Collège Privé d'Enseignement Technique

Prof : M. BALMA

Année scolaire 2021-2022

Classe : Tle F4

Fiche de TD n° 3 : Dérivabilités et Etudes de fonctions.

EXERCICE 01

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de définition et calculer la dérivée.

$f(x) = -x^2 - x + 3$; $g(x) = 5 + \frac{1}{x} - \sqrt{3x}$;

$h(x) = -3 + \frac{5}{x^2}$; $k(x) = \frac{2x^3-5x-3}{x^3}$;

$A(x) = \sqrt{-x+3}$; $B(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$;

$C(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{4x^2}$; $D(x) = \frac{1-\cos x}{x}$;

$E(x) = \sqrt{3x+1} - \sqrt{3x} + 1$;

$F(x) = |4x+4|$; $G(x) = \left|\frac{x^2-1}{x^2+2}\right|$;

$L(x) = \left|\frac{x^2-3x-1}{x^2-4}\right|$.

EXERCICE 02

Soit f la fonction définie par

$f(x) = x\sqrt{1-x^2}$.

1) Quel est l'ensemble de définition de f ?

2) Etudier la parité de f.

3) Etudier les variations de f puis dresser le tableau de variation

4) Etudier la dérivabilité de f en -1 *et en* 1. Interpréter géométriquement les résultats.

5) Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$,d'unité 1cm. Construire l'équation de la tangente au point d'abscisse 0.

EXERCICE 03

Soit f lafonction définie de $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = x|x-1|$.

1) Etudier la dérivabilité de f en 1.

2) La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$? Justifier.

EXERCICE 04

Soit la fonction f *definie de* $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \sqrt{x(x+1)}$ et C sa représentation graphique.

1) Quel est l'ensemble de définition de f ?

2) Etudier la dérivabilité de f en -1 *et en* 0.

3) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4) Vérifier que la droite $(D): y = x + \frac{1}{2}$ est une asymptote à la courbe (C) de f en $+\infty$.

5) Vérifier que la droite $(D'): y = -x - \frac{1}{2}$ est une asymptote à la courbe (C) de f en $-\infty$.

6) Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ en précisant la tangente à gauche et de la tangente à droite à la courbe (C) en -1 *et* 0.

EXERCICE 05

Soit f la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par :

$f(x) = (1-\sqrt{x})^2$ et (C) sa courbe représentative.

1) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.

2) En déduire que f réalise une bijection de $[1; +\infty[$ vers un intervalle J que l'on déterminera. En déduire la tableau de variation de f^{-1}.

3) Déterminer la bijection réciproque f^{-1} de f.

4) Construire (C) dans un repère orthonormé $(o;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. En déduire celle de la bijection réciproque puis justifier.

EXERCICE 06

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur $I = \mathbb{R}$; puis la primitive F de f qui vérifie la condition indiquée.

1) $f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+x+3}}$; $I = \mathbb{R}$; $F(0) = 0$.

2) $f(x) = \frac{1-6x}{(3x^2-x-2)^2}$; $I = \mathbb{R}$; $F(2) = -1$.

3) $f(x) = 3\cos x \, . sin^2 x$; $I = \mathbb{R}$; $F\left(\frac{2}{\pi}\right) = 1$

4) $f(x) = \frac{3x-1}{(3x^2-2x-1)^2}$; $I = \left]-\frac{1}{3}; 1\right[$; $F(0) = 1$

5) $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}$; $I = \mathbb{R}$; $F(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

EXERCICE 07

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \frac{2x^2+4x-1}{(x+1)^2}$ pour tout $x \neq -1$.

1)Déterminer deux nombres réels a et b tels que pour tout $x \neq -1$, $f(x) = a + \frac{b}{(x+1)^2}$.

2)En déduire une primitive de f sur $]-\infty ; -1[$.

3)Déterminer la primitive F de f sur $]-\infty; -1[$ qui prend la valeur $\frac{1}{2}$ en 2.

PROBLEME 01

On considère $f(x) = \frac{(x-4)^2}{2(2-x)}$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa représentation graphique dans un repère (O ,I,J) du plan.

1-a) Déterminer D_f .

b) Préciser les limites aux bornes de D_f.

C) En déduire la ou les asymptotes à $(\mathcal{C}_f)$.

2-a) Déterminer les $reéls$ a, b et c $telque$ $f(x) = ax + b + \frac{c}{2-x}$.

b) Montre que (D): $y = \frac{-x}{2} + 3$ est une asymptote à $(\mathcal{C}_f)$.

3-a) Montre que $f'(x) = \frac{x(4-x)}{2(x-2)^2}$. $(\mathcal{C}_f)$.

b) Etudier le signe de $f'(x)$ et dresser son tableau de variation.

4-a) Montre que le point $A(2; 2)$ est un center de symétrie à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

b) Construire $(\mathcal{C}_f)$ et ses asymptotes.

c) Donner en fonction du paramètre réel m le nombre $f(x) = m$.

PROBLEME 02

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2} & si\, x \geq 2 \\ f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 5}{x^2 - 4x + 3} & si\, x < 2 \end{cases}$$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère ortho normal (O,I,J) d'unité 1cm.

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. En déduire une conséquence graphique.

3) Montre que la droite (L) d'équation :

$y = x - \frac{3}{2}$ est une asymptote à (C) en $+\infty$.

4) Etudier la continuité de f en 2.

5) Etudier la dérivabilité de f en 2.

6)a- Calculer la dérivée $f'(x)$.

b- Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

c- Dresser le tableau de variation de f.

d- Tracer les asymptotes, la tangente (T) et la courbe (C) .

7) Soit g la restriction de f à l'intervalle $I =]-\infty; 1[$.

a- Montre que g admet une bijection réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer. En déduire le tableau de variation de g^{-1} sans expliciter $g^{-1}(x)$.

b- Construire en justifiant la courbe (C^{-1}) de la bijection réciproque g^{-1} dans le même repère.

PROBLEME 03

PARTIE A

Soit la fonction g définie par :

$g(x) = x^3 - 3x - 4$.

1) Etudier les variations de la fonction g.

2) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution.

3) Etudier le signe de g sur $\mathbb{R}$.

PARTIE B

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 1 cm. On considère la fonction f de courbe représentative (C) dans le plan par : $f(x) = \frac{x^3+2x^2}{x^2-1}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f puis calculer les limites de f à ses bornes. Interpréter si possible.

2) Etudier les variations de f.

3) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$.
Interpréter ces limites.

4) En déduire l'équation de l'asymptote oblique (Δ) en -∞ $et\ en + \infty$.

5) Etudier la position relative de (C) par rapport à (Δ) d'équation $y = x + 2$.

6) Tracer (C) et (Δ) . On donne $\alpha = 2{,}25\ et\ f(\alpha) = 5{,}3$.

PROBLEME 04

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3} \ ;\ si\ x > 1 \\ f(x) = \frac{x^2}{x+2} \ ;\ si\ x \leq 1 \end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 2cm.

PARTIE A

1) Déterminer le domaine de définition de f
2) Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition .

3) Etudier la continuité de f en 1.

4) Etudier la dérivabilité de f en 1.
Interpréter le résultat.

5) Déterminer les réels a, b, c tels que
$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$ $si\ x \leq 1$.

6) Montrer que la droite (L) :$y = x - 2$ est une asymptote à (C) en $-\infty$.
7) Montrer que la droite (D) :$y = x + 1$ est une asymptote à (C) en $+\infty$.
8) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisses 1.

9) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau.

10) Construire (C), ses asymptotes ainsi que ses tangentes.

PARTIE B :

Soit p la restriction de f à $]1; +\infty[$ et (C^{-1}) sa courbe dans le même repère.

1) Montrer que p est bijective vers un intervalle J à préciser.
2) Explicite $p^{-1}(x)$.
3) Sans étudier p donner, en justifiant, son sens de variation puis dresser son tableau de variation.
4) Justifier la construction de la courbe (C^{-1})de p dans le même repère.
5) Construire la courbe (C^{-1}) de p dans le même repère.

PROBLEME 05

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 1} & ; \; si \; x \leq 0 \\ f(x) = \dfrac{-2x^2 + 10x + 1}{x^2 - 2x + 1} & ; \; si \; x > 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2cm.

PARTIE A

1) Expliquer pourquoi le domaine de définition de f est : $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$.

2) Etudier la continuité de f en 0.

3) Etudier la dérivabilité de f en 0.

Interpréter le résultat obtenu.

4) Déterminer les réels a, b et c tels que $\forall x \in]0 ; 1[\cup]1; +\infty[$, on ait :
$f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$.

5) Calculer les limites aux bornes de D_f.
Interpréter géométriquement les résultats obtenus.

6) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

7) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe au point d'abscisse 4.

8) Démontrer que la courbe coupe l'axe des abscisses en un point
et vérifier que $\alpha \in [5 ; 6]$.

9) a- Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = -x + \frac{3}{2}$ est une asymptote à (C).

b- Etudier la position relative de (C) par rapport à(Δ).

10) Construire (C), ses asymptotes ainsi que ses tangentes.

PARTIE B

1) Soit g la restriction de f sur $]1; +\infty[$.
Montrer que f est une bijection de $]1; +\infty[$ vers un intervalle J à préciser.
Que représente l'intervalle J.

2) Donner le sens de variation de la bijection réciproque g^{-1} de g puis dresser le tableau de variation.

3) Comment peut – on obtenir la courbe (C^{-1}) de g^{-1} dans le même repère.

Tracer (C^{-1}).