DEVOIR DE NIVEAU N°2 **NIVEAU : TD**

2e TRIMESTRE 2021-2022 **Durée : 4h00**

MATHEMATIQUES

SERIE D

Cette épreuve comporte deux (04) pages numérotées 1/4 … 4/4.

L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé.

EXERCICE 1 (*2 points*)

1. Réorganise les mots et groupes de mots suivants de sorte à construire une propriété ou une définition correcte.

a. (a) logarithme népérien, / (b) et qui s'annule en 1. / (c) est la primitive / (d) La fonction / (e) de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ / (f) notée ln,/(g) définie sur]0 ; +∞[

b. (a) est une expérience aléatoire / (b) éventualités exclusives : / (c) Une épreuve de Bernoulli / (d) ne conduisant qu'à deux / (e) et l'autre **échec** notée $\overline{S}$./ (f) l'une est appelée **succès** notée S

2. Pour chacune des affirmations ci-dessous, mets le numéro de l'affirmation suivi de la mention **« VRAI »** ou **« FAUX ».**

a. Pour tous nombres réels a et b strictement positifs on a $ln\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{lna}{lnb}$

b. La fonction $x \mapsto lnx$ est strictement positive sur $]0; +\infty[$

EXERCICE 2 (2 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, une seule des réponses proposées est exacte. Recopier le numéro de chaque affirmation en y ajoutant la lettre qui convient.

N°	AFFIRMATIONS	Lettres	Réponses
1	La fonction $x \longmapsto cos(5x)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction	A	$x \longmapsto 5sin(5x)$
		B	$x \longmapsto -5sin(5x)$
		C	$x \longmapsto \frac{1}{5}sin(5x)$
		D	$x \longmapsto -\frac{1}{5}sin(5x)$
2	Soit A et B deux évènements indépendants de l'univers Ω des éventualités d'une expérience aléatoire tels que $P(A) = 0{,}15$ et $P(B) = 0{,}2$. On a $P(\bar{A} \cup \bar{B}) =$	A	**0,97**
		B	**0,83**
		C	**0,03**
		D	**0.32**
3	L'ensemble solution de l'équation	A	$\boldsymbol{S_{(E)} = \{1 + e^3\}}$

	(E): $2ln(x-1)=-3$ est	**B**	$\boldsymbol{S_{(E)}=\{1-e^{3}\}}$
		C	$\boldsymbol{S_{(E)}=\left\{1+e^{-\frac{3}{2}}\right\}}$
		D	$\boldsymbol{S_{(E)}=\left\{1+e^{-\frac{3}{2}};1-e^{-\frac{3}{2}}\right\}}$
4	Soit g la fonction définie sur $[-2;+\infty[$ par : $g(x)=\sqrt{x+2}$. On admet que $\forall x\in\ [-1;2]\ \frac{1}{4}\leq\ g'(x)\leq\frac{1}{2}$.En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction g sur $[-1;x]$, avec $x\in\ ]-1;2]$ on obtient que	**A**	$\boldsymbol{-\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}\leq\sqrt{x+2}\leq-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}}$
		B	$\boldsymbol{\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}\leq\sqrt{x+2}\leq\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}}$
		C	$\boldsymbol{\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}\leq\sqrt{x+2}\leq\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}}$
		D	$\boldsymbol{\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}\leq\sqrt{x+2}\leq\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}$

EXERCICE 3 (*2 points*)

Soit u une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I.

1) Détermine la dérivée la fonction $u\sqrt{u}$ sur I.
2) En déduis que les primitives de la fonction $u'\sqrt{u}$ sont les fonctions de la formes $\frac{2}{3}u\sqrt{u}+c$ avec $c\in\ \mathbb{R}$
3) Application : Détermine les primitives sur $]1\ ;+\infty[$ de la fonction $f(x)=(x-1)\sqrt{x^2-2x+1}$

EXERCICE 4 (*4 points*)

Le service social du lycée jeunes filles de Yopougon organise une journée récréative à Jacqueville à l'endroit des filles du lycée. Le trajet Yopougon – Jacqueville peut être effectué en bateau ou par le bus touristique. Chaque fille peut choisir son mode de transport à l'aller comme au retour.

- ✓ A l'aller , le bateau est choisi dans 65% des cas.
- ✓ Lorsque le bateau est choisi à l'aller, il l'est également pour le retour 9 fois sur 10.
- ✓ Lorsque le bus a été choisi à l'aller, le bateau est préféré pour le retour dans 70% des cas.

On interroge au hasard une fille du lycée . On considère les évènements suivants

A ≪ la fille choisit de faire l'aller en bateau≫ et R ≪ la fille choisit de faire le retour en bateau≫

1. Traduis cette situation par un arbre pondéré.
2. Calcule la probabilité que la fille fasse l'aller-retour en bateau.
3. Justifie que la probabilité que la fille utilise les deux moyens de transport est égale à 0,31.

4. On choisit au hasard et de façon indépendante 5 filles du lycée. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de filles qui utilisent les deux moyens de transport.

a. Quelle est la loi de probabilité de X ?

b. Calcule la probabilité qu'il y ait au moins une fille qui utilise les deux moyens de transport.

5. Le coût d'un trajet aller ou d'un trajet retour est de 1000FCFA en bateau ; il est de 1500FCFA en bus.

On note Y la variable aléatoire qui associe, à une fille prise au hasard, le coût en FCFA de son trajet aller-retour.

a. Détermine la loi de probabilité de Y.

b. Calcule l'espérance mathématique de Y et interprète le résultat.

EXERCICE 5 (*5 points*)

On considère la fonction numérique f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{x^2+1} + \frac{4}{\sqrt{x^2+1}}$ et on note (C_f) sa courbe représentative.

1. Justifie que f est une fonction paire et interprète graphiquement.
2. a. Calcule la limite de f en $+\infty$.

b .Justifie que $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x] = 0$ puis interprète graphiquement ce résultat .

3. a. Démontre que $\forall\ x \in\ \mathbb{R}\ , f'(x) = \frac{x(x^2-3)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

b. En déduis le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$ puis dresse son tableau de variation sur $[0; +\infty[$.

4. Soit g la restriction de f sur $[0; \sqrt{3}]$.

a. Justifie que g réalise une bijection de $[0; \sqrt{3}]$ vers un intervalle J à préciser. On note g^{-1} la bijection réciproque de g.

b. Calcule $g(1)$

c. Démontre que g^{-1} est dérivable en $3\sqrt{2}$ puis détermine $(g^{-1})'(3\sqrt{2})$

5. Construis dans le repère orthonormé $(O; I; J)$ (C_f) et $(C_{g^{-1}})$.

EXERCICE 6 (*5 points*)

Lors d'une conférence organisée au lycée moderne de jeunes filles de Yopougon, sur les effets néfastes de la consommation d'alcool sur l'organisme chez les jeunes, le conférencier a donné, entre autres les informations suivantes:

✓ Des recherches scientifiques démontrent clairement que l'alcool altère la capacité de conduire un véhicule en toute sécurité et, par conséquent augmente les risques d'accident.

✓ La concentration C d'alcool dans le sang ($taux$ d'alcoolemie) pour un individu de corpulence moyenne, en fonction du temps t après une ingestion d'une boisson alcoolisée, très prisée dans le milieu des jeunes peut être modélisée par la fonction C définie sur $[0; +\infty[$ telle que : $C(0) = 0$; $C(1) = 0{,}5$ et $\forall\ t \in\ ]0; +\infty[$ $C'(t) = \frac{1}{t^3} - \frac{1}{t^2}$, $C(t)$ est exprimée en gramme par litre (g/L), $C'(t)$ est la dérivée de $C(t)$ et elle représente la vitesse d'apparition d'alcool dans le sang. La variable t est exprimée en heure.

- ✓ Selon la législation en vigueur, le taux de concentration maximale d'alcool dans le sang pour un jeune conducteur est de $0,2g/L$.

De retour à la maison, à 14h , un de vos amis trouve son frère ainé âgé de 20 ans, de corpulence moyenne, conducteur d'un véhicule de transport en commun en train de boire cette boisson alcoolisée. Inquiet, il cherche à déterminer l'heure à laquelle la concentration d'alcool dans son sang sera maximale et surtout la durée d'attente nécessaire qu'il devra observer pour que son taux d'alcoolémie soit inférieure à $0,2g/L$. Pour cela, il te sollicite.

En utilisant les outils mathématiques au programme, aide ton ami à déterminer ces deux valeurs. On prendra les arrondis d'ordre 1 des résultats.