Fonctions Exponentielles : 2bac pc/svt

Réalisé Par : Youssef MIGROUNE
Prof de maths au lycée
Niveau : 2BAC PC/SVT

Youtube / MIGROUNE Math

a Définition et propriétés élémentaires

Définition

La fonction réciproque de la fonction logarithme népérienne est appelée la la fonction exponentielle népérienne , et on la note $\exp$.

- On a par définition de la fonction $\exp$:

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in]0;+\infty[)\ ;\ \Big(\exp(x) = y \Leftrightarrow x = \ln(y)\Big)$$

- En particulier :
$\exp(0) = 1$ et $\exp(1) = e$ car : $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$

Proposition

1. La fonction $\exp$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$; $\exp(x) > 0$ et $\ln\Big(\exp(x)\Big) = x$
3. Pour tout $x \in]0; +\infty[$; $\exp\Big(\ln(x)\Big) = x$

Corollaire

Pour tout $(\psi; \phi) \in \mathbb{R}^2$ on a :

1. $\exp(\psi) = \exp(\phi) \Leftrightarrow \psi = \phi$
2. $\exp(\psi) < \exp(\phi) \Leftrightarrow \psi < \phi$
3. $\exp(\psi) = 1 \Leftrightarrow \psi = 0$
4. $\exp(\psi) < 1 \Leftrightarrow \psi < 0$
5. $\exp(\psi) > 1 \Leftrightarrow \psi > 0$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

1. $\exp\left(\dfrac{x+5}{2x+3}\right) = \exp\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$
2. $\exp\left(-x^2\right) = \exp\left(\dfrac{3x+1}{x-5}\right)$
3. $\exp\left(-x^2\right) > \exp\left(-x\right)$
4. $\exp\left(5x^2 - 7x + 2\right) \leqslant 1$

Applications

b Propriétés algébriques

Propriété fondamentale

Pour tous réels x et y on a : $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$

De cette propriété fondamentale on peut déduire les propriétés suivantes :

Propriétés

Soit x et y deux nombres réels et $r \in \mathbb{Q}$. On a :

1. $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$
2. $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$
3. $\exp(rx) = \Big(\exp(x)\Big)^r$

C Une autre écriture de la fonction $\exp$

On a $\exp(1) = e$ et on a déjà vu que : $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall r \in \mathbb{Q}$;
$\exp(rx) = \Big(\exp(x)\Big)^r$.
En particulier pour $x = 1$, on trouve que :

$$\exp(r) = \Big(\exp(1)\Big)^r = e^r \,;\ \forall r \in \mathbb{Q} \,.$$

On prolonge cette écriture sur $\mathbb{R}$ en écrivant

$$\boxed{\exp(x) = e^x \,;\ \forall x \in \mathbb{R}}$$

$\Rightarrow$ En utilisant cette nouvelle notation on trouve les résultats suivants :

1. $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in]0;+\infty[)\ ;$ $\left(e^x = y \Leftrightarrow x = \ln(y)\right)$
2. $\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ e^x > 0$
3. $\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ \ln\left(e^x\right) = x$
4. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ ;\ e^{\ln(x)} = x$
5. $\forall x, y \in \mathbb{R}\ ;\ e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$
6. $\forall x, y \in \mathbb{R}\ ;\ e^x > e^y \Leftrightarrow x > y$
7. $\forall x, y \in \mathbb{R}\ ;\ e^{x+y} = e^x \times e^y$
8. $\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
9. $\forall x, y \in \mathbb{R}\ ;\ e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$
10. $\forall (x;r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Q}\ ;\ e^{rx} = \left(e^x\right)^r$

Application 1

Simplifier les expressions suivantes :

- ★ $A = e^{\left(\frac{1}{2}\ln(5)\right)}$
- ★ $B = e^{\ln(2) - 2\ln(3)}$
- ★ $C = \dfrac{2 - \ln\left(\sqrt[3]{e}\right)}{1 + \ln\left(e^2\right)}$
- ★ $D = e^{-\ln\left(\frac{3}{2}\right)} + e^{4\ln\left(\frac{1}{3}\right)}$

Application 2

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer les égalités suivantes :

E_1 $\ln(1+e^x) - \ln(1+e^{-x}) = x$

E_2 $\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} = \dfrac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

E_1 $e^{5x+4} = e^{2x}$

E_2 $e^{x-7} = 5$

E_3 $\dfrac{2e^x - 1}{e^x + 3} = 4$

E_4 $3e^{2x} - 4e^x = 4$

E_5 $2e^x - 3e^{-x} - 5 = 0$

E_6 $e^{3x} - 2e^{2x} - e^x = -2$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

I_1 $e^{2x-1} \geqslant 1$

I_2 $\left(e^x - 1\right)\left(5 - e^x\right) \geqslant 0$

I_3 $\dfrac{2e^x - 1}{e^x - 2} \leqslant 0$

I_4 $7e^{2x} - 4e^x - 3 < 0$

d Dérivée de la fonction exponentielle népérienne

Propriété

La fonction $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right)$; $\exp'(x) = \exp(x)$

Et on écrit aussi : $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right)$; $\left(e^x\right)' = e^x$

En utilisant la composée de deux fonctions dérivables, on montre la propriété suivante :

Propriété

Si ψ est une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction $x \mapsto e^{\psi(x)}$ est dérivable sur I et on a :

$$\left(\forall x \in \mathrm{I}\right) ; \left(e^{\psi(x)}\right)' = \psi'(x)e^{\psi(x)}$$

Déterminer les dérivées des fonctions définies par :

- ★ $a(x) = e^{\sqrt{2x+1}}$
- ★ $b(x) = e^{\frac{x+1}{3-x}}$
- ★ $c(x) = e^{-2x^2} - 3e^{3x+1}$
- ★ $d(x) = e^{\sqrt{2x^2-x+5}}$
- ★ $e(x) = xe^{\frac{2x}{x^2-1}}$
- ★ $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{e^{\cos(2x)}}$

Applications

Corollaire

Soit ψ une fonction dérivable sur un intervalle $\mathtt{I}$. Les primitives de la fonction $x \mapsto \psi'(x)e^{\psi(x)}$ sur $\mathtt{I}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto e^{\psi(x)} + c$ où c est une constante réelle .

Déterminer les primitives des fonctions définies par :

- $a(x) = 3e^{3x} + e^{2x} + e^{-x} - x$
- $b(x) = \left(x^2 - 2x\right)e^{x^3-3x^2}$
- $c(x) = \left(2-\sin(x)\right)e^{2x+\cos(x)}$
- $d(x) = \left(4 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)e^{2x-\sqrt{x}}$
- $e(x) = \dfrac{e^{2x}}{e^{2x}-1}$
- $f(x) = -\dfrac{\ln^2(x)}{x}e^{\ln^3(x)}$

Applications

e Limites fondamentales

Propriétés

On a les limites fondamentales suivantes :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{e^x - e^a}{x - a} = e^a$

Pour tout entier naturel n, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^{3x}+3e^{x}-1\right)(1-x)$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(3e^{2x}-e^{x}+5\right)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{1-e^{x}}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}\ln\left(1+e^{-x}\right)$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$
6. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{\sin(x)}-1}{x}$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x}}{x^{2}+3x+4}$
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^{3}+x-e^{x}\right)$
9. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{e^{\sqrt[3]{x}}-1}{x}$
10. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x}{\sqrt{e^{4x}-1}}$
11. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{x}-2x+1}{2e^{x}-x^{2}}$
12. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{3x}-xe^{2}}{x}$
13. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{3x}}{x^{3}+1}$

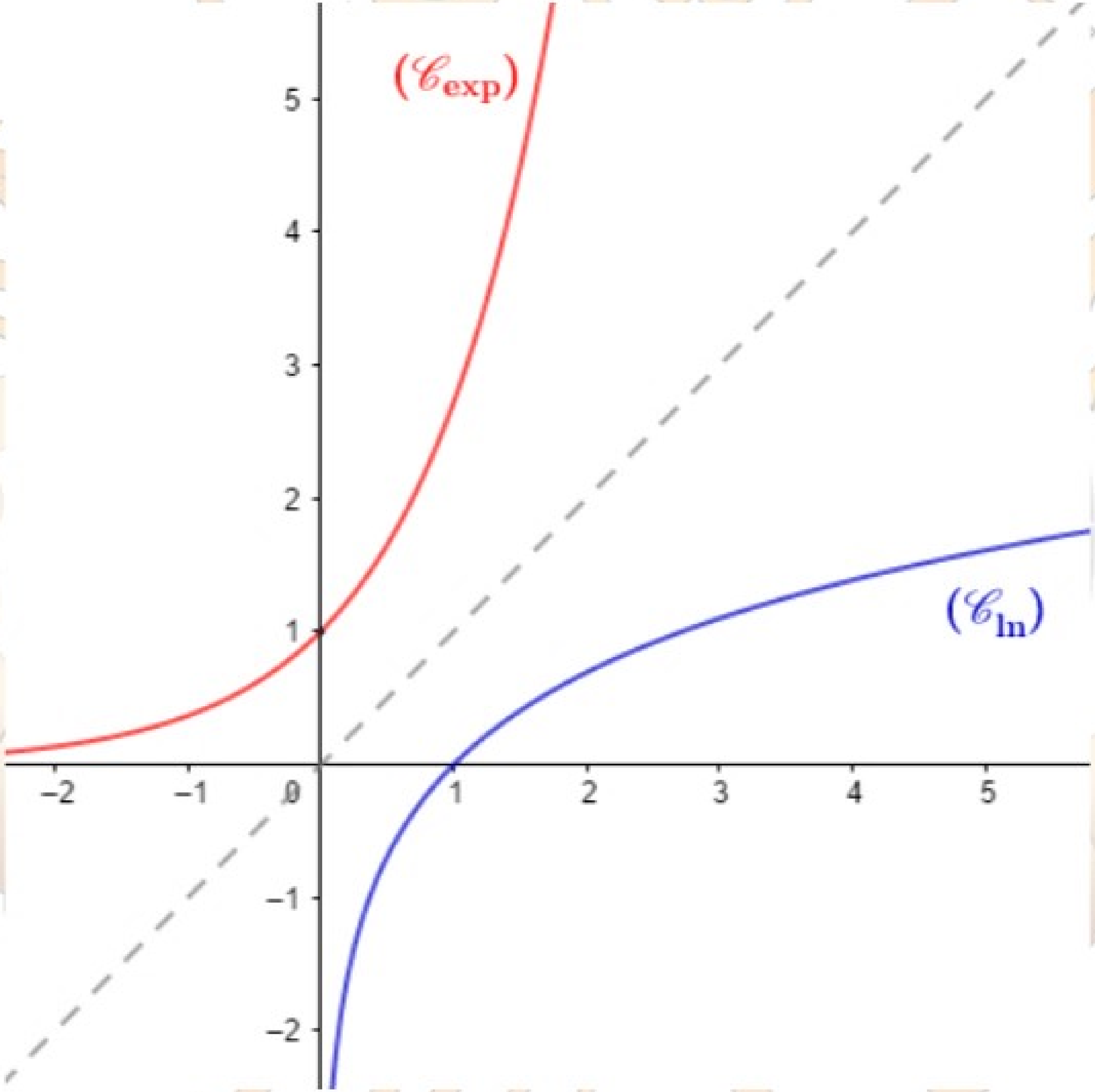
Applications

f La courbe de la fonction $\exp$

Soit $(\mathscr{C}_{\exp})$ la courbe représentative de la fonction $\exp$ dans un repère orthonormé .

- On a $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, alors la courbe $(\mathscr{C}_{\exp})$ admet l'axe des abscisses comme asymptote au voisinage de $-\infty$.
- On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, alors la courbe $(\mathscr{C}_{\exp})$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées .
- $\forall x \in \mathbb{R}\,;\ (e^x)'' = e^x > 0$, alors la courbe $(\mathscr{C}_{\exp})$ est convexe sur $\mathbb{R}$

La courbe de la fonction $\exp$



2 - Fonction exponentielle de base a

a Définition et propriétés

Définition

Soit a un réel strictement positif et différent de 1. La fonction exponentielle de base a est la fonction réciproque de la fonction $\log_a$. On la note $\exp_a$.

Remarques

- D'après la définition on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in]0;+\infty[)\ ;\ \left(\exp_a(x) = y \Leftrightarrow x = \log_a(y)\right)$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]0;+\infty[$ on a :

$$y = \exp_a(x) \Leftrightarrow x = \log_a(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(a)} \Leftrightarrow \ln(y) = x\ln(a) \Leftrightarrow y = e^{x\ln(a)}$$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}\ ;\quad \exp_a(x) = e^{x\ln(a)}$

Propriétés

Soit x et y deux réels et r un nombre rationnel $(r \in \mathbb{Q})$. Alors :

- $\exp_a(x+y) = \exp_a(x) \times \exp_a(y)$
- $\exp_a(x-y) = \dfrac{\exp_a(x)}{\exp_a(y)}$
- $\exp_a(rx) = \Big(\exp_a(x)\Big)^r$

b Une autre écriture de la fonction $\exp_a$

Soit a un réel strictement positif et différent de 1. On a :
$\exp_a(1) = e^{\ln(a)} = a$, alors $\forall r \in \mathbb{Q}$; $\exp_a(r) = \Big(\exp_a(1)\Big)^r = a^r$.
On prolonge cette écriture sur $\mathbb{R}$ en écrivant

$$\exp_a(x) = a^x \,;\ \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ En utilisant cette nouvelle notation on trouve les résultats suivants :

★ Soit a un réel strictement positif et différent de 1. Alors :

- $(\forall x \in \mathbb{R})\,(\forall y \in]0;+\infty[)\,;\ \left(y = a^x \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln(y)}{\ln(a)}\right)$
- $(\forall x \in \mathbb{R})\,;\ \log_a(a^x) = x$ et $(\forall x \in]0;+\infty[)\,;\ a^{\log_a(x)} = x$

★ Soit a et b deux réels strictement positifs. Alors, pour tout $(x;y) \in \mathbb{R}^2$

1. $a^x = e^{x\ln(a)}$
2. $a^{x+y} = a^x \times a^y$
3. $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
4. $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$
5. $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$
6. $\left(ab\right)^x = a^x \times b^x$
7. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

Application

1. Simplifier les nombres suivants : $A = 2^{\frac{-1}{\ln(2)}}$ et $B = 3^{\frac{1}{\ln(9)}}$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

   - E_1 : $4^{2x-1} = 3^x$
   - E_2 : $9^{2x+1} = \dfrac{36}{6^x}$
   - E_3 : $-5 \times 4^{x+1} + 2 \times 4^{-x} = 3$
   - E_4 : $10^{x+1} + 3 \times 10^{-x} = 13$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

   - I_1 : $3^{2x} \geqslant 5^{1-x}$
   - I_2 : $\dfrac{5^x}{1+5^x} < \dfrac{1}{3}$
   - I_3 : $4^x - 3 \times 2^x + 2 \geqslant 0$
   - I_4 : $3^{x+1} + 2 \times 3^{-x} < 7$

4. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} x + y = \ln(12) \\ 4^x = 3^y \end{cases}$; $\begin{cases} 10^x - 10^y = -3 \\ 10^x + 5 \times 10^y = 27 \end{cases}$

C Étude de la fonction $\exp_a$

Dérivabilité

La fonction $\exp_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$;
$\left(\exp_a(x)\right)' = \left(a^x\right)' = \left(\ln(a)\right)a^x$

Monotonie

★ Si $a > 1$ alors la fonction $x \mapsto a^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

$$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 ; \left(x < y \Leftrightarrow a^x < a^y\right)$$

★ Si $0 < a < 1$ alors la fonction $x \mapsto a^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$:

$$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 ; \left(x < y \Leftrightarrow a^x > a^y\right)$$

Limites

- Si $a > 1$ alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$
- Si $0 < a < 1$ alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$

Application 1

on considère la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4^x - 2^{x+1}$

1. Calculer les limites : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
2. Étudier les variations de la fonction f
3. Trouver l'équation de la tangente à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ de la fonction f au point d'abscisse 0
4. Construire la courbe $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthonormé

Application 2

Soit f la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x^x$

1. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$
2. Déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in]0;+\infty[$

Exercice 1 (Exam 2021 Normale)|| Fonctions numériques || 2 pts

Partager

1. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{2x} - 4e^{x} + 3 = 0$ $(0,5)$

   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $e^{2x} - 4e^{x} + 3 \leqslant 0$ $(0,5)$

   c. Calculer : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 4e^{x} + 3}{e^{2x} - 1}$ $(0,5)$

2. Montrer que l'équation : $e^{2x} + e^{x} + 4x = 0$ admet une solution dans l'intervalle $[-1;0]$ $(0,5)$

Problème || Exam 2021 Rattrapage || 8 points

Partager

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2 - xe^{-x+1}$
$(\mathscr{C}_f)$ est la courbe de f dans un repère orthonormé $\left(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}\right)$ (Unité :1cm)

1. Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et interpréter géométriquement le résultat $(0,5)$
2. a. Calculer : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ $(0,5)$
   b. Montrer que : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$ et interpréter géométriquement le résultat $(0,75)$
3. a. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$; $f'(x) = \left(x-1\right)e^{-x+1}$ $(0,75)$
   b. Dresser le tableau de variation de la fonction f $(0,5)$
4. a. Calculer $f''(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ $(0,5)$
   b. Montrer que $(\mathscr{C}_f)$ admet un point d'inflexion d'abscisse 2 $(0,5)$

5. Construire $(\mathscr{C}_f)$ dans le repère orthonormé $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$.
On prend : $f(2) = 1.25$ (1)

6. Déterminer la valeur minimale de la fonction f et en déduire que pour tout x de $\mathbb{R}$; $e^{x-1} \geqslant x$ $(0,5)$

7. a En utilisant une intégration par parties, calculer : $\displaystyle\int_0^2 xe^{-x}\,dx$

   b En déduire que : $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = 4 - e + 3e^{-1}$ $(0,5)$

8. Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty; 1]$

   a Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera $(0,5)$

   b Construire dans le même repère orthonormé $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$ la courbe de la fonction g^{-1} $(0,75)$

   c A partir de la courbe représentative de g^{-1} , déterminer :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g^{-1}(x)}{x}$$ $(0,25)$

Exercice 1 (2011 Rattrapage)|| Équations et inéquations || 2,5 pts

Partager

1. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 - 2x - 3 = 0$ $(0,5pt)$

   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^x - \dfrac{3}{e^x} - 2 = 0$ $(1pt)$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $e^{x+1} - e^{-x} \geqslant 0$ $(1pt)$

Problème (Exam 2009 Normale)|| Étude d'une fonction et suite || 9 pts

Partager

On considère la fonction f définie par : $f(x) = 2\ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right)$
Et soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé

Première Partie

1. Vérifier que : $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = \left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$ et que : $(\forall x \in \mathbb{R})\,;1 - \dfrac{2}{\sqrt{e^x}} + \dfrac{2}{e^x} > 0$ $(0,75pt)$

2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ln(4)$ et interpréter géométriquement ce résultat $(0,75)$

3

a. Montrer que : $f'(x) = \dfrac{2\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x}-1\right)}{\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1}$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et vérifier que : $f'(0)=0$ (1)

b. Étudier le signe de $\sqrt{e^x}-1$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire que la fonction f est croissante sur $[0;+\infty[$ est décroissante sur $]-\infty;0]$ (1)

4

a. Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(x) = 2x + 2\ln\left(1 - \dfrac{2}{\sqrt{e^x}} + \dfrac{2}{e^x}\right)$ $(0,25)$

b. Montrer que la droite (D) : $y = 2x$ est une asymptote à $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ $(0,5)$

5

a. Vérifier que : $e^x - 3\sqrt{e^x} + 2 = \left(\sqrt{e^x}-1\right)\left(\sqrt{e^x}-2\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ $(0,25)$

b. Étudier le signe de : $\sqrt{e^x}-2$ et $\left(\sqrt{e^x}-1\right)\left(\sqrt{e^x}-2\right)$ sur $\mathbb{R}$ $(0,5)$

c. En déduire que : $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 \leqslant \sqrt{e^x}$ pour tout x de $[0;\ln(4)]$ $(0,25)$

d. Montrer que : $f(x) \leqslant x$ pour tout x de $[0;\ln(4)]$ $(0,5)$

6 Construire $(\mathscr{C}_f)$. On admettre que $(\mathscr{C}_f)$ possède deux points d'inflexion dont l'abscisse de l'un est inférieur à -1 et l'abscisse de l'autre est supérieur à 2 , la détermination de ces deux points n'est pas demandé et on prendra : $\ln(4) \simeq 1,4$ $(0,75pt)$

Deuxième Partie Soit la suite numérique définie par :
$U_0 = 1$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1 Montrer que : $0 \leqslant U_n \leqslant \ln(4)$ pour tout n de $\mathbb{N}$ $(0,75)$

2 Montrer que la suite (U_n) est décroissante $(0,75)$

3 En déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite (1)

Exercice 6 (Exam 2009 Rattrapage)|| Étude d'une fonction || 6 pts

Partager

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\left(\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)$.

Et soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé

1
- a Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $f(x) = x\left(\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right)$ $(0,5)$
- b Montrer que la fonction f est paire et que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f(x) - x = \dfrac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ (1)
- c Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 0$ puis déduire que la droite (D) : $y = x$ est une asymptote oblique de $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ (1)

2. Montrer que la courbe $(\mathscr{C}_f)$ est située en-dessous de la droite (D) sur l'intervalle $[0;+\infty[$ $(0,5)$

3. a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = \dfrac{e^{4x} - 1 + 4xe^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$ et vérifier que $f'(0) = 0$ (1)
   b. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+$; $e^{4x} - 1 \geqslant 0$, puis en déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}^+$; $e^{4x} - 1 + 4xe^{2x} \geqslant 0$ $(0,5)$
   c. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^+$ $(0,5)$

4. Construire la courbe $(\mathscr{C}_f)$. (On admet que la courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet deux points d'inflexion que l'on cherche pas à déterminer) (1)

Exercice 5 (Exam 2012 Rattrapage)|| Étude d'une fonction || 8 pts

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

Et soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé

1. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(-x) = -f(x)$. En déduire que le point O est un centre de symétrie de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ $(0,75)$
2. Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(x) = x + 1 - \dfrac{2}{e^x + 1}$

   (il est conseillé d'utiliser cette expression de $f(x)$ pour traiter les questions suivantes) $(0,5)$
3. a. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f'(x) = 1 + \dfrac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$

   puis vérifier que : $f'(0) = \dfrac{3}{2}$ $(1,25)$

   b. Montrer que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ $(0,5)$

   c. Montrer que $y = \dfrac{3}{2}x$ est une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au point O $(0,5)$

4
- **a** Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $(0,5)$
- **b** Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (x+1) \right]$ et en déduire que la droite $(\mathscr{D}) : y = x + 1$ est une asymptote oblique de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ $(0,5)$
- **c** Montrer que la courbe $(\mathscr{C}_f)$ est située en-dessous de la droite $(\mathscr{D})$ $(0,25)$

5 Construire les droites $(\mathscr{D})$ et (T) et la courbe $(\mathscr{C}_f)$ $(1,5)$

6
- **a** Montrer que la fonction $H : x \mapsto x - \ln(e^x + 1)$ est une fonction primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{e^x + 1}$ sur $\mathbb{R}$ $(0,75)$
- **b** En déduire que : $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{1}{e^x + 1} \ln(x)\, dx = \ln(4) - \ln(3)$ $(0,5)$
- **c** Calculer en cm^2, l'aire du domaine plan délimité par la courbe $(\mathscr{C}_f)$, la droite $(\mathscr{D})$ et les droites d'équations cartésienne : $x = 0$ et $x = \ln(2)$ $(0,5)$

Problème (Exam 2007 Normale)|| Étude d'une fonction et suite || 9 pts

Partager

Première Partie Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^{-x} + x - 1$$

1. Calculer $g'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire que g est croissante sur $[0; +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty; 0]$ $(0,75)$
2. Montrer que $g(x) \geqslant 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ (remarquer que : $g(0) = 0$) puis en déduire que $e^{-x} + x \geqslant 1$ pour tout x de $\mathbb{R}$ $(0,5)$

Deuxième Partie On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x}{x + e^{-x}}$$

Et soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé

1. Montrer que l'ensemble de définition de la fonction f est $\mathbb{R}$ $(0,5)$

2. a. Montrer que : $f(x) = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{xe^x}}$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$ $(0,25)$

   b. Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ puis interpréter géométriquement ces deux résultats $(1,5)$

3. a. Montrer que : $f'(x) = \dfrac{(x+1)e^{-x}}{(x+e^{-x})^2}$ pour tout x de $\mathbb{R}$ $(0,75)$

   b. Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f $(0,5)$

4. a. Écrire une équation de la tangente à $(\mathscr{C}_f)$ au point O origine du repère $(0,5)$

   b. Vérifier que : $x - f(x) = \dfrac{xg(x)}{g(x)+1}$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis étudier le signe de $x - f(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ $(0,75)$

   c. En déduire la position relative de $(\mathscr{C}_f)$ et $(\Delta) : y = x$ $(0,25)$

5. Construire (Δ) et $(\mathscr{C}_f)$ dans le repère $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$.
   On prendra $\dfrac{1}{1-e} \simeq -0,6$ $\quad(1)$

Troisième Partie Soit (U_n) la suite numérique définie par :

$$U_0 = 1 \text{ et } U_{n+1} = f(U_n) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}$$

1. Montrer que : $0 \leqslant U_n \leqslant 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$ $\quad(0,5)$
2. Montrer que la suite (U_n) est décroissante $\quad(0,5)$
3. En déduire que (U_n) est convergente et déterminer sa limite $\quad(0,75)$

Problème (Exam 2019 Rattrapage)|| Fonction , suite et intégrale || 11 pts

Partager

Première Partie Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$f(x) = 2 + 8\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4}$ et $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$ (Unité : 1cm)

1. a Vérifier que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$ et interpréter le résultat géométriquement $(0,5)$

   b Vérifier que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ et interpréter le résultat géométriquement $(0,5)$

2. a Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ $(0,5)$

   b Montrer que la courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$ $(0,5)$

3 a Montrer que : $f'(x) = \dfrac{8(x-2)\left(x^2-2x+4\right)e^{x-4}}{x^3}$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$ $(0,75)$

b Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}$; $x^2-2x+4>0$ $(0,25)$

c Montrer que f est strictement décroissante sur $]0;2[$ et strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty;0[$ et $]2;+\infty[$ $(0,75)$

d Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$ $(0,5)$

4 Construire la courbe $(\mathscr{C}_f)$ dans le repère $\left(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j}\right)$ (1)

5 a Vérifier que la fonction $H : x \mapsto \dfrac{1}{x}e^{x-4}$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto \dfrac{x-1}{x^2}e^{x-4}$ sur $[2;4]$ $(0,5)$

b Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}^*$; $f(x) = 2 + 8e^{x-4} - 32\dfrac{x-1}{x^2}e^{x-4}$ $(0,25)$

c Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_2^4 e^{x-4}\,dx$ $(0,5)$

d Calculer en cm^2, l'aire du domaine plan délimité par la courbe $(\mathscr{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations cartésienne : $x=2$ et $x=4$ $(0,75)$

Problème (Exam 2019 Rattrapage)|| Fonction , suite et intégrale || 11 pts

Partager

Deuxième Partie On considère la fonction numérique g définie sur $[2;4]$ par : $g(x) = 8(x-2)e^{x-4} - x^2$

1.
   a. Calculer $g(4)$ $(0,25)$
   b. Vérifier que pour tout x de l'intervalle $[2;4]$; $g(x) = -(x-4)^2e^{x-4} + x^2\left(e^{x-4} - 1\right)$ $(0,5)$
   c. Vérifier que pour tout x de l'intervalle $[2;4]$; $e^{x-4} - 1 \leqslant 0$ puis en déduire que pour tout x de l'intervalle $[2;4]$; $g(x) \leqslant 0$ $(0,5)$
2.
   a. Vérifier que pour tout x de l'intervalle $[2;4]$; $f(x) - x = \left(\dfrac{x-2}{x^2}\right) g(x)$ $(0,5)$
   b. En déduire que pour tout x de l'intervalle $[2;4]$; $f(x) \leqslant x$ $(0,25)$

3. Soit (U_n) la suite numérique définie par :
$U_0 = 3$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$
   a. Montrer que : $2 \leqslant U_n \leqslant 4$ pour tout n de $\mathbb{N}$ $(0,5)$
   b. Déterminer la monotonie de la suite (U_n) et en déduire qu'elle est convergente $(0,5)$
   c. Calculer la limite de la suite (U_n) $(0,75)$

Problème (Exam 2020 Rattrapage)|| Fonction et suite || 9 pts

Partager

Première Partie Soit g la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = e^{1-x} + \frac{1}{x} - 2$$

1. Montrer que : $g'(x) < 0$, pour tout x de $]0;+\infty[$ $(0,5)$
2. Déduire le tableau de signe de g sur l'intervalle $]0;+\infty[$
   Remarquer que : $g(1) = 0$ $(0,5)$

Deuxième Partie On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = (1-x)e^{1-x} - x^2 + 5x - 3 - 2\ln(x)$$

et $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (Unité : 2cm)

1. Montrer que : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ puis interpréter le résultat géométriquement $(0,5)$
2. a. Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ $(0,5)$

   b. Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ puis interpréter le résultat géométriquement $(0,75)$
3. a. Montrer que pour tout x de $]0;+\infty[$; $f'(x) = (x-2)g(x)$ (1)

   b. Montrer que la fonction f est décroissante sur $]0;1]$ et sur $[2;+\infty[$ et croissante sur $[1;2]$ $(0,75)$

   c. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$
   On admet que $f(2) \simeq 1,25$ $(0,25)$
4. Sachant que $f(3) \simeq 0,5$ et $f(4) \simeq -1,9$ montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]3;4[$ $(0,5)$
5. Construire $(\mathscr{C}_f)$ (1)

Troisième Partie On pose $h(x) = f(x) - x$ pour tout x de $[1;2]$

1 a A partir du tableau de variations de la fonction h

x	1 $\qquad\qquad\qquad$ 2
$h(x)$	0 $\searrow$ $h(2)$

Montrer que $f(x) \leqslant x$ pour tout x de $[1;2]$ $(0,5)$

b Montrer que 1 est l'unique solution de $f(x) = x$ sur $[1;2]$ $(0,25)$

2 Soit (U_n) la suite numérique définie par :
$U_0 = 2$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

a Montrer que : $1 \leqslant U_n \leqslant 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$ $(0,75)$

b Montrer que la suite (U_n) est décroissante $(0,5)$

c En déduire que la suite (U_n) est convergente
et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ $(0,75)$