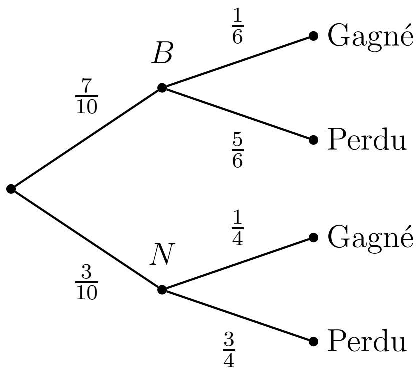
Devoir de mathématiques $T^{\text{ale}}S$

Exercice 1 *Bien que ce ne soit pas demandé dans le sujet, les démonstrations sont données ici.*

1. Trois boules sont tirées simultanément, il y a donc $\binom{10}{3}$ tirages possibles. Il y a $\binom{7}{2}$ façons de choisir 2 boules blanches parmi les 7 présentes dans l'urne et $\binom{3}{1}$ façons de choisir une boule noire parmi les trois présentes, donc $\binom{7}{2} \times \binom{3}{1}$ tirages réalisant l'évènement.
   Puisque les boules sont indiscernables au toucher, on est dans une situation d'équiprobabilité, et donc la probabilité de l'évènement est : $\dfrac{\binom{7}{2} \times \binom{3}{1}}{\binom{10}{3}} = \dfrac{\dfrac{7!}{2! \times 5!} \times \dfrac{3!}{1! \times 2!}}{\dfrac{10!}{3! \times 7!}} = \dfrac{\dfrac{7 \times 6}{2} \times 3}{\dfrac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2}} = \dfrac{21}{40}$.
   La réponse est $\dfrac{21}{40}$.
2. La situation est celle d'un schéma de Bernoulli (on peut associer le blanc au succès et le noir à l'échec), de paramètres 5 (on fait 5 tirages successifs) et $\dfrac{7}{10}$ (probabilité du succès, puisque 7 boules parmi les 10 sont blanches) et donc on cherche à calculer $p(X = 2)$, pour avoir deux succès sur 5 tirages, c'est-à-dire deux boules blanches et trois noires.
   Le cours donne une réponse $\binom{5}{2} \times \left(\dfrac{7}{10}\right)^2 \times \left(1 - \dfrac{7}{10}\right)^{5-2} = \binom{5}{2} \times \left(\dfrac{7}{10}\right)^2 \times \left(\dfrac{3}{10}\right)^3$.
3. On peut représenter la situation par l'arbre suivant :

   On a donc $p(\text{Gagné}) = \dfrac{7}{10} \times \dfrac{1}{6} + \dfrac{3}{10} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{14}{120} + \dfrac{9}{120} = \dfrac{23}{120}$.
   De plus $p(\text{Gagné} \cap \text{B}) = \dfrac{7}{10} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{7}{60}$
   Donc $p_{\text{Gagné}}(\text{B}) = \dfrac{\dfrac{7}{60}}{\dfrac{23}{120}} = \dfrac{14}{23}$.
4. On applique le cours : $p(1 \leqslant X \leqslant 3) = \displaystyle\int_1^3 \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_1^3 = -\mathrm{e}^{-3\lambda} + \mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{-3\lambda}$.

Exercice 2 **PARTIE A**

1. (a) • $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = +\infty$; • $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$,
   donc par produit de limites $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

   (b) Comme $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 1$.
   Or $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, donc par produit de limites $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

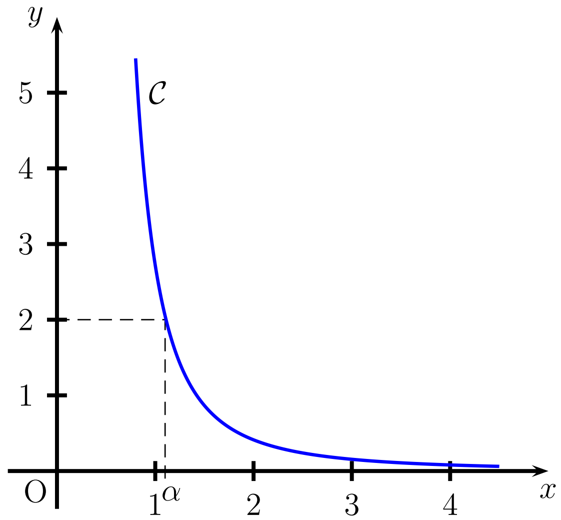
   (c) La première limite montre que l'axe des ordonnées est asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de zéro. La seconde montre que l'axe des abscisses est asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de plus l'infini.
2. (a) $f(x)$ étant considéré comme un produit de fonctions dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^2}\right)' e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}\left(e^{\frac{1}{x}}\right)' = -\frac{2x}{x^4} e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}} = -e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{2x}{x^4} + \frac{1}{x^4}\right) = -\frac{1}{x^4} e^{\frac{1}{x}}(2x+1)$$

(a) On a $x > 0 \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow 2x + 1 > 1 > 0$; d'autre part quel que soit $u \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^u > 0$. Enfin $x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x^4} > 0$, donc finalement pour tout réel $x \geqslant 0$, $f'(x) < 0$.
La fonction f est donc décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$ de plus l'infini à zéro.

(b) f est dérivable, donc continue sur $]0; +\infty[$, strictement décroissante, avec $\lim\limits_{x\to 0} f(x) < 2 < \lim\limits_{x\to 0} f(x)$, donc il existe, d'après le théorème des valeurs intermédiaires un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$.
La calculatrice donne : $f(1,10) \approx 2,05$ et $f(1,11) \approx 1,99$ donc $1,10 < \alpha < 1,11$.
La valeur approchée au centième de α est donc $1,11$.

3.



PARTIE B Étude d'une suite d'intégrales

1. $I_2 = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$. On pose $u(x) = \frac{1}{x}$ qui est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ donc $u'(x) = -\frac{1}{x^2}$.
La fonction à intégrer est donc de la forme $-u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$ qui est la dérivée de $-\mathrm{e}^{u(x)}$.
On a donc $I_2 = \left[-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right]_1^2 = \mathrm{e} - \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \mathrm{e} - \sqrt{e}$.

2. (a) $I_n = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^n}e^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$.
On pose $u'(x) = \frac{1}{x^n}$ et $v(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$; d'où $u(x) = -\frac{1}{n-1}\frac{1}{x^{n-1}}$ et $v'(x) = -\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.
Toutes les fonctions sont dérivables, donc continues sur $]0; +\infty[$, on peut donc intégrer par parties :

$$\begin{aligned} I_n &= \left[-\frac{1}{n-1}\frac{1}{x^{n-1}}e^{\frac{1}{x}}\right]_1^2 - \frac{1}{n-1}\int_1^2 \frac{1}{x^{n-1}} \times \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\,dx \\ &= \frac{1}{n-1}\left(e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}}\right) - \frac{1}{n-1}\int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}\,dx = \frac{1}{n-1}\left(e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}}\right) - \frac{1}{n-1}I_{n+1} \end{aligned}$$

Puis $(n-1)I_n = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} - I_{n+1} \iff I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n)I_n$.

(b) La relation de récurrence précédente permet de calculer :
$I_3 = \mathrm{e} - \frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2^{2-1}} + (1-2)I_2 = \mathrm{e} - \frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2^{2-1}} - (\mathrm{e} + \sqrt{\mathrm{e}}) = -\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}$.

3. (a) Soit x tel que : $0 < 1 \leqslant x \leqslant 2$, donc en passant aux inverses : $0 < \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant 1$, puis par croissance de la fonction exponentielle : $1 < e^{\frac{1}{2}} \leqslant e^{\frac{1}{x}} \leqslant e^x$, d'où en particulier $0 < e^{\frac{1}{x}} \leqslant e$.
Comme $x^n > 0$ pour tout naturel et tout réel $1 \leqslant x \leqslant 2$, il résulte que :
$0 \times \frac{1}{x^n} < e^{\frac{1}{x}}\frac{1}{x^n} \leqslant e\frac{1}{x^n}$, ou encore $0 \leqslant \frac{1}{x^n}e^{\frac{1}{x}} \leqslant \frac{e}{x^n}$.

(b) On en déduit l'encadrement de l'intégrale I_n : $\underbrace{\displaystyle\int_1^2 0\,\mathrm{d}x}_{=0} < \underbrace{\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^n}e^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x}_{=I_n} \leqslant \underbrace{\frac{\mathrm{e}}{x^n}\,dx}_{=e\left[-\frac{1}{n-1}\frac{1}{x^{n-1}}\right]_1^2}$

soit finalement $0 < I_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n-1}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n-1} = 0$, on obtient par produit de limites :
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e}{n-1}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 0$, et donc, d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.