'écran, contraste $C=1$



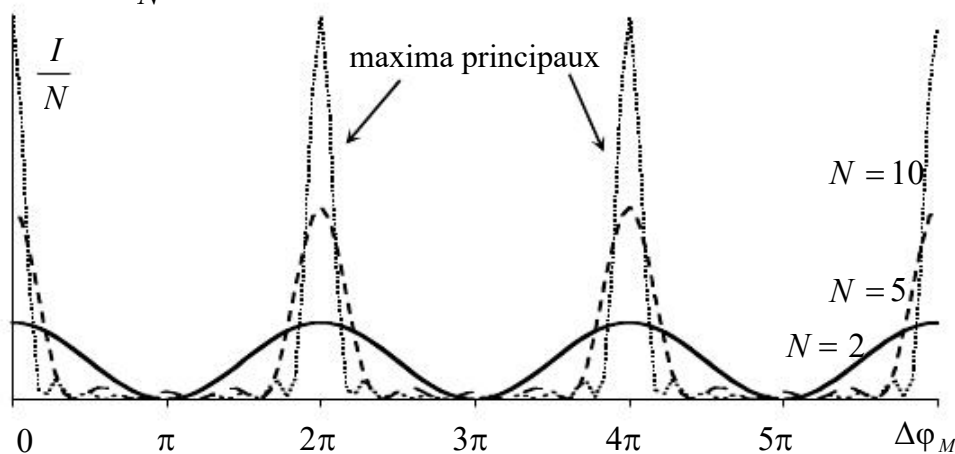
Interférence à N ondes

$$p = \frac{\Delta\varphi_M}{2\pi}, p \text{ entier}$$

Condition d'interférence constructive entre N ondes monochromatiques, cohérentes et synchrones, de même amplitude et déphasées l'une par rapport à la suivante de la même quantité $\Delta\varphi_M$

Superposition de N ondes monochromatiques, cohérentes et synchrones, de même amplitude et déphasées l'une par rapport à la suivante de la même quantité $\Delta\varphi_M$.

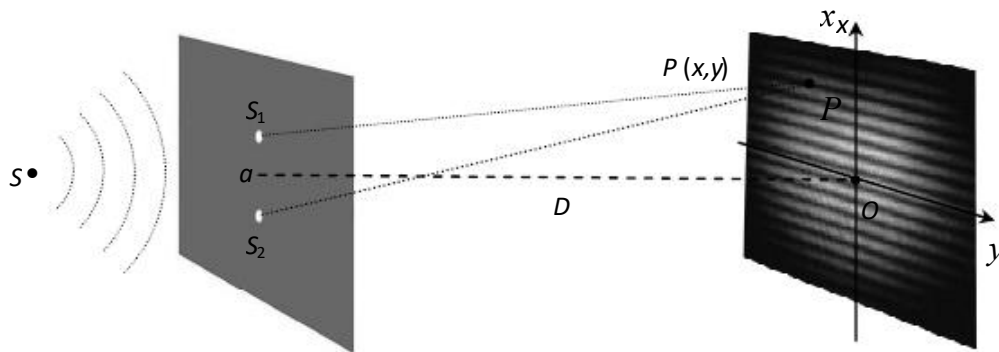
$$\Delta(\Delta\varphi_M)_{1/2} = \frac{2\pi}{N} \text{ mi-largeur des maxima principaux d'intensité}$$



Systèmes interférentiels à division du front d'onde

On fait interférer deux rayons différents issus d'une même source. La superposition fait naître un champ d'interférence étendu dans lequel les interférences sont partout visibles : interférences non localisées.

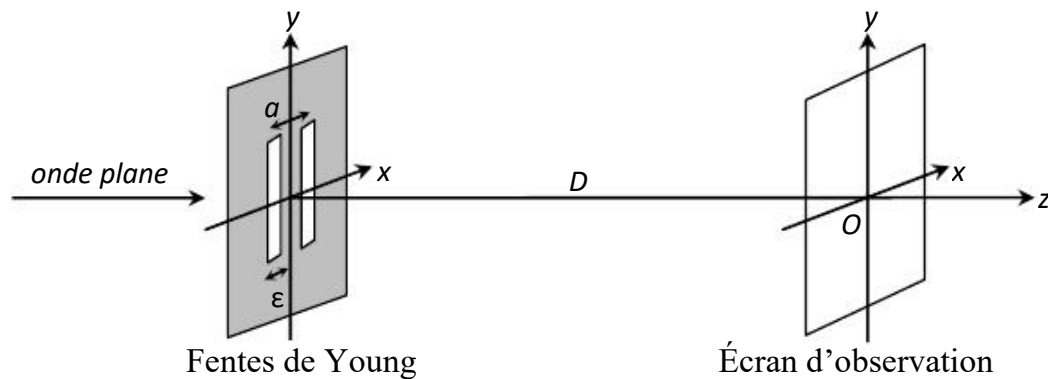
Trous de Young



$$\delta = \frac{ax_p}{D}, \quad i = \frac{\lambda D}{a}$$

a distance entre S_1 et S_2 , D distance entre le plan des sources et l'écran qui sont tous deux orthogonaux à (Oz) ; $D \gg a$ et $D \gg x_p$

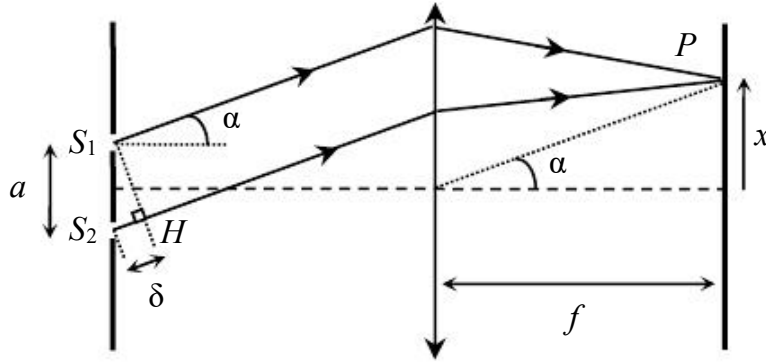
Fentes de Young infiniment fines



$$D \gg a, D \gg x, \quad \epsilon \ll a$$

$$\delta \approx \frac{ax}{D}, \quad I(x) = \frac{I(0)}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda D}\right) \right]$$

___ Fentes de Young infiniment fines et lentille convergente ___



Lentille approximativement stigmatique (dans les conditions de Gauss)

$$\delta = \frac{ax}{f}, \quad I(x) = \frac{I(0)}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda f} \right) \right], \quad i = \frac{\lambda f}{a}$$

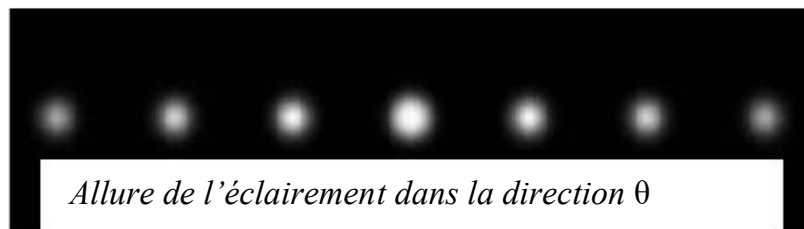
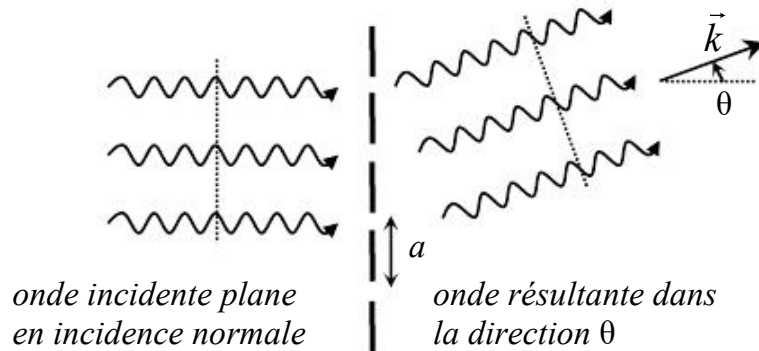
Réseau

Réseau : assemblée de N trous (ou fentes) alignés et séparés d'une distance a constante, produit des interférences à N ondes. Condition d'interférences constructive dans la direction θ , en incidence normale :

$$a \sin \theta = p\lambda, \quad p \text{ entier}.$$

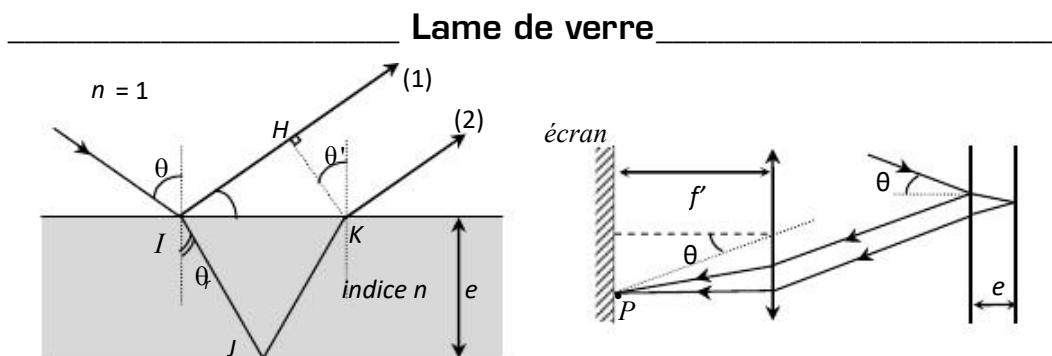
En incidence quelconque d'angle θ_i : $a(\sin \theta - \sin \theta_i) = p\lambda, \quad p \text{ entier}.$

À chaque valeur entière de p correspond un maxima principal d'intensité.



Systèmes interférentiels à division d'amplitude

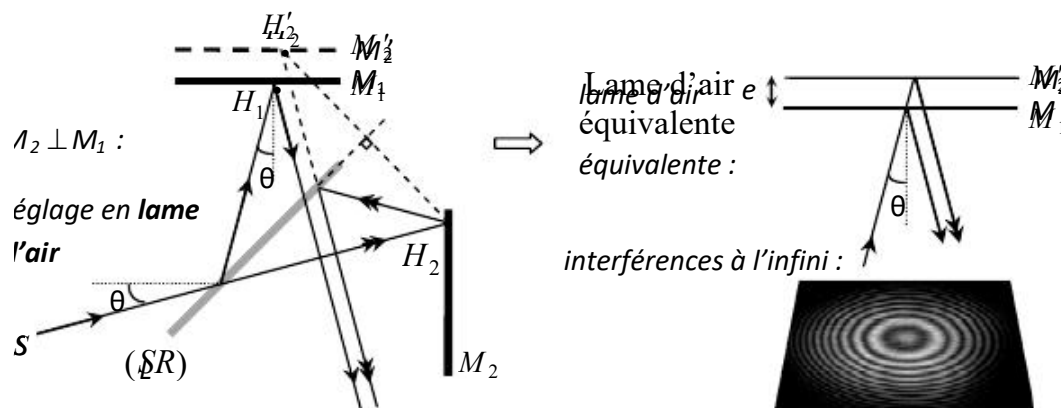
L'amplitude du faisceau primaire est divisée en deux parties par réflexion et transmission sur un dioptré (division énergétique). On fait ainsi interférer chaque rayon émis par une source large avec lui-même. La superposition a lieu en un endroit particulier : interférences localisées.



Les deux rayons interfèrent à l'infini. On visualise ces interférences dans le plan focal image d'une lentille convergente.

$$\delta = 2 n e \cos \theta_r \left(+ \frac{\lambda_0}{2} \right) \quad \delta \text{ différence de marche, } \frac{\lambda_0}{2} \text{ terme supplémentaire pour une seule réflexion air/verre}$$

Interféromètre de Michelson en lame d'air



Un rayon incident est séparé en deux par la séparatrice (SR). Les deux miroirs M_1 et M_2 sont orthogonaux. $H'_2 = \text{sym}(H_2)_{/(SR)}$; $M'_2 = \text{sym}(M_2)_{/(SR)}$

$$\text{Différence de marche : } \delta = 2e \cos \theta \left(+ \frac{\lambda_0}{2} \right)$$

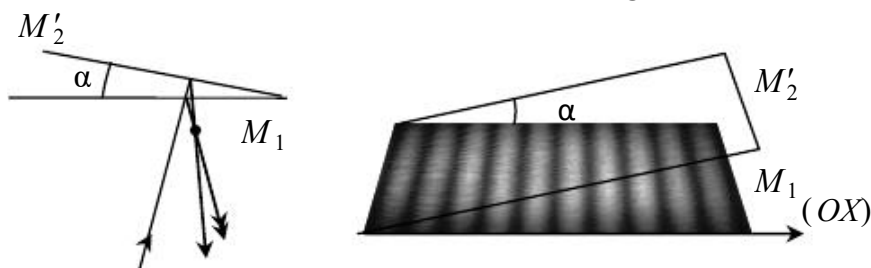
Figure d'interférence : anneaux d'égale inclinaison localisés à l'infini, visualisés au foyer image d'une lentille convergente de focale f .

$$\text{Rayon du } N\text{-ième anneau si le centre est brillant : } R_N = f \sqrt{N \frac{\lambda_0}{e}}$$

Interféromètre de Michelson en coin d'air

M_1 et M'_2 font un petit angle $\alpha \ll 1$ entre eux. On éclaire le coin d'air en incidence quasi normale ($\theta \approx 0$).

Surface de localisation des interférences : au voisinage des miroirs.



Différence de marche : $\delta = 2\alpha X \left(+\frac{\lambda_0}{2} \right)$

$I(X) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{4\pi\alpha X}{\lambda_0} (+\pi) \right) \right)$: franges parallèle à l'arête du coin

Frange sombre en $X = 0$ si déphasage supplémentaire de π à la réflexion.

Interfrange : $i = \frac{\lambda_0}{2\alpha}$, augmente si α diminue

Longueur de cohérence temporelle

Condition d'interférence :
 $\delta < L_c$

$L_c = c\tau_c \approx \frac{\lambda_m^2}{\Delta\lambda}$ longueur de cohérence
temporelle (longueur d'un train d'ondes)
pour une source de largeur spectrale
 $\Delta\lambda$ centrée autour d'une valeur moyenne λ_m
 τ_c durée de cohérence temporelle

Défaut de cohérence temporelle

Critère pour que les franges
restent visibles :

$$\Delta p < 1/2$$

Δp variation de phase due à l'élargissement
spectral de la source de $\Delta\nu$

Défaut de cohérence spatiale

Critère pour que les franges
restent visibles :

$$\Delta p < 1/2$$

Δp variation de phase due à l'élargissement
spatial de la source

Thermodynamique Thermodynamique

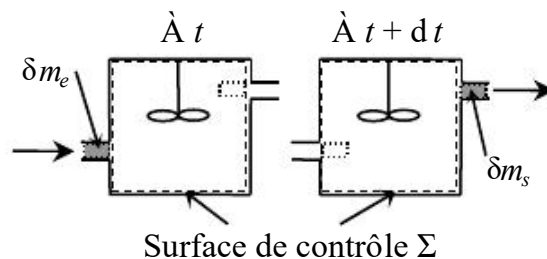
Thermodynamique des systèmes ouverts

Système ouvert ou fermé

Système ouvert : système délimité par une surface de contrôle Σ , pouvant échanger avec l'extérieur de l'énergie mais aussi de la matière.

Les bilans se font sur un système fermé S , incluant :

- à l'instant t , la masse à l'intérieur de la surface de contrôle Σ et la masse qui va entrer entre t et $t + dt$;
- à $t + dt$, la masse à l'intérieur de Σ et la masse qui est sortie entre t et $t + dt$.



On note $\Delta(\xi) = \xi_s - \xi_e$ la variation d'une grandeur d'état ξ entre l'entrée du système ouvert, repérée par l'indice e et la sortie, repérée par l'indice s .

Écoulement unidimensionnel et permanent

Écoulement unidimensionnel : les variables caractérisant le fluide sont uniformes sur une section droite de l'écoulement, et ne dépendent que d'une unique coordonnée curviligne le long de l'écoulement.

Si de plus l'écoulement est permanent (stationnaire) les grandeurs d'état de description du système sont constantes au cours du temps.

Débits massique et volumique

$$D_m = \frac{\delta m}{dt}$$

$$D_v = \frac{\delta V}{dt}$$

D_m débit massique (en $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$)

D_v débit volumique (en $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$)

δm et δV éléments de masse et de volume entrant ou sortant entre t et $t + dt$

Bilan de masse en régime permanent

En régime permanent, la masse du système ouvert est constante et tous les débits massiques D_m restent constants au cours du temps. De plus :

$$D_m^{\text{entrée}} = D_m^{\text{sortie}} \text{ s'il y a une seule entrée et une seule sortie}$$

$$\sum_{j \text{ entrées}} D_m^j = \sum_{k \text{ sorties}} D_m^k \text{ s'il y a } j \text{ entrées et } k \text{ sorties}$$

Si le fluide est incompressible, ces propriétés sont valables pour les débits volumiques D_v .

Premier principe pour une transformation infinitésimale

Pour un système fermé, il existe une fonction d'état extensive U nommée énergie interne telle que pour une évolution infinitésimale :

$$d(E_m + U) = \delta W_{nc} + \delta Q$$

δW_{nc} et δQ travail élémentaire des forces extérieures non conservatives et transfert thermique élémentaire, algébriquement reçus par le système

$E_m = E_c + E_p$ énergie mécanique macroscopique, somme des énergies cinétique et potentielle

Deuxième principe pour une transformation infinitésimale

Pour une évolution infinitésimale monotherme d'un système fermé, il existe une fonction d'état extensive S nommée entropie telle que :

$$dS = \delta S_{\text{éch}} + \delta S_{\text{créée}}$$

$$\delta S_{\text{éch}} = \frac{\delta Q}{T_{\text{ext}}} \text{ terme d'entropie d'échange, } T_{\text{ext}} \text{ température commune entre la}$$

frontière du système et le milieu extérieur

$$\delta S_{\text{créée}} \geq 0 \text{ terme d'entropie créée, } \delta S_{\text{créée}} > 0 \text{ si évolution irréversible,}$$

$$\delta S_{\text{créée}} = 0 \text{ si réversible}$$

Identités thermodynamiques

$$dU = T dS - P dV$$

$$dH = T dS + V dP$$

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_V$$

$$P = - \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_S$$

Relations indépendantes de la nature de la transformation suivie par le système

Température thermodynamique

Pression thermodynamique

____ Grandeurs thermodynamiques pour un système ouvert ____

δQ	Transfert thermique algébriquement reçu par le fluide traversant la machine entre t et $t + dt$
δW_i	Travail indiqué ou utile (reçu par le fluide de la part des parties mobiles de la machine)
$q = \frac{\delta Q}{\delta m}$ et $w_i = \frac{\delta W_i}{\delta m}$	Transfert thermique et travail indiqué massiques
$\mathcal{P}_{th} = \frac{\delta Q}{dt} = D_m q$	Puissance thermique algébriquement reçue par le fluide
$\mathcal{P}_i = \frac{\delta W_i}{dt} = D_m w_i$	Puissance indiquée (ou mécanique utile) algébriquement reçue par le fluide
h, e_p, e_c	Enthalpie, énergie potentielle et énergie cinétique massiques du fluide
$s_{ech} = \frac{\delta S_{ech}}{\delta m}, s_{crée} = \frac{\delta S_{crée}}{\delta m}$	Entropies massiques échangée et créée par le fluide
$\dot{S}_{ech} = \frac{\delta S_{ech}}{dt}, \dot{S}_{crée} = \frac{\delta S_{crée}}{dt}$	Taux d'échange et de création d'entropie

____ Premier principe industriel ____

$$\Delta(e_c + e_p + h) = q + w_i$$

Bilan énergétique par unité de masse

$$D_m \Delta(e_c + e_p + h) = \mathcal{P}_{th} + \mathcal{P}_i$$

Bilan énergétique par unité de temps

$\Delta h = q + w_i$
ou $D_m \Delta h = \mathcal{P}_{th} + \mathcal{P}_i$

Cas où les variations d'énergie potentielle et cinétique sont négligeables devant Δh

____ Bilan entropique ____

$$\Delta S = s_{ech} + s_{crée}$$

Bilan entropique par unité de masse

$$D_m \Delta S = \dot{S}_{ech} + \dot{S}_{crée}$$

Bilan entropique par unité de temps

Pour un système ouvert en contact thermique avec l sources, de températures respectives T_{ext}^l , et recevant un transfert thermique Q_l de chaque source l :

$$\sum_{k \text{ sorties}} m_k s_k - \sum_{j \text{ entrées}} m_j s_j = \underbrace{\sum_l \frac{Q_l}{T_{ext}^l}}_{S_{ech}} + S_{crée}$$

$$\text{ou} \quad \sum_{k \text{ sorties}} D_m^k s_k - \sum_{j \text{ entrées}} D_m^j s_j = \underbrace{\sum_l \frac{\dot{Q}_l}{T_{ext}^l}}_{\dot{S}_{ech}} + \dot{S}_{crée}$$

avec $\dot{Q}_l$ la puissance thermique reçue de la source l à la température T_{ext}^l .

Diffusion thermique

Phénomène de diffusion thermique

C'est le phénomène de transfert d'énergie interne sans travail et sans déplacement de matière à l'échelle macroscopique, des zones chaudes vers les zones froides. La diffusion n'est prépondérante que dans les solides ; dans les fluides, la convection est plus efficace.

Phénomène de convection

C'est le phénomène de transfert thermique avec déplacement macroscopique de matière. La convection concerne les fluides ; elle peut être forcée.

Puissance thermique

$$\Phi_Q(t) = \iint_S \vec{j}_Q(M, t) \cdot d\vec{s} \\ = \mathcal{P}_{th}(t)$$

Φ_Q ou $\mathcal{P}_{th}$ **flux** (ou **puissance**) **thermique** transféré(e) à travers une surface S , $\vec{j}_Q(M, t)$ **densité volumique de courant thermique** (en $W \cdot m^{-2}$)

Transfert thermique

$$\delta Q = \Phi_Q(t) dt \\ = \mathcal{P}_{th}(t) dt$$

δQ transfert thermique à travers S entre les instants t et $t + dt$

Loi de Fourier

$$\vec{j}_Q(M, t) = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T(M, t) \\ \text{ou } \vec{j}_Q(M, t) = -\lambda \vec{\nabla} T(M, t)$$

$\vec{j}_Q(M, t)$ densité volumique de courant thermique, T température
 λ conductivité thermique (en $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$)

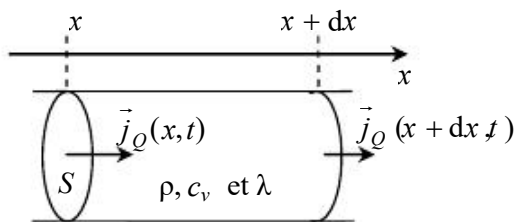
Équation de diffusion thermique unidimensionnelle

$$a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

$$a = \frac{\lambda}{\rho c} \quad \text{diffusivité thermique}$$

(ou coefficient de diffusion thermique)

Hypothèses : surfaces latérales calorifugées, sans terme source algébrique, $\vec{j}_Q = j_Q e_x$, capacités massiques $c_P \approx c_V$ notées c , solide homogène de masse volumique ρ



Généralisation à 3D avec ou sans terme source

$$a \Delta T - \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

Sans terme source (terme de « production ou absorption » d'énergie thermique)

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T + p_v$$

Avec terme source de puissance volumique algébriquement produite $p_v(M, t)$

Longueur et temps caractéristiques

$$L = \sqrt{a\tau}$$

τ et L temps et longueur caractéristiques du phénomène de diffusion
 a diffusivité thermique

Loi de Newton

$$\delta Q_{cc} = h \Sigma (T_{\text{surf}} - T_0) dt$$

h coefficient de transfert surfacique (ou conducto-convectif)

Σ surface de contact entre le solide et le fluide de température T_0

δQ_{cc} transfert thermique surfacique (ou conducto-convectif) algébriquement reçu par le fluide à l'interface solide-fluide entre t et $t + dt$

T_{surf} température à la surface du solide

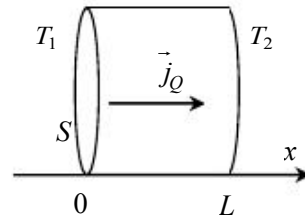
Résistance et conductance thermiques

Résistance thermique à 1D en régime permanent sans terme de production :

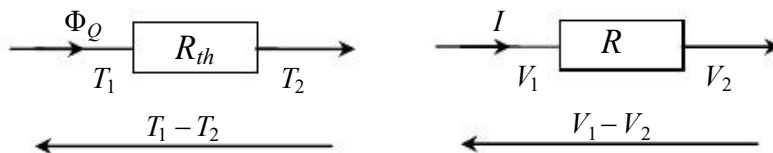
$$R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi_Q} = \frac{L}{\lambda S} \text{ (en } K \cdot W^{-1} \text{)}$$

Résistance conducto-convective : $R_{th\,cc} = \frac{1}{h\Sigma}$

Conductance thermique : $G_{th} = \frac{1}{R_{th}}$ (en $W \cdot K^{-1}$)



Analogie avec un conducteur ohmique $\left(R = \frac{L}{\gamma S}, \gamma \text{ conductivité électrique} \right)$:



Les résistances thermiques s'ajoutent si elles sont en série (traversées par le même courant thermique) ; si elles sont en parallèle (même différence de température à leurs « bornes »), on ajoute les conductances.

____ Analogie entre électrocinétique et diffusion thermique ____

Electrocinétique	Diffusion thermique
Différence de potentiel $V_2 - V_1$	Différence de température $T_2 - T_1$
Vecteur densité volumique de courant $\vec{j}$ tel que tel que $\vec{j} = -\gamma \overrightarrow{\text{grad}} V$ (loi d'Ohm locale). Intensité du courant $I = \iint_s \vec{j} \cdot \overrightarrow{dS}$	Vecteur densité volumique de courant thermique $\vec{j}_Q$ tel que $\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$. Flux thermique (ou puissance thermique) $P_{th} = \Phi_Q = \iint_s \vec{j}_Q \cdot \overrightarrow{dS}$
Conductivité γ	Conductivité thermique λ
Equation de Laplace $\Delta(V) = 0$	$\Delta(T) = 0$ en régime permanent
Résistance $R = \frac{L}{\gamma S}$ telle que : $V_2 - V_1 = R I$	Résistance thermique $R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi_Q}$ telle que : $T_2 - T_1 = R_{th} \Phi_Q$

Éléments de thermodynamique statistique

____ Les différentes échelles ____

La description d'un système peut se faire à différentes échelles associées une longueur caractéristique l_{car} .

→ L'échelle **microscopique** ($l_{car} \sim 1\text{\AA} - 100\text{nm}$) permet l'observation du mouvement des particules individuellement.

→ L'échelle **macroscopique** ($l_{car} \sim L_{système}$) permet d'avoir une vue d'ensemble du système.

→ L'échelle **mésoscopique** ($l_{car} \sim 1\text{ }\mu\text{m}$) permet de considérer que toutes les particules d'un volume mésoscopique ($N \sim 10^7$ particules) sont en équilibre.

____ Atmosphère isotherme ____

$$P(z) = P_0 e^{-\frac{mgz}{k_B T}}$$

$P(z)$ pression dans l'atmosphère considérée de température T uniforme, constituée d'un gaz parfait soumis à l'action de la pesanteur, P_0 pression au sol, m la masse d'une particule et z son altitude, k_B constante de Boltzmann

Poids de Boltzmann

$$e^{-\frac{E_1}{E_2}}$$

E_1 et E_2 sont deux énergies différentes qui sont comparées.

Thermostat

Un thermostat (T) est un système de taille caractéristique très grande devant celle du système étudié (S) et échangeant de l'énergie avec (S). Du fait de cette différence de taille, l'énergie de (T) est constante malgré ces échanges et impose une température T à (S).

Particule à l'équilibre avec un thermostat

$$e^{-\frac{E_{\text{int}}}{k_B T}}$$

E_{int} énergie d'une particule indépendante à l'équilibre avec un thermostat
 $k_B T$ énergie d'agitation thermique

Probabilité d'occupation d'un état

$$p(n) = \frac{1}{Z} e^{-\frac{E_n}{k_B T}}$$
$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{E_n}{k_B T}}$$

$p(n)$ probabilité d'un système (S), à l'équilibre avec un thermostat imposant une température T , pouvant occuper des états énergétiques bien définis et discrets indicés par $n \geq 1$ d'occuper un état d'énergie E_n
 Z facteur de normalisation dit **fonction de partition** du système

Moyenne et fluctuation de l'énergie

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial \ln(Z)}{\partial \beta}$$
$$(\Delta E)^2 = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2$$
$$= -\frac{\partial^2 \ln(Z)}{\partial \beta^2}$$

$\langle E \rangle$ moyenne de l'énergie
 $\beta = \frac{1}{k_B T}$ température inverse
 $(\Delta E)^2$ fluctuation de l'énergie
 Z fonction de partition du système

Capacité thermique

$$C = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} = \frac{(\Delta E)^2}{k_B T^2}$$

C capacité thermique du système

N particules indépendantes discernables

$$E_{\text{ystème}} = \sum_{i=1}^N E_i(k_i)$$

$$Z = \prod_{i=1}^N z_i$$

$$z_i = \sum_{k_i} e^{-\beta E_i(k_i)}$$

$E_{\text{ystème}}$ et Z énergie et fonction de partition d'un système de N particules discernables et indépendantes

$E_i(k_i)$ énergie i -ième particule dans l'état k_i

z_i fonction de partition à une particule

$\beta = \frac{1}{k_B T}$ température inverse

N particules indépendantes discernables identiques

$$Z = z^N$$

$$p_i = \frac{1}{z_i} e^{-\beta E_i(k_i)}$$

Z forme que prend la fonction de partition d'un système de N particules indiscernables

p_i est la probabilité d'observer la i -ième particule dans l'état k_i d'énergie $E_i(k_i)$

$\beta = \frac{1}{k_B T}$ température inverse

Fluctuation et nombre de particules

$$\frac{\Delta E}{E} \propto \frac{1}{\sqrt{N}} \ll 1$$

Si $N \gg 1$ l'énergie coïncide alors avec celle de l'état le plus probable $\langle E \rangle$. Il en est de même pour les autres grandeurs $P, T \dots$ qui prennent la valeur prédite par la thermodynamique classique.

Système à deux niveaux

$$\frac{p_2}{p_1} = e^{-\frac{2\varepsilon}{k_B T}}$$

$$z = 2 \cosh(\beta \varepsilon)$$

$$\langle E \rangle = -\varepsilon \tanh(\beta \varepsilon)$$

$$C = \frac{\varepsilon^2}{k_B T^2} (1 + \tanh^2(\beta \varepsilon))$$

$\frac{p_2}{p_1}$ rapport des probabilités d'être dans l'un

des deux niveaux d'énergie $E = \pm \varepsilon$ non dégénérés

z fonction de partition associée à un des systèmes à deux niveaux

$\langle E \rangle$ et C énergie moyenne et capacité thermique moyenne

Système à deux niveaux : cas limites

Limite basse température

$\langle E \rangle_{T \rightarrow 0} \rightarrow -\varepsilon$: tous les atomes sont dans l'état de plus basse énergie.

Limite haute température

$\langle E \rangle_{T \rightarrow +\infty} \rightarrow 0$: l'agitation thermique rend équiprobable les deux états énergétiques.

Théorème d'équipartition

Pour un système en équilibre à la température T , chaque **degré de liberté énergétique quadratique** contribue à l'énergie moyenne pour $\frac{k_B T}{2}$.

N particules dans un puits infini

Énergies des états stationnaires (n entier strictement positif) de N particules dans un puits de potentiel infini de largeur a macroscopique, à l'équilibre thermique avec un thermostat à la température T : $E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$.

Continuum d'énergie à haute température et pour une pression pas trop élevée.

Énergie moyenne d'une particule : $\langle \varepsilon \rangle$.

Énergie moyenne du système : $\langle E \rangle = N \langle \varepsilon \rangle = N \times \frac{k_B T}{2}$, conforme au théorème de l'équipartition de l'énergie.

Gaz parfait monoatomique

$C_{V,m} = \frac{3}{2} R$, $\langle E \rangle = \frac{3}{2} N k_B T$ $C_{V,m}$ capacités thermique molaire du GP monoatomique ($12,5 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$) d'énergie moyenne $\langle E \rangle$

Gaz parfait diatomique

À basse température, $C_{V,m} = \frac{3}{2}R$, comme pour le gaz monoatomique.

À partir de $T \sim 50 \text{ K}$ ($E \sim 1 \text{ meV}$), prise en compte du mouvement de **rotation** autour de ses deux axes (le troisième axe étant axe de symétrie) :

$$C_{V,m} = \frac{3}{2}R + R = \frac{5}{2}R$$

Les **vibrations**, que l'on peut modéliser comme un système masse-ressort, interviennent pour $T \sim 5000 \text{ K}$ ($E \sim 0,1 \text{ eV}$) : $C_{V,m} = \frac{7}{2}R$.

Modèle d'Einstein classique du solide

$$\langle E \rangle = 3 N k_B T$$

Solide vu comme un assemblage de motifs (atomes, molécules, ions) reliés les uns aux autres par des ressorts indépendants
6 termes quadratiques indépendants par motif), $\langle E \rangle$ énergie moyenne de N motifs

Loi de Dulong et Petit

$$C_{V,m} = 3R$$

$C_{V,m}$ capacité thermique molaire d'un solide dans le cadre du modèle d'Einstein classique

*Une nouvelle théorie ne triomphe jamais.
Ce sont ses adversaires qui finissent par mourir.*

Max Planck

Électronique

Systèmes linéaires et filtrage

Système linéaire

On considère un système physique fournissant un signal de sortie $s(t)$, ou réponse, en fonction d'un signal d'entrée $e(t)$, ou excitation.

Il est linéaire si, quels que soient les scalaires réels λ et μ , à l'entrée $e(t) = \lambda e_1(t) + \mu e_2(t)$ correspond la sortie $s(t) = \lambda s_1(t) + \mu s_2(t)$.

Système stationnaire

Si la réponse $s(t)$ correspond à l'entrée $e(t)$, alors une entrée $e(t - \tau)$ entraîne une sortie $s(t - \tau)$.

Équation différentielle entrée-sortie

$$b_0 s(t) + \sum_k^n b_k \frac{d^k s(t)}{dt^k} = a_0 e(t) + \sum_k^m a_k \frac{d^k e(t)}{dt^k} \quad (\text{équation } E)$$

a_k et b_k coefficients réels

Ordre du système : le plus grand des entiers n et m dans l'équation (E)

Action d'un filtre linéaire sur un signal périodique

Lorsqu'un signal périodique est envoyé à l'entrée d'un filtre linéaire, chaque composante sinusoïdale subit un gain et un déphasage différents en fonction de sa fréquence. On peut ainsi amplifier certaines composantes et atténuer fortement les autres.

Pour obtenir le signal de sortie (en représentation complexe), on multiplie l'amplitude complexe de chaque composante par la valeur de la fonction de transfert à sa fréquence ; puis on additionne les fonctions ainsi obtenues.

Action d'un système non linéaire sur un signal périodique

Lorsqu'un signal périodique est envoyé à l'entrée d'un système non linéaire (opérateur présentant une saturation, multiplieur...), de nouvelles fréquences apparaissent dans le spectre du signal de sortie.

Échantillonnage

$$f_e = 1 / T_e$$

f_e fréquence d'échantillonnage du CAN
(convertisseur analogique/numérique)

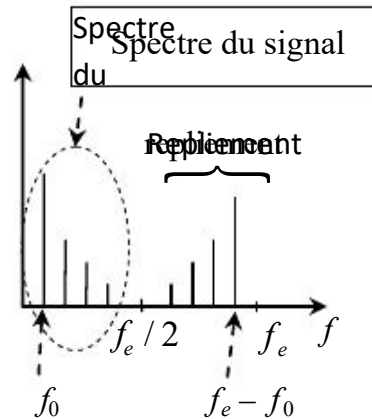
T_e période d'échantillonnage

$$\tau = N T_e$$

N nombre d'échantillons, τ durée de l'acquisition (doit contenir idéalement un nombre entier de périodes du signal acquis, à défaut être assez grande devant la période)

Repliement de spectre

Tout signal de fréquence f_0 échantillonné à la fréquence f_e fait aussi apparaître une raie à la fréquence $(f_e - f_0)$.



Théorème de Nyquist-Shannon

$$f_e \geq 2f_0$$

f_e fréquence d'échantillonnage

f_0 plus haute fréquence du signal traité

Critère de Shannon « opérationnel »

$$f_e = 10f_0$$

f_e fréquence d'échantillonnage

f_0 plus haute fréquence du signal traité

Mécanique quantique

Fonction d'onde d'une particule libre à 1D

$$\Psi(x, t) = \Psi_0 \exp(i(kx - \omega t))$$

$$\Psi(x, t) = \Psi_0 \exp\left(i \frac{px - Et}{\hbar}\right)$$

$\Psi(x, t)$ fonction d'onde (éventuellement complexe) d'une particule libre se propageant suivant l'axe (Ox)

k norme du vecteur d'onde associé, ω pulsation

m masse de la particule d'énergie E et de quantité de mouvement p

Ψ_0 amplitude constante

Densité linéique de probabilité

$$dP(x) = |\Psi(x, t)|^2 dx$$

$$\rho(x, t) = \frac{dP(x)}{dx} = |\Psi(x, t)|^2$$

$dP(x)$ probabilité de trouver la particule à l'instant t entre x et $x + dx$

$\rho(x, t)$ densité linéique de probabilité (réelle)

$\Psi(x, t)$ fonction d'onde à 1D suivant l'axe (Ox) dite amplitude de densité linéique de probabilité

Condition de normalisation

$$\int_D |\Psi(x, t)|^2 dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = 1$$

Probabilité totale de trouver la particule en un point quelconque du domaine spatial D accessible à la particule

probabilité égale à 1 lorsque tout l'axe (Ox) est accessible à la particule

Densité de courant de probabilité

$$\begin{aligned} \vec{J}(x, t) &= |\Psi_0|^2 \frac{\hbar \vec{k}}{m} \\ &= \rho(x) \vec{V}_g = \rho(x) \vec{V} \end{aligned}$$

$\vec{J}(x, t)$ la densité de courant de probabilité d'une particule libre, $\vec{V}_g$ vitesse de groupe du paquet d'onde associé à la particule
 $\vec{V}$ vitesse de la particule

Paquet d'onde libre

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk$$

$\Psi(x, t)$ paquet pour une particule libre
 $g(k)$ est a priori complexe et représente le poids de l'onde de vecteur d'onde k

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(p) e^{i\left(\frac{px - Et}{\hbar}\right)} dp$$

$g(p)$ représente alors le poids de l'onde d'impulsion p

Vitesse de phase et de groupe

$$V_{\phi} = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p} = \frac{\hbar k}{2m}$$

V_{ϕ} vitesse de la phase du paquet d'onde

$$V_g = \frac{\hbar k}{m}$$

V_g vitesse de groupe, c'est la vitesse de déplacement du maximum de l'enveloppe du paquet d'onde

Équation de Schrödinger à 1D

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t) + V(x, t) \Psi(x, t)$$

Pour une particule soumise à un potentiel $V(x, t)$, l'évolution spatio-temporelle de la fonction d'onde se traduit par l'équation de Schrödinger à une dimension suivant l'axe (Ox).

Particule libre, relation de dispersion

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t)$$

Équation de Schrödinger pour une particule libre ($V = 0$)

$$E = \hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}$$

Relation de dispersion quantique

États stationnaires de l'équation de Schrödinger

$$\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x) = -\frac{2m}{\hbar^2}[V(x) - E]\varphi(x)$$

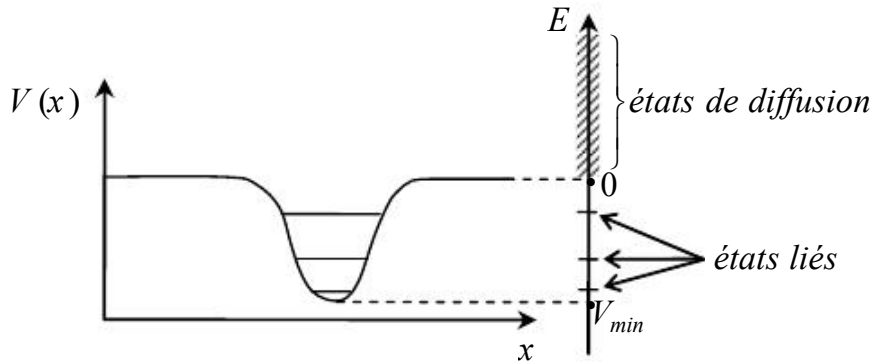
Équation de Schrödinger indépendante du temps (ou stationnaire), où $V(x)$ est l'énergie potentielle stationnaire à 1D suivant (Ox) , $\varphi(x)$ fonction d'onde stationnaire.

$$\Psi(x, t) = \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)\varphi(x)$$

Évolution dans le temps d'un état stationnaire d'énergie $E = \hbar\omega$

États liés, états de diffusion

États liés : pour un potentiel qui tend vers zéro à l'infini et admet un minimum $V_{min} < 0$, les états liés sont les situations telles que $V_{min} < E < 0$.



L'équation de Schrödinger stationnaire n'a de solutions normalisables que pour un ensemble discret de valeurs de l'énergie $\{E_n\}$ qui constituent les niveaux d'énergie du système (quantification de l'énergie).

États de diffusion : l'équation de Schrödinger stationnaire possède des solutions pour un ensemble continu de valeurs d'énergie $E > 0$. Elles correspondent aux états de diffusion de particules libres à l'infini.

Équation de Schrödinger dans un potentiel constant

Pour une particule d'énergie E et de fonction d'onde stationnaire $\varphi(x)$ soumise à une énergie potentielle V constante dans un domaine de l'axe (Ox) :

$$\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x) + \frac{2m}{\hbar^2}[E - V]\varphi(x) = 0.$$

Nature des solutions :

Si $E > V$: les solutions sont de la forme sinusoidale.

Si $E < V$: les solutions sont de la forme exponentielle.

Le puits plat infiniment profond

Les régions $x < 0$ et $x > a$ sont interdites à la particule, la fonction d'onde stationnaire y est nulle : $\varphi(x < 0) = \varphi(x > a) = 0$.

Les « parois » en $x = 0$ et $x = a$ sont parfaitement réfléchissantes :

$$\varphi(x = 0) = \varphi(x = a) = 0$$

Pour $x \in [0, a]$ la fonction d'onde stationnaire normalisée est :

$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(k_n x)$, avec $k_n = \frac{n\pi}{a}$ vecteur d'onde quantifié, n un entier strictement positif.

L'énergie est quantifiée : $E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$.

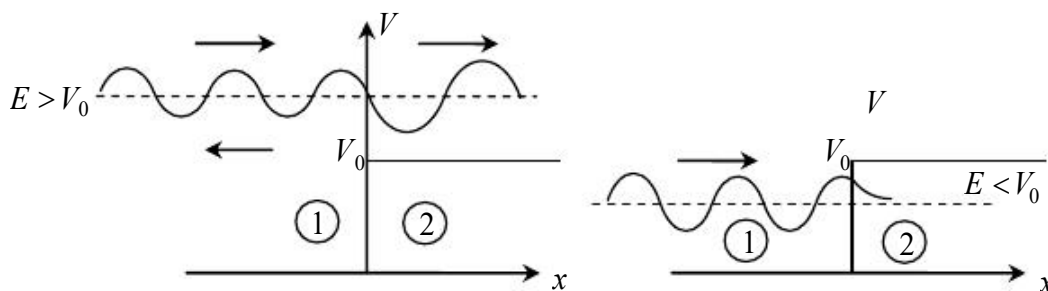
Marche de potentiel

Particule de masse m et d'énergie E provenant de $x \rightarrow -\infty$ interagit avec une « marche de potentiel » de hauteur V_0 .

Si $E > V_0$ la particule a une certaine probabilité de rebrousser chemin (réflexion sur la marche dans le milieu (1)) ou de franchir la marche (transmission dans le milieu (2)). Ces probabilités sont respectivement données par le coefficient de réflexion $R = 1 - \frac{4k_1}{(k_1 + k_2)^2}$ et de transmission

$T = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}$ de la marche, avec $k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ et $k_2 = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar}$.

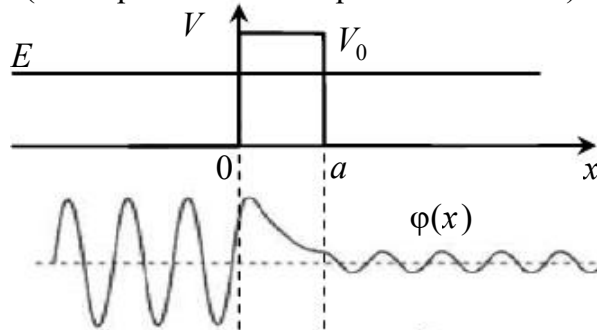
On vérifie que $R + T = 1$ ce qui traduit le fait certain que la particule est soit réfléchi soit transmise.



Si $0 < E < V_0$, dans le cadre classique la zone (2) est interdite à la particule. En mécanique quantique, la particule pénètre dans la zone interdite sous forme d'une onde évanescence $\varphi_2(x) = A_2 e^{-q_2 x}$, avec $q_2 = \frac{i\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$, dont la portée dans le milieu (2) est de l'ordre de la distance $d = \frac{1}{q_2} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0 - E)}}$.

Barrière de potentiel, effet tunnel

Pour une particule d'énergie E , incidente depuis $x \rightarrow -\infty$ sur une barrière de potentiel de largeur a et de hauteur $V_0 > E$ la probabilité non nulle de passer derrière l'obstacle (zone qui lui est classiquement interdite).



Dans la barrière, l'onde est évanescence avec une profondeur de pénétration notée d . Lorsque l'épaisseur a de la barrière est très grande devant d , le coefficient de transmission T de la barrière est très faible devant l'unité et son expression approchée est : $T \approx e^{-2a/d}$.

Thermodynamique chimique

Description d'un système physico-chimique

Grandeur molaire

$$X_m = \frac{dX}{dn}$$

$$X_{m,i} = \left(\frac{\partial X}{\partial n_i} \right)_{T,P,n_{j \neq i}}$$

X grandeur extensive d'un système monophasé uniforme
 X_m grandeur molaire associée à X
 n quantité de matière du système
 Grandeur molaire **partielle** associée à $X(T, P, n_1, \dots, n_j, \dots, n_N)$, relative au constituant A_i de quantité de matière n_i dans un mélange de N constituants

Grandeur de réaction

$$\Delta_r X = \sum_{i=1}^N \nu_i X_i$$

$$dX_{T,P} = \Delta_r X d\xi$$

$d\xi = \frac{dn_i}{\nu_i}$ avancement élémentaire de la réaction, avec ν_i coefficient stœchiométrique algébrique associé au constituant A_i
 $\Delta_r X$ grandeur de réaction associée à X

État standard d'un constituant

L'état standard se rapporte à la pression standard $P^\circ = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$. Il y a autant d'états standard que de valeurs de T .

<i>État physique à T</i>	<i>État standard</i>
Corps pur gazeux	Gaz parfait pur sous P° et à T
Corps pur condensé (liquide ou solide)	Corps pur dans le même état physique, sous P° et à T
Soluté	Soluté en solution idéale infiniment diluée, sous P° et à la concentration $c^\circ = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

Ces états standard peuvent être hypothétiques. Les grandeurs molaires standard d'un corps pur sont ses grandeurs molaires à la pression P° .

État standard de référence d'un élément chimique

L'état standard de référence d'un élément chimique à la température T est l'état standard du corps simple le plus stable dans l'état physique le plus stable à cette température.

Cas particuliers :

- pour les éléments H, O, N, F et Cl, l'état standard de référence est le gaz parfait diatomique quelle que soit T ;
- pour le carbone, l'état standard de référence est le graphite quelle que soit la température.

Grandeurs standard de réaction

$\Delta_r X^\circ(T) = \sum_i \nu_i X_i^\circ(T)$	$\Delta_r X^\circ(T)$ grandeur standard de réaction associée à X X_i° grandeur molaire partielle standard de A_i ν_i coefficient stœchiométrique algébrique
$\Delta_r H^\circ(T) = \sum_i \nu_i H_i^\circ(T)$	Enthalpie standard de réaction $H_i^\circ(T)$ enthalpie molaire partielle standard
$\Delta_r S^\circ(T) = \sum_i \nu_i S_i^\circ(T)$	Entropie standard de réaction $S_i^\circ(T)$ entropie molaire partielle standard

Approximation d'Ellingham

L'enthalpie standard de réaction et l'entropie standard de réaction ne dépendent pas de la température sur des intervalles de T en dehors de tout changement d'état : $\Delta_r H^\circ(T) = \Delta_r H^\circ(T_0)$ et $\Delta_r S^\circ(T) = \Delta_r S^\circ(T_0)$.

Grandeur standard de formation

C'est la valeur $\Delta_f X^\circ$ à la température T de la grandeur standard de la réaction de formation d'une mole d'espèce chimique dans son état standard, à partir des corps simples correspondants aux éléments qui la constituent, pris dans leur état standard de référence à la température T .

Loi de Hess

$$\Delta_r H^\circ(T) = \sum_i \nu_i \cdot \Delta_f H_i^\circ(T)$$

$\Delta_r H^\circ(T)$ évaluée sur un cycle fictif passant des réactifs aux produits via les corps simples correspondants aux éléments qui les constituent, pris dans leur état standard de référence à la température T .

Effets énergétiques d'une réaction chimique

_____ Capacité thermique molaire à pression constante _____

$$C_{P,m} = \left(\frac{\partial H_m}{\partial T} \right)_P$$

Définition pour un corps pur

$$C_{P,m}^\circ = \frac{dH_m^\circ}{dT}$$

Capacité dans les conditions standard
(parfois notée simplement C_P°)

_____ Transformation chimique isobare isotherme _____

$$Q_P = \Delta H = \int_0^{\xi_f} \Delta_r H \cdot d\xi$$

Q_P transfert thermique à P constante
 ξ avancement, ξ_f avancement final

$$Q_P \approx \xi_f \cdot \Delta_r H^\circ(T)$$

Cas d'un mélange de gaz parfaits ou d'un
mélange idéal de phases condensées pures

La réaction est **endothermique** si $\Delta_r H^\circ > 0$, **exothermique** si $\Delta_r H^\circ < 0$,
athermique si $\Delta_r H^\circ = 0$.

_____ Transformation chimique isobare adiabatique _____

$$Q_P = \Delta H = 0$$

- Transformation dans un calorimètre
- Transformation adiabatique isobare, la
température finale étant alors appelée
température de flamme

Enthalpie libre et potentiel chimique

_____ Enthalpie libre G _____

$$G = U - TS + PV$$

$$= H - TS$$

G enthalpie libre, fonction d'état du système
 U énergie interne, T température, S entropie,
 H enthalpie, P pression, V volume du
système

$$dG \leq 0$$

Critère d'évolution spontanée pour un
système à l'équilibre thermique et mécanique
de pression, dans les états initial et final, avec
l'extérieur à T_0 et P_0 constantes

Différentielle de l'enthalpie libre

$dG = V dP - S dT - T \delta S_{\text{créée}}$ (avec $\delta S_{\text{créée}} > 0$)	Système fermé en réaction chimique (source de création d'entropie)
$dG = V dP - S dT$	Identité thermodynamique pour un système fermé de constitution constante
$dG = V dP - S dT + \Delta_r G d\xi$	Système fermé de composition variable car en réaction chimique, d'avancement ξ

Potentiel chimique

$\mu_i = \left(\frac{\partial G}{\partial n_i} \right)_{T, P, n_{i \neq j}}$	$\mu_i = G_{i, m}$ potentiel chimique d'un constituant A_i (enthalpie libre molaire partielle de ce constituant)
$dG(T, P, n_i) = V dP - S dT + \sum_i \mu_i d n_i$	

Lien avec la création d'entropie

$-T \delta S_{\text{créée}} = \sum_i \mu_i d n_i \leq 0$	Inégalité pour une évolution spontanée (irréversible) du système
$\delta S_{\text{créée}} = 0, \sum_i \mu_i d n_i = 0$	Égalité à l'équilibre

Relation d'Euler

$G(T, P, n_i) = \sum_i n_i \mu_i$	G enthalpie libre du système n_i et μ_i quantité de matière et potentiel chimique du constituant A_i
-----------------------------------	---

Enthalpie libre de réaction

$\left(\frac{\partial G}{\partial \xi} \right)_{T, P} = \Delta_r G$	$\Delta_r G$ enthalpie libre de réaction
$\Delta_r G = \sum_i \nu_i \mu_i$	ν_i et μ_i coefficient stœchiométrique algébrique et potentiel chimique du constituant A_i
$\Delta_r G^\circ = \sum_i \nu_i \mu_i^\circ$	$\Delta_r G^\circ$ enthalpie libre standard de réaction
$\Delta_r G^\circ(T) = \Delta_r H^\circ(T) - T \Delta_r S^\circ(T)$	$\Delta_r H^\circ$ enthalpie standard de réaction $\Delta_r S^\circ$ entropie standard de réaction

Expression du potentiel chimique

$$\mu_i(T, P) = \mu_i^\circ(T) + RT \ln(a_i)$$

$\mu_i, \mu_i^\circ(T)$ potentiel chimique et potentiel chimique standard du constituant A_i
 a_i activité du constituant A_i

Expressions des activités

$a(A_i) = 1$	Cas d'un solide ou liquide pur
$a(A_i) = x_i$	Cas d'un mélange condensé idéal x_i fraction molaire de A_i
$a(\text{solvant}) = 1$	Cas d'un solvant (eau pour solution aqueuse)
$a(A_i) = \frac{[A_i]}{c^\circ}$	Cas d'un soluté en solution diluée idéale $c^\circ = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$
$a(A_i) = \frac{P}{P^\circ}$	Cas d'un gaz parfait pur P pression, $P^\circ = 1 \text{ bar}$
$a(A_i) = \frac{P_i}{P^\circ}$	Cas d'un gaz parfait dans un mélange idéal de gaz parfait P_i pression partielle de A_i

Équilibre chimique

Quotient de réaction

$$Q_r = \prod_i a(A_i)^{v_i}$$

$a(A_i)$ et v_i activité et coefficient stœchiométrique algébrique de chaque espèce A_i

Condition d'évolution spontanée

$$\Delta_r G \, d\xi < 0 \quad \Delta_r G \text{ enthalpie libre de réaction}$$

Si $\Delta_r G < 0$, $d\xi > 0$ et le système évolue dans le sens direct de la réaction ($\rightarrow$).

Si $\Delta_r G > 0$, $d\xi < 0$ et le système évolue dans le sens indirect de la réaction ($\leftarrow$).

Condition d'équilibre chimique

$$\Delta_r G_{\text{eq}} = 0 \quad \text{Enthalpie libre de réaction nulle à l'équilibre}$$

Rupture d'équilibre

L'état final n'est pas forcément un état d'équilibre chimique (réactifs et produits présents dans les proportions données par la constante thermodynamique réactionnelle, à la température considérée). Ce peut être, dans le cas de système contenant au moins une phase condensée, un état de rupture d'équilibre (réactif limitant totalement consommé).

Loi d'action de masse (loi de Guldberg et Waage)

$$K^\circ(T) = Q_{r,\text{éq}} = \prod_i (a_{i,\text{éq}})^{v_i} = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^\circ(T)}{RT}\right)$$

$K^\circ(T)$ constante thermodynamique d'équilibre à la température T

$a_{i,\text{éq}}$ activité du constituant A_i à l'équilibre

v_i coefficient stœchiométrique algébrique

Si $K^\circ(T) \gg 1$ (en pratique $K^\circ(T) \geq 10^4$) : réaction quantitative ou totale.

Si $K^\circ(T) \ll 1$: réaction totalement limitée .

Autre formulation du critère d'évolution

$$\Delta_r G = RT \ln\left(\frac{Q_r}{K^\circ}\right)$$

K° constante thermodynamique d'équilibre
 $\Delta_r G$ enthalpie libre de réaction, Q_r quotient de réaction

L'évolution spontanée est telle que Q_r évolue vers K° .

Si $\Delta_r G < 0$, soit $Q_r < K^\circ$: évolution dans le sens direct ($\rightarrow$).

Si $\Delta_r G > 0$, soit $Q_r > K^\circ$: évolution dans le sens indirect ($\leftarrow$).

Relation de Van 't Hoff

$$\frac{d(\ln K^\circ)}{dT} = \frac{\Delta_r H^\circ(T)}{RT^2}$$

$\Delta_r H^\circ(T)$ enthalpie standard de la réaction
 K° constante thermodynamique d'équilibre
T température

$\Delta_r H^\circ(T) > 0$: réaction endothermique favorisée par une élévation de température à P° et composition du système chimique fixées.

$\Delta_r H^\circ(T) < 0$: réaction exothermique favorisée par une baisse de température à P° et composition du système chimique fixées.

$\Delta_r H^\circ(T) = 0$: réaction athermique, variation de température sans effet.

Optimisation d'un procédé chimique

_____ Degrés de liberté d'un système _____

Le nombre de degrés de liberté d'un système à l'équilibre est le nombre de paramètres intensifs indépendants qu'il faut fixer pour déterminer complètement l'état d'équilibre thermodynamique d'un système chimique.

_____ Facteurs d'équilibre _____

Un facteur d'équilibre est un paramètre intensif dont la variation engendre une modification de l'état d'équilibre.

_____ Influence de la température : loi de Van 't Hoff _____

Si T augmente, à P et composition du système fixées, le déplacement se fait dans le sens endothermique.

_____ Influence de la pression : loi de Le Châtelier _____

Si P augmente, à T et composition du système fixées, le déplacement se fait dans le sens permettant une diminution de la quantité de matière totale de gaz.

_____ Ajout d'un constituant gazeux à T et V constants _____

Constituant inactif

Aucune modification

Évolution dans le sens

Constituant actif

qui consomme le constituant ajouté
(loi de modération)

*Ce que nous observons, ce n'est pas la Nature
en soi, mais la Nature exposée à notre méthode
d'investigation.*

Werner Heisenberg

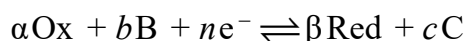
Oxydo-réduction

Thermodynamique des réactions d'oxydo-réduction

Couple oxydant/réducteur

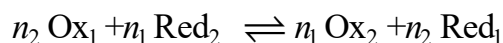
Un **oxydant** est une espèce susceptible de capter un ou plusieurs électrons.
Un **réducteur** est une espèce susceptible de céder un ou plusieurs électrons.

Demi-équation électronique générale pour le couple Ox / Red :



Réaction d'oxydo-réduction

C'est un transfert d'électron(s) entre l'oxydant d'un couple $\text{Ox}_1 / \text{Red}_1$ et le réducteur d'un autre couple $\text{Ox}_2 / \text{Red}_2$.



Potentiel d'électrode

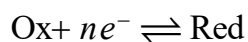
Un conducteur électrique plongeant dans une solution électrolytique d'un couple d'oxydo-réduction acquiert un potentiel appelé **potentiel d'électrode**, ou **potentiel d'oxydo-réduction** du couple. À l'équilibre, les potentiels des couples d'oxydo-réduction en solution sont égaux.

On ne peut mesurer que des différences de potentiels (tensions).

Potentiel standard

Le **potentiel standard** d'oxydo-réduction d'un couple Ox / Red, noté E° , est la valeur du potentiel d'oxydo-réduction du couple quand les constituants sont dans leur état standard.

Pour la demi-équation redox



$$E^\circ(T) = -\frac{\Delta_r G^\circ(T)}{nF} = -\frac{1}{nF} (\mu_{\text{Red}}^\circ - \mu_{\text{Ox}}^\circ)$$

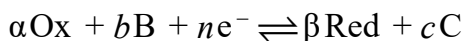
$$F = N_A e = 96\,500 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$$

constante de Faraday

μ_i° potentiel chimique standard de l'espèce

Formule de Nernst

Formule de Nernst pour la demi-équation redox



$$E(T, P) = E^\circ(T) + \frac{RT}{nF} \ln \frac{a_{\text{Ox}}^\alpha a_{\text{B}}^b}{a_{\text{Red}}^\beta a_{\text{C}}^c}$$

a_i activités des espèces

R constante des gaz parfaits

T température

$E(T, P)$ potentiel du couple

Ox / Red

$E^\circ(T)$ potentiel standard du couple

$$E = E^\circ + \frac{0,06}{n} \log \frac{a_{\text{Ox}}^\alpha a_{\text{B}}^b}{a_{\text{Red}}^\beta a_{\text{C}}^c}$$

Formule pratique en solution à 25 °C, avec E et E° en volts

Cinétique des réactions d'oxydo-réduction

Courbe intensité-potentiel

Une courbe intensité-potentiel permet d'étudier l'aspect cinétique de l'oxydo-réduction, en particulier d'expliquer pourquoi certaines réactions prévues par la thermodynamique ne sont pas observées (car infiniment lentes, c'est la notion de blocage cinétique). Elle représente l'intensité i dans l'électrode, ou

la densité surfacique de courant $j = \frac{i}{S}$ (avec S surface de l'électrode), en

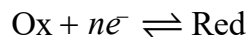
fonction du potentiel E .

Les courbes $i = f(E)$ sont obtenues à partir du montage à trois électrodes : la différence de potentiel est mesurée entre l'électrode de travail et l'électrode de référence, et le courant circule entre l'électrode de travail et l'électrode auxiliaire.

Cinétique redox

Vitesse surfacique (en $\text{mol} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$) de la réaction électrochimique d'avancement molaire surfacique ξ :

$$v = v_{\text{réduction}} - v_{\text{oxydation}} = \frac{d\xi}{dt}$$



$v_{\text{oxydation}} > 0$ vitesse de la réaction d'oxydation

$v_{\text{réduction}} > 0$ vitesse de la réaction de réduction ($\rightarrow$)

Charge électrique élémentaire
échangée pendant un instant dt :

$$dq = n \times d\xi \times N_A \times (-e) = -nF d\xi$$

F constante de Faraday, n nombre
d'électrons échangés

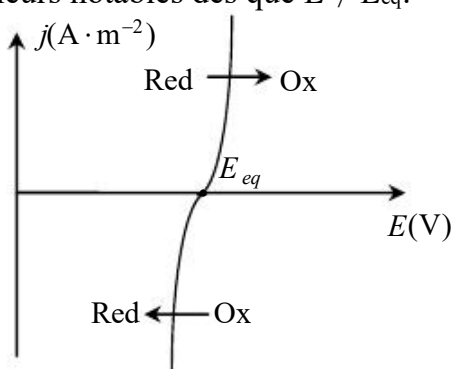
Intensité du courant électrique :

$$i = \frac{dq}{dt} = -nF \frac{d\xi}{dt} = -nFSv = nFS(v_{\text{oxydation}} - v_{\text{réduction}})$$

Signe : $i > 0$ si $v_{\text{oxydation}} > v_{\text{réduction}}$ donc réaction d'oxydation : i noté i_a courant anodique. $i < 0$ si $v_{\text{réduction}} > v_{\text{oxydation}}$ donc réaction de réduction : i noté i_c courant cathodique. $i = 0$ si $v_{\text{oxydation}} = v_{\text{réduction}}$ le système est à l'équilibre.

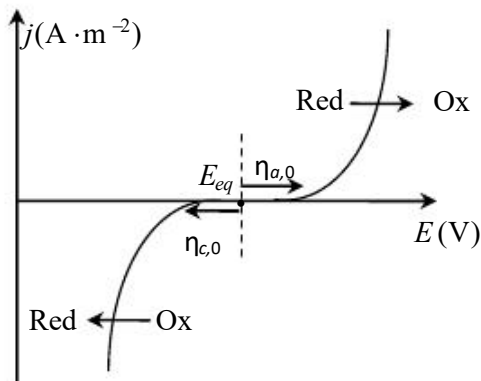
Systeme rapide

À l'équilibre, $j = 0$ pour $E = E_{\text{eq}}$ parfaitement défini et prévu par la formule de Nernst. j prend des valeurs notables dès que $E \neq E_{\text{eq}}$.



Systeme lent

Il existe un domaine de potentiel où ni l'oxydation, ni la réduction ne peuvent se produire. Ce décalage par rapport au potentiel d'équilibre est une surtension à vide (ou surpotentiel à vide), qui peut être anodique (décalage positif, noté $\eta_{a,0}$) ou cathodique (décalage négatif, noté $\eta_{c,0}$).

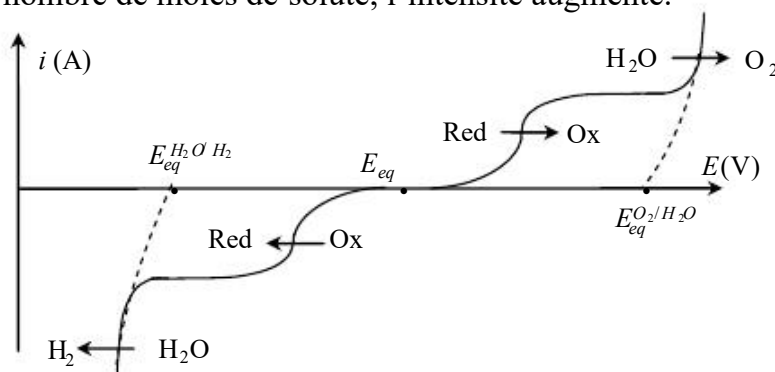


E_{eq} est mal défini expérimentalement mais calculable par la formule de Nernst ($j(E_{\text{eq}}) = 0$).

Rôle du solvant eau

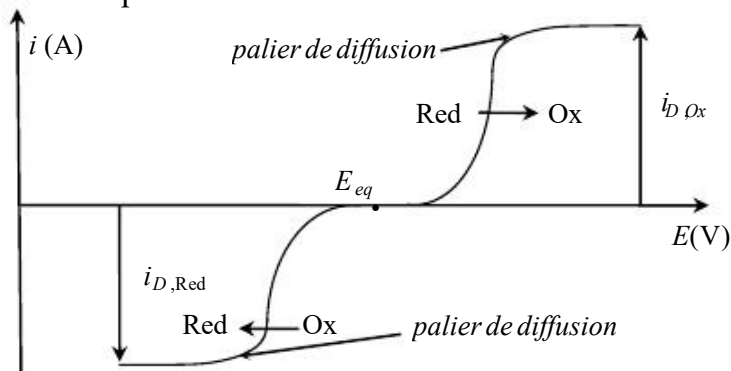
L'eau peut être oxydée ($\text{H}_2\text{O} \rightarrow \frac{1}{2}\text{O}_{2(\text{g})} + 2\text{H}^+ + 2\text{e}^-$) ou réduite ($\text{H}^+_{(\text{aq})} + \text{e}^- \rightarrow \frac{1}{2}\text{H}_{2(\text{g})}$).

Lorsque l'oxydation ou la réduction du solvant entre en jeu, le nombre de moles de solvant disponible au niveau de la surface des électrodes étant plus élevé que le nombre de moles de soluté, l'intensité augmente.



Influence de la diffusion

Les courants anodique et cathodique sont limités par la diffusion. Les intensités maximales atteintes (paliers de diffusion) sont proportionnelles aux concentrations des espèces électro-actives dissoutes.



Pour la vague d'oxydation :

$$j_{d,\text{ox}} = \frac{nFD_{\text{ox}}}{e_{\text{ox}}} \times [\text{Red}] = k_{\text{ox}} \times [\text{Red}]$$

Pour la vague de réduction :

$$j_{d,\text{red}} = \frac{nFD_{\text{red}}}{e_{\text{red}}} \times [\text{Ox}] = k_{\text{red}} \times [\text{Ox}]$$

j_d courant de diffusion, n nombre d'électrons échangés dans la réaction électrochimique, $[C]$ concentration et D coefficient de diffusion de l'espèce électro-active

Lien avec l'intensité du courant

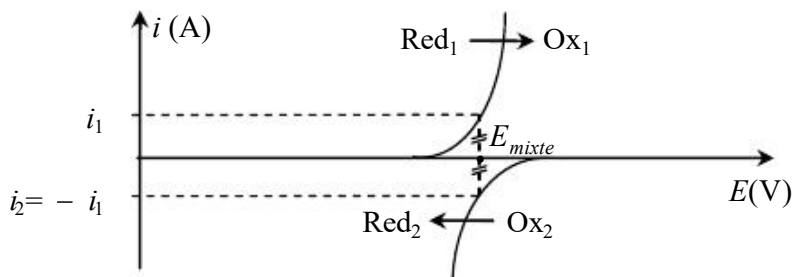
limite de diffusion :

$$i_{\text{ox ou red}} = j_{\text{ox ou red}} \times S_{\text{électrode}}$$

$S_{\text{électrode}}$ surface de l'électrode (anode ou cathode)

Potentiel mixte

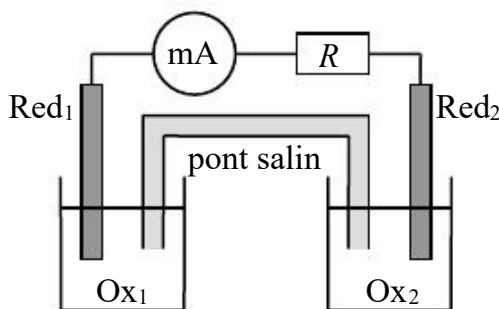
Potentiel défini par une branche anodique et une branche cathodique appartenant à deux couples d'oxydoréduction différents qui, mis en présence, échangent des électrons au travers d'une réaction spontanée avec compensation des courants anodique et cathodique.



Conversion de l'énergie chimique en énergie électrique

Constitution d'une pile électrochimique

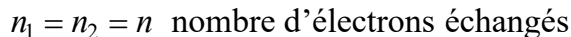
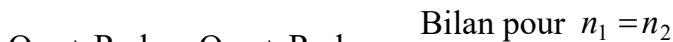
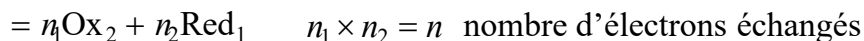
Une pile électrochimique est l'association de deux demi-piles, chacune regroupant les espèces d'un couple Ox / Red, un électrolyte et une électrode (métallique).



La réaction d'oxydo-réduction se produit par transfert d'électrons entre les espèces par l'intermédiaire du circuit. L'**anode** est l'électrode où se produit la réaction d'oxydation ; c'est le pôle – de la pile. La **cathode** est celle où se produit la réaction de réduction ; c'est le pôle + de la pile.

Le courant circule du pôle + de la pile vers le pôle – dans le circuit extérieur au générateur, les électrons dans le sens opposé.

Bilan d'oxydo-réduction d'une pile



Force électromotrice (ou tension à vide) d'une pile

$$\text{Ox}_1 + \text{Red}_2 = \text{Ox}_2 + \text{Red}_1 \quad \text{Cas où } n_1 = n_2 = n$$

$$\Delta E = E_{\text{cathode}} - E_{\text{anode}} = E_1 - E_2 \quad \Delta E \text{ force électromotrice (FÉM) de la pile}$$

$$\Delta E = -\frac{\Delta_r G}{nF} \quad \Delta_r G \text{ enthalpie libre de réaction}$$

$$\Delta E^\circ = -\frac{\Delta_r G^\circ}{nF} \quad n \text{ nombre d'électrons échangés}$$

$$\Delta E^\circ \text{ FÉM standard de la pile}$$

$$\Delta_r G^\circ \text{ enthalpie libre standard de réaction}$$

Constante d'équilibre de la réaction associée à une pile

$$\Delta_r G^\circ = -RT \ln(K^\circ) \quad n \text{ nombre d'électrons échangés}$$

$$K^\circ(T) = \exp\left(\frac{nF(E_1^\circ - E_2^\circ)}{RT}\right) \quad F \text{ constante de Faraday, } R \text{ constante des gaz parfaits, } T \text{ température}$$

$$K^\circ = 10^{\frac{n(E_1^\circ - E_2^\circ)}{0,06}} \quad \text{Formule pratique à } 25^\circ\text{C avec les } E \text{ en volts}$$

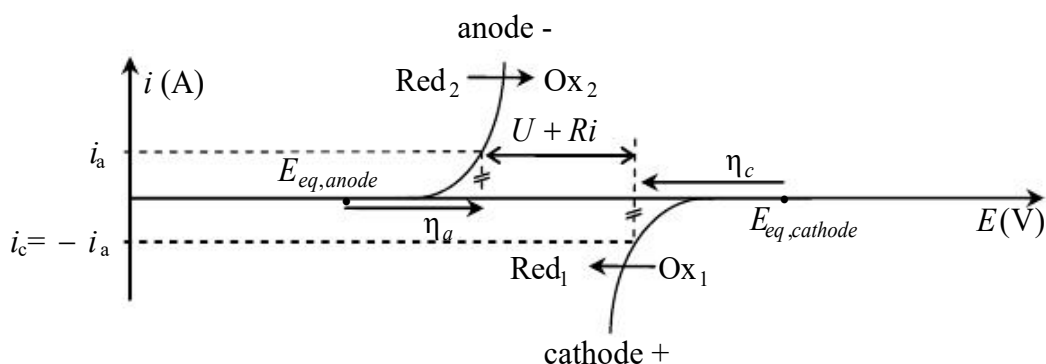
Réaction quantitative pour $K^\circ \geq 10^4$ soit $E_1^\circ - E_2^\circ \geq \frac{0,25 \text{ V}}{n}$.

Travail électrique

Travail élémentaire reçu par le système chimique : $\delta W^* \leq -nF \Delta E d\xi$

ΔE FÉM de la pile
 $d\xi$ avancement molaire élémentaire de la réaction

Étude cinétique



Le point de fonctionnement du circuit est défini par une circulation de courant i non nul telle que les courants anodiques (i_a) et cathodiques (i_c) sont opposés. La tension (ou différence de potentiel) aux bornes de la pile, qui en général ne s'identifie pas avec la FÉM (définie à vide) est alors :

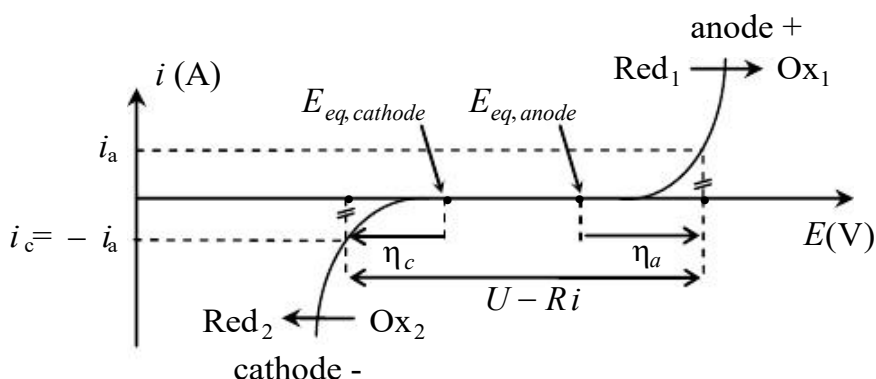
$$U = \left(E_{eq,cathode} + \underset{\text{an}}{\eta_c} \right) - \left(E_{eq,anode} + \underset{\text{an}}{\eta_a} \right) - Ri.$$

R est la résistance interne au système propre à sa constitution physique.

À vide : $U_{i=0} = E_{eq,cathode} - E_{eq,anode} - (\eta_{a0} - \eta_{c0})$ où $\eta_{c0} < 0$. Cette différence de potentiel entre les électrodes ne s'identifie avec la FÉM $E_{eq,cathode} - E_{eq,anode} = E_2 - E_1$ donnée par l'approche thermodynamique que pour des systèmes rapides pour lesquels $\eta_{a0} = \eta_{c0} = 0$.

Conversion de l'énergie électrique en énergie chimique

Électrolyseur ou accumulateur en recharge



Un générateur extérieur permet d'imposer la différence de potentiels nécessaire à la mise en œuvre d'une réaction *non spontanée* (réaction inverse de celle de la pile) : $Ox_2 + Red_1 = Red_2 + Ox_1$

On a alors : $U = E_{anode} - E_{cathode} + Ri$ avec Ri la chute ohmique. À la borne négative, se produit la réduction cathodique de Ox_1 $E_{anode} = E_{eq,anode} + \eta_a$. À la borne positive, on a oxydation anodique de Red_1 $E_{cathode} = E_{eq,cathode} + \eta_c$.

La tension imposée entre les électrodes est :

$$U = (E_{eq,anode} + \eta_a) - \left(E_{eq,cathode} + \underset{<0}{\eta_c} \right) + Ri$$

L'électrolyse démarre pour une tension imposée supérieure ou égale à la tension seuil obtenue à la limite du courant nul :

$$U_{seuil} = E_{eq,anode} - E_{eq,cathode} + \eta_{a0} - \eta_{c0}$$

Pour des systèmes rapides pour lesquels $\eta_{a0} = \eta_{c0} = 0$, il faut, pour recharger un accumulateur, imposer une tension supérieure ou égale à la FÉM $E_{eq,cathode} - E_{eq,anode}$ de l'accumulateur obtenue en décharge.

Rendement faradique

C'est le rapport de la masse de molécule réellement oxydée ou réduite sur la

masse théorique : $r = \frac{m_{\text{expérimentale}}}{m_{\text{théorique}}}$.

$$m_{\text{théorique}} = \frac{jStM}{nF}$$

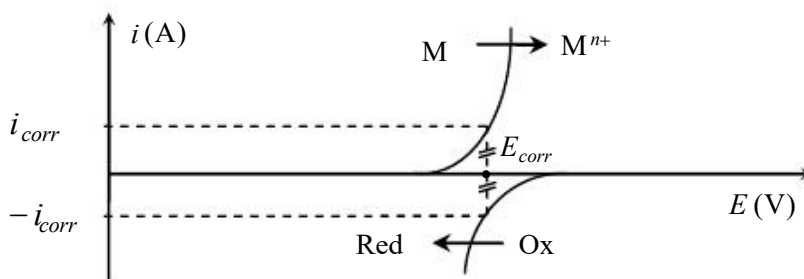
Loi de Faraday

m masse de substance de masse molaire M
formée sur une électrode de surface S durant
le temps t , n nombre d'électrons échangés
 j densité volumique de courant à l'électrode

Phénomènes de corrosion

Potentiel de corrosion, courant de corrosion

Le phénomène de corrosion est une oxydation spontanée d'un métal M en ses ions ou oxydes métalliques associés M^{n+} . Cette réaction est caractérisée par un potentiel de corrosion E_{corr} et un courant de corrosion i_{corr} .



Corrosion différentielle

Lorsque la surface d'un métal fait état de zones d'oxygénation différentes, il est soumis à une corrosion par aération différentielle.

$M \rightleftharpoons M^{n+} + ne^-$: oxydation du métal dans la zone la moins oxygénée

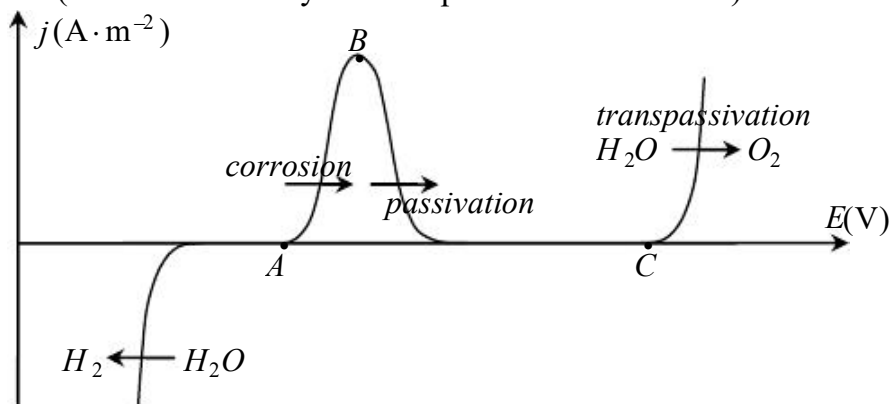
$O_2 + 2H_2O + 4e^- \rightleftharpoons 4HO^-$: réduction du dioxygène dans la zone la plus oxygénée

Immunité, corrosion, passivation

Zone d'immunité : zone de potentiel et de pH où le métal est thermodynamiquement stable.

Zone de corrosion : domaines de prédominance des composés hydrosolubles.

Zones de passivation : domaines où des composés solides se forment, se déposent à la surface du métal corrodé et le protègent d'une oxydation ultérieure (si la couche d'oxyde est imperméable et isolante).



Avant A : domaine d'immunité du métal.

De A à B : domaine de corrosion du métal, j augmente.

En B : potentiel de Flade, vitesse de corrosion maximale.

De B à C : domaine de passivation du métal (formation d'un hydroxyde ou d'un oxyde protecteur), j diminue.

Au-delà de C : domaine de transpassivation, j augmente suite à l'oxydation de l'eau, à potentiel élevé le film protecteur devient conducteur électrique.

Anode sacrificielle

Pour protéger un métal (fer) de la corrosion, on constitue un circuit électrique dans lequel il joue le rôle de cathode, le dioxygène est réduit à son contact. L'anode sacrificielle est constituée d'un métal (zinc) plus réducteur que celui à protéger, et qui se corrode à sa place.

Galvanisation et électrozingage

Ce sont deux procédés de dépôt d'une couche de zinc sur une pièce de métal.

Galvanisation à chaud : par immersion dans un bain de zinc fondu (obtention d'une couche épaisse, mais risque de déformation de la pièce).

Électrozingage : par électrolyse d'une solution contenant des ions Zn^{2+} (facilité de mise en œuvre, mais couche plus fine).

Protection par courant imposé

Cette méthode consiste à connecter la structure à la borne – d'un générateur de courant continu et à relier la borne + à une masse anodique peu soluble. à

Mécanique

Structure des chaînes de solides

Notations

$N_c = N_{liaisons} - N_{solides} + 1$ nombre cyclomatique

$E_c = 6 \cdot N_c$ nombre d'équations scalaires de la cinématique

r_c rang du système des E_c équations de la cinématique

p nombre de solides de la chaîne de solides étudiée

$E_s = 6 \cdot (p - 1)$ nombre d'équations scalaires de la statique

r_s rang du système des E_s équations de la statique

IS

*Je sais calculer le mouvement des corps pesants,
mais pas la folie des foules.*

Isaac Newton

Cinétique des solides indéformables

Masse

$$dm = \rho(M) dv$$

dm masse d'un volume élémentaire dv de centre M , $\rho(M)$ masse volumique en M

$$m_S = \int_{(S)} dm$$

m_S masse d'un solide S

$$m_E = \sum_{i=1}^N m_i$$

m_E masse d'un ensemble E de N solides S_i de masses m_i

Centre d'inertie

$$\int_{(S)} \overrightarrow{G_S M} \cdot d\mathbf{m} = \vec{0}$$

$$\forall P, m_S \cdot \overrightarrow{PG_S} = \int_{(S)} \overrightarrow{PM} \cdot d\mathbf{m}$$

Solide S de centre d'inertie G_S

$$\sum_{i=1}^N m_i \cdot \overrightarrow{G_E G_i} = \vec{0}$$

$$\forall P, m_E \cdot \overrightarrow{PG_E} = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \overrightarrow{PG_i}$$

Ensemble E de N solides S_i , de masses m_i et de centres d'inertie G_i

Moment d'inertie

$$J(S, \Delta) = \int_{(S)} r(M)^2 dm$$

$J(S, \Delta)$ moment d'inertie par rapport à un axe Δ , $r(M)$ distance du point M à l'axe Δ

$$A = \int_{(S)} (y^2 + z^2) dm$$

Moment d'inertie par rapport à l'axe $(O, \vec{x})$

$$B = \int_{(S)} (z^2 + x^2) dm$$

Moment d'inertie par rapport à l'axe $(O, \vec{y})$

$$C = \int_{(S)} (x^2 + y^2) dm$$

Moment d'inertie par rapport à l'axe $(O, \vec{z})$

(x, y, z) coordonnées du point M dans le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

Produits d'inertie

$$D = \int_{(S)} y z \, dm$$

Produit d'inertie par rapport à $(O, \vec{y})$ et $(O, \vec{z})$

$$E = \int_{(S)} z x \, dm$$

Produit d'inertie par rapport à $(O, \vec{x})$ et $(O, \vec{z})$

$$F = \int_{(S)} x y \, dm$$

Produit d'inertie par rapport à $(O, \vec{x})$ et $(O, \vec{y})$

(x, y, z) coordonnées du point M dans le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

Matrice d'inertie

$$[I(S, O)] = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Notation usuelle : solide S , au point O dans la base vectorielle $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$$[I_0(S, O)] = \begin{bmatrix} A_0 & 0 & 0 \\ 0 & B_0 & 0 \\ 0 & 0 & C_0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}$$

Matrice principale d'inertie du solide S au point O dans la base vectorielle $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$A_0, B_0, C_0$$

Moments principaux d'inertie

$$(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$$

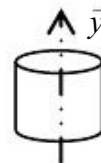
Base vectorielle principale d'inertie

$$[I(S, O)] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Matrice d'inertie du solide de révolution S , de centre O et d'axe de révolution $(O, \vec{y})$

$$\begin{cases} A = \frac{m_S R^2}{4} + \frac{m_S H^2}{12} \\ B = \frac{m_S R^2}{2} \end{cases}$$

Cylindre homogène de masse m_S , de rayon R et de hauteur H



$$\begin{cases} A = \frac{m_S (R^2 + r^2)}{4} + \frac{m_S H^2}{12} \\ B = \frac{m_S (R^2 + r^2)}{2} \end{cases}$$

Tube homogène de masse m_S , de rayon extérieur R , de rayon intérieur r et de hauteur H



IIS

$$[I(S, O)] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

$$[I(S, O)] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

$$A = \frac{m_S(b^2 + c^2)}{12} \quad B = \frac{m_S(c^2 + a^2)}{12}$$

$$C = \frac{m_S(a^2 + b^2)}{12}$$

Matrice d'inertie du solide S , présentant un plan de symétrie perpendiculaire à l'axe $(O, \vec{x})$

Matrice d'inertie du solide S , présentant deux plans de symétrie perpendiculaires et ayant en commun l'axe $(O, \vec{x})$, $(O, \vec{y})$ ou $(O, \vec{z})$

Parallélépipède rectangle homogène de masse m_S de centre O de dimensions (a, b, c) selon les directions respectives $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

Théorème de Huygens

$$[I(S, P)] = [I(S, G_S)] + \underbrace{[I(S, PG_S)]}_{\text{matrice de Huygens}}$$

Calcul de la matrice d'inertie du solide S en un point P , à partir de la connaissance de celle au centre d'inertie G_S

Le vecteur $\overrightarrow{PG_S}$ est de coordonnées (a, b, c) dans la base vectorielle $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, d'où la matrice de Huygens dans la base vectorielle $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$[I(S, PG_S)] = m_S \cdot \begin{bmatrix} b^2 + c^2 & -a b & -a c \\ -a b & a^2 + c^2 & -b c \\ -a c & -b c & a^2 + b^2 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Changement de base vectorielle

Matrice d'inertie exprimée dans la base vectorielle B_1 , à partir de la matrice d'inertie connue dans la base B_2 :

$$[I(S, O)]_{B_1} = [P_{B_2 \rightarrow B_1}] \cdot [I(S, O)]_{B_2} \cdot [P_{B_1 \rightarrow B_2}]$$

$$[P_{B_1 \rightarrow B_2}]$$

$$[P_{B_2 \rightarrow B_1}] = {}^T [P_{B_1 \rightarrow B_2}]$$

Matrice de passage de la base B_1 vers la base B_2

Matrice de passage de la base B_2 vers la base B_1

$$J(S, \Delta) = {}^T(\vec{u}) \cdot [I(S, O)] \cdot (\vec{u})$$

Moment d'inertie par rapport à un axe Δ orienté par le vecteur $(O, \vec{u})$

Quantités cinétiques

Quantité de mouvement

$$\vec{p}(M/R) = m \cdot \vec{V}(M/R)$$

Quantité de mouvement d'un point matériel M de masse m

$$\vec{p}(S/R) = m_S \cdot \vec{V}(G_S, S/R)$$

Quantité de mouvement d'un solide S , de masse m_S et de centre d'inertie G_S

Moment cinétique

$$\vec{\sigma}(P, M/R) = \vec{PM} \wedge m \cdot \vec{V}(M/R)$$

Moment cinétique en P d'un point matériel M de masse m

Moment cinétique en P d'un solide S de masse m_S , de centre d'inertie G_S et de matrice d'inertie en P $[I(S, P)]$

$$\vec{\sigma}(P, S/R) = [I(S, P)] \cdot \vec{\Omega}(S/R) + m_S \cdot \vec{PG_S} \wedge \vec{V}(P, S/R)$$

$$\vec{\sigma}(P, S/R) = [I(S, P)] \cdot \vec{\Omega}(S/R)$$

Cas où le champ des vecteurs vitesse de S dans R est nul en P : $\vec{V}(P, S/R) = \vec{0}$

Moment cinétique en son centre d'inertie G_S , d'un solide S de masse m_S et de matrice d'inertie en G_S $[I(S, G_S)]$

$$\vec{\sigma}(G_S, S/R) = [I(S, G_S)] \cdot \vec{\Omega}(S/R)$$

$$\vec{\sigma}(P, S/R) = \vec{\sigma}(G_S, S/R) + \vec{PG_S} \wedge m_S \cdot \vec{V}(G_S, S/R)$$

Relation d'antisymétrie du champ des vecteurs moments cinétiques

Torseur cinétique

$$\{C(S/R)\}_P = \begin{Bmatrix} \vec{p}(S/R) \\ \vec{\sigma}(P, S/R) \end{Bmatrix}$$

$\vec{p}(S/R)$ résultante cinétique (quantité de mouvement)
 $\vec{\sigma}(P, S/R)$ moment cinétique en P

Quantités dynamiques

Résultante dynamique

$$\vec{R}_d(M/R) = m \cdot \vec{a}(M/R)$$

Résultante dynamique d'un point matériel M de masse m

$$\vec{R}_d(S/R) = m_S \cdot \vec{a}(G_S, S/R)$$

Résultante dynamique d'un solide S , de masse m_S et de centre d'inertie G_S

Moment dynamique

$$\vec{\delta}(P, M/R) = \vec{PM} \wedge m \cdot \vec{a}(M/R)$$

Moment dynamique en P d'un point matériel M de masse m

Moment dynamique en P d'un solide S de masse m_S , de centre d'inertie G_S
(B base vectorielle associée au repère R)

$$\vec{\delta}(P, S/R) = \frac{d}{dt} \vec{\sigma}(P, S/R) \Big|_B + m_S \cdot \vec{V}(P/R) \wedge \vec{V}(G_S, S/R)$$

$$\vec{\delta}(P, S/R) = \frac{d}{dt} \vec{\sigma}(P, S/R) \Big|_B$$

Cas où P , point où est calculé le moment dynamique, est un point fixe dans R , $\vec{V}(P/R) = \vec{0}$

$$\vec{\delta}(G_S, S/R) = \frac{d}{dt} \vec{\sigma}(G_S, S/R) \Big|_B$$

Moment dynamique d'un solide S de masse m_S , en son centre d'inertie G_S

$$\vec{\delta}(P, S/R) = \vec{\delta}(Q, S/R) + \vec{PQ} \wedge m_S \cdot \vec{a}(G_S, S/R)$$

Relation d'antisymétrie du champ des vecteurs moments dynamiques

Torseur dynamique

$$\{D(S/R)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_d(S/R) \\ \vec{\delta}(P, S/R) \end{array} \right\}_P$$

$\vec{R}_d(S/R)$ résultante dynamique, $\vec{\delta}(P, S/R)$ moment dynamique en P

Énergie cinétique

Formes générales

$$E_c(M/R) = \frac{1}{2} m \cdot [\vec{V}(M/R)]^2$$

Énergie cinétique d'un point matériel M de masse m

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2} \int_{(S)} [\vec{V}(M, S/R)]^2 dm$$

Énergie cinétique d'un système matériel S

Cas des solides indéformables

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2} \{C(S/R)\} \otimes \{V(S/R)\}$$

Énergie cinétique d'un solide S en mouvement dans R

Expression développée

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2} [\bar{p}(S/R) \cdot \bar{V}(P, S/R) + \bar{c}(P, S/R) \cdot \bar{\Omega}(S/R)]$$

Cas particuliers

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2$$

Énergie cinétique d'un solide S , de moment d'inertie J par rapport à l'axe de rotation, en rotation à vitesse ω dans R

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2} m_S \cdot v^2$$

Énergie cinétique d'un solide S , de masse m_S , en translation à vitesse v dans R

Ensemble de solides indéformables

$$E_c(E/R) = \sum_{i=1}^N E_c(S_i/R)$$

Énergie cinétique d'un ensemble E de solides S_i en mouvement dans R

$$E_c(E/R) = \frac{1}{2} J_{eq} \dot{\alpha}^2$$

J_{eq} : moment d'inertie équivalent de l'ensemble de solides E , rapporté au paramètre du mouvement α

Dynamique des solides indéformables

Principe fondamental de la dynamique (PFD)

$$\{D(S / R_g)\} = \{F(\bar{S} \rightarrow S)\}$$

Solide S en mouvement dans le référentiel galiléen R_g

$$\{D(E / R_g)\} = \{F(\bar{E} \rightarrow E)\}$$

Ensemble E de N solides S_i en mouvement dans R_g

Théorème de la résultante dynamique (TRD)

$$m_S \cdot \vec{a}(G_S, S / R_g) = \vec{R}(\bar{S} \rightarrow S)$$

Solide S en mouvement dans le référentiel galiléen R_g

$$\sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{a}(G_i, S_i / R_g) = \vec{R}(\bar{E} \rightarrow E)$$

Ensemble E de N solides S_i en mouvement dans R_g

Théorème du moment dynamique (TMD)

$$\vec{\delta}(P, S / R_g) = \vec{M}(P, \bar{S} \rightarrow S)$$

Solide S en mouvement dans le référentiel galiléen R_g

$$\sum_{i=1}^N \vec{\delta}(P, S_i / R_g) = \vec{M}(P, \bar{E} \rightarrow E)$$

Ensemble E de N solides S_i en mouvement dans R_g

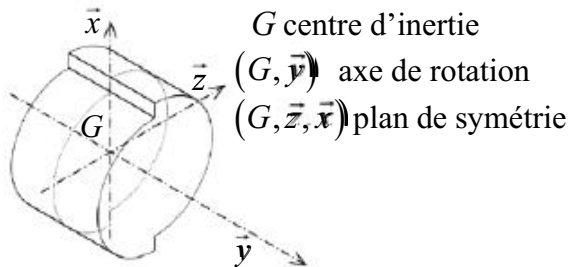
Principe des actions mutuelles

$$\{F(S_i \rightarrow S_j)\} = -\{F(S_j \rightarrow S_i)\}$$

Entre deux solides S_i et S_j

Conditions d'équilibrage des rotors

Rotor équilibré statiquement et dynamiquement



G centre d'inertie

$(G, \vec{y})$ axe de rotation

$(G, \vec{z}, \vec{x})$ plan de symétrie

(cf. figure ci-contre)

Équilibrage statique :

Le centre d'inertie G du rotor est situé sur l'axe de rotation.

Équilibrage dynamique :

Le rotor présente un plan de symétrie $(G, \vec{z}, \vec{x})$ perpendiculaire à l'axe de rotation.

$$[I(S, G)] = \begin{bmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Puissance et travail développés par les actions mécaniques

Puissance développée dans un référentiel R

$$P(X \rightarrow Y / R) = \{F(X \rightarrow Y)\} \otimes \{V(Y / R)\}$$

Cas d'une action mécanique appliquée par un système X au solide Y

Expression développée

$$P(X \rightarrow Y / R) = \vec{R}(X \rightarrow Y) \cdot \vec{V}(P, Y / R) + \vec{M}(P, X \rightarrow Y) \cdot \vec{\Omega}(Y / R)$$

Puissances d'actions mécaniques simples

$$P(X \rightarrow Y / R) = \vec{R}(X \rightarrow Y) \cdot \vec{V}(P, Y / R)$$

Cas d'une force appliquée par un système X sur le solide Y en un point P

$$P(X \rightarrow Y / R) = C \cdot \omega$$

Cas d'un couple C appliqué par un système X sur le solide Y et colinéaire à l'axe de rotation de Y dans R

Puissance d'actions mécaniques mutuelles

$$P(S_i \leftrightarrow S_j) = \{F(S_i \rightarrow S_j)\} \otimes \{V(S_j / S_i)\}$$

Puissance développée entre les solides S_i et S_j

Expression développée (indépendante d'un référentiel R)

$$P(S_i \leftrightarrow S_j) = \vec{R}(S_i \rightarrow S_j) \cdot \vec{V}(P, S_j / S_i) + \vec{M}(P, S_i \rightarrow S_j) \cdot \vec{\Omega}(S_j / S_i)$$

$$P(S_i \leftrightarrow S_j) = 0$$

Cas de :

- roulement sans glissement
- liaison parfaite

Travail développé dans un référentiel

$$W(X \rightarrow Y / R) \Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} P(X \rightarrow Y / R) dt$$

Travail développé entre les instants t_1 et t_2 , pour une action mécanique appliquée par un système X au solide Y

Travail d'actions mécaniques mutuelles

$$W(S_i \leftrightarrow S_j) \Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} P(S_i \leftrightarrow S_j) dt$$

Travail développé entre les solides S_i et S_j

Rendement en régime établi d'un système

$$\eta = \frac{\left| \sum W_{\text{donné}} \right|}{\sum W_{\text{reçu}}}$$

Rapport calculé sur un cycle de fonctionnement entre le travail donné par le système et le travail reçu par le système

$$\eta = 1 - \frac{\left| \sum W_{\text{dissipé}} \right|}{\sum W_{\text{reçu}}}$$

Autre écriture, où $\sum W_{\text{dissipé}}$ représente l'énergie dissipée par le système sur un cycle de fonctionnement

Grandeurs physiques

Domaine physique	Grandeur d'effort	Grandeur de flux	Puissance
Électrique	Tension u [V]	Courant i [A]	$P = u \times i$
Mécanique de translation	Force F [N]	Vitesse v [m.s ⁻¹]	$P = F \times v$
Mécanique de rotation	Moment d'une force c [N.m]	Taux de rotation ω [rad.s ⁻¹]	$P = c \times \omega$
Hydraulique et pneumatique	Pression p [Pa]	Débit volumique q [m ³ .s ⁻¹]	$P = p \times q$
Thermique	Température T [K]	Flux d'entropie s [J.K ⁻¹ .s ⁻¹]	$P = T \times s$

Approche énergétique du PFD pour les solides indéformables

Énergie cinétique galiléenne

$$E_c(S / R_g) = \frac{1}{2} \{ C(S / R_g) \} \otimes \{ V(S / R_g) \}$$

Solide S en mouvement dans le référentiel galiléen R_g

$$E_c(E / R_g) = \sum_{i=1}^N E_c(S_i / R_g)$$

Ensemble E de N solides S_i en mouvement dans R_g

Puissance galiléenne développée par les actions mécaniques

$$P(\bar{S} \rightarrow S / R_g) = \{ F(\bar{S} \rightarrow S) \} \otimes \{ V(S / R_g) \}$$

Actions mécaniques appliquées par l'extérieur du solide S sur S

$$P(\bar{E} \rightarrow E / R_g) = \sum_{i=1}^N P(\bar{E} \rightarrow S_i / R_g)$$

Actions mécaniques appliquées par l'extérieur de E sur les solides S_i de E en mouvement dans R_g

Théorème de l'énergie cinétique

$$\frac{d}{dt} E_c(S / R_g) = P(\bar{S} \rightarrow S / R_g)$$

TEC pour un solide S en mouvement dans le référentiel galiléen R_g

$$\frac{d}{dt} E_c(E / R_g) = P(\bar{E} \rightarrow E / R_g) + P_i(E)$$

TEC pour un ensemble E de N solides S_i en mouvement dans R_g

$P_i(E)$ somme des puissances développées par les actions mécaniques mutuelles entre les N solides S_i de E

Forme intégrée du théorème de l'énergie cinétique

Pour un solide S , entre les instants t_1 et t_2

$$E_c(S / R_g)(t_2) - E_c(S / R_g)(t_1) = W(\bar{S} \rightarrow S / R_g) \Big|_{t_1}^{t_2}$$

Pour un ensemble E de N solides S_i , entre les instants t_1 et t_2

$$E_c(E / R_g)(t_2) - E_c(E / R_g)(t_1) = W(\bar{E} \rightarrow E / R_g) \Big|_{t_1}^{t_2} + W_i(E) \Big|_{t_1}^{t_2}$$

$W_i(E) \Big|_{t_1}^{t_2}$ somme des travaux développés par les actions mécaniques mutuelles entre les N solides S_i de E , entre les instants t_1 et t_2

Automatique : SLCI

Comportement des systèmes

$co(t)$

Consigne donnée au système

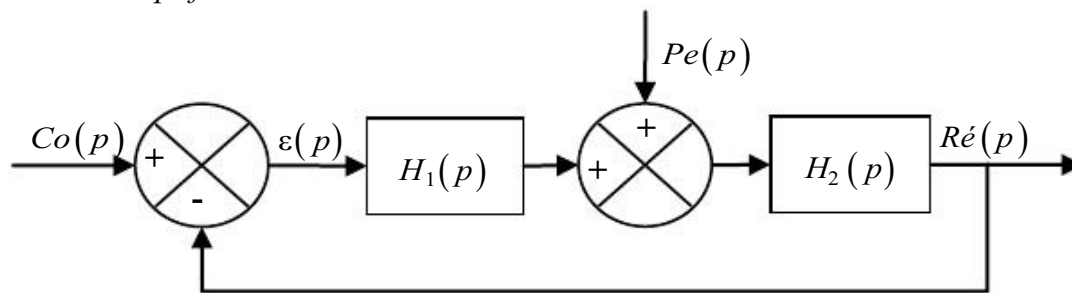
$ré(t)$

Réponse du système

$pe(t)$

Perturbation

Schéma simplifié



$$H_{\text{poursuite}}(p) = \frac{Ré(p)}{Co(p)} = \frac{H_1(p) H_2(p)}{1 + H_1(p) H_2(p)} \quad \text{Fonction de transfert en poursuite}$$

$$H_{\text{régulation}}(p) = \frac{Ré(p)}{Pe(p)} = \frac{H_2(p)}{1 + H_1(p) H_2(p)} \quad \text{Fonction de transfert en régulation}$$

Théorème de superposition

$$Ré(p) = H_{\text{poursuite}}(p) \cdot Co(p) + H_{\text{régulation}}(p) \cdot Pe(p)$$

Précision des systèmes

Fonction erreur

$$err(t) = co(t) - ré(t)$$

Définition

$$Err(p) = Co(p) - Ré(p)$$

Transformée de Laplace de la fonction erreur

$$Err(p) = [1 - H_{\text{poursuite}}(p)] Co(p)$$

Erreur en poursuite

$$\begin{cases} Err(p) = -Ré(p) \\ Err(p) = -H_{\text{régulation}}(p) \cdot Pe(p) \end{cases}$$

Erreur en régulation

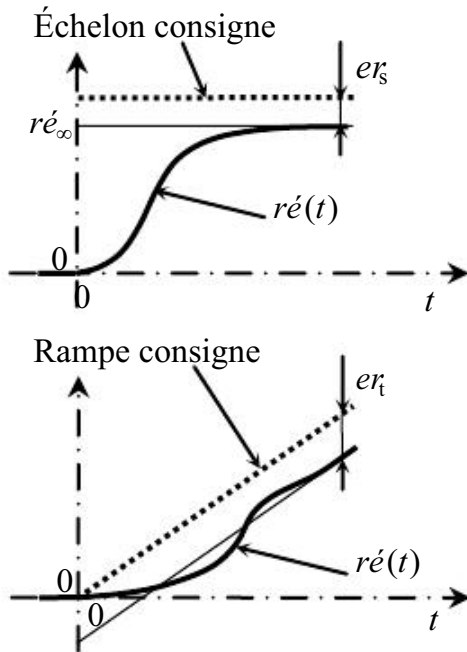
Erreur en régime établi

$$er_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} [err(t)]$$

$$er_{\infty} = \lim_{p \rightarrow 0} [p \cdot Err(p)]$$

Définition

Si elle existe, on peut calculer l'erreur en régime établi par le théorème de la valeur finale



Erreur statique er_s :

erreur en régime établi pour une entrée en échelon.

Erreur de traînage er_t :

erreur en régime établi pour une entrée de type rampe.

α ↓	Échelon $E_0 u(t)$	Rampe $V t u(t)$	Accélération $\frac{1}{2} a t^2 u(t)$
0	$\frac{E_0}{1 + K_{bo}}$	∞	∞
1	0	$\frac{V}{K_{bo}}$	∞
2	0	0	$\frac{a}{K_{bo}}$

Erreurs en régime établi er_{∞} en fonction de la consigne $co(t)$.

Paramètres caractéristiques de la fonction de transfert en boucle ouverte :
gain K_{bo} , classe α

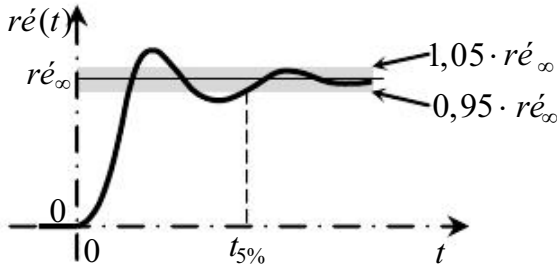
Rapidité des systèmes

Temps de réponse à 5 %

C'est l'instant $t_{5\%}$ à partir duquel la réponse $ré(t)$ d'un système à un échelon reste à moins de 5 % de la réponse $ré_{\infty}$ en régime permanent.

Sous conditions initiales nulles :

$$\forall t \geq t_{5\%}, \left| \frac{ré(t) - ré_{\infty}}{ré_{\infty}} \right| \leq 0,05$$



Réponse $ré(t)$ du système à un échelon sous conditions initiales nulles

Temps de montée

C'est la durée t_m nécessaire au système pour atteindre une première fois la valeur de la réponse en régime établi $ré_{\infty}$ pour une entrée en échelon.

t_m plus petit temps t tel que

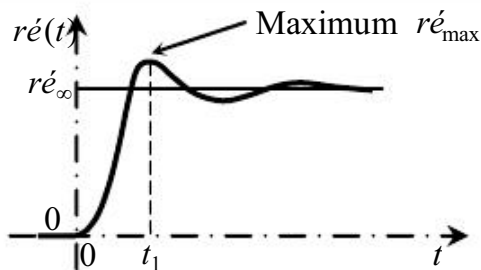
$$ré(t) = ré_{\infty}$$

Dépassement

C'est la valeur relative de la réponse maximale $ré_{\max}$ rapportée à la réponse $ré_{\infty}$ en régime établi, pour une entrée en échelon.

Sous conditions initiales nulles :

$$D_1 = \frac{ré_{\max} - ré_{\infty}}{ré_{\infty}}$$



Réponse $ré(t)$ du système à un échelon

La courbe présente un extremum $ré_{\max}$ supérieur à la valeur en régime établi $ré_{\infty}$.

Stabilité des systèmes

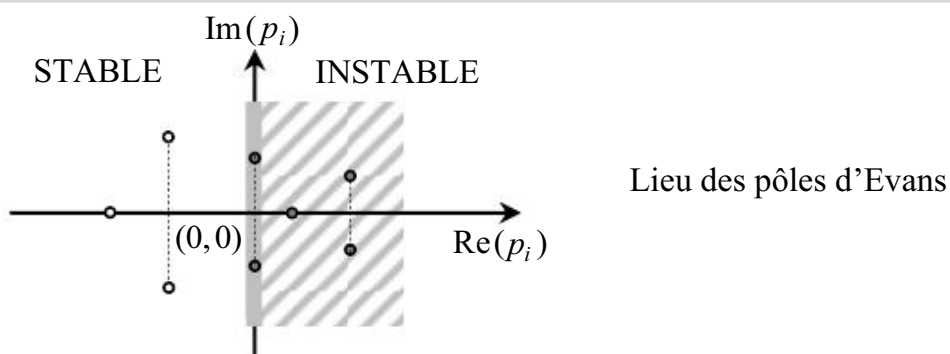
Stabilité absolue

Un système est dit **absolument stable** si sa réponse à une entrée bornée est bornée : $|co(t)| \leq Co_{\max} \Rightarrow |ré(t)| \leq Ré_{\max}$

Condition de stabilité nécessaire et suffisante

Les dénominateurs des fonctions de transfert en poursuite et en régulation étant identiques, on étudie la stabilité du système avec l'une ou l'autre des fonctions de transfert, que l'on note $H_S(p)$ dans la suite.

Tous les pôles p_i de la fonction de transfert $H_S(p)$ doivent être à partie réelle strictement négative : $\text{Re}(p_i) < 0$

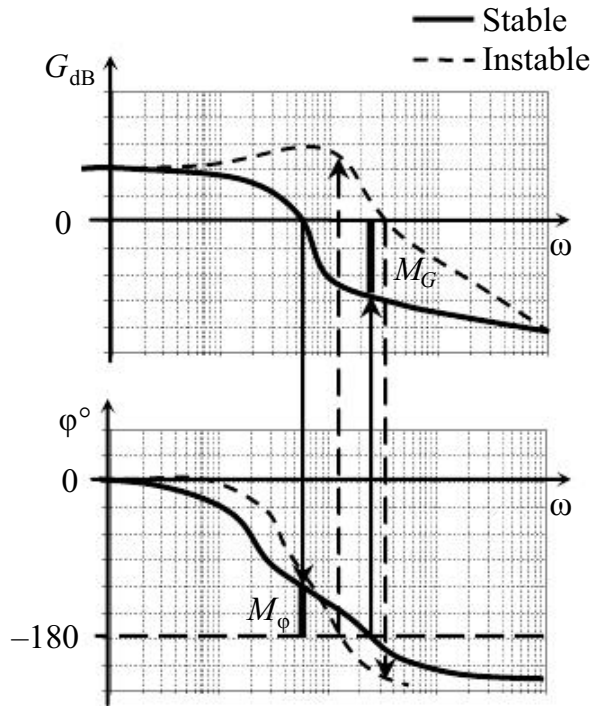


Règle du revers

Pour la suite, on note $H_{bo}(p)$ la fonction de transfert en boucle ouverte du système et $H_{bo}(\omega)$ la fonction de transfert isochrone en boucle ouverte du système (régime sinusoïdal forcé).

La première condition d'application de la règle du revers est que la fonction de transfert en boucle ouverte du système, $H_{bo}(p)$, soit stable (ses pôles sont à partie réelle strictement négative).

Dans le plan de Bode



Le gain en dB de la fonction de transfert isochrone en boucle ouverte $H_{bo}(\omega)$ doit être négatif lorsque le déphasage est inférieur à -180° .

Le déphasage de la fonction de transfert isochrone en boucle ouverte $H_{bo}(\omega)$ doit être supérieur à -180° tant que le gain en dB est positif.

Marges de stabilité

$$M_G = -20 \log(|H_{bo}(\omega_{-180})|)$$

avec $\varphi(H_{bo}(\omega_{-180})) = -180^\circ$

Marge de gain (cf. tracé ci-dessus)

$$M_\phi = 180^\circ + \arg(H_{bo}(\omega_c))$$

avec $|H_{bo}(\omega_c)| = 1$

Marge de phase (cf. tracé ci-dessus)

*Il est plus facile de désintégrer un atome
qu'un préjugé.*

Albert Einstein

Second ordre de classe 1

Fonction de transfert

$$H(p) = \frac{K}{p \cdot (1 + \tau \cdot p)}$$

$\frac{1}{p}$ opérateur d'intégration

Comportement sous une entrée sinusoïdale en régime établi

$$H(j \cdot \omega) = \frac{K}{j \cdot \omega \cdot (1 + j \cdot \tau \omega)}$$

Fonction de transfert isochrone

$$|H(j \cdot \omega)| = \frac{K}{\omega \cdot \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}}$$

Facteur multiplicatif de l'amplitude

$$G_{dB} = 20 \log K - 20 \log \omega - 10 \log(1 + \tau^2 \omega^2)$$

Gain en décibels

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} - \arctan(\tau \omega)$$

Déphasage

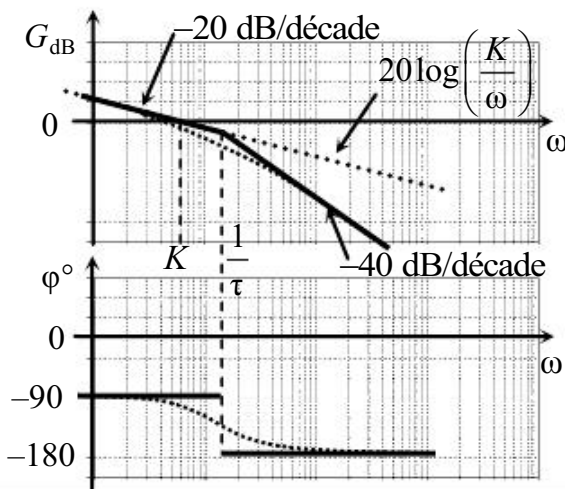


Diagramme de Bode

Point particulier :

$$\begin{cases} G_{dB}\left(\frac{1}{\tau}\right) = 20 \log(K \tau) - 3 \text{ dB} \\ \varphi\left(\frac{1}{\tau}\right) = -135^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega = 1 \text{ rad/s} & \Rightarrow & G_{dB} = 20 \log K \\ \omega = K & \Rightarrow & G_{dB} = 0 \end{cases}$$

Valeurs particulières du gain en décibels de la fonction

$$\frac{K}{j \cdot \omega}$$

SI

Correction des systèmes

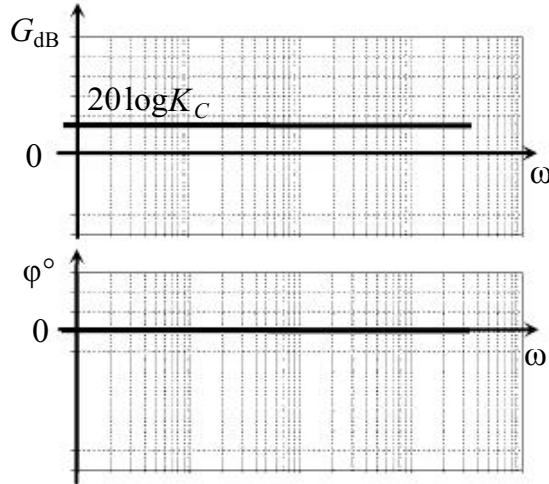
Correcteur proportionnel (P)

$$C(p) = K_C$$

K_C constante
adimensionnelle

Si $K_C > 1$:

- augmente la précision
- augmente en général la rapidité ;
la diminue si le pôle dominant initial est déjà source d'oscillations marquées (second ordre de taux d'amortissement voisin ou inférieur à 0,69).
- diminue la stabilité



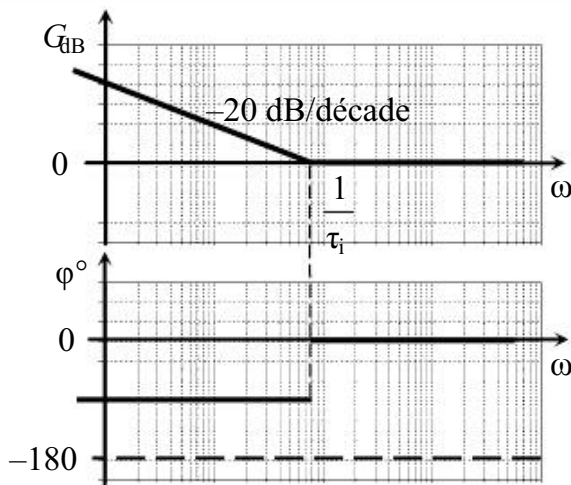
Correcteur intégral (I)

$$C(p) = \frac{1}{\tau_i \cdot p}$$

Correcteur intégral pur : non employé car déstabilisant

$$C(p) = \frac{1 + \tau_i \cdot p}{\tau_i \cdot p} = 1 + \frac{1}{\tau_i \cdot p}$$

Correcteur intégral saturé



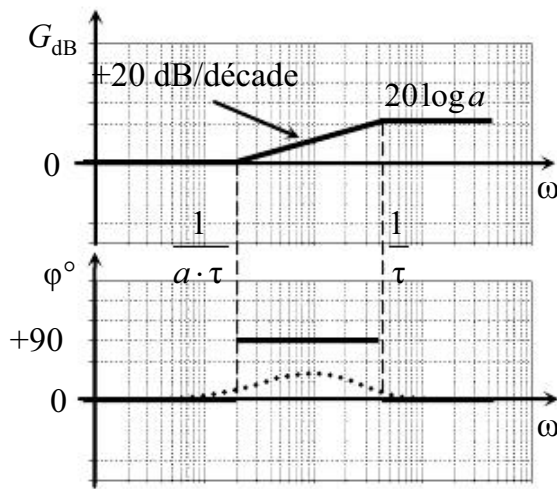
Annule l'erreur statique et rejette l'échelon de perturbation.

$\frac{1}{\tau_i}$ doit être inférieur à la pulsation du mode dominant du système.

Correcteur à avance de phase (AvPh)

$$C(p) = \frac{1 + a \cdot \tau \cdot p}{1 + \tau \cdot p}$$

a constante adimensionnelle
 $a > 1$



Augmente les marges de stabilité, par apport d'un déphasage positif $\varphi_{\max}$:

- tel que $\sin \varphi_{\max} = \frac{a-1}{a+1}$
- à la pulsation $\omega_{\max} = \frac{1}{\tau \sqrt{a}}$

Correcteurs combinés

Correcteur P-I

$$C(p) = K_C \cdot \frac{1 + \tau_i \cdot p}{\tau_i \cdot p}$$

Annule l'erreur statique et règle les marges de stabilité

Correcteur P-AvPh

$$C(p) = K_C \cdot \frac{1 + a \cdot \tau \cdot p}{1 + \tau \cdot p}, \text{ avec } a > 1$$

Règle les marges de stabilité et la précision

SII

*En sciences, ce qui est démontrable
ne doit pas être admis sans démonstration.*

Richard Dedekind

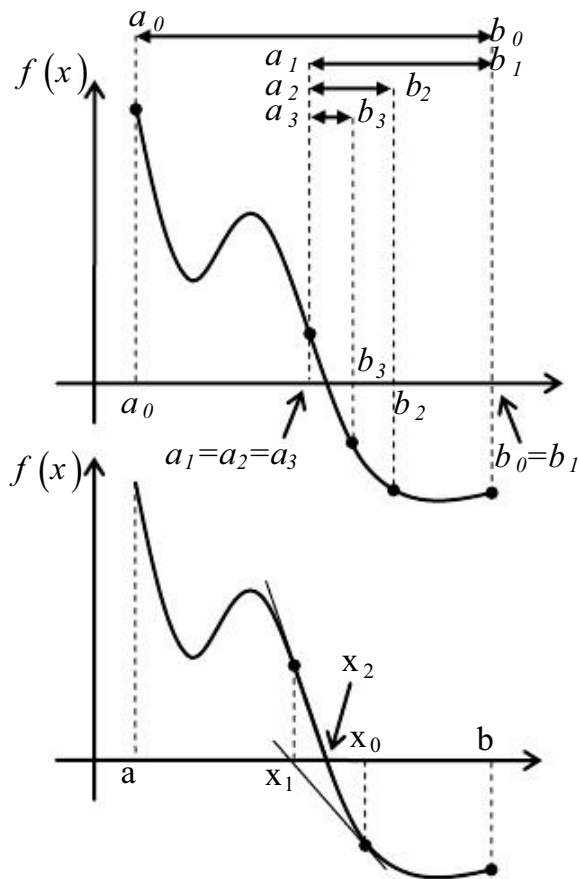
Algorithmique

Méthodes numériques

____ Résolution d'un problème stationnaire de type $f(x)=0$ ____

Méthode de **dichotomie** :

```
def
dichotomie(a,b,f,e):
    while (b-a)>e:
        m=(b+a)/2
        if f(a)*f(m)>0:
            a=m
        else: b=m
    return a
```



Méthode de **Newton** :

```
def newton(x,f,fp,e):
    while f(x)>eps:
        x=x-f(x)/fp(x)
    return x
```

_ Résolution d'un système d'équations linéaires de type $A.X=B$ _

`numpy.linalg.solve(A,B)`

A, B : type numpy array

Retourne le vecteur solution du système $A.X = B$

____ Résolution d'équations différentielles ____

Conditionnement du système (S) d'équations différentielles sous la forme du

problème de Cauchy :
$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = F(t, X) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

Méthode d'Euler explicite : $\begin{cases} X_{k+1} = X_k + h \times F(t_k, X_k) \\ X_0 = X(t_0) \end{cases}$.
 h : pas d'intégration

Dérivation numérique

Dérivée première arrière : $\frac{dx(t)}{dt} \simeq \frac{x_k - x_{k-1}}{h}$.

Dérivée première avant : $\frac{dx(t)}{dt} \simeq \frac{x_{k+1} - x_k}{h}$.

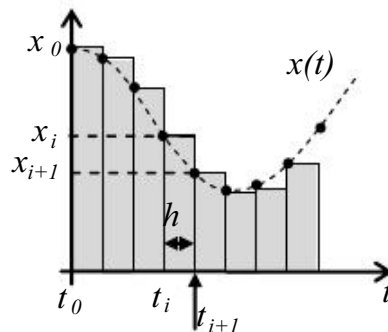
Dérivée première centrée : $\frac{dx(t)}{dt} \simeq \frac{x_{k+1} - x_{k-1}}{2h}$.

Dérivée seconde centrée : $\frac{d^2x(t)}{dt^2} \simeq \frac{x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}}{h^2}$.

Intégration numérique

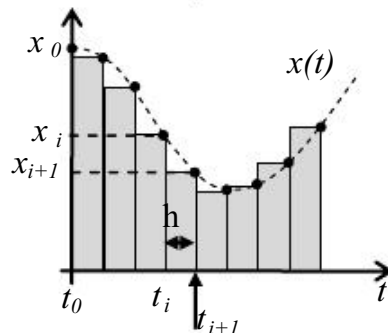
Méthode des rectangles à gauche

$$\int_0^{t_n} x(t) dt \simeq h \sum_{i=0}^{n-1} x_{ii}$$



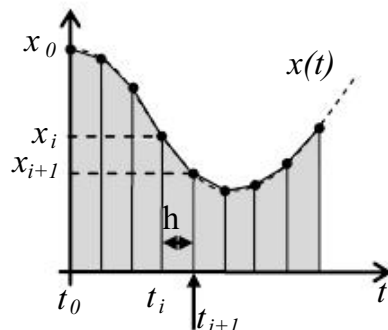
Méthode des rectangles à droite

$$\int_0^{t_n} x(t) dt \simeq h \sum_{i=1}^n x_{ii}$$



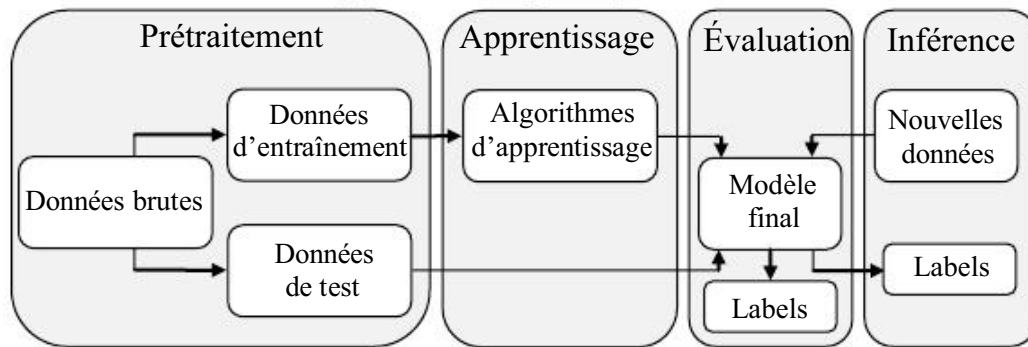
Méthode des trapèzes

$$\int_0^{t_n} x(t) dt \simeq h \left(\frac{x_0 + x_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} x_{ii} \right)$$



Intelligence artificielle

Apprentissage supervisé



Régression

La sortie y est de type continu.

y_i : valeur labellisée

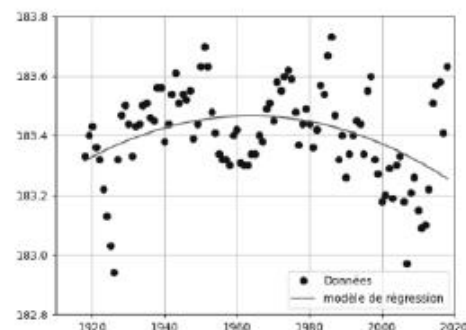
$\hat{y}_i$: valeur prédite

Erreur quadratique moyenne :

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2$$

Coefficient de détermination de Pearson :

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2} \quad \text{avec} \quad \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$$



Classification

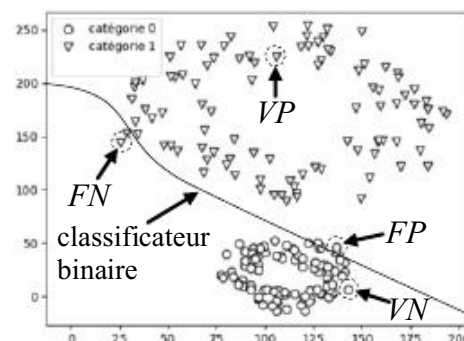
La sortie y est de type catégoriel.

Matrice de confusion :

Catégorie réelle	oui (1)	non (0)
	oui (1)	non (0)
Catégorie prédite	oui (1)	non (0)
	oui (1)	non (0)
Catégorie réelle	oui (1)	non (0)
	oui (1)	non (0)
Catégorie prédite	oui (1)	non (0)
	oui (1)	non (0)

non (0) oui (1)

Catégorie prédite



VN : vrais négatifs ; FN : faux négatifs ; FP : faux positifs ; VP : vrais positifs

$$Accuracy = \frac{VP + VN}{VP + VN + FP + FN}$$

$$Precision = \frac{VP}{VP + FP}$$

$$Sensibility = \frac{VP}{VP + FN}$$

$$Specificity = \frac{VN}{VN + FP}$$

Régression linéaire multiple

Donnée d'entrée : $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$

Sortie prédite :

$$\hat{y}_i(x_i, \hat{w}) = \hat{w}_0 + \hat{w}_1 x_{i1} + \hat{w}_2 x_{i2} + \dots + \hat{w}_n x_{in}$$

Sortie labellisée : y_i

$y_i = \hat{y}_i(x_i, \hat{w}) + \varepsilon_i$ où ε_i est l'erreur de prédiction pour la donnée d'entrée x_i .

En notation matricielle : $\hat{y} = X \cdot \hat{w}$ et $\varepsilon = y - \hat{y}$,

$$\text{avec } \hat{y} = \begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \vdots \\ \hat{y}_k \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{k1} & x_{k2} & \dots & x_{kn} \end{pmatrix}, \hat{w} = \begin{pmatrix} \hat{w}_0 \\ \hat{w}_1 \\ \hat{w}_2 \\ \vdots \\ \hat{w}_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} \text{ et } \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_k \end{pmatrix}.$$

Solution optimale analytique si la matrice $X^T \cdot X$ est inversible :

$\hat{w} = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot y$, vecteur estimateur des moindres carrés ordinaires.

k plus proches voisins

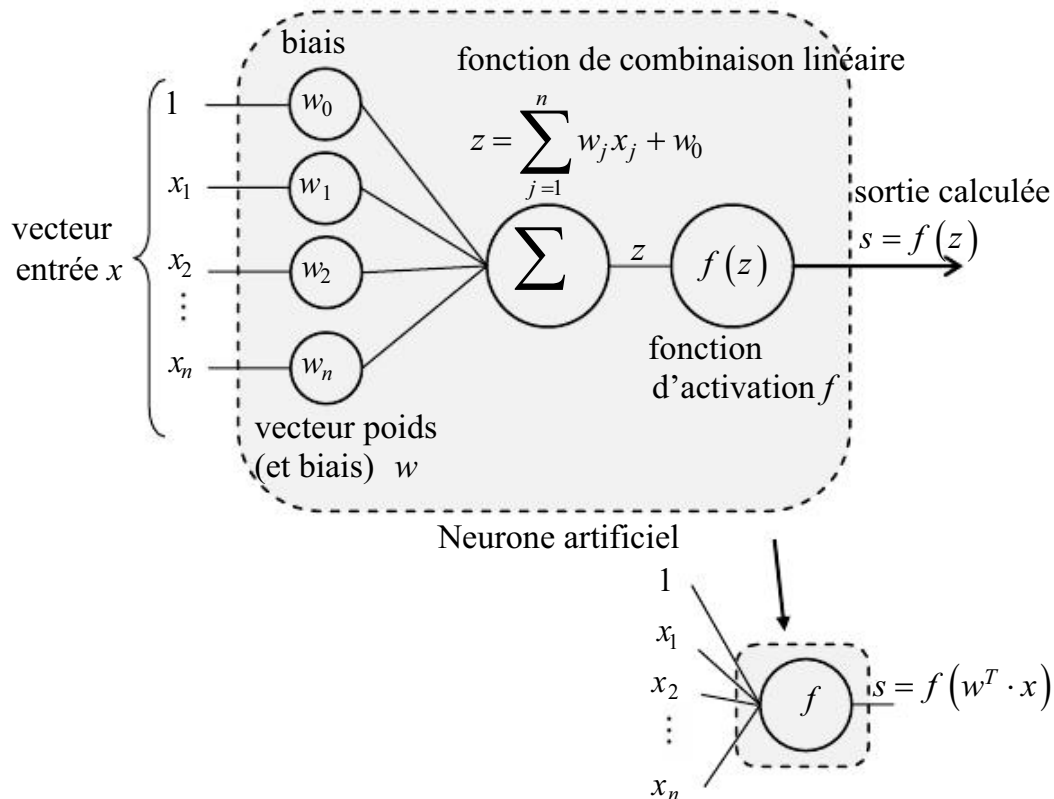
Trouver dans le jeu de données labellisées, k données d'entrée proches de la nouvelle donnée dont on souhaite prédire la sortie (le label). Il n'y a pas de phase d'apprentissage.

Distance euclidienne entre deux données : $d = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_{1i} - x_{2i})^2}$

En classification, on recherche la catégorie d'appartenance la plus représentée parmi les k plus proches voisins.

En régression, on calcule la valeur moyenne des k plus proches voisins.

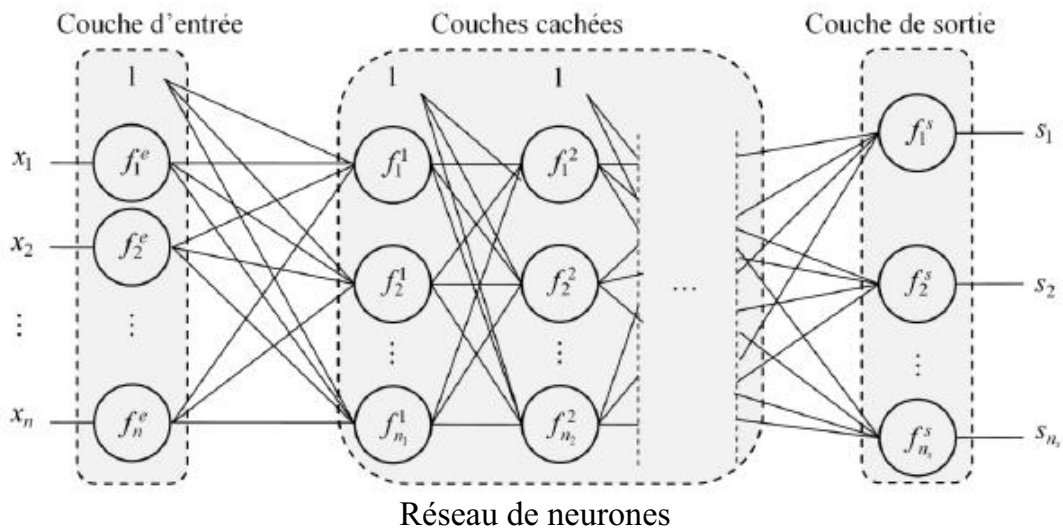
Neurone artificiel



Fonction f	Allure	Expression	Dérivée	Étendue
Linéaire		az	a	$]-\infty, \infty[$
ReLU		$\begin{cases} z & \text{si } z \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\begin{cases} 1 & \text{si } z \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$[0, +\infty[$
Heaviside		$\begin{cases} 1 & \text{si } z > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & \text{si } z \neq 0 \\ ? & \text{sinon} \end{cases}$	$[0, 1]$
Tangente hyperbolique		$\tanh(z)$	$1 - f(z)^2$	$] -1, 1[$
Sigmoïde (logistique)		$\frac{1}{1 + e^{-z}}$	$f(z)(1 - f(z))$	$]0, 1[$

Apprentissage supervisé profond

Les réseaux de neurones MLP (*multi-layer perceptron*) ont une fonction de combinaison linéaire et possèdent l'architecture donnée ci-après.



La détermination des poids associés à chaque lien se fait par un algorithme de **rétropropagation du gradient**.

La science consiste à passer d'un étonnement à un autre.

Aristote

Index

*Le plus simple écolier sait maintenant des vérités
pour lesquelles Archimède eût sacrifié sa vie.*

Ernest Renan

Mathématiques

A

accroissements finis
 inégalité des, 30, 247
 théorèmes des, 30
 adhérence, 226
 adjoint d'un endomorphisme, 218
 affinité vectorielle, 49
 affixe (d'un point du plan), 11
 algèbre, 212
 angle de deux vecteurs non nuls, 220
 anneau, 36
 anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, 210
 annulateur
 idéal, 216
 polynôme, 216
 application
 continue, 228
 de classe $\mathcal{C}^k$, 245
 de classe $\mathcal{C}^1$, 275
 linéaire, 48
 linéaire continue, 229
 lipschitzienne, 229
 automorphisme, 48
 orthogonal, 219

B

base
 canonique, 49
 caractérisations, 50, 51, 54
 d'un espace vectoriel, 47
 orthonormée, 55
 Bézout (théorème de), 34, 40
 Bienaymé-Tchebychev
 (inégalité de), 264
 bijection bicontinue
 (théorème de la), 29
 bijectivité
 d'une application, 6
 d'une application linéaire, 48

binôme (formule du), 8, 45
 Bolzano-Weierstrass (théorème de), 24
 borne supérieure, 22
 propriété de la, 22
 bornée
 application, 224
 partie, 224
 suite, 224
 boule, 223

C

Cauchy
 problème de, 18, 19, 268
 théorème de Cauchy linéaire, 268
 Cauchy-Schwarz (inégalité de), 56
 Cayley-Hamilton (théorème de), 217
 Cesàro (théorème de), 236
 changement de base (formules de), 51
 changement de variable
 dans une intégrale
 sur un segment, 64
 dans une intégrale généralisée, 251
 Chasles (relation de), 247
 classe $\mathcal{C}^1$, 275
 coalitions (lemme des), 261
 coefficients du binôme, 8
 compact, 230
 image par une application continue
 d'un, 231
 congruence, 208
 connexité par arcs, 231
 continuité, 228
 caractérisation séquentielle, 228
 d'une application linéaire, 229
 en dimension finie, 232
 d'une application p-linéaire
 en dimension finie, 232
 de la somme d'une série
 de fonctions, 239
 sous le signe somme, 254

- sur une partie, 228
- uniforme, 229
- convergence
 - normale d'une série de fonctions, 238
 - normale sur tout compact d'une série de fonctions, 238
 - simple d'une série de fonctions, 238
 - simple d'une suite de fonctions, 236
 - uniforme d'une série de fonctions, 238
 - uniforme d'une suite de fonctions, 236
 - uniforme sur tout compact d'une série de fonctions, 238
- convexe (partie), 22, 223
- corps, 37
- couple
 - loi conjointe d'un, 260
 - lois marginales d'un, 260
- couple de variables aléatoires
 - discrètes, 260, 261
 - indépendantes, 261
- covariance, 264
- Cramer (système de), 46
- croissances comparées
 - des fonctions usuelles, 28, 59
 - des suites usuelles, 61
- cycle, 53

D

- d'Alembert
 - règle de, 235
 - règle pour les séries entières, 241
- d'Alembert-Gauss (théorème de), 39
- décomposition
 - des noyaux, 216
- décomposition
 - en éléments simples, 40, 41
 - primaire, 35, 39
- degré d'un polynôme, 37
- dénombrable, 256
 - dense, 227
- dérivée, 29
 - d'une fonction, 244
 - des fonctions usuelles, 32
 - en un point, 29, 244
 - n -ième, 245
 - partielle, 272
 - successives d'un polynôme, 38

- successives d'une fonction, 31
- suivant un vecteur, 272
- sur un intervalle, 244
- déterminant
 - d'un endomorphisme, 54, 215
 - d'une famille de vecteurs, 54
 - d'une matrice, 54
- développement en série entière, 242
 - usuels, 243
- développements limités, 59
 - usuels, 60
- diagonalisabilité, 214
- différentielle, 272
- dimension
 - d'un espace vectoriel, 49
 - théorème de la, 49
- discriminant, 11
- disque de convergence, 241
- distance, 223
 - d'un point à un sev, 57
- division euclidienne, 34, 38

E

- endomorphisme, 48
 - autoadjoint, 221
- équation polynomiale de degré 2, 11
- équation caractéristique
 - d'une EDL2, 18
 - d'une suite RL2, 25
- équation différentielle
 - linéaire, 18, 267
 - d'ordre un, 267
 - scalaire d'ordre n , 268
- équivalents usuels, 59, 61
- espace probabilisé, 257
- espace vectoriel, 46
 - euclidien, 55
 - normé, 223
 - préhilbertien, 55
- espérance
 - d'une combinaison linéaire de variables aléatoires réelles discrètes, 263
 - d'une variable aléatoire réelle discrète, 262
 - du produit de deux variables aléatoires discrètes indépendantes, 263

Euler
 formule d', 10
 théorème d', 211
 exponentielle
 complexe, 243
 d'un nombre complexe, 10
 extremum local, 30, 276

F

famille de vecteurs
 génératrice, 47
 libre, 47
 orthogonale, 55
 Fermat (petit théorème de), 35
 fermé, 226
 fonction
 continue, 28
 convexe, 32
 de classe $\mathcal{C}^n$, 31, 245
 dérivable, 29
 lipschitzienne, 29
 uniformément continue, 29
 fonction
 de classe $\mathcal{C}^k$, 245
 de classe $\mathcal{C}^1$, 244, 275
 en escalier sur un segment, 238
 intégrable sur un intervalle, 252
 fonctions
 circulaires, 14
 circulaires réciproques, 15
 exponentielles, 13
 hyperboliques, 14
 logarithmes, 13
 puissances, 13
 fonctions usuelles, 13
 croissances comparées, 28, 59
 dérivées, 32
 équivalents, 59
 graphes, 16
 limites, 28
 forme linéaire, 50
 forme n -linéaire alternée, 53
 formes indéterminées, 23
 formule
 de Bayes, 258
 de Koenig-Huyghens, 263
 de Leibniz, 246
 de Taylor avec reste intégral, 248

de Taylor-Young, 278
 des probabilités composées, 258
 des probabilités totales, 258
 fraction rationnelle, 40
 frontière, 227

G

Gauss (théorème de), 34, 40
 gradient, 273
 Gram-Schmidt (procédé de), 56
 Grassmann (formule de), 50
 groupe, 36
 linéaire, 46, 48
 symétrique, 53
 groupe
 cyclique, 208
 monogène, 208
 orthogonal d'indice n , 218
 orthogonal de E euclidien, 220
 quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, 208
 spécial orthogonal d'indice n , 219
 spécial orthogonal de E
 euclidien, 220
 géométrie (identité), 8, 45

H

Heine (théorème de), 29
 hessienne (matrice), 278
 hyperplan, 50

I

idéal
 annulateur, 216
 d'un anneau, 209
 engendré par un élément, 210
 image
 d'un morphisme de groupes, 36, 207
 d'une application linéaire, 48
 directe et réciproque d'une partie, 6
 indicatrice (fonction), 5
 indicatrice d'Euler, 211
 indépendance
 d'un couple de variables
 aléatoires, 261
 de deux événements, 259
 de n variables aléatoires, 261
 des événements d'une famille, 259

- inégalité
 - de Bienaymé-Tchebychev, 264
 - de Jensen, 33
 - de Markov, 264
 - des accroissements finis, 247
 - des tangentes, 33
 - triangulaire, 223
- injectivité
 - d'un morphisme de groupes, 207
 - d'une application, 5
 - d'une application linéaire, 48
- interpolation de Lagrange
 - (formule d'), 38
- intégrale sur un segment, 62
 - changement de variable, 64
 - d'une fonction en escalier, 62
 - et primitives, 63
- intégrale généralisée, 248, 250
 - changement de variable, 251
 - convergence absolue, 249, 252
 - convergence d'une, 250
 - nulle, 252
 - théorèmes de comparaison, 249, 252
- intégrale à paramètre
 - continuité sous le signe $\int$, 254
 - dérivabilité sous le signe $\int$, 255
- intégration par parties, 64
 - dans une intégrale généralisée, 251
- intégration terme à terme, 254
- intérieur d'une partie, 226
- isomorphisme, 48
 - caractérisations, 50, 51, 54
- isométrie vectorielle, 219

L

- Leibniz (formule de), 31, 38, 246
- lemme d'Abel, 240
- lemme des coalitions, 261
- limite
 - d'une fonction, 26
 - d'une fonction monotone, 27
 - d'une fonction vectorielle, 227
 - d'une suite, 23, 224
 - d'une suite monotone, 24
- limite de la dérivée (théorème de la), 31
- linéarisation (formules de), 9

- loi
 - de composition interne, 35
 - de Poisson, 262
 - de probabilité d'une variable
 - aléatoire discrète, 260
 - géométrique, 262
- loi faible des grands nombres, 264

M

- majorant, 21
- Markov (inégalité de), 264
- matrice, 44
 - de passage, 51
 - diagonalisable, 215
 - hessienne, 278
 - inverse, 46, 51
 - caractérisations, 52, 54
 - expression, 55
 - jacobienne, 273
 - orthogonale, 218
 - représentative
 - d'une application linéaire, 51
 - d'une famille de vecteurs, 51
 - symétrique, 221
 - transposée, 44
 - trigonalisable, 215
- minorant, 21
- Moivre (formule de), 10
- Morgan (lois de), 4
- morphisme
 - d'algèbres, 213
 - d'anneaux, 209
 - de groupes, 207
- multiplicité d'une valeur propre, 214

N

- Newton (formule de), 8, 45
- nilpotence, 215
- nombre(s)
 - composé, 34
 - premier, 34
 - premiers entre eux, 34
- nombre complexe
 - (notation algébrique), 9
- norme, 223
 - équivalence, 225
 - en dimension finie, 231

euclidienne, 55
 subordonnée, 230
 noyau
 d'un morphisme de groupes, 36, 207
 d'une application linéaire, 48

O

orthogonal d'une partie, 56
 orthogonaux (vecteurs), 55
 ouvert, 226

P

parallélogramme (formule du), 56
 partie
 compacte, 230
 dense, 227
 entière, 22
 fermée, 226
 majorée, minorée, 21
 ouverte, 226
 partie compacte en dimension finie, 232
 permutation, 53
 PGCD, 34, 39
 polarisation (identité de), 56
 pôle d'une fraction rationnelle, 40
 polynôme(s), 37
 d'un endomorphisme, 48
 d'une matrice carrée, 45, 216
 premiers entre eux, 40
 scindé, 39
 polynôme caractéristique
 d'un endomorphisme, 214
 d'un endomorphisme induit, 214
 d'une matrice, 214
 polynôme minimal, 216
 d'un endomorphisme induit, 217
 PPCM, 34, 39
 primitives d'une fonction continue, 63
 usuelles, 20
 principe de superposition (EDL), 267
 probabilité, 257
 conditionnelle, 258
 problème de Cauchy, 268
 produit scalaire, 55
 projecteur, 49

projection
 orthogonale, 56
 vectorielle, 49
 prolongement par continuité, 28
 Pythagore (théorème de), 56

R

racines
 d'un polynôme, 38
 somme et produit, 11
 n -ièmes d'un nombre complexe, 11
 n -ièmes de l'unité, 10
 relations avec les coefficients, 11, 39
 rang
 d'une application linéaire, 50
 d'une matrice, 52
 formule du, 50
 rayon de convergence, 241
 récurrence, 4
 réflexion, 219
 règle de d'Alembert
 pour les séries entières, 241
 pour une série positive, 235
 relation
 d'ordre, 21
 de comparaison des fonctions, 28, 58
 de comparaison des suites, 61
 reste d'une série convergente, 234
 Riemann (sommes de), 247
 Rolle (théorème de), 30

S

Schwarz (théorème de), 278
 série
 absolument convergente, 234
 d'éléments d'un evn, 233
 de fonctions, 238
 de Riemann, 235
 de Taylor, 243
 entière, 240
 exponentielle, 243
 série génératrice
 d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes, 265
 d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, 265

signature d'une permutation, 53
 somme
 d'une série convergente, 233
 de Riemann, 247
 partielle d'une série, 233
 sous-algèbre, 212
 sous-espace
 propre, 213
 vectoriel, 47
 sous-groupe(s), 36
 engendré par un élément, 208
 de $\mathbb{Z}$, 208
 spectre
 d'un endomorphisme, 213
 d'une matrice, 213
 sphère, 223
 Stirling (formule de), 61
 suite(s)
 adjacentes, 24
 arithmético-géométrique, 25
 convergente, 23, 224
 de fonctions, 236
 divergente, 224
 extraite, 23, 225
 géométrique, 25
 monotone, 22
 récurrente, 25
 RL2, 25
 superposition (EDL, principe de), 18
 supplémentaire(s)
 orthogonal, 56
 sous-espaces, 47, 50
 surjectivité
 d'une application, 5
 d'une application linéaire, 48
 surjectivité d'un morphisme
 de groupes, 207
 symétrie
 orthogonale, 56, 219
 vectorielle, 49
 symétrique (matrice), 221
 système
 d'équations linéaires, 45
 différentiel linéaire, 267
 fondamental de solutions (EDL), 269

T

table de vérité, 3
 Taylor (formule de)
 pour les polynômes, 38
 avec reste intégral, 248
 Taylor-Lagrange (inégalité de), 248
 Taylor-Young (formule de), 60, 248, 278
 théorème
 d'Euler, 211
 de Cauchy linéaire, 268
 de Cayley-Hamilton, 217
 de Cesàro, 236
 de convergence dominée, 253
 de décomposition des noyaux, 216
 de Heine, 29
 de la bijection bicontinue, 29
 de Schwarz, 278
 de Taylor-Young, 248
 de transfert, 263
 de Weierstrass, 238
 des normes équivalentes, 231
 des valeurs intermédiaires, 29, 231
 spectral, 222
 théorème d'interversion
 somme-dérivation, 240
 somme-intégrale sur un segment, 240
 somme-limite, 239
 trace d'un endomorphisme, 215
 transposition, 53
 triangulaire (inégalité), 21, 56
 tribu, 256
 trigonalisabilité, 215
 trigonométrie (formules de), 9, 14

V

valeur d'adhérence, 225
 valeur propre
 d'un endomorphisme, 213
 d'une matrice, 213
 ordre de multiplicité d'une, 214
 valeurs intermédiaires
 (théorème des), 29, 231
 variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$
 séries génératrices, 265

- variable aléatoire discrète (vad), 259
 - espérance d'une, 262
 - espérance du produit de deux vad indépendantes, 263
 - fonctions de vad indépendantes, 261
 - loi conditionnelle d'une, 260
 - loi de probabilité d'une, 260
 - variance d'une, 263
 - variance
 - d'une loi de Poisson, 264
 - d'une loi géométrique, 264
 - d'une somme finie de variables aléatoires discrètes, 264
 - d'une variable aléatoire réelle discrète, 263
 - variation de la constante (méthode de), 18
 - vecteur propre
 - d'un endomorphisme, 213
 - d'une matrice, 213
 - voisinage, 225
- W** _____
- Weierstrass (théorème de), 238
- Z** _____
- zéro d'une fraction rationnelle, 40

***Les mathématiques consistent à trouver
des théorèmes, c'est-à-dire à trouver des choses
qui sont vraies et que l'on démontre ensuite.***

Ivar Ekeland

Physique-Chimie

A

absorbance, 145
accélération
 angulaire, 119
 d'entraînement, 280
 d'un point, 106
 de Coriolis, 280
 tangentielle, normale, 106
accommodation, 83
accumulateur, 348
acide, 154
action(s)
 mécanique, 107
 de contact, 282
activité (chimique), 142, 339
adiabatique, 128
admittance, 93
afocal, 81
agent thermique, 132
aimant, 134
ajout d'un constituant, 341
amorphe, 150
ampholyte (espèce amphotère), 154
amplitude, 90
 complexe, 92
analogie entre électrocinétique
 et diffusion thermique, 323
analyse de Fourier, 95
anneaux d'égale inclinaison, 316
anode, 159
 sacrificielle, 350
aériodique, 91
aplanétique, 81
apolaire, 148
approximation
 d'Ellingham, 336
 de Gauss, 81
 de l'optique géométrique, 79
 des régimes quasi stationnaires
 (ARQS), 296, 303
dipolaire, 306

athermane, 128
athermique, 337
atmosphère isotherme, 323
atome d'hydrogène, 103
auto-induction, 138
avancement de réaction, 142
axe
 instantané de viration, 279
 optique, 81

B

bande passante, 96
barrière de potentiel, 334
barycentre, 108
base
 (chimie), 154
 cartésienne, cylindrique, 104
 de Frenet, 105
 polaire, 105
 sphérique, 105
bilan
 de masse, 319
 énergétique d'un circuit, 90
 énergétique d'un système ouvert,
 320
 entropique, 320
 local de puissance, 295
bloc s, p, d, f, 146
bobine(s), 88, 138
 plate, 135
 de Helmholtz, 136
boucle de courant, 136
branche, 85
bras de levier, 115
calorifugée, 128
capacité
 (d'un condensateur), 88
 électrique d'une pile, 160
 thermique, 129, 130, 324, 325
 thermique molaire, 326, 327, 337

C

- capteur optique, 84, 310
- carte de champ, 134
- cas de Lorentz, de Neumann, 137, 139
- cathode, 159
- cavité, 306
- célérité, 79, 99, 299
- centre de masse (ou d'inertie), 108
- chaleur latente, 130
- champ(s)
 - d'interférences, 310
 - de pesanteur, 109, 282
 - électrique, 114, 293
 - électrostatique, 284
 - magnétique, 114, 134, 293
 - réfléchis, 305
- changement de phase (ou d'état), 125, 130, 131, 132
- charge formelle, 147
- chemin optique, 308
- cinétique d'oxydo-réduction, 343
- circuit(s)
 - d'ordre 1, 89
 - d'ordre 2, 90
 - LC*, 90
 - RC*, *RL*, 89
 - RLC*, 91, 94
 - couplés, 139
- coefficient
 - adiabatique (ou de Laplace), 129
 - de frottement, 283
 - de performance, 133
- cogénération, 133
- cohérence
 - mutuelle, 310
 - spatiale, temporelle, 309, 317
- coin d'air, 317
- collimateur, 84
- compacité, 151
- concentration, 142
 - standard, 142
- condensateur, 88
 - plan, 114, 287
- condition(s)
 - de compacité, 151
 - de normalisation, 102, 330
 - de précipitation, 157
 - de Gauss, 81
- conductance, 86, 145
 - thermique, 322
- conducteur
 - ohmique, 295
 - parfait, 304
- conductimétrie, 145
- conductivité
 - électrique, 294, 296, 302
 - ionique molaire, 145
 - thermique, 321
- cône
 - d'acceptance, 80
 - de frottement, 283
- confinement spatial, 102
- conjugaison, 83
- conservation
 - de l'énergie mécanique, 112, 117
 - de la charge, 293
 - du moment cinétique, 117
- conservativité du flux, 290
- constante
 - d'acidité, 155
 - d'équilibre, 142, 340, 347
 - de Boltzmann, 132
 - de cellule, 145
 - de gravitation, 109, 116
 - de Planck, 102
 - de raideur, 109
 - de solubilité, 157
 - de torsion, 120
 - de vitesse, 143
 - de vitesse apparente, 144
 - des aires, 117
- construction graphique, 82
- contact entre solides, 282
- contraste, 312
- convection, 321
- convention récepteur, générateur, 86
- convergente, 82
- conversion de puissance, 139
- coordinence, 151
- coordonnées
 - cartésiennes, cylindriques, 104
 - sphériques, 105
- corps pur, 141
- corrosion, 349, 350
- couple
 - (de forces), 120
 - acido-basique, 154

- d'oxydo-réduction, 158, 342
 - de frottement solide, 121
 - de torsion, 120
 - courant(s)
 - de corrosion, 349
 - de court-circuit, 87
 - électromoteur (CÉM), 87
 - imposé, 350
 - induit, 137
 - de Foucault, 140
 - courbe
 - de gain, de phase, 96
 - de saturation, d'ébullition, de rosée, 126
 - de vaporisation, de fusion, de sublimation, 125
 - intensité-potentiel, 343
 - cristal, 150
 - critère
 - d'évolution spontanée, 337, 339, 340
 - de Shannon, 329
 - cubique à faces centrées (CFC), 152
 - cycle
 - (thermodynamique), 127, 132
 - de Carnot, 133
- D**
-
- débit massique, volumique, 318
 - décomposition de Fourier, 95
 - défaut(s)
 - de cohérence, 317
 - d'un cristal, 152
 - dégénérescence de l'ordre, 144
 - demi-équation, 158
 - densité
 - de charges, 284
 - de courant de probabilité, 330
 - de courant électrique, 289
 - de courant thermique, 321
 - de probabilité, 330
 - volumique d'énergie
 - électromagnétique, 295, 301
 - déphasage, 95, 99, 101, 309
 - dérivateur, 97
 - dérivation dans un trièdre mobile, 280
 - deuxième principe, 130, 319
 - diagramme
 - (P, v) liquide-vapeur, 126
 - d'équilibre (P, T), 125
 - de Bode, 96
 - de distribution, 156
 - potentiel-pH, 162
 - diaphragme, 84
 - diathermane (ou diatherme), 128
 - différence
 - de chemin optique, 101
 - de marche, 309, 316
 - diffraction, 100
 - diffusion, 345
 - Rayleigh, 307
 - thermique, 321
 - diffusivité thermique, 321
 - dioptre, 80
 - dioptrie, 82
 - dipôle(s)
 - électrostatique, 288
 - magnétostatique, 291
 - ohmique, 86
 - en série, en parallèle, 85
 - dismutation, 159, 163
 - dispersion intermodale, 81
 - distribution
 - de charges, 284
 - dipolaire, 288
 - surfactive, linéique de courant, 289
 - ditherme, 132
 - divergente, 82
 - diviseur
 - d'amplitude, 316
 - de tension, de courant, 87, 93
 - du front d'onde, 314
 - domaine
 - d'existence, 157, 162
 - de prédominance, 156, 161, 162
 - réactif, de transparence, 302
 - doublet liant, non liant, 147
 - durée de cohérence, 309
- E**
-
- eau, 130, 154, 158, 162, 345
 - échantillonnage, 329
 - échelle mésoscopique, 123, 323
 - échelon de tension, 89
 - éclairage, 301
 - écoulement unidimensionnel
 - et permanent, 318

effet
 de peau, 304
 Joule, 295
 tunnel, 334
 efficacité, 133
 électrode de référence, 160
 électrolyseur, 348
 électron
 célibataire, 147
 de valence, 146
 électronégativité, 148
 électronique numérique, 329
 électrozingage, 350
 ellipse, 118, 119
 emmétrépe, 83
 empilement compact, 151
 endothermique, 337
 énergie
 cinétique, 112, 113, 120
 d'activation, 145
 de liaison, 147
 électromagnétique, 88, 295
 interne, 128, 129
 mécanique, 112, 119
 potentielle, 111, 114, 116
 potentielle centrifuge, 281
 potentielle d'un dipôle, 289, 292
 potentielle effective, 117
 potentielle électrostatique, 287
 enthalpie, 128
 de changement de phase, 130
 libre, 337
 libre de réaction, 338
 entropie standard de réaction, 336
 entropie
 créée, échangée, 131
 de changement de phase, 131
 statistique, 132
 épaisseur de peau, 304
 équation(s)
 d'état, 123, 124
 de D'Alembert, 297, 299
 de diffusion, 304, 321, 322
 de Laplace, 287
 de Poisson, 287
 de réaction, 142
 de Schrödinger, 331, 332
 différentielle d'ordre 1, 89
 différentielle d'ordre 2, 90, 91, 110
 différentielle entrée-sortie, 328
 locale de conservation
 de la charge, 293
 de Maxwell, 293
 équilibre
 chimique, 143, 339
 stable, instable, 112, 137
 thermodynamique, 124, 324
 équipartition, 326
 équivalence (de titrage), 156
 espèce physico-chimique, 141
 état
 lié, libre (ou de diffusion), 113, 117, 332
 standard, 335
 standard de référence, 336
 stationnaire, 332
 exothermique, 337

F

face nord, sud, 134
 facteur(s)
 de qualité, 91, 110
 d'équilibre, 341
 fentes de Young, 314, 315
 fibre optique, 80
 fil rectiligne infini, 291
 filtre, 96, 328
 fluctuation de l'énergie, 324, 325
 flux
 du champ magnétique, 137
 propre, 138
 thermique, 321
 fonction
 d'état, 123
 d'onde, 102, 330
 de partition, 324, 325
 de transfert, 95
 fondamental, 95, 100
 force(s), 107
 centrale, 116
 conservative, 111
 d'inertie, 281
 de frottement fluide, 109
 de frottement solide, 109, 283
 de Laplace, 136
 de liaison, 109
 de Lorentz, 114

de pression, 110
 électromotrice (FÉM), 87, 160, 347
 électromotrice induite, 138
 électrostatique, 110, 116
 gravitationnelle, 109, 116
 de Van der Waals, 148
 intérieures, 108
 formation d'image, 81, 83
 formule(s)
 de Descartes, 83
 de Fresnel, 101
 de Nernst, 161, 343
 de Newton, 83
 de Varignon, 279
 foyer, 81
 fraction molaire, 141
 franges d'interférences, 311, 313
 fréquence, 79, 92, 99, 100
 d'échantillonnage, 329
 propre, 90
 frottement sec (ou solide), 283

G

gain, 95
 galvanisation, 350
 gaz parfait, 124, 129, 131, 141, 326
 glissement, 282, 283
 goniomètre, 84
 grandeur
 d'état, 123
 de réaction, 335
 extensive, intensive, 124
 molaire, 335
 sinusoïdale, 92
 standard de réaction,
 de formation, 336
 grandissement, 83

H

harmonique, 95, 100
 homogène, 124
 hyperbole, 117, 118
 hypervalent, 147

I

identité thermodynamique, 319, 338
 immunité, 350

impédance, 93
 d'entrée, de sortie, 98
 de charge, 95
 incompressible, 125
 indice
 (de réfraction), 79
 d'un plasma, 303
 indilatable, 125
 inductance, 88
 mutuelle, 138
 propre, 138
 induction électromagnétique, 137
 inégalité
 de Clausius, 132
 de Heisenberg spatiale, 102
 inertie, 107
 instrument d'observation, 84
 intégrale première, 112, 117, 122
 intégrateur, 97
 intensité
 (du courant), 85, 289, 343
 (optique), 310, 312, 313
 interaction
 de Keesom, Debye, London, 148
 électrostatique, 110, 116
 gravitationnelle, 109, 116
 interférences, 101, 310
 à plusieurs ondes, 313
 interféromètre de Michelson, 316
 interfrange, 312, 317
 invariance par rotation, par translation,
 135, 285, 290
 isochore, 127
 isotherme
 d'Andrews, 126
 isobare, 127

L

lacune électronique, 147
 lame
 d'air, 316
 de verre, 316
 lampe spectrale, 79
 laser, 79
 lentille, 82
 liaison
 covalente, 147
 hydrogène, 149

métallique, 153
 pivot, 121
 polarisée, 148
 libre parcours moyen, 123
 ligne de champ, 134, 285, 288, 292
 loi(s)
 d'Arrhenius, 145
 d'Ohm, 86
 d'Ohm locale, 294, 296
 de Beer–Lambert, 145
 de composition des vitesses,
 des accélérations, 280
 de Coulomb (électrostatique), 110, 116
 de Dulong et Petit, 327
 de Faraday (électrolyse), 349
 de Faraday (induction), 138
 de Fourier, 321
 de Guldberg et Waage (ou d'action
 des masses), 142, 340
 de Hess, 336
 de Kohlrausch, 145
 de Laplace, 131
 de Le Chatelier, 341
 de modulation de Lenz, 138
 de Newton
 (du transfert thermique), 322
 de retour inverse, 80
 de Van 't Hoff, 341
 de vitesse, 143
 des aires, 117
 des mailles, 86, 92
 des nœuds, 85, 92
 de Coulomb (du frottement), 283
 de Kepler, 118
 de Kirchhoff, 85, 86, 92
 de Newton (dynamique), 107,
 108, 109
 de Snell–Descartes, 80
 longueur
 d'onde, 79, 99, 100
 de cohérence temporelle, 309, 317
 de liaison, 147
 lumière, 79
 lunette, 84
M
 machine
 frigorifique, 133
 thermique, 132
 magnéton de Bohr, 293
 maille
 (d'un circuit), 85
 (d'un cristal), 150
 marche de potentiel, 333
 masse
 (d'un circuit), 85
 (d'un corps), 107
 volumique, 150
 médiatation, 159, 163
 mélange, 141
 métal, 153
 métastable, 163
 méthode différentielle, intégrale, 145
 milieu dispersif, 100
 miroir plan, 81
 miscibilité, 149
 mise au point, 84
 mode propre, 306
 modèle
 d'Einstein, 327
 de Lewis, 147
 de Thévenin, 87, 94
 scalaire de la lumière, 308
 moment
 cinétique, 115, 119
 d'inertie, 119
 d'un couple, 120
 d'une force, 115
 des forces électrostatiques, 289
 des forces magnétostatiques, 292
 dipolaire, 148, 288
 magnétique, 136, 292
 monobare, 127
 monochromatique, 79, 100
 monotherme, 127, 132
 moteur
 (thermique), 132
 ditherme, 133
 synchrone, 137
 motif, 150
 mouvement
 à force centrale, 117
 accélééré, retardé, uniforme, 106
 circulaire, 107, 118
 d'accélération constante, 107
 moyenne de l'énergie, 324

moyenneur, 97
mutuelle inductance, 138

N

niveaux d'énergie, 103
nœud
 (de circuit), 85
 (de vibration), 298, 305
nombre d'oxydation, 159
 stœchiométrique algébrique, 142
non-métal, 153
normalisation, 102, 330
notation complexe, 92, 298

O

objectif, 84
oculaire, 84
œil, 83
onde
 acoustique dans un fluide, 100
 de matière, 102
 électromagnétique dans le vide,
 100, 299
 électromagnétique dans
 un conducteur ohmique, 303
 électromagnétique
 dans un plasma, 302
 plane, 297
 progressive, 99, 297
 progressive sinusoïdale, 99, 298
 stationnaire, 297, 298, 305
optimisation d'un procédé, 143
ordre
 d'interférences, 312
 partiel, global, 143
orthoradial, 105
oscillateur
 amorti, 91, 110
 harmonique, 90, 110, 113, 122
ouverture numérique, 81
oxydant, 158, 342
oxydo-réduction, 158, 342

P

paquet d'ondes, 299, 303, 331
parabole, 107, 118
paramètre de maille, 150

paraxial, 81
particule(s)
 libre, 331
 discernables, 325
passe-bas, passe-bande, passe-haut, 96
passivation, 350
pendule pesant, 122
performance, 133
période
 (temporelle), 92, 99
 propre, 90
perméabilité du vide, 136
permittivité
 du vide, 110, 116
 relative, 149
pH, 155
phase
 (thermodynamique), 125
 à l'origine, 90
 condensée idéale, 125, 130, 131
photon, 79, 102
pile électrochimique, 159, 346
plan
 d'antisymétrie, 135, 285, 290
 d'incidence, 80
 de symétrie, 135, 284, 290
 focal, 81
plasma, 294, 302
poid(s), 109
 de Boltzmann, 324
 critique, triple, 125
 matériel, 107
 objet, image, 81
polaire, 148
polarisabilité, 148
polarisation d'une OPPM, 300, 301
pôle nord, sud, 134
pompe à chaleur, 133
pont diviseur, 87, 93
population d'une maille, 150
potentiel
 chimique, 338, 339
 d'électrode, 160, 342
 de corrosion, 349
 électrique, 85
 électrostatique, 286
 mixte, 346
 standard, 160, 342

potentiométrie, 161
 poussée d'Archimède, 110
 pouvoir dissociant, ionisant, 149
 précipité, 157
 premier
 principe, 127, 319
 principe industriel, 320
 pression
 cinétique, 124
 de vapeur saturante, 126
 partielle, 141
 standard, 142
 thermodynamique, 319
 principe
 d'inertie, 108
 des interactions, 107
 fondamental de la dynamique, 109, 281
 probabilité
 d'occupation, 324, 325
 de présence, 102
 produit
 (de la réaction), 142
 de solubilité, 157
 ionique de l'eau, 154
 profondeur de champ, 84
 propagation dispersive, 100
 protection par courant imposé, 350
 protique (ou protogène), 149
 pseudo-périodique, 91
 puissance
 d'une force, 111
 des actions de contact, 283
 électrique, 86
 électromagnétique, 301
 rayonnée, 295, 307
 thermique, 321
 puits plat infini, 333, 326
 pulsation
 (temporelle), 92, 99
 cyclotron, 114
 de coupure, 96
 plasma, 302
 propre, 90, 110
 spatiale, 99
 punctum proximum, remotum, 83

Q

quadripôle idéal, 98
 quadripôles en cascade, 98
 quantification de l'énergie, 102
 quantité de mouvement, 108
 quasi-statique, 127
 quotient de réaction, 142, 339

R

radial, 105
 radical, 147
 rails de Laplace, 137, 139
 rapport gyromagnétique, 293
 rayon
 covalent, de Van der Waals, 151
 de courbure, 105
 ionique, métallique, 151
 lumineux, 79
 rayonnement dipolaire, 306
 réactif, 142
 limitant, 143
 réaction
 d'un support, 109
 prépondérante, 156
 récepteur (thermodynamique), 132
 réducteur, 158, 342
 référentiel(s), 104
 galiléen, 108
 non galiléen, 281
 usuels, 108
 réflexion
 sur un conducteur, 304
 totale, 80
 réfraction limite, 80
 régime
 apériodique, pseudo-périodique, 91
 libre, 89
 sinusoïdal forcé, 92, 111
 règle
 de l'octet, 147
 du tire-bouchon, 134
 relation(s)
 d'Euler, 338
 de dispersion, 298, 302, 304, 331
 de Louis de Broglie, 102
 de Mayer, 129
 de Van 't Hoff, 340

de Varignon, 279
 de passage, 294
 de Planck–Einstein, 102
 rendement, 133
 faradique, 349
 repère, 104
 repliement de spectre, 329
 réponse
 en élongation, en vitesse, 111
 en intensité, en tension, 94
 représentation de Thévenin, 87, 94
 réseau
 (de diffraction), 315
 cristallin, 150
 résistance
 (électrique), 86
 au glissement, 282
 équivalente, 87
 interne, de sortie, 87
 thermique, 322
 résistivité électrique, 294
 résolution angulaire, 84
 résonance, 94
 résultante cinétique, 108
 retard de phase, 308
 réticule, 84
 réversible, 127
 rotation, 119, 279
 rotor, 137
 roulement sans glissement, 282
 rupture d'équilibre, 340

S

satellite, 118
 schéma de Lewis, 147
 second principe, 130, 319
 semi-cristallin, 150
 série de Fourier, 95
 site interstitiel, 152
 solénoïde, 136, 291
 solide, 119, 279, 282, 327
 covalent, moléculaire, 153
 cristallin, 150
 ionique, 152
 métallique, 153
 solubilité, 157
 solution saturée, 157
 solvant, 142, 149, 339, 345

solvatation, 149
 source
 de chaleur, 128
 idéale, 87
 spectre, 79, 99
 spectrophotométrie, 145
 sphère dure, 151
 spire
 circulaire, 135
 en rotation, 139
 stabilité d'un équilibre, 112
 standard, 142
 stigmatisme, 81, 309
 structure de l'OPP électromagnétique,
 300, 300
 surface
 d'onde, 309
 équipotentielle, 286, 288
 symétrie cylindrique, sphérique, 285
 système
 à deux niveaux, 325, 326
 isolé, pseudo-isolé, 108
 lent, rapide, 344
 linéaire, non linéaire, 328
 mécanique, 107
 optique, 81
 ouvert, fermé, 117, 318
 physico-chimique, 141
 stationnaire, 328
 thermodynamique, 123

T

tableau périodique, 146
 température
 de flamme, 337
 inverse, 325
 thermodynamique, 319
 temps
 de cohérence, 309
 de demi-vie, de demi-réaction, 145
 de relaxation, 89
 tension
 d'un ressort, 109
 électrique, 86
 terme d'interférences, 310
 théorème
 d'Ampère, 290
 d'équipartition, 326

- de Carnot, 133
- de Gauss, 285, 286
- de l'énergie cinétique, 112, 113, 121, 281
- de l'énergie mécanique, 112, 281
- de la résultante cinétique, 109
- de Malus, 309
- de Nyquist–Shannon, 329
- du centre de masse, 109
- du moment cinétique, 116, 121, 281
- thermodynamique statistique, 323
- thermoélastique, 123
- thermostat, 128, 324
- titrage, 156, 157, 161
- titre en vapeur, 126
- train d'ondes, 309, 311
- trajectoire
 - elliptique, 118, 119
 - hyperbolique, 117, 118
 - parabolique, 107, 118
- transfert thermique, 128, 321
- transformation
 - infinitésimale, 319
 - totale, 143
- transition de phase, 125, 130, 131, 132
- translation, 119, 279
- travail
 - d'une force, 111
 - des forces de pression, 128
 - électrique, 347
 - indiqué (ou utile), 320
- trous de Young, 101, 314
- tube de champ, 285

U

- univers, 123

V

- valeur efficace, 92
- variable d'état, 123
- variance, 341
- variété allotropique, 150
- vecteur
 - d'onde, 99, 298
 - de Poynting, 295, 301, 307
 - densité de courant
 - de probabilité, 330
 - densité de courant électrique, 289
 - densité de courant thermique, 321
 - rotation, 280
- ventre (de vibration), 298, 305
- vergence, 82
- vernier, 84
- visibilité, 312
- vitesse
 - (volumique) de réaction, 143
 - angulaire, 119
 - d'entraînement, 280
 - d'un point, 106
 - de disparition, de formation, 143
 - de glissement, 282
 - de groupe, 299, 303, 331
 - de phase, 99, 298, 303, 331
 - de propagation, 79, 99, 299
 - quadratique moyenne, 124

SII

A

accélération, 190
act, 171
actions
 mécaniques, 197
 mutuelles, 358
adhérence, 199
axe instantané de rotation, 191

B

base, 189
biais, 374
bdd, 172
bloc, 172
Bode
 (plan de), 366
 (diagramme de), 367

C

cahier des charges, 167
centre
 de gravité, 198
 de poussée, 200
 d'inertie, 352
chaîne de solides, 195
cinématique, 189
cinétique, 352
classe, 182
classification, 372
coefficient d'amortissement, 182
comportement
 fréquentiel, 185
 temporel, 182
consignes, 177
constante de temps, 182
correcteur
 à avance de phase, 369
 intégral, 368
 proportionnel, 368

correction, 368
couche, 375
Coulomb, 199
couronne, 196
courroie, 195
crémaillère, 196

D

dépassements, 184
déphasage, 185
dérivateur, 182
dérivation numérique, 371
diagramme
 de contexte, 166
 des activités, 171
 des exigences, 167
 des cas d'utilisation, 168
 de séquence, 168
 d'états, 169
 de définition de blocs, 172
 de bloc interne, 188
diamètre primitif, 195
dichotomie, 370
Dirac (impulsion de), 179

E

échelon, 179
énergie cinétique, 357
engrenages, 195
équilibrage, 358
erreur
 de traînage, 180
 statique, 180
Euler explicite (méthode d'), 371

F

facteur de frottement, 199
fermeture
 angulaire, 195

cinématique, 195
dimensionnelle, 195
fonction, 165
d'activation, 374
de combinaison, 374
de transfert, 182

G

gain, 182
glissement, 194

H

Heaviside (fonction de), 179
Huygens (théorème de), 354

I

ibd, 188
impulsion, 179
inertie équivalente, 357
intégrateur, 182
intégration numérique, 371

L

liaisons
équivalentes, 194
normalisées, 192
lois de Coulomb, 199

M

marge
de gain, 366
de phase, 366
de stabilité, 366
masse, 352
matière d'œuvre, 165
matrice d'inertie, 353
moment
cinétique, 355
d'inertie, 352
dynamique, 356
mouvements particuliers, 191

N

neurone, 374

O

opérateur, 174
ordre, 182
orientation, 189

P

perceptron, 375
perturbations, 177
pignons, 195
poids, 198
pôles, 182
positionnement, 189
poulies, 195
poursuite, 362
précision, 180
premier ordre (système du), 182
principe fondamental de la dynamique,
358
produits d'inertie, 353
puissance, 359
pulsation propre, 182

Q

quantité de mouvement, 355

R

rampe, 179
rapidité, 180
rapport de transmission, 195
régime
apériodique, 184
pseudo-périodique, 184
règle du revers, 365
régression, 372
régulation, 362
relation de Varignon, 190
rendement, 360
réponses, 182
req, 167
réseau de neurones, 375
résultante dynamique, 356
retour unitaire, 188
rotation, 191
roue, 195

S

second ordre (système du), 182
sd, 168
slci, 191
stabilité, 365
structure
 conditionnelle, 190
 itérative, 190
stm, 169
système
 asservi, 194
 technique, 183

T

temps
 de montée, 364
 de réponse, 194
théorème
 de l'énergie cinétique, 361
 de la résultante, 202
 de la résultante dynamique, 358
 des actions réciproques, 202
 du moment dynamique, 358
 du moment statique, 202

théorèmes généraux, 202
torseur
 cinétique, 355
 dynamique, 356
train
 d'engrenages simple, 195
 d'engrenages épicycloïdal, 195
trajectoire, 190
transformée de Laplace, 181
translation, 191
travail, 359
type, 174

U

uc, 168

V

vis sans fin, 196
vitesse, 190
 de glissement, 194
valeur ajoutée, 183

*Grâce à moi, le drapeau français
est le seul à avoir une hampe de 300 mètres*

Gustave Eiffel

Les 2 années
en 1 clin d'œil

PRÉPAS SCIENCES

Une **vision claire des savoirs**, une **mobilisation rapide des connaissances**, une **approche croisée des notions** à connaître sont les atouts indispensables à la réussite en prépas. Ce formulaire est la réponse à ces exigences.

Il consiste en :

- un **résumé clair et concis** du cours : définitions, lois, théorèmes, propriétés et schémas
- une **mise en valeur des formules** à connaître
- un **classement thématique** des notions indispensables
- un **index très précis** en fin d'ouvrage qui permet de retrouver au plus vite la notion cherchée.

Conçu pour appréhender les 2 années en 1 clin d'œil, ce formulaire est le compagnon idéal pour la **préparation des colles**, la **résolution des exercices et des problèmes** mais surtout pour **accompagner les révisions avant les concours**.

Il complète intelligemment les ouvrages de la collection *Prépas Sciences Maths, Physique-Chimie* et *SII* qui permettent une acquisition solide des connaissances.

www.editions-ellipses.fr



