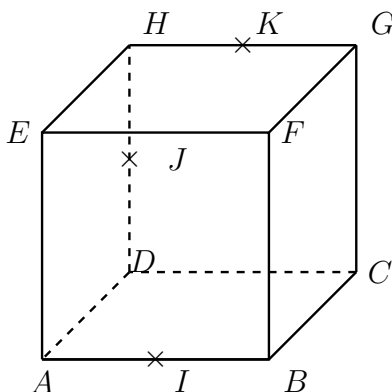


MATHÉMATIQUES**SÉRIE C**

Cette épreuve comporte deux pages numérotées 1/2 et 2/2.

EXERCICE 1

$ABCDEFGH$ désigne un cube d'arête 1. Le point I est le milieu du segment $[AB]$, J celui de $[DH]$ et K celui de $[HG]$. L'espace est rapporté au repère $(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.



- 1- Déterminer les coordonnées des sommets du cube et des points I , J et K dans ce repère.
- 2- a) Démontrer que le vecteur \vec{CE} est normal au plan (IJK) .
b) Démontrer que la droite (BD) est parallèle au plan (IJK) .
c) Soit M un point de la droite (CE) Quelle est la position de M sur la droite (CE) pour laquelle le plan (BDM) est parallèle au plan (IJK) .
- 3- Dans la suite, on prend $M \left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3} \right)$. un point du segment $[AG]$ et t le réel de l'intervalle
a) Déterminer une équation paramétrique de la droite (CE) .
b) Déterminer une équation cartésienne du plan (IJK) .
c) Déterminer les coordonnées du point P d'intersection (CE) et de (IJK) .
- 4- Déterminer la distance entre les plan (IJK) et (BDM) .

EXERCICE 2

Le plan complexe est muni un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) . On donne les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$; $z_B = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}$ et $z_C = 1$.

On considère l'application f qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = z^2 + 1$.

- 1- a) Déterminer par f les images des points A, B et O.
b) Déterminer les points invariants par f .
- 2- Démontrer que tout point du plan à l'exception d'un seul que l'on précisera admet par f deux antécédents symétriques par rapport à O.

- 3- Soit N un point du plan distinct de C d'antécédents par f les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2 .
- Démontrer que : $OM_1^2 = OM_2^2 = CN$.
 - Démontrer que : $\arg(z_1) = \frac{\alpha}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ et $\arg(z_2) = \frac{\alpha}{2} + \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ où α est une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{CN})$.
- 4- On considère le point E d'affixe $1 - 4i$.
En utilisant la question 3), construire les antécédents Q_1 et Q_2 par f du point E . *On laissera les traits justificatifs de la construction.*
- 5- (D) désigne la droite d'équation $y = 2$.
- Démontrer que l'image de (D) par f est la courbe (\mathcal{C}) d'équation : $y^2 = 16(x + 3)$.
 - Préciser la nature et les éléments caractéristiques de cette courbe : axe focal, sommet, foyer, directrice dans le repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) .

PROBLÈME

Partie A

Soit la fonction définie sur $]0, +\infty[\setminus \{1\}$ par : $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\ln x}$. On désigne par (\mathcal{C}) la courbe de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition puis interpréter graphiquement les résultats.
- On admet que f est dérivable sur $]0, +\infty[\setminus \{1\}$.
Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[\setminus \{1\}, f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x(\ln x)^2}$.
 - Dresser le tableau de variation de f .
- Soit h la restriction de f à $]0, 1[$.
 - Montrer que h réalise une bijection de $]0, 1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
 - Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet dans $]0, 1[$ une unique solution α et que $0,5 \prec \alpha \prec 0,6$.
 - En déduire que (\mathcal{C}) coupe l'axe des abscisses en un seul point que l'on précisera.
- Tracer (\mathcal{C}) .
- Tracer dans le même repère la courbe représentative de h^{-1} .
- Montrer que $h'(\alpha) = -\frac{\alpha + 1}{\alpha^3}$.
 - Montrer que h^{-1} est dérivable en 0 et exprimer $(h^{-1})'(0)$ en fonction de α .

Partie B

Soit g la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $g(x) = 2f(x^2)$. On désigne (\mathcal{C}_g) par la courbe de g dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- Vérifier que pour tout $x \in]1, +\infty[$, $f(x) - g(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}$.
- En déduire la position relative de (\mathcal{C}) et (\mathcal{C}_g) sur $x \in]1, +\infty[$.
- Soit $x \in [2, +\infty[$, on désigne par M et N les points respectifs de (\mathcal{C}) et (\mathcal{C}_g) d'abscisse x .
Pour quelle valeur de x , la distance NM est-elle maximale ?