LYCEE SCIENTIFIQUE NATIONAL DE OUAGA
PRYTANEE MILITAIRE DE KADIOGO
LYCEE DE L'ALLIANCE CHRETIENNE ANNEE SCOLAIRE 2019 – 2020

BAC BLANC SESSION 2020
EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Série : C Durée : 4 heures Coefficient : 6

EXERCICE 1 ***(4 points)***

On considère un dé cubique bien équilibré dont quatre faces sont blanches et deux sont noires. L'expérience consiste à lancer ce dé et à noter la couleur de sa face supérieure.

1°) Calculer la probabilité d'avoir :

a) Une face blanche. **(0,5 pt)**
b) Une face noire. **(0,5 pt)**

2°) On jette le dé quatre fois de suite.

a) Calculer la probabilité d'avoir dans l'ordre : une face blanche, une face noire, une face blanche, une face blanche. **(0,5 pt)**
b) Calculer la probabilité d'avoir une seule face noire au cours des quatre lancers. **(0,5 pt)**
c) Calculer la probabilité d'avoir une face noire au quatrième lancer. **(0,5 pt)**

3°) Soit n un entier naturel non nul.

a) Calculer la probabilité P_n d'avoir au moins une face blanche au cours de n lancers. **(0,75 pt)**
b) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $P_n \geq 0{,}99$. **(0,75 pt)**

On donne : ln10 = 2,30 et ln3 = 1,1.

EXERCICE 2 ***(4 points)***

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 1 cm). On considère le cercle (C) de centre O et de rayon 4, le point H tel que $mes\left(\widehat{\vec{i},\overrightarrow{OH}}\right) = t$ où $t \in [-\pi;\pi]$. On note A, B et M les projetés orthogonaux de H respectivement sur l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite (AB).

1°)

a) Montrer qu'une équation cartésienne de la droite (AB) est : $x sin t + y cos t - 4 sin t cos t = 0$. **(0,5 pt)**
b) Démontrer que les coordonnées de M sont : $x(t) = 4cos^3 t$ et $y(t) = 4sin^3 t$. **(0,5 pt)**

2°) On se propose de tracer la courbe (Γ), ensemble des points M lorsque H décrit le cercle (C) c'est-à-dire lorsque t parcourt l'intervalle $[-\pi;\pi]$.

a) Etudier les positions relatives des points : $M(t)$ et $M(-t)$; $M(t)$ et $M(\pi - t)$; $M(t)$ et $M\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$. **(0,75 pt)**

b) On note (г₁), ensemble des points M lorsque t parcourt l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$. Expliquer comment obtenir (г) à partir de (г₁). **(0,25 pt)**

3°)

a) Etudier le sens de variation des fonctions coordonnées x et y pour $t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$. **(1 pt)**

b) Dresser le tableau conjoint de leurs variations pour $t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$. **(0,25 pt)**

4°) Tracer (г). On admettra que la tangente à (г) au point de paramètre $t = 0$ est dirigée par $\vec{\imath}$. **(0,75 pt)**

PROBLEME *(12 points)*

Partie A

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 1 cm).

1°)

a) Etudier le sens de variation de f. **(0,5 pt)**

b) Montrer que pour tout x de IR, on a : $0 < f(x) \leq 1$. **(0,5 pt)**

2°) On considère la fonction g définie sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = \ln(tanx)$.

a) Calculer $g\left(\frac{\pi}{4}\right)$ **(0,25 pt)**

b) Montrer que g est dérivable sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $g'(x)$. **(0,75 pt)**

c) Montrer que g admet une bijection réciproque h définie sur IR. **(0,5 pt)** Calculer $h(0)$. **(0,25 pt)**

d) Montrer que h est dérivable sur IR et que pour tout x de IR, $2h'(x) = f(x)$. **(1 pt)**
En déduire que pour tout x de IR, $\int_0^x f(t)dt = 2h(x) - \frac{\pi}{2}$. **(0,25 pt)**

Partie B

Soit n un entier naturel non nul et F_n la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $F_n(x) = \int_0^x f^n(t)dt$.

1°)

a) Calculer $F_1(x)$ en fonction de $h(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} F_1(x) = \frac{\pi}{2}$ **(0,75 pt)**

b) Soit K la fonction définie sur IR par $K(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$. Montrer que $K'(t) = f^2(t)$. Calculer alors $F_2(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} F_2(x) = 1$. **(0,75 pt)**

2°)

a) Montrer que l'image de l'intervalle $[0;+\infty[$ par F_n est l'intervalle $\left[0;\lim\limits_{x\to+\infty}F_n(x)\right[$. **(0,25 pt)**

b) Vérifier que pour tout réel t positif ou nul on a : $f(t) < 2e^{-t}$. En déduire en utilisant la partie A.1.a que pour tout x de $[0;+\infty[$ on a : $F_n(x) \leq \frac{2^n}{n}$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}F_n(x)$ est finie. **(0,75 pt)**

c) Vérifier que pour tout réel t positif ou nul on a : $f(t) \geq e^{-t}$. Montrer alors que pour tout réel x positif, on a : $\frac{1-e^{-nx}}{n} \leq F_n(x)$ et en déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}F_n(x)$ est non nulle. **(0,75 pt)**

3°) Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \lim\limits_{x\to+\infty}F_n(x)$.

a) Donner la valeur de u_1 et la valeur de u_2. **(0,5 pt)**

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante. En déduire que la suite (u_n) est convergente. **(0,75 pt)**

c) Vérifier que $4-(e^t+e^{-t})^2 = -(e^t-e^{-t})^2$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in [0;+\infty[$, on a : $f^{n-1}(t)f'(t)K(t) = f^{n+2}(t) - f^n(t)$. **(0,5 pt)**

d) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in [0;+\infty[$, on a : $\int_0^x f^{n-1}(t)f'(t)K(t)dt = \frac{1}{n}K(x)f^n(x) - \frac{1}{n}\int_0^x f^{n+2}(t)dt$. **(0,5 pt)**

e) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in [0;+\infty[$, on a : $(n+1)F_{n+2}(x) - nF_n(x) = K(x)f^n(x)$. Montrer alors que $u_{n+2} = \frac{n}{n+1}u_n$. **(0,5 pt)**

4°)

a) En remarquant que $u_{2n+2} = \frac{2n}{2n+1}u_{2n}$, montrer que $u_{2n+2} = \frac{2\times4\times6\times\ldots\times2n}{3\times5\times7\times\ldots\times(2n+1)}$. **(0,5 pt)**

b) Montrer que $u_{2n+1} = \frac{3\times5\times\ldots\times(2n-1)}{2\times4\times\ldots\times2n}\times\frac{\pi}{2}$. **(0,75 pt)**

c) Donner $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}}$ et montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{2\times4\times6\times\ldots\times2n}{3\times5\times7\times\ldots\times(2n+1)}\right)^2\times\frac{2}{2n+1}\right] = \pi$. **(0,75 pt)**