



Le barycentre

Le **barycentre** de n points pondérés dans un cours de maths en 1ère S où nous aborderons la définition de vecteurs du plan et du barycentre de n points. Nous verrons, dans cette leçon en première S, les propriétés des vecteurs puis la position du barycentre ainsi que l'associativité.

I. Rappels :

1) Vecteurs du plan :

Les points A et B étant distincts, le vecteur \overrightarrow{AB} est caractérisé par :

- sa **direction** (celle de la droite (AB))
- son **sens** (de A vers B)
- sa **longueur** ou sa **norme** (AB ou $\|\overrightarrow{AB}\|$)

Vecteurs égaux :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} ont même direction, même sens et même norme, ou encore que le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.

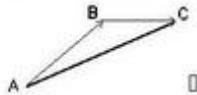
Si A et B sont confondus, \overrightarrow{AA} est le vecteur nul noté $\vec{0}$. Sa norme est 0 .

Pour tout vecteur \vec{u} et tout point O , il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

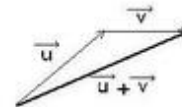
2) Addition vectorielle :

a) Relation de Chasles :

b)

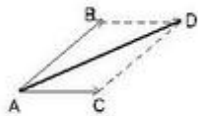


Quels que soient les points A , B et C , on a :

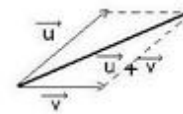
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$


c) Règle du parallélogramme :

d)



Les points A , B et C étant donnés, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$
 \Leftrightarrow
 $ABDC$ est un parallélogramme.



3) Produit d'un vecteur par un réel :

\vec{u} un vecteur et k un réel. Le produit du vecteur \vec{u} par le réel k , est le vecteur noté $k\vec{u}$ tel que :

- si $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$, $k\vec{u} = \vec{0}$
- dans les autres cas, $k\vec{u}$ est
 - de même direction que \vec{u}
 - de même sens que \vec{u} si $k > 0$ et de sens contraire si $k < 0$.
 - De norme égale à $|k| \times \|\vec{u}\|$.

Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} , et pour tous réels k et k' , on a :

$$\begin{aligned}
 k(\vec{u} + \vec{v}) &= k\vec{u} + k\vec{v} \\
 (k + k')\vec{u} &= k\vec{u} + k'\vec{u} \\
 k(k'\vec{u}) &= (kk')\vec{u} = kk'\vec{u}
 \end{aligned}$$

4) Vecteurs colinéaires :

Dire que deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} non nuls sont colinéaires signifie qu'il existe un réel k non nul, tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Remarques :

- deux vecteurs colinéaires ont la même direction.
- par convention, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

5) Repère et coordonnées :

Dire que le point M a pour coordonnées $(x; y)$ dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) équivaut à dire que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

On note : $M(x; y)$, x est l'abscisse, y est l'ordonnée.

Dire que le vecteur \vec{u} a pour coordonnées $(x; y)$ dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , signifie que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

On note : $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ des vecteurs

$$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$

Le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$

Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si et seulement si $xy' - x'y = 0$.

Si A et B sont deux points de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ alors :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \quad \|AB\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

II. Barycentre de deux points :

1) Définition :

Soient A et B deux points et a et b deux réels dont la somme n'est pas nulle.
Alors il existe un unique point G du plan tel que $a \overrightarrow{GA} + b \overrightarrow{GB} = \vec{0}$.
Ce point G est le barycentre des points A et B affectés des coefficients a et b.
On dit que G est le barycentre du système de points (A ; a) et (B ; b).

2) Position du barycentre :

- $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b} \overrightarrow{AB}$; les vecteurs \overrightarrow{AG} et \overrightarrow{AB} sont colinéaires ; Le point G appartient à la droite (AB).
- Si a = b, on dit que G est l'isobarycentre de A et B, $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$, G est le milieu de [AB].

3) Propriétés :

- Si G est le barycentre de (A ; a) et (B ; b), alors pour tout réel $k \neq 0$, alors G est le barycentre de (A ; ka) et (B ; kb).
Dem :
- Si G est le barycentre de (A ; a) et (B ; b), avec $a + b \neq 0$, alors pour tout point M du plan, on a : $a \overrightarrow{MA} + b \overrightarrow{MB} = (a + b) \overrightarrow{MG}$.
Dem : $a \overrightarrow{MA} + b \overrightarrow{MB} = a(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + b(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) = (a + b) \overrightarrow{MG} + a \overrightarrow{GA} + b \overrightarrow{GB}$.
Or si G est le barycentre de (A ; a) et (B ; b), $a \overrightarrow{GA} + b \overrightarrow{GB} = \vec{0}$, d'où l'égalité :
 $a \overrightarrow{MA} + b \overrightarrow{MB} = (a + b) \overrightarrow{MG}$.

4) Coordonnées du barycentre :

Dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , si $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ alors les coordonnées du barycentre G du système (A ; a) et (B ; b) sont $x_G = \frac{ax_A + bx_B}{a+b}$ et $y_G = \frac{ay_A + by_B}{a+b}$.

Preuve :

G barycentre de (A ; a) et (B ; b),
alors pour tout M du plan on a : $a \overrightarrow{MA} + b \overrightarrow{MB} = (a + b) \overrightarrow{MG}$
Si $M = O$, on obtient $(a + b) \overrightarrow{OG} = a \overrightarrow{OA} + b \overrightarrow{OB}$
Et $\overrightarrow{OG} = \frac{a}{a+b} \overrightarrow{OA} + \frac{b}{a+b} \overrightarrow{OB}$.

.....

Exemple :

G barycentre de (A ; 1) et (B ; -2).
A (2 ; 4) et B (5 ; -1)
..... G (8 ; -6)

III. Barycentre de 3 points pondérés :

1) Définition :

Soient A, B et C trois points distincts et a, b et c trois réels dont la somme n'est pas nulle. Alors il existe un unique point G du plan tel que $a \overrightarrow{GA} + b \overrightarrow{GB} + c \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
 G est le barycentre des points pondérés $(A ; a)$, $(B ; b)$ et $(C ; c)$.

Exemple :

Soit G le barycentre de $(A ; 1)$, $(B ; 2)$ et $(C ; 3)$.

G existe car $1+2+3 = 6 \neq 0$.

$$1 \overrightarrow{GA} + 2 \overrightarrow{GB} + 3 \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$1 \overrightarrow{GA} + 2 \overrightarrow{GA} + 2 \overrightarrow{AB} + 3 \overrightarrow{GA} + 3 \overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$6 \overrightarrow{GA} + 2 \overrightarrow{AB} + 3 \overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$6 \overrightarrow{GA} = -2 \overrightarrow{AB} - 3 \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$$

Conséquences :

- Si A, B et C ne sont pas alignés le point G appartient au plan (ABC) .
- Le barycentre ne change pas si on multiplie les 3 coefficients par un réel $k \neq 0$.
- Si $a = b = c$, G est le barycentre de $(A ; 1)$, $(B ; 1)$ et $(C ; 1)$, G est l'isobarycentre de A, B et C . G est aussi le centre de gravité du triangle ABC .

2) Propriétés :

Si G est le barycentre de $(A ; a)$, $(B ; b)$ et $(C ; c)$, avec $a + b + c \neq 0$, alors pour tout point M du plan, on a : $a \overrightarrow{MA} + b \overrightarrow{MB} + c \overrightarrow{MC} = (a + b + c) \overrightarrow{MG}$.

Dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) si $A(x_A ; y_A)$, $B(x_B ; y_B)$ et $C(x_C ; y_C)$ alors les coordonnées du barycentre G du système $(A ; a)$, $(B ; b)$ et $(C ; c)$ sont $x_G = \frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a + b + c}$ et

$$y_G = \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a + b + c}.$$

3) Associativité :

Si G est le barycentre de $(A ; a)$, $(B ; b)$ et $(C ; c)$, avec $a + b + c \neq 0$ et si H est le barycentre de $(A ; a)$ et $(B ; b)$ avec $a + b \neq 0$, alors G est le barycentre de $(H ; a+b)$ et $(C ; c)$.

Preuve :

De $a \overrightarrow{GA} + b \overrightarrow{GB} + c \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, on déduit $(a+b) \overrightarrow{GH} + a \overrightarrow{HA} + b \overrightarrow{HB} + c \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Or H est le barycentre de $(A ; a)$ et $(B ; b)$

donc $a \overrightarrow{HA} + b \overrightarrow{HB} = \vec{0}$ et $(a+b) \overrightarrow{GH} + c \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Donc G est le barycentre de $(H ; a+b)$ et $(C ; c)$.

Exemple :

Construire G le barycentre des points pondérés $(A ; 1)$, $(B ; 2)$ et $(C ; 3)$.

On appelle H le barycentre de $(A ; 1)$ et $(B ; 2)$.

$$\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$$

G est le barycentre de $(H ; 3)$ et $(C ; 3)$.

G est le milieu de $[HC]$.