Séquence 4

La fonction exponentielle

Sommaire

Dans cette séquence, on introduit une nouvelle fonction : la fonction exponentielle. Cette fonction est fondamentale dans beaucoup de domaines des mathématiques. En Terminale S, nous la rencontrerons dans les chapitres sur les fonctions, mais aussi en probabilité et en statistiques.

1 Pré-requis

A Calcul sur les puissances

Rappelons les propriétés des puissances, vues au collège.

Pour tout réel a et tout entier naturel n, on a :

$$a^n = \underbrace{a \times a ... \times a}_{n \text{ fois}} ;$$

$$a^0 = 1 \text{ pour } a \neq 0 ;$$

$$a^1 = a ;$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ pour } a \neq 0 ;$$

$$a^n \times a^p = a^{n+p} ;$$

$$\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p} \text{ pour } a \neq 0 ;$$

$$\left(a^n\right)^p = a^{np}.$$

B Fonction

Dans cette séquence, plusieurs notions sur les fonctions doivent être connues.

Les propriétés essentielles sont rappelées ici.

1. Limites

- Il faut connaître les limites des fonctions de référence (fonctions carré, cube, racine, et leurs inverses) aux bornes de leurs ensembles de définition.
- Les règles opératoires seront utilisées et il faut savoir reconnaître les quatre cas de formes indéterminées (dans ces rappels, la notation λ désigne un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$, mais λ doit avoir la même signification pour chacune des deux limites qui interviennent dans chaque cas) :
  - pour la fonction différence $f - g$ si $\lim\limits_{x \to \lambda} f(x) = \lim\limits_{x \to \lambda} g(x) = +\infty$ (de même si on remplace $+\infty$ par $-\infty$) ;

▶ pour la fonction produit $f \times g$ si $\lim\limits_{x \to \lambda} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to \lambda} g(x) = +\infty$ (de même si on remplace $+\infty$ par $-\infty$) ;

▶ pour la fonction quotient $\dfrac{f}{g}$ si $\lim\limits_{x \to \lambda} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to \lambda} g(x) = +\infty$ (de même si on remplace $+\infty$ par $-\infty$) ;

▶ et pour une autre fonction quotient $\dfrac{f}{g}$ si $\lim\limits_{x \to \lambda} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to \lambda} g(x) = 0$.

- Composition

Propriété

Soit f la fonction définie sur un intervalle I comme composée des fonctions g et h, c'est à dire que pour tout $x \in \mathrm{I}$, on a $f(x) = h \circ g(x) = h(g(x))$.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, "g"] \arrow[rr, bend right] & g(x) = X \arrow[r, mapsto, "h"] & f(x) = h(X) = h(g(x)) \end{tikzcd}$$

$$f = g \circ h$$

Si $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = \beta$ et si $\lim\limits_{X \to \beta} h(X) = L$, alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = L$ (dans cet énoncé α, β et L désignent des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$).

- **Limites et inégalités : théorèmes de comparaison et compatibilité avec l'ordre**

Si, pour x au voisinage de α où α désigne un réel a ou $+\infty$ ou $-\infty$…	… et si …	… alors …
$f(x) \geq u(x)$	$\lim\limits_{x \to \alpha} u(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = +\infty$
$f(x) \leq v(x)$	$\lim\limits_{x \to \alpha} v(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = -\infty$
$u(x) \leq f(x) \leq v(x)$	$\lim\limits_{x \to \alpha} u(x) = L$ et $\lim\limits_{x \to \alpha} v(x) = L$	$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = L$ (théorème des gendarmes)
$\lvert f(x) - L \rvert \leq u(x)$	$\lim\limits_{x \to \alpha} u(x) = 0$	$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = L$
$f(x) < g(x)$ ou $f(x) \leq g(x)$	$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = L$ et $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = L'$	$L \leq L'$ (compatibilité avec l'ordre)

2. Continuité

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant un réel a.

On dit que f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout réel de I.

Théorème

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction définie et *continue* sur un intervalle $[a;b]$ où a et b sont deux réels tels que $a < b$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[a;b]$.

▸ **Conséquence**

Corollaire

du théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction définie, *continue et strictement monotone* sur un intervalle $[a;b]$ où a et b sont deux réels tels que $a < b$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet *une unique solution* sur l'intervalle $[a;b]$.

- On admet le prolongement du théorème et de son corollaire au cas où f est définie sur un intervalle ouvert $]a;b[$ ou semi-ouvert $[a;b[$ ou $]a;b]$ avec a et b finis ou infinis. Dans ce cas, l'énoncé des théorèmes est à adapter en considérant les limites en a ou en b au lieu des images de ces réels.
- Afin de facilité la rédaction lors de l'utilisation du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on convient que les flèches obliques utilisées dans les tableaux de variations, traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

▸▸

3. Dérivation

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant un réel a.

On dit que f est dérivable en a si et seulement si $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est finie.

Dans ce cas, on note $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$.

Le réel $f'(a)$ ainsi défini est appelé nombre dérivé de f en a.

Il faut connaître les liens entre le sens de variation d'une fonction sur un intervalle et le signe de sa dérivée.

Propriété

Si une fonction est dérivable sur un intervalle I, alors elle est continue sur cet intervalle.

Propriété

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et deux nombres réels a et b.

Soit la fonction g, définie par $g(x)=f(ax+b)$ sur un intervalle J tel que, pour tout x de J, $ax+b$ est dans I. La fonction g est dérivable sur J et

$$g'(x)=af'(ax+b).$$

En particulier pour $a=-1$ et $b=0$: $g(x)=f(-x)$ et $g'(x)=-f'(-x)$.

Et pour $a=1$: $g(x)=f(x+b)$ et $g'(x)=f'(x+b)$.

2 Définition de la fonction exponentielle et propriétés algébriques

A Objectifs du chapitre

On définit ici la fonction exponentielle, une des fonctions essentielles des mathématiques.

On étudie ses propriétés algébriques, c'est-à-dire les propriétés de la fonction exponentielle lorsqu'on utilise les opérations $+$, $-$, $\times$, $\div$.

B Pour débuter

■ **Activité 1** *La désintégration radioactive*

La désintégration des noyaux composant un corps radioactif est aléatoire mais est régie au niveau global par la loi suivante : le taux de variations du nombre N de noyaux en fonction du temps est proportionnel au nombre de noyaux.

On obtient donc :

$\dfrac{\Delta N}{\Delta t} = -\lambda N$ où λ est un nombre positif qui dépend de l'élément radioactif considéré (le taux d'accroissement est bien sûr négatif puisque N diminue).

N est une fonction qui dépend du temps.
Le nombre de noyaux est une fonction qui prend seulement des valeurs entières, mais dans la pratique ce nombre est très grand et on peut l'approcher par une fonction continue et même dérivable sur un intervalle I.

En prenant la limite de ce quotient quand t tend vers 0 on trouve alors : $N'(t) = -\lambda N(t)$ sur I, soit $N' = -\lambda N$, ou encore $\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda N$ comme on l'écrit aussi en Sciences Physiques.

Cette relation fait intervenir la fonction N et sa fonction dérivée, on dit qu'il s'agit d'une équation différentielle.

On cherche à déterminer $N(t)$ en fonction de t, connaissant λ et le nombre initial $N(0)$ de noyaux.

Parmi les fonctions usuelles (polynômiales, rationnelles, trigonométriques, racine carrée), aucune ne vérifie une relation du type : $f' = -\lambda f$. Il est donc indispensable pour ce problème d'utiliser des nouvelles fonctions, les solutions des équations différentielles de la forme :

$$\begin{cases} f' = kf \\ f(0) = y_0 \end{cases} \quad \text{où } k \text{ est un réel donné.}$$

On suppose qu'il existe une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0)=1$ et $f'=f$ (c'est-à-dire $f'(t)=f(t)$ pour tout réel t).

1. En utilisant la fonction f, déterminer une fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $g'=3g$ et $g(0)=1$.

2. De même, déterminer une fonction h définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $h'=3h$ et $h(0)=0{,}2$.

3. En supposant que le nombre initial de noyaux est égal à 10^6 et que $\lambda=-0{,}003$ et en utilisant la fonction f, trouver une fonction N définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $N'=-0{,}003N$ et $N(0)=10^6$.

C Cours

1. Définition

Théorème 1

Il existe une et une seule fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $f'=f$ et $f(0)=1$.

L'existence d'une telle fonction est admise.

Démontrons qu'il existe une seule fonction vérifiant ces conditions.

- Pour cela, on montre d'abord qu'une telle fonction ne peut pas s'annuler.

Soit donc f une fonction telle que $f'=f$ et $f(0)=1$.

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=f(x)\times f(-x)$. La fonction h est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc h est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x)\times f(-x)+f(x)\times\left(-f'(-x)\right) \\ &= f'(x)\times f(-x)-f(x)\times f'(-x). \end{aligned}$$

Comme $f'=f$ on obtient : $h'(x)=f(x)\times f(-x)-f(x)\times f(-x)=0$.

La dérivée de la fonction h est nulle pour tout réel x donc la fonction h est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.

Pour déterminer sa valeur, on utilise la condition $f(0)=1$ ce qui donne :

Pour tout réel x, $h(x)=h(0)=f(0)\times f(-0)=1$.

Donc, pour tout réel x, le produit $f(x)\times f(-x)$ est égal à 1, il ne s'annule pas donc $f(x)$ n'est jamais nul.

- Pour montrer l'unicité de la fonction f nous allons considérer deux fonctions, f et g, vérifiant les conditions $f' = f$ et $f(0) = 1$, et nous allons montrer que ces deux fonctions sont nécessairement égales.

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction k en posant $k(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$ (ce qui est possible puisque la fonction f ne s'annule pas). La fonction k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$k' = \frac{g'f - gf'}{f^2} = \frac{gf - gf}{f^2} = 0 \text{ car } f' = f \text{ et } g' = g.$$

La fonction k est donc constante sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, on a :

$$k(x) = k(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = \frac{1}{1} = 1.$$

Donc, pour tout réel x, $\dfrac{g(x)}{f(x)} = 1$, soit $f(x) = g(x)$. Les deux fonctions f et g sont donc égales ce qui prouve l'unicité de la fonction du théorème.

Définition 1

L'unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$ est appelée fonction exponentielle. On la note exp.

Propriété 1

$\exp' = \exp$

$\exp(0) = 1$

Pour tout réel x, $\exp(x) \neq 0$.

2. Propriétés algébriques de la fonction exponentielle

Théorème 2

Pour tous réels a et b,

$\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$.

Démonstration

Le réel b étant fixé, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f en posant $f(x) = \dfrac{\exp(x+b)}{\exp(b)}$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on obtient :

$$f'(x) = \frac{1 \times \exp'(x+b)}{\exp(b)} = \frac{\exp(x+b)}{\exp(b)} = f(x) \ (b \text{ est fixe et } \exp' = \exp).$$

Comme $f(0) = \dfrac{\exp(0+b)}{\exp(b)} = 1$, la fonction f vérifie les deux conditions de théorème 1, il s'agit donc de la fonction exponentielle.

On en déduit que pour tout réel x : $\exp(x) = \dfrac{\exp(x+b)}{\exp(b)}$

d'où $\exp(x+b) = \exp(x) \times \exp(b)$, et en posant $x = a$:

$$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b).$$

▶ Exemple Pour tout réel a, $\exp(a+a) = \exp(a) \times \exp(a)$ d'où $\exp(2a) = \left(\exp(a)\right)^2$.

Remarque La propriété énoncée dans le théorème précédent est aussi appelée « relation fonctionnelle caractéristique ». On peut montrer, en effet, que la fonction exponentielle est la seule fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tous réel a et b,

$$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b) \text{ et } \exp'(0) = 1.$$

On retiendra que la fonction exponentielle transforme une somme en produit, que l'exponentielle d'une somme est égale à un produit d'exponentielles.

Dans la démonstration de l'unicité du théorème 1, on a prouvé que, pour tout réel x, on a $f(x) \times f(-x) = 1$ ce qui permet d'obtenir la propriété suivante.

Propriété 2

Pour tout réel x, $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.

En utilisant à la fois les propriétés 2 et 3, on trouve la propriété 4 :

Propriété 3

Pour tous réels a et b, $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$.

Démonstration

On écrit $a - b = a + (-b)$ et on a : $\exp\left(a+(-b)\right) = \exp(a) \times \exp(-b)$

$$= \exp(a) \times \frac{1}{\exp(b)} = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}.$$

Propriété 4

Pour tout réel a et pour tout entier n de $\mathbb{Z}$: $\exp(na) = \left(\exp(a)\right)^n$.

■ *Démonstration*

Soit a un nombre réel et n un entier naturel, on veut montrer que :

$$\exp(na) = \left(\exp(a)\right)^n.$$

On sait que ceci est vrai pour $n=0$ $\left(\exp(0\times a)=1=\left(\exp(a)\right)^0\right)$, pour $n=1$ $\left(\exp(a)=\left(\exp(a)\right)^1\right)$.

Montrons par récurrence que l'égalité « $\exp(na)=\left(\exp(a)\right)^n$ » est vraie pour tout entier n, $n\geq 1$.

- **Initialisation :** l'égalité est vraie pour $n=1$.
- **Hérédité :** soit k un entier naturel, $k\geq 1$, pour lequel on suppose que $\exp(ka)=\left(\exp(a)\right)^k$. On a alors :

  $\exp\left((k+1)a\right)=\exp(ka+a)=\exp(ka)\times\exp(a)$ en appliquant le théorème avec $b=ka$, puis, en utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient : $\exp\left((k+1)a\right)=\left((\exp(a)\right)^k\times\exp(a)=\left((\exp(a)\right)^{k+1}$. La proposition est donc héréditaire.
- **Conclusion :** pour tout $n\geq 1$, $\exp(na)=\left(\exp(a)\right)^n$.

  Finalement, pour tout entier n de $\mathbb{N}$: $\exp(na)=\left(\exp(a)\right)^n$.

  Si n est un entier naturel, on a aussi :

  $$\exp(-na)=\frac{1}{\exp(na)}=\frac{1}{\left(\exp(a)\right)^n}=\left(\exp(a)\right)^{-n}.$$

  La proposition est donc prouvée pour tout n de $\mathbb{Z}$.

À savoir

Pour tous réel a et b, pour tout entier n :

$$\exp(a+b)=\exp(a)\times\exp(b)$$

$$\exp(-a)=\frac{1}{\exp(a)}$$

$$\exp(a-b)=\frac{\exp(a)}{\exp(b)}$$

$$\exp(na)=\left(\exp(a)\right)^n.$$

Ces propriétés vous rappellent probablement des propriétés familières des exposants. On va confirmer cela et même pouvoir en déduire une nouvelle notation très commode.

2. Nouvelle notation

Quand on applique la propriété 4 avec $a=1$ on obtient $\exp(n\times 1)=\left(\exp(1)\right)^n$ soit $\exp(n)=\left(\exp(1)\right)^n$.

Le nombre $\exp(1)$ est traditionnellement noté e. Ce nombre joue un rôle très important dans les mathématiques (comme un autre nombre célèbre : π).

Valeur approchée : $e \approx 2{,}718$.

Pour tout entier n, on a donc $\exp(n) = e^n$.

On étend cette écriture à des exposants qui ne sont pas entiers en posant :

$$\exp(x) = e^x \text{ pour tout nombre réel } x.$$

Il faut bien comprendre que, si n est un entier naturel $e^n = \underbrace{e \times e \times \ldots \times e}_{n \text{ fois}}$ et $e^{-n} = \underbrace{\frac{1}{e} \times \frac{1}{e} \times \ldots \times \frac{1}{e}}_{n \text{ fois}}$. Mais, pour les valeurs non entières, la seule signification de l'écriture e^x est donnée par $\exp(x) = e^x$.

Cette notation est très efficace car toutes les propriétés précédentes prennent, comme on le voit ci-dessous, une forme très facile à retenir et à utiliser.

À savoir

$e^0 = 1$, $e^1 = e$;

$e^{a+b} = e^a \times e^b$;

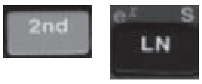
$e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$;

$e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$;

$e^{na} = \left(e^a\right)^n$.

Sur les calculatrices, e^x est indiquée à côté de la touche utilisée pour la fonction exponentielle.

Avec la Texas-Instruments TI82, la fonction exp s'obtient de la façon suivante :



Et avec la Casio Graph25, de la façon suivante : 

Vous pouvez ainsi obtenir les premières décimales du nombre $e = e^1$:

$$e \approx 2{,}71828182846.$$

▶ Exemple 1 Montrer que pour tout réel x,

a) $\dfrac{e^x}{e^x - 1} = \dfrac{1}{1 - e^{-x}}$

b) $\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} = 1 - \dfrac{2e^{-x}}{1 + e^{-x}}$.

Solution **a)** Pour tout réel x non nul :

$$\frac{e^x}{e^x-1}=\frac{e^x}{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}=\frac{1}{1-\frac{1}{e^x}}=\frac{1}{1-e^{-x}}.$$

b) Pour tout réel x :

$$1-\frac{2e^{-x}}{1+e^{-x}}=1-\frac{\frac{2}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}=1-\frac{2}{e^x+1}=\frac{e^x+1-2}{e^x+1}=\frac{e^x-1}{e^x+1}.$$

3. Signe de e^x

Pour tout réel x, si on applique l'égalité $e^{a+b}=e^a\times e^b$ en posant $a=b=\frac{x}{2}$ on trouve $e^x=e^{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}}=e^{\frac{x}{2}}\times e^{\frac{x}{2}}=\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2$.

Ainsi, tout nombre e^x est un carré. On rappelle que l'exponentielle ne s'annule pas, d'où la propriété suivante.

Propriété 5

Pour tout réel x, e^x est strictement positif : $e^x>0$.

Remarque Donc, pour tout réel x, $e^{\frac{x}{2}}$ est strictement positif et comme on vient de voir que $e^x=\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2$ on en déduit que $e^{\frac{x}{2}}=\sqrt{e^x}$.

On a aussi $e^{\frac{x}{3}}=\sqrt[3]{e^x}$ ($\sqrt[3]{e^x}$ est le nombre dont le cube est égal à e^x), $e^{\frac{x}{4}}=\sqrt[4]{e^x}=\sqrt{\sqrt{e^x}}$. $e^{\frac{x}{2}}=\sqrt{e^x}$.

Exemple 2 Simplifier le nombre : $\frac{1}{e^2}\times\left(\sqrt{e}\right)^3\times\frac{1}{e^{-3}}$.

Solution On a : $\left(\frac{1}{e}\right)^2\times\left(e^{\frac{1}{2}}\right)^3\times\frac{1}{e^{-3}}=e^{-2}\times e^{\frac{3}{2}}\times e^3=e^{-2+\frac{3}{2}+3}=e^{\frac{5}{2}}=e^{2+\frac{1}{2}}=e^2\sqrt{e}.$

D Exercices d'apprentissage

Exercice 1 Simplifier $e^{-3} \times e^{0,15} \times \dfrac{e^{2,3}}{e}$.

Exercice 2 Pour tout réel x, simplifier

a) $e^{3x+1}\left(e^{\frac{-x}{4}}\right)^3$ b) $\dfrac{e^{x^2}\sqrt{e}}{e^{1,5}}$ c) $\dfrac{e^{5x}-e^{x}}{e^{x}}$.

Exercice 3 Montrer que, pour tout nombre réel x, on a :

❶ $\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ ❷ $\left(e^{x}+e^{-x}\right)^2 - \left(e^{x}-e^{-x}\right)^2 = 4.$

Exercice 4 Préciser si chacune des quatre affirmations suivantes est vraie ou fausse en justifiant les réponses.

❶ Pour tous nombres réels a et b, $e^{a+b} = \sqrt{e^{2a} \times e^{2b}}$.

❷ Pour tous nombres réels a et b, $3e^{a+b} = e^{3a} \times e^{3b}$.

❸ Pour tous nombres réels a et b, $e^{a} + e^{b} < e^{a+b}$.

❹ Il existe des nombres réels a et b tels que $e^{a} + e^{b} < e^{a+b}$.

3 Étude de la fonction exponentielle

A Objectifs du chapitre

Nous étudions ici les propriétés de la fonction exponentielle : sens de variation, limites, courbe représentative, ainsi que des compléments sur les équations, les inéquations et les fonctions composées.

B Pour débuter

■ **Activité 2** *Variation et comparaison*

❶ En utilisant la courbe représentative de la fonction exponentielle, conjecturer son sens de variation, ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$.

❷ Comparaison avec les fonctions puissances.

À l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, trouver une valeur de x à partir de laquelle il semble que $\exp(x) > x^2$.

Faire de même avec x^3 et avec x^n pour des valeurs de n, entier naturel, que vous choisirez.

C Cours

1. Variations et limites

On a vu que la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives et une des caractéristiques de la fonction exponentielle est d'être égale à sa fonction dérivée, on en déduit donc :

Propriété 6

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Remarque On peut montrer que la fonction exponentielle dépasse toute fonction polynôme (à condition de choisir x suffisamment grand). C'est pourquoi, dans la vie courante, on utilise l'expression « croissance exponentielle » pour évoquer un phénomène dont la croissance est très forte.

Propriété 7 $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0.$

Démonstration

- Pour démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ on compare e^x à x.

  On définit la fonction d en posant $d(x) = e^x - x$ pour tout réel positif x.

  La fonction d est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et $d'(x) = e^x - 1 = e^x - e^0$.

  Pour tout x de $[0\,;+\infty[$, on a $e^0 \leq e^x$ car la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$ donc $d'(x) \geq 0$.

  On en déduit que la fonction d est croissante sur $[0\,;+\infty[$. Pour $x \geq 0$ on a donc $d(x) \geq d(0)$ soit $d(x) \geq 1$ et donc $e^x - x \geq 1$ d'où $e^x > x$.

  Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, on en déduit par comparaison que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

- En $-\infty$, on raisonne en se ramenant à la limite précédente par composition car :

  $$\lim_{x \to -\infty} e^x = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^{-x}}.$$

  La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est la composée de $x \mapsto -x$ et $X \mapsto e^X$.

  Or $\lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$, donc, par composition avec $X = -x$, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$.

  Et en prenant l'inverse : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{e^{-x}} = 0.$

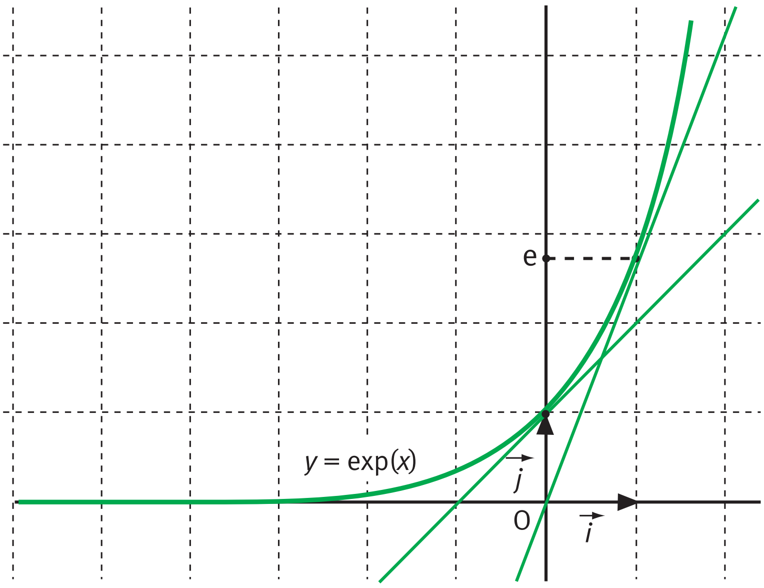
  On obtient ainsi le tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\exp'(x) = \exp(x)$		$+$		$+$	
$\exp(x) = e^x$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2. Courbe de la fonction exponentielle

La courbe représentative de la fonction exponentielle doit être parfaitement connue.

La limite $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ montre que l'axe des abscisses est asymptote à la courbe de la fonction exponentielle.



On a placé sur cette figure la tangente au point d'abscisse 0 dont l'équation réduite est $y = \exp'(0)x + \exp(0) = x + 1$.

Dans la démonstration de la propriété 7, on a montré que, pour tout réel x, on a $e^x - x \geq 1$ c'est-à-dire $e^x \geq x + 1$. Donc la courbe représentative de la fonction exponentielle est toujours au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0.

On a aussi placé la tangente au point d'abscisse 1. Cette tangente passe par l'origine du repère, en effet elle a pour équation réduite :

$$y = \exp'(1)(x-1) + \exp(1) \text{ soit } y = e(x-1) + e = ex.$$

3. Autres limites

Trois autres limites doivent êtres connues.

Propriété 8

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \,; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \,; \quad \lim_{x \to -\infty} x\, e^x = 0.$$

Démonstration

- En 0, en utilisant la notation plus familière h, on reconnaît que le quotient $\dfrac{e^h-1}{h}=\dfrac{e^{0+h}-e^0}{h}$ est le taux d'accroissement de la fonction exponentielle en 0. Sa limite, quand l'accroissement h tend vers 0, est égale au nombre dérivé en 0, donc $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h}=\exp'(0)=\exp(0)=e^0=1$ et donc, bien sûr, on a aussi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1.$

- En $+\infty$, on va déterminer la limite de $\dfrac{e^x}{x}$ en comparant e^x et x^2.

  On pose $d(x)=e^x-x^2$ pour tout x de l'intervalle $\left[1\,;+\infty\right[$ et on cherche à prouver que $d(x)$ est à valeurs positives. Pour cela on détermine les variations de d que l'on obtient en utilisant la dérivée et la dérivée seconde de d.

  La fonction d est dérivable deux fois sur $\left[1\,;+\infty\right[$ et on obtient $d'(x)=e^x-2x$ et $d''(x)=e^x-2$.

  Comme la fonction exponentielle est croissante sur $\left[1\,;+\infty\right[$, pour tout x de cet intervalle on a $e^x\geq e^1$.

  Comme $e\approx 2{,}718$, on a $e^x>2$, $d''(x)$ est à valeurs strictement positives sur $\left[1\,;+\infty\right[$ et la fonction d' est strictement croissante sur $\left[1\,;+\infty\right[$. Par un raisonnement analogue on trouve le sens de variation de d et le signe de $d(x)$.

x	1	$+\infty$
$d''(x)=e^x-2$	$e-2$ $\quad +$	
$d'(x)=e^x-2x$	$e-2>0$ $\nearrow$	
Signe de $d'(x)$	$+$	
$d(x)=e^x-x^2$	$e-1>0$ $\nearrow$	
Signe de $d(x)$	$+$	

Pour tout x de $\left[1\,;+\infty\right[$ on a $d(x)>0$ soit $e^x>x^2$. On divise par x qui est strictement positif et on obtient $\dfrac{e^x}{x}>x$.

Comme $\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$, on conclut, par comparaison, que $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$.

- En $-\infty$, on raisonne en se ramenant à la limite précédente par composition car on remarque que : $x\,e^x=\frac{x}{e^{-x}}=-\frac{-x}{e^{-x}}$.

La fonction $x\mapsto x\,e^x$ est donc la composée de $x\mapsto -x$ et $X\mapsto -\frac{X}{e^X}$. Comme $\lim_{x\to-\infty} -x=+\infty$ et $\lim_{X\to+\infty}\left(-\frac{X}{e^X}\right)=0$ (c'est l'opposé de l'inverse de la limite précédente), en composant avec $X=-x$, on peut donc écrire

$$\lim_{x\to-\infty} x\,e^x=\lim_{X\to+\infty} -\frac{X}{e^X}=0.$$

Remarque On peut retenir les deux limites $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} x\,e^x=0$ en remarquant que, pour ces deux formes indéterminées, c'est « l'exponentielle qui l'a emporté sur x ».

À savoir

Dans l'étude d'une limite où intervient une exponentielle, on utilise les limites du cours en observant bien le comportement de l'exposant pour bien savoir quelle limite utiliser.

L'exposant tend vers	$-\infty$	0	$+\infty$
Limites du cours à connaître	$\lim_{x\to-\infty} e^x=0$ $\lim_{x\to-\infty} x\,e^x=0$	$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$	$\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$. $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$.

▶ Exemple 3 Déterminer $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+x}{e^x+1}$.

▶ **Solution** Cette expression correspond à une forme indéterminée, on la transforme.
Comme on le fera souvent (et comme on l'a fait avec les polynômes à l'infini), on factorise par le terme prépondérant (le plus important) :

$$\frac{e^x+x}{e^x+1}=\frac{e^x\left(1+\frac{x}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}=\frac{1+\frac{x}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}.$$

Comme les deux quotients $\frac{x}{e^x}$ et $\frac{1}{e^x}$ sont les inverses de deux quotients qui tendent vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ on a :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0 \text{ et donc } \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+x}{e^x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{x}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}=1.$$

Exemple 4 Montrer que : **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3}=+\infty$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2e^x=0.$

Solution **a)** Pour $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3}$ l'exposant de l'exponentielle tend vers $+\infty$ et on n'arrive pas à déterminer la limite en utilisant directement l'une ou l'autre des limites correspondantes du tableau précédent. Une transformation de l'expression est donc nécessaire. On essaye de se rapprocher de la forme $\dfrac{e^x}{x}$. On peut par exemple écrire : $\dfrac{e^x}{x^3}=\left(\dfrac{e^{\frac{x}{3}}}{x}\right)^3=\dfrac{1}{27}\left(\dfrac{e^{\frac{x}{3}}}{\frac{x}{3}}\right)^3$. On détermine d'abord la limite de la parenthèse.

La fonction $x\mapsto\dfrac{e^{\frac{x}{3}}}{\frac{x}{3}}$ est la composée de $x\mapsto\dfrac{x}{3}$ et $X\mapsto\dfrac{e^X}{X}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{3}=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{e^X}{X}=+\infty$, en composant avec $X=\dfrac{x}{3}$, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^{\frac{x}{3}}}{\frac{x}{3}}\right)=\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{e^X}{X}=+\infty.$

On en déduit (règles opératoires) : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3}=\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{1}{27}\left(\dfrac{e^X}{X}\right)^3=+\infty.$

b) Pour $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2e^x$, l'exposant tend vers $-\infty$ et on n'arrive pas à déterminer la limite en utilisant directement l'une ou l'autre des limites correspondantes du tableau précédent. Une transformation de l'expression est donc nécessaire. On essaye de se rapprocher de la forme xe^x. On peut par exemple écrire :

$$x^2e^x=\left(x\,e^{\frac{x}{2}}\right)^2=\left(2\times\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2=4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2.$$

Et on détermine d'abord la limite de la parenthèse.

La fonction $x\mapsto\dfrac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}$ est la composée de $x\mapsto\dfrac{x}{2}$ et $X\mapsto X\,e^X$.

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{2}=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty}X\,e^X=0$ en composant avec $X=\dfrac{x}{2}$, on obtient $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)=\lim\limits_{X\to-\infty}Xe^X=0.$

On en déduit (règles opératoires) : $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2 e^x\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} 4\left(\frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}}\right)^2 = 0.$

Point méthode L'utilisation de la limite d'un taux d'accroissement a été vue dans la démonstration de la propriété 8a) et ces exemples 4 et 5 illustrent les deux autres principales méthodes qu'il faut connaître pour déterminer une limite avec une exponentielle.

- Mettre en facteur le terme prépondérant.
- Faire apparaître une limite connue en utilisant les propriétés des exposants.

4. Équations, inéquations

Dans les exercices, on est souvent amené à résoudre des équations ou des inéquations faisant intervenir des exponentielles. Pour les résoudre, la propriété ci-contre est fondamentale.

Propriété 9

Pour tous réels a et b, on a :

- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$;
- $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$.

Démonstration

- La fonction exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, deux nombres différents ne peuvent donc pas avoir la même image, d'où, pour tous réels a et b, l'implication $e^a = e^b \Rightarrow a = b$. L'implication réciproque et vraie, bien sûr, donc l'équivalence $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$ est prouvée.
- La fonction exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, pour tous réels a et b, on a l'implication $a < b \Rightarrow e^a < e^b$. L'implication réciproque $e^a < e^b \Rightarrow a < b$ est vraie car la croissance de la fonction exponentielle prouve aussi que sa contraposée $a \geq b \Rightarrow e^a \geq e^b$ est vraie.

▶ Exemple 5 Résoudre dans $\mathbb{R}$: **a)** $e^{2x} - e^x = 0$ **b)** $e^x + 2 - 3e^{-x} = 0$ **c)** $e^{2x} \geq \frac{e}{e^x}$.

▶ **Solution**

a) On a : $e^{2x} - e^x = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = e^x$

$\Leftrightarrow 2x = x$ (stricte croissance de exp)

$\Leftrightarrow x = 0.$

L'ensemble des solutions de cette équation est donc $S = \{0\}$.

b) On a : $e^x + 2 - 3e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^x + 2 - 3 \times \frac{1}{e^x} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{2x} + 2e^x - 3}{e^x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$$

(la fonction exponentielle ne s'annulant pas).

Ainsi : $e^{2x}+2e^x-3=0 \Leftrightarrow \begin{cases} X^2+2X-3=0 \\ X=e^x \end{cases}$ et on résout l'équation du second degré $X^2+2X-3=0$. On trouve deux solutions, 1 et -3.

On a donc : $e^{2x}+2e^x-3=0 \Leftrightarrow e^x=1$ ou $e^x=-3$.
Comme l'exponentielle est à valeurs strictement positives, on obtient seulement $e^{2x}+2e^x-3=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$ et $S=\{0\}$.

c) On a : $e^{2x} \geq \dfrac{e}{e^x} \Leftrightarrow e^{3x} \geq e^1$ (en multipliant par e^x qui est strictement positif) et donc $e^{2x} \geq \dfrac{e}{e^x} \Leftrightarrow x \geq \dfrac{1}{3}$ (la fonction exponentielle étant strictement croissante).

L'ensemble des solutions de cette inéquation est donc $S=\left[\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$.

Rédaction On a rappelé dans des parenthèses la stricte croissance de la fonction exponentielle qui a servi à prouver la propriété 9. Il est conseillé, le jour de l'examen, de faire ce rappel la première fois où on utilise la propriété 9.

Remarque Pour résoudre des équations ou des inéquations comportant des exponentielles, on se ramène à l'égalité de deux exponentielles ou à la comparaison de deux exponentielles, la propriété 9 permettant ensuite d'obtenir une égalité ou une inégalité sur les exposants.

Complément

La fonction exponentielle est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'ensemble des images est égal à $]0\,;+\infty[$ et pour tout nombre réel k dans $]0\,;+\infty[$ l'équation $e^x=k$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.

Définition 2

Soit k un nombre réel strictement positif. L'unique solution de l'équation $e^x=k$ est appelée logarithme de k et sera notée ln k ou ln(k).

$$e^x=k \Leftrightarrow x=\ln k.$$

Remarque À l'oral « ln » se lit comme « Hélène ».

Ainsi $e^{\ln k}=k$ pour $k>0$.

Ce complément permettra d'étudier ici quelques équations de la forme $e^x=k$ et la fonction logarithme sera étudiée dans la séquence 5.

▶ Exemple 6 Résoudre dans $\mathbb{R}$: a) $e^x=5$ b) $e^x>5$.

Solution

a) On a : $e^x = 5 \Leftrightarrow x = \ln 5$: d'où $S = \{\ln 5\}$.

b) On a : $e^x > 5 \Leftrightarrow e^x > e^{\ln 5}$

$\Leftrightarrow x > \ln 5$ (la fonction exp étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$),

d'où $S =]\ln 5\,; +\infty[$.

5. Fonctions composées e^u : limites, variations, fonction dérivée

a) La composition des limites a été étudiée dans la séquence 2.

b) Pour les variations, l'utilisation des définitions permet de prouver le résultat suivant.

Propriété 10

Soit u une fonction définie sur un intervalle I, la fonction composée $\exp \circ u = e^u$ possède les mêmes variations que la fonction u.

Démonstration

- Supposons que la fonction u soit croissante sur l'intervalle I.

  Pour tous a et b dans I, si $a \le b$ alors $u(a) \le u(b)$. En appliquant la fonction exponentielle qui est croissante sur $\mathbb{R}$, l'ordre est conservé, d'où $e^{u(a)} \le e^{u(b)}$. Finalement : pour tous a et b dans I, si $a \le b$ alors $e^{u(a)} \le e^{u(b)}$. Dans ce cas, la fonction $\exp \circ u = e^u$ varie donc comme la fonction u.

- Supposons que la fonction u soit décroissante sur l'intervalle I.

  Pour tous a et b dans I, si $a \le b$ alors $u(a) \ge u(b)$. En appliquant la fonction exponentielle qui est croissante sur $\mathbb{R}$, l'ordre obtenu est conservé, d'où $e^{u(a)} \ge e^{u(b)}$. Finalement : pour tous a et b dans I, si $a \le b$ alors $e^{u(a)} \ge e^{u(b)}$. Dans ce cas aussi, la fonction $\exp \circ u = e^u$ varie comme la fonction u.

  La propriété est démontrée dans tous les cas. Il en est de même si u est strictement croissante (respectivement décroissante) sur un intervalle I.

Remarque La propriété qui vient d'être démontrée ici lorsqu'on compose en faisant suivre une fonction u par la fonction exponentielle se généralise à la composition $f \circ u$ d'une fonction u suivie par une fonction f *croissante* sur un intervalle, la démonstration étant analogue.

▶ Exemple 7 Étude de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{-x}$.

- *Limites aux bornes*

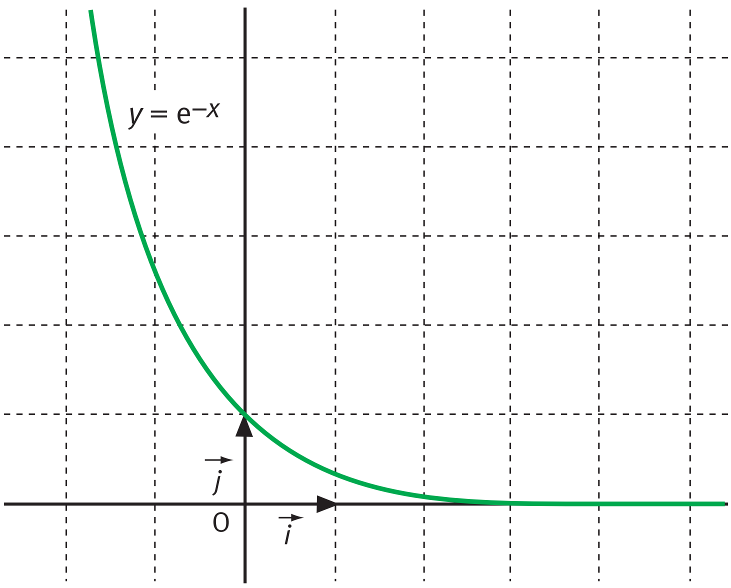
$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \text{ car } \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty \text{ car } \lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \text{ et, pour tout réel } x,\ e^x > 0.$$

- *Sens de variation*

D'après la propriété 10, la fonction f a les mêmes variations que la fonction affine $x \mapsto -x$. Donc la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)=e^{-x}$	$+\infty$ ↘	1 ↘	0



c) Si on a besoin de connaître la fonction dérivée d'une fonction composée $\exp \circ u = e^u$ on a le résultat suivant.

Propriété 11

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

La fonction composée $\exp \circ u = e^u$ est dérivable sur I et on a $\left(e^u\right)' = u' \times e^u$, c'est-à-dire que, en posant $f(x) = e^{u(x)}$ on a, pour tout x de I, $f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$.

Comme cela a été évoqué dans la séquence 2, il n'est pas possible ici de donner une démonstration dans le cas général. Voici donc une démonstration dans un cas particulier (très fréquent).

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, soit a un réel de l'intervalle I et h un nombre tel que $a+h$ soit dans I. On se place dans le cas particulier où $u(a+h)-u(a)$ n'est jamais nul quand $h \neq 0$.

Pour étudier la dérivabilité en a de la fonction $f = e^{u}$, on utilise le taux d'accroissement en le transformant.

Soit $h \neq 0$, on a :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{e^{u(a+h)}-e^{u(a)}}{h} = \frac{u(a+h)-u(a)}{h} \times \frac{e^{u(a+h)}-e^{u(a)}}{u(a+h)-u(a)}$$

(on a supposé $u(a+h)-u(a) \neq 0$).

- La fonction u est dérivable en a donc, pour le premier quotient, on a :

$$\lim_{h \to 0} \frac{u(a+h)-u(a)}{h} = u'(a).$$

- La composition permet de trouver la limite du deuxième quotient.

  Étant dérivable en a, la fonction u est continue en a d'où $\lim\limits_{h \to 0} u(a+h) = u(a)$, soit $\lim\limits_{h \to 0} \big(u(a+h)-u(a)\big) = 0.$

  On pose $H = u(a+h)-u(a)$ et on obtient $\lim\limits_{h \to 0} H = 0.$

  En utilisant le taux d'accroissement en $u(a)$ de la fonction exponentielle , on obtient :

$$\lim_{H \to 0} \frac{e^{u(a)+H}-e^{u(a)}}{H} = \exp'(u(a)) = e^{u(a)}.$$

  En composant, avec $H = u(a+h)-u(a)$ et $u(a+h) = u(a)+H$, on obtient :

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{e^{u(a+h)}-e^{u(a)}}{u(a+h)-u(a)} \right) = \lim_{H \to 0} \frac{e^{u(a)+H}-e^{u(a)}}{H} = \exp'(u(a)) = e^{u(a)}.$$

- En faisant le produit des limites, on trouve :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = u'(a) \times e^{u(a)} \quad \text{soit } f'(a) = u'(a) \times e^{u(a)}.$$

Remarque Ce résultat et cohérent avec l'expression de $(f \circ u)' = u' \times f' \circ u$ qui a été donnée dans la séquence 2.

▶ **Conséquence** Comme la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives, on retrouve aussi, par le signe de la dérivée, le résultat énoncé plus haut : soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, la fonction composée $\exp \circ u = e^{u}$ a les mêmes variations que la fonction u.

▶ Exemple 8 Étude de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-x^2}$.

- *Limites aux bornes*

  La fonction g est la composée de la fonction $x \mapsto -x^2$ et de la fonction exponentielle $X \mapsto e^{X}$.

En $+\infty$, comme $\lim\limits_{x \to +\infty} -x^2 = -\infty$ et que $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$, on peut écrire $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x^2} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$ par composition avec $X = -x^2$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

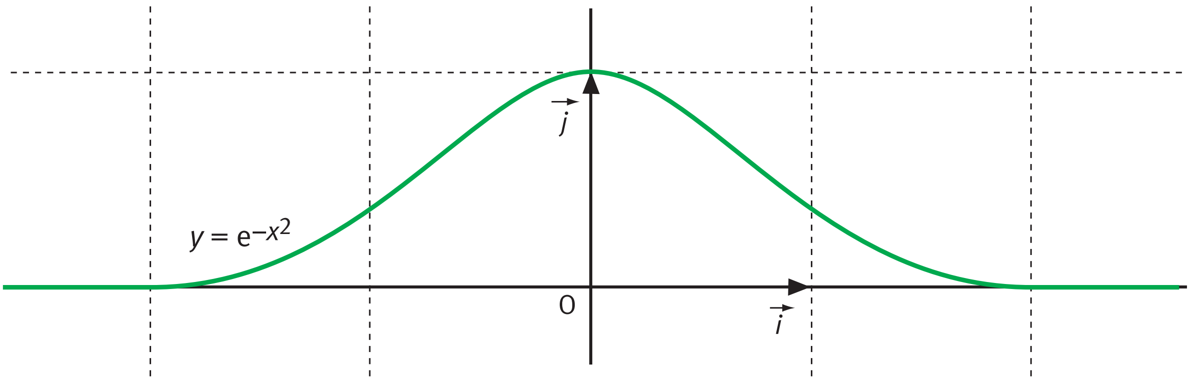
En $-\infty$, on a de même $\lim\limits_{x \to -\infty} -x^2 = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x^2} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$ et ainsi $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$.

- *Dérivée et sens de variation*

  La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, on a $g'(x) = -2x\,e^{-x^2}$.
  La dérivée est du signe de $-2x$, d'où :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x) = -2x\,e^{-x^2}$		+	0	−	
$g(x) = e^{-x^2}$	0	↗	1	↘	0

Les limites à l'infini prouvent que l'axe des abscisses est asymptote à la courbe de la fonction g.



Remarque Nous rencontrerons des fonctions analogues dans le cours de la séquences 9 (lois normales, échantillonage et estimation).

Ces fonctions (exemples 7 et 8) nous donnent aussi des exemples de types de fonctions fréquemment rencontrées dans des applications concrètes.

D Exercices d'apprentissage

Exercice 5 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $e^{2x-3} - e^{x+1} = 0$;
2. $e^{2x} + e^{x} - 2 = 0$;
3. $e^{2(x+1)} - (1+e^2)e^{x} + 1 = 0$;
4. $e^{x^2+8} = \left(e^{x}\right)^2$;
5. $e^{x^2} > e^{3x}$;
6. $e^{2x} + e^{x} - 2 > 0$;
7. $\dfrac{2}{e^{x}+1} < e^{x}$.

Exercice 6 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $e^{3x+1} = 5$;
2. $e^{2x} - e^{x} - 2 = 0$;
3. $e^{x-1} > 3$;
4. $e^{x-1} > -3$.

Exercice 7 Donner l'expression de la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle donné.

1. Sur $\mathbb{R}$, $f_1(x) = x^2 e^{x}$;
2. sur $\mathbb{R}$, $f_2(x) = e^{-x^2+4x-1}$;
3. sur $\mathbb{R}$, $f_3(x) = \sqrt{1+\dfrac{1}{e^{x}}}$;
4. sur $\mathbb{R}$, $f_4(x) = \dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}$;
5. sur $\mathbb{R}^*$, $f_5(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 8 Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^{x} - x\right)$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(e^{2x} - e^{-x}\right)$
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{e^{x}}$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x}-1}{x+3}$
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1)e^{x}$
6. $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+1)e^{x}$.

Exercice 9 Dresser le tableau de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x e^{x}$.

Exercice 10 **Partie A : étude d'une fonction**

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0\,;30]$ par : $f(t) = 2500 \times e^{-0{,}513t}$.

1. Donner le sens de variation de la fonction f sur I.
2. Tracer la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques : 1 cm pour 1 unité en abscisse, et 1 cm pour 200 unités en ordonnée.

Partie B : application

En médecine nucléaire, l'iode 123 est utilisé pour effectuer des « scintigraphies » permettant d'observer le fonctionnement de la thyroïde et la présence d'éventuelles anomalies.

Pour cela, on injecte, au temps $t = 0$, un échantillon d'iode 123 dans le corps du patient.

On admet que la fonction f, définie et étudiée dans la Partie A, donne une bonne approximation de l'activité du radionucléide iode 123, en fonction du temps t (exprimé en heures) écoulé après l'injection. L'activité de l'iode 123 est exprimée en becquerels (Bq).

1. Donner la valeur de l'activité initiale de l'iode 123 pour l'échantillon injecté au patient.

2. Calculer l'activité de l'iode 123 au bout de 18 heures après l'injection. *On donnera le résultat à* 1 *Bq près.*

3. La demi-vie, notée T, d'un radionucléide est le temps nécessaire au bout duquel son activité a diminué de moitié.

   a) En utilisant le graphique de la Partie A, donner une valeur approchée, à 0,1 heure près, de la période T de l'iode 123. *On laissera apparents les traits de construction utiles*

   b) Déterminer la période T de l'iode 123 par le calcul. *On donnera le résultat en heures et minutes.*

4 Synthèse

A Synthèse de la séquence

Définition

L'unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$ est appelée fonction exponentielle. On la note exp.

$$\exp' = \exp$$
$$\exp(0) = 1$$

Propriétés algébriques

Pour tous réel a et b, pour tout entier n :

$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$ (relation fonctionnelle caractéristique) ; $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$; $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$; $\exp(na) = \left(\exp(a)\right)^n$.	On pose $\exp(x) = e^x$ pour tout nombre réel x : $e^{a+b} = e^a \times e^b$; $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$; $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$; $e^{na} = \left(e^a\right)^n$.

Propriétés de la fonction exponentielle

Signe de e^x

Pour tout réel x, e^x est strictement positif : $e^x > 0$.

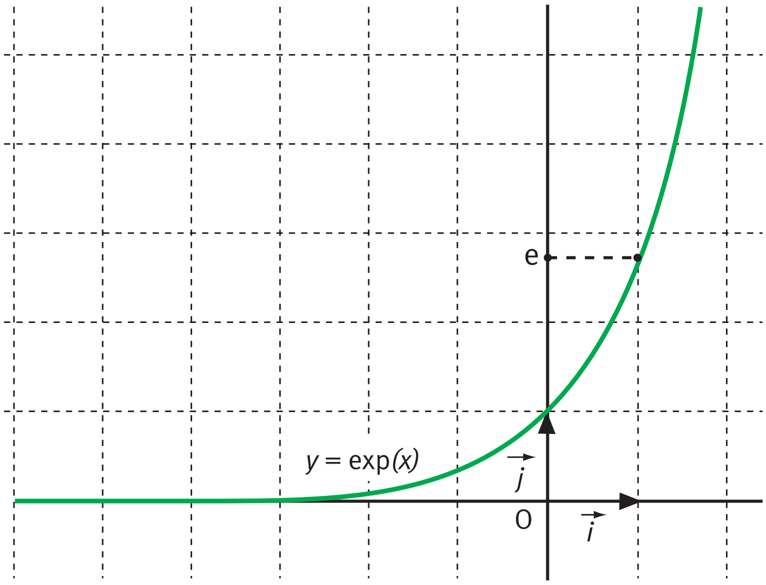
Sens de variation

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Limites $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\exp'(x) = \exp(x)$		$+$		$+$	
$\exp(x) = e^x$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Courbe de la fonction exponentielle



Autres limites $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$.

Équations, inéquations

Pour tous réels a et b, on a :

- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
- $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$.

Remarque Soit k un nombre réel strictement positif. L'unique solution de l'équation $e^x = k$ est appelée logarithme de k et sera notée $\ln k$ ou $\ln(k)$. Ainsi $e^{\ln k} = k$ pour $k > 0$.

Variations **des fonctions composées $\exp \circ u = e^u$**

Soit u une fonction définie sur un intervalle I, la fonction composée $\exp \circ u = e^u$ possède les mêmes variations que la fonction u.

Dérivation **des fonctions composées $\exp \circ u = e^u$**

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

La fonction composée $\exp \circ u = e^u$ est dérivable sur I et on a $\left(e^u\right)' = u' e^u$ c'est-à-dire que, en posant $f(x) = e^{u(x)}$ on a, pour tout x de I, $f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$.

B Exercices de synthèse

Exercice I

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

1. Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?
2. Déterminer les variations de la fonction f.
3. Donner son tableau de variation et sa courbe représentative.

Exercice II

Partie A

Soit la fonction f définie sur $\left[0\,;+\infty\right[$ par $f(t) = 8{,}25t\,e^{-t}$ et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal (unités conseillées : 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées).

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?
2. Etudier les variations de f.
3. Construire la courbe $\mathscr{C}$ ainsi que ses tangentes aux points d'abscisse 0 et 1.

Partie B

Un médicament est injecté par voie intramusculaire. Il passe du muscle au sang puis est éliminé par les reins. La quantité de médicament présente dans le sang (en cg) en fonction du temps (exprimé en heures) est égale à $f(t) = 8{,}25t\,e^{-t}$ pour $t \geq 0$.

1. Calculer la quantité de médicament présente dans le sang au bout de 2 h 30 min.

2. Le médicament n'est efficace que si la quantité est supérieure à 1 cg.

Prise d'initiative : donner une valeur approchée à la minute près de la durée pendant laquelle le médicament est efficace.

Exercice III

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x\,e^{x}$.

1. Dresser le tableau de variations de f.
2. Donner, suivant la valeur du nombre réel a fixé, le nombre de solution de l'équation : $f(x)=a$.
3. Montrer que l'équation $f(x)=\frac{1}{n}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ admet une unique solution positive u_n.
4. Déterminer des valeurs approchées à 10^{-3} près de u_1, u_2, et u_3.
5. Montrer que la suite (u_n) est décroissante. Que peut-on en déduire ?
6. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $0<u_n<\frac{1}{n}$. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice IV

Soient k un réel non nul et f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=e^{kx}$. Soit $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. Pour tout point M de $\mathscr{C}_k$, on note H le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses et T le point d'intersection de l'axe des abscisses et de la droite $\mathscr{D}$, tangente à $\mathscr{C}_k$ en M. Montrer que la longueur TH ne dépend pas du point M choisi.

Exercice V

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x\neq 0$ et $f(0)=0$.

1. Montrer que f est continue en 0.
2. Montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0)=0$.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. Construire la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f dans un repère orthonormé.

Exercice VI

Soit a un nombre réel fixé, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f_a par $f_a(x)=e^{x}-ax$.

1. Déterminer l'ensemble des valeurs de a pour lesquelles f_a admet un minimum.
   Tracer l'allure de la courbe représentative $\mathscr{C}_a$ de f_a pour deux valeurs a telles que $a>0$.
2. Lorsque f_a admet un minimum, soit M_a le point de $\mathscr{C}_a$ d'ordonnée minimale. Montrer que lorsque a varie, les points M_a sont sur la courbe d'équation $y=(1-x)e^{x}$.

Exercice VII On injecte à l'instant $t=0$ une substance dans le sang d'un animal. La concentration (en mg.L^{-1}) de la substance injectée varie en fonction du temps t exprimé en heures, on la note $C(t)$, et on a la relation : $C(t)=8\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)$.

On définit ainsi la fonction C sur $[0\,;+\infty[$.

❶ Démontrer que pour tout t positif, $C'(t)=8\left(2-e^{t}\right)e^{-2t}$. En déduire le tableau de variation de la fonction C. Représenter C.

❷ Au bout de combien de temps la concentration retombe-t-elle à la moitié de sa valeur maximale ? On donnera une valeur approchée de ce résultat avec une précision d'une minute.

❸ Déterminer le plus petit entier n tel que la concentration soit devenue inférieure à 10^{-3} au bout de n heures.

Exercice VIII Déterminer la dérivée n-ième de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ $f(x)=x\,e^{x}$.

Exercice IX

Partie A

On considère la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x)=e^{x}-x-1$.

❶ Étudier les variations de la fonction g.

❷ Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

❸ En déduire que, pour tout x de $[0\,;+\infty[$, $e^{x}-x>0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0\,;1]$ par $f(x)=\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}-x}$.

On appelle C représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.

On admet que f est strictement croissante sur $[0\,;1]$.

❶ Montrer que, pour tout x de $[0\,;1]$, $f(x)\in[0\,;1]$.

❷ Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y=x$.

a) Montrer que, pour tout x de $[0\,;1]$, $f(x)-x=\dfrac{(1-x)g(x)}{e^{x}-x}$.

b) Étudier la position relative de la droite $\mathscr{D}$ et de la courbe $\mathscr{C}$ sur $[0\,;1]$.

❸ Dans un repère orthonormé, représenter la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$.

Partie C

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n), \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$.

1. Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite en laissant apparents les traits de construction.

2. Montrer que pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.