

MATHÉMATIQUES

SÉRIE A1

Cette épreuve comporte 2 pages numérotées 1 sur 2 et 2 sur 2.

Chaque candidat recevra une (1) feuille de papier millimétré.

Tout modèle de calculatrice scientifique est autorisé.

Les tables trigonométriques et logarithmiques et les règles à calculs sont autorisées.

EXERCICE 1

(2 points)

Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de chacune des affirmations ci-dessous suivi de **Vrai** si l'affirmation est vraie ou de **Faux** si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmation
1.	La droite d'ajustement linéaire d'un nuage de points d'une série statistique passe par le point moyen.
2.	Si A et B sont deux événements incompatibles d'un univers Ω , alors $P(A \cup B) = P(A) - P(B)$.
3.	Pour tous nombres réels a et b, $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$.
4.	La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est strictement positive sur $]1; +\infty[$.
5.	Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 , alors pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $u_n = u_0 - nr$.

EXERCICE 2

(2 points)

Pour chacune des affirmations incomplètes du tableau ci-dessous, trois réponses A, B et C sont proposées dont une seule permet d'avoir l'affirmation juste.

Écris sur ta feuille de copie le numéro de l'affirmation incomplète suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse choisie.

Par exemple, pour l'affirmation incomplète 1, la bonne réponse est A. Tu écriras 1-A

N°	Affirmation incomplète	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2}$ est égale à ...	$-\infty$.	0.	$+\infty$.
2.	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$ est égale à ...	$-\infty$.	0.	$+\infty$.
3.	La dérivée sur $]0; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto -3x + 2 - \ln x$ est la fonction ...	$x \mapsto -3 - \frac{1}{x}$.	$x \mapsto -3 + \frac{1}{x}$.	$x \mapsto 2 + \frac{1}{x}$.
4.	Dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, l'ensemble des solutions du système d'équations $\begin{cases} \ln(x) - \ln(y) = -2 \\ 2 \ln(x) + \ln(y) = 5 \end{cases}$ est ...	$\{(e^3, e)\}$.	$\{(e^2, e^3)\}$.	$\{(e, e^3)\}$.
5.	La somme $u_0 + u_1 + \dots + u_{121}$ d'une suite arithmétique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est égale à ...	$121 \times \frac{(u_0 + u_{121})}{2}$.	$122 \times \frac{(u_0 + u_{121})}{2}$.	$121 \times \frac{(u_0 + u_{122})}{2}$.

EXERCICE 3 (5 points)

On considère la suite géométrique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
 $u_0 = 10$ et par pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,7u_n$.

1. Calcule u_1 et u_2 .
2. Donne la raison de cette suite géométrique.
3. a) Justifie que pour tout entier naturel n , $u_n = 10 \times (0,7)^n$.
 b) Déduis du 3.a), le plus petit entier naturel n tel que : $u_n \leq 0,14$.
4. Détermine la somme S telle que : $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{2020}$.

EXERCICE 4 (6 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2 + x - e^x$.
 On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .
 L'unité graphique est le centimètre.

1. Détermine la limite de f en $-\infty$.
2. On admet que pour tout x différent de 0, $f(x) = x(\frac{2}{x} + 1 - \frac{e^x}{x})$.
 Détermine la limite de f en $+\infty$.
3. Justifie que la droite (Δ) d'équation $y = 2 + x$ est une asymptote à (C) en $-\infty$.
4. On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
 - a) Justifie que pour tout nombre réel x , $f'(x) = 1 - e^x$.
 - b) Justifie que f est croissante sur $] -\infty ; 0[$ et décroissante sur $]0 ; +\infty[$.
 - c) Dresse le tableau de variation de f .
5. Justifie que l'équation $f(x) = 0$, admet une solution unique α dans l'intervalle $]1,1 ; 1,2[$.
6. a) Recopie et complète le tableau suivant :

x	-3	-2,5	-2	-1	0	1	2
Arrondi d'ordre 1 de $f(x)$		-0,6			1		-3,4

- b) Trace (Δ) et (C) sur l'intervalle $[-3 ; 2]$ dans le plan muni du repère (O, I, J) .

EXERCICE 5 (5 points)

La coopérative de ton village produit et commercialise les produits agricoles. Une partie des gains sert à la réalisation des projets sociaux pour le village. Le reste est reparti entre les membres. Cette année, l'Assemblée Générale a décidé de reprofiler les routes des champs du village si la coopérative gagne au moins 19 millions de francs. Les productions et gains de la coopérative des huit (8) dernières années sont consignés dans le tableau ci-dessous.

x_i quantités de produits en tonnes	24	24	26	28	29	32	33	34
y_i gains réalisés en millions de francs	8	9	7	13	10	17	14	16

Le président, en observant le tableau, se demande si une production de 38 tonnes pourra leur permettre de réaliser le projet de reprofilage.
 A l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques, dis si la coopérative peut réaliser son projet.

MATHÉMATIQUES

SÉRIES A2-H

*Cette épreuve comporte 2 pages numérotées 1 sur 2 et 2 sur 2.
Tout modèle de calculatrice scientifique est autorisé.*

Les tables trigonométriques et logarithmiques et les règles à calculs sont autorisées.

EXERCICE 1 (2 points)

Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de chacune des affirmations ci-dessous suivi de **Vrai** si l'affirmation est vraie ou de **Faux** si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmation
1.	La droite d'ajustement linéaire d'un nuage de points d'une série statistique passe par le point moyen.
2.	Si A et B sont deux événements incompatibles d'un univers Ω , alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
3.	Pour tous nombres réels a et b, $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$.
4.	La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est strictement positive sur $]1; +\infty[$.
5.	Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 , alors pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $u_n = u_0 - nr$.

EXERCICE 2 (2 points)

Pour chacune des affirmations incomplètes du tableau ci-dessous, trois réponses A, B et C sont proposées dont une seule permet d'avoir l'affirmation juste.

Écris sur ta feuille de copie le numéro de l'affirmation incomplète suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

Par exemple, pour l'affirmation incomplète 1, la bonne réponse est A. Tu écriras 1-A

N°	Affirmation incomplète	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2}$ est égale à ...	$-\infty$.	0.	$+\infty$.
2.	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$ est égale à ...	$-\infty$.	0.	$+\infty$.
3.	La dérivée sur $]0; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto -3x + 2 - \ln x$ est la fonction ...	$x \mapsto -3 - \frac{1}{x}$.	$x \mapsto -3 + \frac{1}{x}$.	$x \mapsto 2 + \frac{1}{x}$.
4.	Dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, l'ensemble des solutions du système d'équations $\begin{cases} \ln(x) - \ln(y) = -2 \\ 2 \ln(x) + \ln(y) = 5 \end{cases}$ est ...	$\{(e^3, e)\}$.	$\{(e^2, e^3)\}$.	$\{(e, e^3)\}$.
5.	La somme $u_0 + u_1 + \dots + u_{121}$ d'une suite arithmétique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est égale à ...	$121 \times \frac{(u_0 + u_{121})}{2}$.	$122 \times \frac{(u_0 + u_{121})}{2}$.	$121 \times \frac{(u_0 + u_{122})}{2}$.

EXERCICE 3 (5 points)

On considère la suite géométrique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
 $u_0 = 10$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,7u_n$.

1. Calcule u_1 et u_2 .
2. Donne la raison de cette suite géométrique.
3. Justifie que pour tout entier naturel n , $u_n = 10 \times (0,7)^n$.
4. Détermine la somme S telle que : $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{2020}$.

EXERCICE 4 (6 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2 + x - e^x$.
 On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .
 L'unité graphique est le centimètre.

1. Détermine la limite de f en $-\infty$.
2. On admet que pour tout x différent de 0, $f(x) = x(\frac{2}{x} + 1 - \frac{e^x}{x})$.
 Détermine la limite de f en $+\infty$.
3. Justifie que la droite (Δ) d'équation $y = 2 + x$ est une asymptote à (C) en $-\infty$.
4. On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
 - a) Justifie que pour tout nombre réel x , $f'(x) = 1 - e^x$.
 - b) Justifie que f est croissante sur $] -\infty ; 0[$ et décroissante sur $]0 ; +\infty[$.
 - c) Dresse le tableau de variation de f .

EXERCICE 5 (5 points)

La coopérative de ton village produit et commercialise les produits agricoles. Une partie des gains sert à la réalisation des projets sociaux pour le village. Le reste est reparti entre les membres.
 Cette année, l'Assemblée Générale a décidé de reprofiler les routes des champs du village si la coopérative gagne au moins 19 millions de francs. Les productions et gains de la coopérative des huit (8) dernières années sont consignés dans le tableau ci-dessous.

x_i quantités de produits en tonnes	24	24	26	28	29	32	33	34
y_i gains réalisés en millions de francs	8	9	7	13	10	17	14	16

Le président, en observant le tableau, se demande si une production de 38 tonnes pourra leur permettre de réaliser le projet de reprofilage.

A l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques, dis si la coopérative peut réaliser son projet.

MATHÉMATIQUES

SÉRIES A2 – H

Cette épreuve comporte deux (02) pages numérotées 1/2 et 2/2.

Chaque candidat recevra une feuille de papier millimétré.

Tout modèle de calculatrice scientifique est autorisé.

Les tables trigonométriques, logarithmiques et les règles à calculs sont aussi autorisées.

EXERCICE 1

1. Vérifie que $-\frac{5}{2}$ et 4 sont les solutions de l'équation : $x \in \mathbb{R}, 2x^2 - 3x - 20 = 0$.
2. On considère l'équation (E) : $x \in \mathbb{R}, 2e^{2x} - 3e^x - 20 = 0$.
Résous (E).
3. On considère l'équation (F) : $x \in \mathbb{R}, 2(\ln x)^2 - 3\ln x - 20 = 0$.
Résous (F).

EXERCICE 2

La pâtisserie CHOCO-IVOIRE fabrique des tablettes de chocolat. Pour faire connaître ses produits, elle organise une journée promotionnelle.

Au stand dégustation, tout visiteur qui répond juste à une question posée gagne trois tablettes de chocolat tirées au hasard.

Le tirage se fait de façon simultanée d'un panier contenant 16 tablettes indiscernables au toucher.

Les tablettes sont réparties selon quatre types : 5 tablettes de chocolat au lait, 4 tablettes de chocolat noir, 4 tablettes de chocolat marron et 3 tablettes de chocolat gris.

Le jeune Koffi a répondu juste à une question.

1. Justifie que Koffi a 560 possibilités de choisir trois tablettes.
2. Calcule la probabilité de chacun des événements suivants :
A : « Koffi tire trois tablettes de chocolat de même type ».
B : « Koffi ne tire aucune tablette de chocolat gris ».
3. Soit l'évènement C : « Il y a exactement une tablette de chocolat gris parmi les trois tablettes tirées par Koffi ».
Justifie que la probabilité de C est égale à $\frac{117}{280}$.

EXERCICE 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . L'unité graphique est égale à 1 cm.

On donne la fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - 1}$.

On désigne par (ζ) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère (O, I, J) .

1. a) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Interprète graphiquement le résultat obtenu.

2. On suppose que f est dérivable sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

a) Démontre que pour tout élément x de l'intervalle $]1; +\infty[$, $f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 7}{(x - 1)^2}$.

b) Justifie que pour tout élément x de l'intervalle $]1; +\infty[$, $f'(x) > 0$.

c) Déduis-en le sens de variation de f puis dresse son tableau de variation.

3. a) Justifie que pour tout élément x de l'intervalle $]1; +\infty[$, $f(x) = x - \frac{6}{x - 1}$.

b) Démontre que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe (ζ) en $+\infty$.

c) Justifie que la courbe (ζ) est en dessous de la droite (Δ) sur $]1; +\infty[$.

4. a) Calcule $f(3)$.

b) Détermine une équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à (ζ) au point d'abscisse 3.

c) Représente dans le repère (O, I, J) la droite (Δ) , la tangente $(\mathcal{T})$ et la courbe (ζ) .

MATHÉMATIQUES

SÉRIE A1

Cette épreuve comporte deux (02) pages numérotées 1/2 et 2/2.

Chaque candidat recevra une feuille de papier millimétré.

Tout modèle de calculatrice scientifique est autorisé.

Les tables trigonométriques, logarithmiques et les règles à calculs sont aussi autorisées.

EXERCICE 1

1. Vérifie que $-\frac{5}{2}$ et 4 sont les solutions de l'équation : $x \in \mathbb{R}, 2x^2 - 3x - 20 = 0$.
2. On considère l'équation (E) : $x \in \mathbb{R}, 2e^{2x} - 3e^x - 20 = 0$.
Résous (E).
3. On considère l'équation (F) : $x \in \mathbb{R}, 2(\ln x)^2 - 3\ln x - 20 = 0$.
Résous (F).

EXERCICE 2

La pâtisserie CHOCO-IVOIRE fabrique des tablettes de chocolat. Pour faire connaître ses produits, elle organise une journée promotionnelle.

Au stand dégustation, tout visiteur qui répond juste à une question posée gagne trois tablettes de chocolat tirées au hasard.

Le tirage se fait de façon simultanée d'un panier contenant 16 tablettes indiscernables au toucher.

Les tablettes sont réparties selon quatre types : 5 tablettes de chocolat au lait, 4 tablettes de chocolat noir, 4 tablettes de chocolat marron et 3 tablettes de chocolat gris.

Le jeune Koffi a répondu juste à une question.

1. Justifie que Koffi a 560 possibilités de choisir trois tablettes.
2. Calcule la probabilité de chacun des événements suivants :
A : « Koffi tire trois tablettes de chocolat de même type ».
B : « Koffi ne tire aucune tablette de chocolat gris ».
3. Soit l'événement C : « Il y a exactement une tablette de chocolat gris parmi les trois tablettes tirées par Koffi ».
Justifie que la probabilité de C est égale à $\frac{117}{280}$.
4. Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage simultané de trois tablettes fait correspondre le nombre de tablettes de chocolat gris.
a) Justifie que l'ensemble des valeurs prises par X est égal à $\{0; 1; 2; 3\}$.
b) Détermine la loi de probabilité de X.
c) Calcule la probabilité pour que le jeune Koffi tire au moins une tablette de chocolat gris.

EXERCICE 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . L'unité graphique est égale à 1 cm.

On donne la fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - 1}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère (O, I, J) .

1. a) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Interprète graphiquement le résultat obtenu.

2. On suppose que f est dérivable sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

a) Démontre que pour tout élément x de l'intervalle $]1; +\infty[$, $f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 7}{(x - 1)^2}$.

b) Justifie que pour tout élément x de l'intervalle $]1; +\infty[$, $f'(x) > 0$.

c) Déduis-en le sens de variation de f puis dresse son tableau de variation.

3. a) Justifie que pour tout élément x de l'intervalle $]1; +\infty[$, $f(x) = x - \frac{6}{x - 1}$.

b) Démontre que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe (C) en $+\infty$.

c) Justifie que la courbe (C) est en dessous de la droite (Δ) sur $]1; +\infty[$.

4. a) Calcule $f(3)$.

b) Détermine une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 3.

c) Représente dans le repère (O, I, J) , la droite (Δ) , la tangente (T) et la courbe (C) .

5. On considère (H) , la partie du plan limitée par la courbe (C) , la droite (Δ) , l'axe (OI) et les droites d'équations $x = 3$ et $x = 6$.

Calcule, en cm^2 , l'aire de (H) .

MATHÉMATIQUES

SÉRIES A2-H

*Cette épreuve comporte deux (02) pages numérotées 1/2 et 2/2.
Chaque candidat recevra une feuille annexe à rendre avec la copie.
Tout modèle de calculatrice scientifique est autorisé.
Les tables trigonométriques et logarithmiques et les règles à calculs sont autorisées.*

EXERCICE 1

On considère la fonction polynôme P définie par :

$$P(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2.$$

- 1- Vérifier que : $P(x) = (x + 2)(2x^2 - 3x + 1)$.
- 2- a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2x^2 - 3x + 1 = 0$.
b) En déduire tous les zéros du polynôme P .
- 3- Utiliser la question 2 pour résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2e^{3x} + e^{2x} - 5e^x + 2 = 0$.

EXERCICE 2

Dans le cadre de la réconciliation nationale, une rencontre regroupe :

- 10 représentants des chefs coutumiers ;
- 4 représentants des chefs religieux ;
- 6 membres de la société civile.

Avant le début des travaux, on choisit au hasard un bureau de séance. Ce bureau comprend : un président, un secrétaire et un porte-parole.

On suppose que tous les participants ont la même chance de faire partie du bureau et qu'aucun membre du bureau ne peut occuper plus d'un poste.

- 1- Justifier que le nombre de bureaux possibles est égal à 6840.

Dans la suite de l'exercice, les résultats donnés seront arrondis au millième près.

- 2- Calculer la probabilité de l'événement A : « Aucun représentant des chefs religieux ne fait partie du bureau ».
- 3- Soit l'événement B : « Le Président du bureau est un membre de la société civile ». Démontrer que la probabilité de B est égale à 0,300.

PROBLÈME

On considère la fonction f dérivable et définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{-x+1}{2} + \ln x.$$

- 1- a) Calculer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
 b) On admet que, pour tout nombre réel x strictement positif, $f(x) = x\left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x}\right)$.
 Calculer la limite de f en $+\infty$.
- 2- a) Démontrer que, pour tout nombre réel x strictement positif,

$$f'(x) = \frac{-x+2}{2x},$$

 b) En déduire les variations de f .
 c) Établir le tableau de variation de f .
- 3- a) Vérifier que : $f(1) = 0$.
 b) Démontrer que l'équation : $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]3,5 ; 4[$.
 On note α cette solution.
 c) Donner un encadrement de α par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 1.
- 4- Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J) d'unités : $OI = 2 \text{ cm}$; $OJ = 5 \text{ cm}$.
 On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f .
 Sur la feuille en annexe, est tracée la droite (Δ) tangente à la courbe au point d'abscisse $x = \alpha$.
 Utiliser le tableau de valeurs ci-dessous pour tracer $(\mathcal{C})$ sur $[0,25 ; 8]$. On prendra $\alpha = 3,5$.

x	0,25	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8
Arrondi d'ordre 1 de $f(x)$	-1,0	-0,4	0	0,2	0,1	-0,1	-0,4	-0,7	-1,1	-1,4

MATHÉMATIQUES

SÉRIE A1

Cette épreuve comporte 2 pages numérotées 1/2 et 2/2.

Chaque candidat recevra une (01) feuille de papier millimétré.

L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé.

Les tables trigonométriques et logarithmiques et les règles à calculs sont aussi autorisées.

EXERCICE 1

En Côte d'Ivoire, le Gouvernement par décret N° 2013-327 du 22 mai 2013, a interdit la production, l'importation, la commercialisation, la détention et l'utilisation des sachets plastiques. L'application du décret a été reportée au 22 novembre 2014.

Au début du mois de juin 2013, un magasin de distribution disposait d'un stock de 740 cartons de sachets plastiques.

Depuis lors, l'entreprise a arrêté d'acquérir de nouveaux cartons de sachets plastiques et a suivi l'évolution de son stock pendant six mois en notant, au début de chaque mois, le nombre de cartons de sachets plastiques disponibles.

Le tableau suivant donne les résultats obtenus.

Mois	Juin 2013	Juillet 2013	Août 2013	Septembre 2013	Octobre 2013	Novembre 2013
Rang x_i du mois	1	2	3	4	5	6
Nombre y_i de cartons de sachets plastiques	740	680	650	580	500	450

- 1- a) Représenter le nuage de points associés à cette série statistique (x_i, y_i) dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) .
On prendra 2 cm pour un mois en abscisse et 1 cm pour 50 cartons en ordonnée.
b) Peut-on effectuer un ajustement linéaire de cette série statistique ?
- 2- Calculer les coordonnées du point moyen G de cette série et le placer dans le repère (O, I, J) .
- 3- a) Calculer la variance $V(X)$ de X.
b) Calculer la covariance $\text{Cov}(X, Y)$ de cette série statistique double.
(On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles)
- 4- a) Démontrer par la méthode des moindres carrés qu'une équation de la droite (D) de régression de y en x est : $y = -\frac{412}{7}x + 806$.
b) Construire la droite (D) dans le repère (O, I, J) .
c) Calculer le coefficient de corrélation linéaire r et interpréter le résultat.
- 5- On suppose que ce modèle reste valable jusqu'à la fin de l'année 2014.
a) Déterminer le rang du mois où le stock sera épuisé (On arrondira le résultat à l'unité).
b) L'entreprise pourra-t-elle épuiser son stock avant la date d'entrée en application du décret ?

Un nouveau marché est en construction dans la commune de Korhogo. Pour acquérir une place sur ce marché, chaque commerçant devra payer la somme de 1 000 000 F CFA.

Madame Boti, une commerçante qui veut une place sur ce marché, s'est engagée à faire un paiement par mensualités, selon les conditions suivantes :

- elle a payé 90 000 F CFA comme première mensualité à la fin du mois de janvier 2015 ;
- chaque mensualité suivante sera égale à la précédente mensualité augmentée de 3% jusqu'à ce qu'elle finisse de payer.

On désigne par a_n la $n^{\text{ième}}$ mensualité.

- 1- Démontrer que la deuxième mensualité est égale à 92 700 F.
- 2- a) Démontrer que pour tout entier naturel non nul n , on a $a_{n+1} = 1,03 a_n$.
b) En déduire que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique puis préciser la raison et le premier terme.
- 3- Exprimer a_n en fonction de n .
- 4- Justifier que la huitième mensualité est égale à 110 689 F CFA (arrondir à l'unité).
- 5- a) Justifier que la somme des n premières mensualités est égale à $3\,000\,000[(1,03)^n - 1]$.
b) Déterminer le nombre de mois nécessaire à Boti pour qu'elle puisse finir de payer sa place.

PROBLÈME

Soit la fonction f dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (-2x + 1)e^x$. On désigne par $(\mathcal{C})$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . L'unité graphique est 2 cm.

- 1- Calculer la limite de f en $+\infty$.
- 2- En remarquant que $f(x) = -2xe^x + e^x$,
Calculer la limite de f en $-\infty$ et interpréter graphiquement le résultat.
- 3- a) Démontrer que, pour tout nombre réel x , $f'(x) = -(2x + 1)e^x$.
b) Justifier que, pour tout x élément de $] -\infty ; -\frac{1}{2}[$, $f'(x) > 0$.
c) Justifier que, pour tout x élément de $]-\frac{1}{2} ; +\infty[$, $f'(x) < 0$.
d) Déduire des questions précédentes, les variations de f .
- 4- Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.
- 5- a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous

x	-5	-3	-1	-0,5	0	0,5	1
Arrondi d'ordre 1 de $f(x)$.		0,3	1,1		1		-2,7

- b) Construire $(\mathcal{C})$ et (T) .
- 6- Soit la fonction F définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = -(2x - 3)e^x$.
a) Démontrer que F est une primitive sur $\mathbb{R}$ de f .
b) En déduire l'aire de la partie du plan délimitée par $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives : $x = -1$ et $x = 0$.
c) Sachant que l'unité d'aire est 4 cm^2 , exprimer l'arrondi de la valeur de l'aire à l'unité près. (On donne : $e \approx 2,72$).

MATHÉMATIQUES

SÉRIES : A2 – H

Cette épreuve comporte 2 pages numérotées 1/2 et 2/2.

Chaque candidat recevra deux (02) feuilles de papier millimétré.

L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé.

Les tables trigonométriques et logarithmiques et les règles à calculs sont aussi autorisées.

EXERCICE 1

En Côte d'Ivoire, le Gouvernement par décret N° 2013-327 du 22 mai 2013, a interdit la production, l'importation, la commercialisation, la détention et l'utilisation des sachets plastiques. L'application du décret a été reportée au 22 novembre 2014.

Au début du mois de juin 2013, un magasin de distribution disposait d'un stock de 740 cartons de sachets plastiques.

Depuis lors, l'entreprise a arrêté d'acquérir de nouveaux cartons de sachets plastiques et a suivi l'évolution de son stock pendant six mois en notant, au début de chaque mois, le nombre de cartons de sachets plastiques disponibles.

Le tableau suivant donne les résultats obtenus.

Mois	Juin 2013	Juillet 2013	Août 2013	Septembre 2013	Octobre 2013	Novembre 2013
Rang x_i du mois	1	2	3	4	5	6
Nombre y_i de cartons de sachets plastiques	740	680	650	580	500	450

- 1- Représenter le nuage de points associés à cette série statistique (x_i, y_i) dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) .
On prendra 2 cm pour un mois en abscisses et 1 cm pour 50 cartons en ordonnées.

- 2- Calculer les coordonnées du point moyen G de cette série et le placer dans le repère (O, I, J) .

- 3- On partage le nuage de points ci-dessus en deux sous-nuages N_1 et N_2 comme suit :

N1			
x_i	1	2	3
y_i	740	680	650

N2			
x_i	4	5	6
y_i	580	500	450

- a) Déterminer les coordonnées des points moyens G_1 et G_2 respectifs de N_1 et de N_2 .
- b) Justifier qu'une équation de la droite (D) d'ajustement linéaire de cette série statistique double par la méthode de Mayer est : $y = -60x + 810$.
- c) Construire la droite (D).
- 4- On suppose que ce modèle reste valable jusqu'à la fin de l'année 2014.
- a) Déterminer le rang du mois où le stock sera épuisé (On arrondira le résultat à l'unité).
- b) L'entreprise pourra-t-elle épuiser son stock avant la date d'entrée en application du décret ?

EXERCICE 2

Un nouveau marché est en construction dans la commune de Korhogo. Pour acquérir une place sur ce marché, chaque commerçant devra payer la somme de 1 000 000 FCFA dans un délai de 8 mois.

Madame Boti, une commerçante qui veut une place sur ce marché, s'est engagée à faire un paiement par mensualités, selon les conditions suivantes :

- elle a payé 90 000 F CFA comme première mensualité à la fin du mois de janvier 2015 ;
- chaque mensualité suivante sera égale à la précédente mensualité augmentée de 3% jusqu'à ce qu'elle finisse de payer.

On désigne par a_n la $n^{\text{ème}}$ mensualité.

- 1- Démontrer que la deuxième mensualité est égale à 92 700 F.
- 2- a) Démontrer que pour tout entier naturel non nul n , on a : $a_{n+1} = 1,03 a_n$.
b) En déduire que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique puis préciser la raison et le premier terme.
- 3- Exprimer a_n en fonction de n .
- 4- a) Justifier que la huitième mensualité est égale à 110 689 F CFA.
b) Au 8^{ème} mois, Madame Boti aura-t-elle fini de payer la totalité de la somme ? Justifier la réponse.

PROBLÈME

Soit la fonction f dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (-2x + 1)e^x$. On désigne par $(\mathcal{C})$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . L'unité graphique est 2 cm.

- 1- Calculer la limite de f en $+\infty$.
- 2- On note que : $f(x) = -2xe^x + e^x$.
Calculer la limite de f en $-\infty$ et interpréter graphiquement le résultat.
- 3- a) Démontrer que, pour tout nombre réel x , $f'(x) = -(2x + 1)e^x$.
b) Justifier que, pour tout x élément de $] -\infty ; -\frac{1}{2}[$, $f'(x) > 0$.
c) Justifier que, pour tout x élément de $]-\frac{1}{2} ; +\infty[$, $f'(x) < 0$.
d) Déduire des questions précédentes, les variations de f .
- 4- Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.
- 5- a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous

x	-5	-3	-1	-0,5	0	0,5	1
Arrondi d'ordre 1 de $f(x)$.		0,3	1,1		1		-2,7

- b) Construire $(\mathcal{C})$ et (T) .

MATHÉMATIQUES

SÉRIE C

Cette épreuve comporte 3 pages numérotées 1 sur 3, 2 sur 3 et 3 sur 3.

Chaque candidat recevra une (1) feuille de papier millimétré.

Tout modèle de calculatrice scientifique est autorisé.

Les tables trigonométriques et logarithmiques et les règles à calculs sont autorisées.

EXERCICE 1 (2 points)

Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de chaque affirmation suivi de **Vrai** si l'affirmation est vraie ou de **Faux** si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmation
1.	Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que f soit croissante et majorée sur l'intervalle $]2 ; 5[$, alors f admet pour limite $+\infty$ à gauche en 5.
2.	Le coefficient de corrélation linéaire d'une série statistique à deux variables a le même signe que la covariance de cette série statistique.
3.	Une primitive sur $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x} \times e^{\tan x}$ est la fonction $x \mapsto e^{\tan x}$.
4.	Toute similitude directe du plan admet un point invariant.

EXERCICE 2 (2 points)

Pour chacun des énoncés à trou du tableau ci-dessous, quatre réponses A, B, C et D sont proposées dont une seule permet d'avoir l'énoncé juste.

Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de l'énoncé à trou suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	Énoncé à trou	Réponses
1.	Soit (u_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{-2}{3^n}$. La suite (u_n) ...	A Diverge vers $+\infty$.
		B converge vers 0.
		C diverge vers $+\infty$.
		D converge vers -2 .
2.	On pose : $z = -3e^{i\frac{\pi}{6}}$ L'argument principal de z est ...	A $-\frac{\pi}{6}$.
		B $\frac{5\pi}{6}$.
		C $\frac{-5\pi}{6}$.
		D $\frac{\pi}{6}$.

3.	O est un point du plan. L'homothétie h de centre O et de rapport -5 ...	A	il est pas une similitude directe
		B	est la similitude directe de centre O, de rapport 5 et d'angle nul.
		C	est une isométrie.
		D	est la similitude directe de centre O, de rapport 5 et d'angle π .
4.	ABC est un triangle et G l'isobarycentre des points A, B et C. L'ensemble des points M du plan vérifiant : $\ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\ = AC$ est ...	A	la droite passant par A et perpendiculaire à la droite (AC).
		B	le cercle de centre G et de rayon $\frac{2}{3} AC$.
		C	l'ensemble vide.
		D	le cercle de centre G et de rayon $\frac{1}{3} AC$.

EXERCICE 3 (3 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points : $A(0; 0; 2)$; $B(0; 4; 0)$ et $C(2; 0; 0)$.

- Justifie que les points A, B et C déterminent un plan.
 - Démontre qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x + y + 2z - 4 = 0$.
- Soit (D) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.
 - Détermine une représentation paramétrique de la droite (D).
 - Justifie que la droite (D) est incluse dans le plan (ABC).
 - Justifie que la droite (D) est la hauteur du triangle ABC issue du point A.
- Soit ($\mathcal{P}$) le plan dont une équation cartésienne est : $y = \frac{x}{2}$.
 - Justifie que les plans ($\mathcal{P}$) et (ABC) sont perpendiculaires.
 - Démontre que : $\{(D)\} = (ABC) \cap (\mathcal{P})$.

EXERCICE 4 (3 points)

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère deux nombres entiers X et Y tels que : $X = k^2 - 2k + 2$ et $Y = k^2 + 2k + 2$.

On pose : $\text{PGCD}(X; Y) = m$.

- Démontre que tout diviseur de X qui divise k , divise 2.
- Démontre que tout diviseur commun de X et de Y divise $4k$.

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que k est impair.

- Justifie que les nombres entiers X et Y sont aussi impairs.
 - Déduis-en que m est impair.
- Justifie que m divise 2.
 - Déduis des questions précédentes que : $\text{PGCD}(X, Y) = 1$.

EXERCICE 5 (5 points)

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \ln(e^x + 2e^{-x})$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .
L'unité graphique est 2 cm.

1. a) Détermine $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
b) Détermine $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.
2. a) On suppose que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Justifie que la fonction g est strictement croissante sur $]\frac{\ln 2}{2}; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty; \frac{\ln 2}{2}[$.
b) Vérifie que : $g(\frac{\ln 2}{2}) = \ln(2\sqrt{2})$.
c) Dresse le tableau de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
3. a) Démontre que : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = x + \ln(1 + 2e^{-2x})$.
b) Dédus-en que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe (C) en $+\infty$.
c) Justifie que la courbe (C) est au dessous de la droite (D) .
4. On admet que la droite (D') d'équation $y = -x + \ln 2$ est une asymptote à la courbe (C) en $-\infty$.
Trace dans le plan muni du repère (O, I, J) , la courbe (C) , les droites (D) et (D') .
5. Soit J l'intégrale telle que : $J = \int_0^1 (g(x) - x) dx$.
a) Donne une interprétation géométrique de J .
b) En utilisant l'inégalité : $\forall x \in]0; +\infty[, \ln(1+x) \leq x$, justifie que : $0 < J < 0,87$.
(On ne te demande pas de déterminer la valeur exacte de J .)

EXERCICE 6 (5 points)

Le Directeur d'une société internationale veut acquérir un avion privé afin d'éviter les désagréments que lui causent les vols commerciaux.

Il a le choix entre deux types d'avions : un biréacteur et un quadriréacteur. Au moment de l'achat, le constructeur lui décrit les deux types d'appareils de la façon suivante :

« Le biréacteur possède deux réacteurs R_1 et R_2 de telle sorte que l'état du réacteur R_2 dépend de celui du réacteur R_1 . Cet appareil ne peut pas voler à la seule condition que les réacteurs R_1 et R_2 tombent simultanément en panne. En outre, une enquête a révélé que durant les dix premières années qui suivent leur première mise en service, 30% des réacteurs R_1 tombent en panne et que dans un même avion, lorsque le réacteur R_1 tombe en panne, le réacteur R_2 a 40% de chance de tomber aussi en panne ».

« Quant au quadriréacteur, il possède quatre réacteurs qui fonctionnent de façon indépendante. Cet appareil peut voler si au moins deux des quatre réacteurs continuent de fonctionner. En outre, 25% des réacteurs de ce type d'appareil tombent en panne durant les dix premières années qui suivent leur mise en service ».

Le Directeur veut acheter parmi les deux types d'avion, celui qui offrira le plus de chance de voler durant les dix prochaines années.

A la recherche de personnes ressources pour guider son choix, il s'adresse à toi.

A l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques, réponds à la préoccupation du Directeur.

MATHÉMATIQUES

SÉRIE C

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.

Chaque candidat recevra deux (02) feuilles de papier millimétré.

Tout modèle de calculatrice scientifique est autorisé.

Les tables trigonométriques, logarithmiques et les règles à calculs sont également autorisées.

EXERCICE 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$. L'unité graphique est 2 cm.
On donne les points A, B et C d'affixes respectives a , b et c telles que :

$$a = 2 - 2i, b = 2 + 2i \text{ et } c = -2 + 2i.$$

1.
 - a) Place les points A, B et C dans le plan muni du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 - b) Démontre que le triangle ABC est rectangle et isocèle.
 - c) Écris sous forme exponentielle, chacun des nombres complexes a , b et c .
2. Soit r la rotation de centre O telle que $r(A) = B$ et (Γ) le cercle de centre Ω d'affixe 2 et de rayon 2.
 - a) Détermine l'application complexe associée à la rotation r .
 - b) Dédus de ce qui précède $r(B)$.
 - c) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de l'image (Γ') de (Γ) par r .
 - d) Construis (Γ) et (Γ') sur la même figure.
3. Soit α un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0; 2\pi[$, tel que : $\alpha \neq \pi$. On note M le point d'affixe z telle que $z = 2 + 2ie^{i\alpha}$ et M' l'image de M par r . On note z' l'affixe de M'.
 - a) Démontre que M est un point de (Γ) .
 - b) Démontre que : $z' = 2i - 2e^{i\alpha}$.
 - c) On note u et v les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BM'}$.
Exprime u et v en fonction de α .
4.
 - a) Démontre que :
 $\forall x \in \mathbb{R}, e^{2ix} + 1 = 2e^{ix} \cos x \quad \text{et} \quad e^{2ix} - 1 = 2ie^{ix} \sin x.$
 - b) Démontre que : $\frac{u}{v} = \tan \frac{\alpha}{2}$.
 - c) Dédus de ce qui précède que les points M, M' et B sont alignés.
5. On donne : $\alpha = \frac{\pi}{3}$.
 - a) Détermine sous forme algébrique l'affixe du point M.
 - b) Construis les points M et $r(M)$.

EXERCICE 2

Le sujet du concours d'entrée dans une grande école est noté sur 20 points. Il comporte 5 questions à choix multiples. Pour un candidat donné, on attribue quatre (4) points à chaque réponse juste et zéro (0) point à chaque question non traitée ou à réponse fautive.

On admet que lorsqu'un candidat répond au hasard à une question, la probabilité de donner une réponse juste est $\frac{1}{4}$.

- Soit k le nombre exact de réponses justes données par un candidat à ce concours. Exprime en fonction de k la note globale N de ce candidat.
- Soit X la variable aléatoire égale au nombre de réponses justes obtenues par un candidat qui a répondu au hasard à chacune des cinq questions.
 - Détermine les valeurs prises par X .
 - Démontre que : $P(X = 3) = \frac{45}{512}$.
 - Justifie que la probabilité pour que le candidat ait une note globale supérieure à 10 est : $\frac{53}{512}$.
- On suppose qu'à ce concours, n candidats ont répondu au hasard aux cinq questions. On admet que lorsqu'un des n candidats répond au hasard à une question, la probabilité de donner une réponse juste est $\frac{1}{4}$.
 - Justifie que la probabilité P_n qu'au moins un des n candidats ait une note globale supérieure à 10 est : $1 - \left(\frac{459}{512}\right)^n$.
 - Détermine la valeur minimale de n pour que : $P_n \geq 0,99$.

PROBLÈME

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . L'unité graphique est 2 cm.

Soient n un entier naturel non nul et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = (1-x)^n e^{\frac{x}{2}}$.

On désigne par (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) .

Le but de ce problème est de calculer la limite de la suite (S_n) définie par :

$$S_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 f_n(x) dx.$$

Partie A : Étude de la fonction f_1 et d'une fonction associée.

- Calcule : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{x}$.
 - Interprète graphiquement les résultats précédents.
- Calcule la limite de f_1 en $-\infty$.
 - Interprète graphiquement le résultat précédent.

2/3

Fomesouta.com
Site à portée de main

- On suppose que f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$.
 - Démontre que f_1 est strictement croissante sur $] -\infty ; -1[$ et strictement décroissante sur $] -1 ; +\infty[$.
 - Dresse le tableau de variations de f_1 .
 - Trace dans le repère (O, I, J) , la courbe (C_1) et sa tangente à l'origine.

Partie B : Étude de la fonction f_n .

- Détermine, suivant la parité de n , la limite de f_n en $+\infty$.
 - Détermine, suivant la parité de n , $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x}$.
 - Interprète graphiquement les résultats précédents.
- Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ (On pourra poser : $X = 1-x$).
 - Interprète graphiquement le résultat précédent.

EXERCICE 2

Le sujet du concours d'entrée dans une grande école est noté sur 20 points. Il comporte 5 questions à choix multiples. Pour un candidat donné, on attribue quatre (4) points à chaque réponse juste et zéro (0) point à chaque question non traitée ou à réponse fausse.

On admet que lorsqu'un candidat répond au hasard à une question, la probabilité de donner une réponse juste est $\frac{1}{4}$.

1. Soit k le nombre exact de réponses justes données par un candidat à ce concours. Exprime en fonction de k la note globale N de ce candidat.
2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de réponses justes obtenues par un candidat qui a répondu au hasard à chacune des cinq questions.
 - a) Détermine les valeurs prises par X .
 - b) Démontre que : $P(X = 3) = \frac{45}{512}$.
 - c) Justifie que la probabilité pour que le candidat ait une note globale supérieure à 10 est : $\frac{53}{512}$.
3. On suppose qu'à ce concours, n candidats ont répondu au hasard aux cinq questions. On admet que lorsqu'un des n candidats répond au hasard à une question, la probabilité de donner une réponse juste est $\frac{1}{4}$.
 - a) Justifie que la probabilité P_n qu'au moins un des n candidats ait une note globale supérieure à 10 est : $1 - \left(\frac{459}{512}\right)^n$.
 - b) Détermine la valeur minimale de n pour que : $P_n \geq 0,99$.

PROBLÈME

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . L'unité graphique est 2 cm.

Soient n un entier naturel non nul et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = (1-x)^n e^{\frac{x}{2}}$.

On désigne par (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) .

Le but de ce problème est de calculer la limite de la suite (S_n) définie par :

$$S_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 f_n(x) dx.$$

Partie A : Étude de la fonction f_1 et d'une fonction associée.

1. a) Calcule : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{x}$.
b) Interprète graphiquement les résultats précédents.
2. a) Calcule la limite de f_1 en $-\infty$.
b) Interprète graphiquement le résultat précédent.

3. On suppose que f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Démontre que f_1 est strictement croissante sur $] - \infty ; - 1[$ et strictement décroissante sur $] - 1 ; +\infty[$.
 - Dresse le tableau de variations de f_1 .
 - Trace dans le repère (O, I, J) , la courbe (C_1) et sa tangente à l'origine.

Partie B : Etude de la fonction f_n .

- Détermine, suivant la parité de n , la limite de f_n en $+\infty$.
 - Détermine, suivant la parité de n , $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x}$.
 - Interprète graphiquement les résultats précédents.
- Calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x)$ (On pourra poser : $X = 1-x$).
 - Interprète graphiquement le résultat précédent.
- On suppose que pour tout entier naturel n non nul, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$.
 - Démontre que : $\forall x \in \mathbb{R}, f_n'(x) = \frac{1}{2}(-x - 2n + 1)(1-x)^{n-1} e^{\frac{x}{2}}$.
 - Étudie, suivant la parité de n , le signe de $f_n'(x)$.
 - Dresse, suivant la parité de n , le tableau de variation de f_n .
- Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation : $f_n(x) = f_{n+1}(x)$.
 - Déduis de ce qui précède que toutes les courbes (C_n) passent par deux points fixes que l'on précisera.
 - Étudie, suivant la parité de n , les positions relatives des courbes (C_n) et (C_{n+1}) .
 - Trace la courbe (C_2) dans le repère (O, I, J) .

Partie C : Calcul de la limite de la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $S_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 f_n(x) dx$.

- Justifie que la fonction f_n est décroissante sur $[0 ; 1]$.
- Démontre que : $\forall x \in [0 ; 1], f_n(x) \in [0 ; 1]$.
- Déduis de ce qui précède que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq S_n \leq \frac{1}{n}$.
- Détermine $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

MATHÉMATIQUES

SÉRIE C

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.

Chaque candidat recevra une (01) feuille de papier millimétré.

Tout modèle de calculatrice scientifique est autorisé.

Les tables trigonométriques et logarithmiques et les règles à calculs sont également autorisées.

EXERCICE 1

On désigne par Y une variable aléatoire vérifiant les conditions suivantes :

- Y prend les valeurs 1, -1 et 2 avec les probabilités respectives e^a , e^b et e^c où a , b et c sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r tels que : $a = b - r$ et $c = b + r$.
- L'espérance mathématique $E(Y)$ de Y est égale à 1.

1- a) Justifie que le couple (b, r) est solution du système (S) $\begin{cases} e^b e^r + e^b + e^b e^{-r} = 1 \\ e^b e^r - e^b + 2e^b e^{-r} = 1 \end{cases}$.

b) Résous le système (S).

c) Déduis de ce qui précède que : $a = \ln(\frac{1}{7})$ et $c = \ln(\frac{4}{7})$.

2- Justifie que la variance $V(Y)$ de Y est égale à $\frac{12}{7}$.

3- On marque sur une droite graduée (D) les points A, B et C d'abscisses respectives 1 ; -1 et 2.

On désigne par G le barycentre des points pondérés (A, 1), (B, 2) et (C, 4).

On note (I') l'ensemble des points M de la droite (D) tels que : $MA^2 + 2MB^2 + 4MC^2 = 187$ et on

pose : $h(M) = \frac{1}{7}(MA^2 + 2MB^2 + 4MC^2)$.

a) Calcule l'abscisse du point G.

b) Démontre que : $h(G) = V(Y)$.

c) Détermine l'ensemble (I').

EXERCICE 2

Dans le plan orienté, on considère un triangle OIJ tel que : $OI = OJ$ et $\text{Mes}(\widehat{OI}; \widehat{OJ}) = \frac{\pi}{2}$.

A, B et C sont les milieux respectifs des segments [IJ], [JO] et [OI].

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et t la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{IJ}$. On pose : $F = r \circ t$ et $G = t \circ r$.

1- Fais une figure. (On prendra : $OI = 8$ cm).

2- a) Détermine $F(C)$ et $G(B)$.

b) Déduis de ce qui précède la nature et les éléments caractéristiques de chacune des transformations F et G .

3- On désigne par F^{-1} la réciproque de la transformation F .

a) Détermine la nature de la transformation $G \circ F^{-1}$.

- c) Détermine (GoF)(I) puis déduis-en la nature et les éléments caractéristiques de la transformation GoF.
- 4- On munit le plan du repère orthonormé (O, I, J) tel que défini précédemment. Soit h l'homothétie de centre B et de rapport -2 . On pose : $S = h \circ r$.
- a) Écris l'axe de chacun des points A, B et C .
- b) Détermine l'écriture complexe de h et celle de r .
- c) Soit g l'application complexe associée à S .
- Démontre que : $\forall z \in \mathbb{C}, g(z) = -2iz - 2 + \frac{3}{2}i$.
- d) Déduis de ce qui précède la nature et les éléments caractéristiques de S .

PROBLÈME

On considère la suite (t_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $t_n = n - (n + \frac{1}{2})\ln(n) + \ln(n!)$.

Le but de ce problème est d'étudier la convergence de la suite (t_n) et de démontrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \ln(\sqrt{2\pi}).$$

Partie I : Etude de la convergence de la suite (t_n) .

Soit n un entier naturel non nul et ψ la fonction définie sur $] -n ; +\infty[$ par : $\psi(t) = \ln(1 + \frac{t}{n}) - \frac{t}{n}$.

On suppose que ψ est dérivable sur $] -n ; +\infty[$ et on note ψ' sa fonction dérivée.

1- a) Justifie que : $\forall t \in] -n ; +\infty[, \psi'(t) = \frac{-t}{n^2(1 + \frac{t}{n})}$.

b) Calcule $\psi(0)$.

c) Dresse le tableau de variation de la fonction ψ (On ne calculera pas les limites).

d) Déduis de ce qui précède que : $\forall t \in] -n ; +\infty[, \ln(1 + \frac{t}{n}) \leq \frac{t}{n}$.

2- a) En utilisant la question 1-d) et en effectuant un changement de variable, démontre que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln x \leq x - 1$.

b) Démonstre que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} (\frac{x}{k} - 1) dx = 0$.

c) Déduis des questions 2-a) et 2-b) que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln(\frac{x}{k}) dx \leq 0$.

d) Justifie alors que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln(x) dx \leq \ln(k)$.

e) En utilisant la relation de Chasles, démontre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln(x) dx \leq \ln(n!).$$

3- a) En utilisant une intégration par parties, démontre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n - (n + \frac{1}{2}) \ln(n + \frac{1}{2}) + \ln(n!) \geq \ln(\sqrt{2}).$$

b) Démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, t_n \geq \ln(\sqrt{2})$.

4- On définit la fonction f sur l'intervalle $]0; 1[$ par : $f(x) = \frac{1}{2x} \ln(\frac{1+x}{1-x})$.

On admet que : $\forall x \in]0; 1[, f(x) \geq 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, t_{n+1} - t_n = 1 - f(\frac{1}{2n+1})$.

a) Détermine le sens de variation de la suite (t_n) .

b) Dédus des questions précédentes la convergence de la suite (t_n) .

Partie II : Calcul de la limite de la suite (t_n) .

On définit la suite (w_n) par :

$$w_0 = \frac{\pi}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt.$$

1- a) Calcule w_1 .

b) Démontre que la suite (w_n) est décroissante et positive. On admettra que la suite (w_n) est à termes strictement positifs.

c) A l'aide d'une intégration par parties, démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} w_n$.

(On remarquera que : $\sin^{n+2}(t) = \sin(t) \times \sin^{n+1}(t)$).

d) En utilisant les questions 1-b) et 1-c) de la partie II, justifie que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{w_{n+1}}{w_n} \leq 1.$$

e) Dédus de ce qui précède $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{w_{n+1}}{w_n}$.

2- On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, y_n = (n+1)w_{n+1} \times w_n$.

a) Démontre que la suite (y_n) est constante.

b) Dédus de ce qui précède que : $\forall n \in \mathbb{N}, y_n = \frac{\pi}{2}$.

c) Détermine $\lim_{n \rightarrow +\infty} n w_n^2$ (On remarquera que : $n w_n^2 = \frac{n}{n+1} \times y_n \times \frac{w_n}{w_{n+1}}$).

d) Dédus de ce qui précède que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} w_n = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.

3- On admet dans toute la suite du problème que si une suite (a_n) converge vers ℓ alors la suite (a_{2n}) converge aussi vers ℓ .

a) Dédus de la question 2-c) de la partie II la limite de la suite $(n w_{2n}^2)$.

(On remarquera que : $n w_{2n}^2 = \frac{1}{2} (2 n w_{2n}^2)$).

b) En utilisant la question 1-c) de la partie II, démontre par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \times \frac{\pi}{2}.$$

c) Démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, e^{t_n} = n! \left(\frac{e}{n}\right)^n \times \frac{1}{\sqrt{n}}$.

d) En admettant que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, e^{t_{2n} - 2t_n} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{n w_{2n}^2}$, détermine la limite de la suite (t_n) .

PHYSIQUE-CHIMIE

SÉRIES : C-E

*Cette épreuve comporte quatre (04) pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4, 4/4.
Toute calculatrice est autorisée.*

EXERCICE 1 (5 points)

Partie A (3 points)

1. Le dosage acido-basique d'une solution S_1 par une solution S_2 donne la courbe ci-dessus.

1.1 La solution S_1 est :

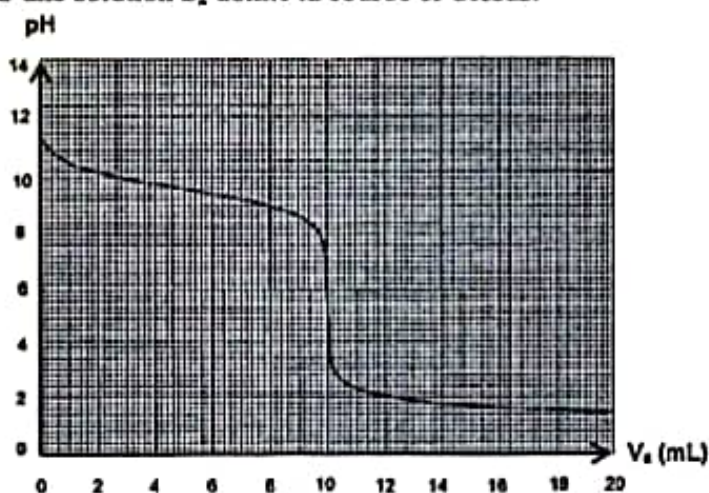
- a. un acide fort ;
- b. un acide faible ;
- c. une base forte ;
- d. une base faible.

1.2 Le mélange obtenu à l'équivalence est :

- a. acide ;
- b. basique ;
- c. neutre.

1.3 Les coordonnées du point d'équivalence E sont :

- a. (5,5 mL ; 9,4) ;
- b. (10 mL ; 5,4) ;
- c. (10 mL ; 4).



Recopie pour chaque cas, la lettre qui correspond à la réponse correcte.

- 2. Calcule les concentrations molaires volumiques des espèces chimiques H_3O^+ , OH^- , CH_3CO_2H , $CH_3CO_2^-$ contenues dans une solution d'acide éthanóique de concentration molaire volumique $C_a = 10^{-2} \text{ mol. L}^{-1}$ et de pH = 3,4.
- 3. Donne le nom et les propriétés chimiques d'une solution aqueuse dont le pH est égal au pKa du couple acide/base qu'elle contient.
- 4. Recopie et complète les phrases ci-dessous.
 - 4.1 À l'équivalence du dosage d'un acide fort par une base forte, le pH est égal à.....
 - 4.2 Lorsqu'on dose un acide faible par une base forte, à l'équivalence, la solution est(acide / neutre / basique).

EXERCICE 1 (4 points)

Une bobine de longueur $\ell = 40$ cm, de diamètre $d = 6$ cm, comporte $N = 2\,000$ spires. Elle est parcourue par un courant d'intensité I . Sa section est notée S . On donne $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ SI.

1. L'expression du flux propre est :

a. $\Phi_p = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell} I^2;$

b. $\Phi_p = \frac{N^2 S}{\mu_0 \ell} I;$

c. $\Phi_p = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell} I.$

2. L'expression de l'inductance est :

a. $L = \frac{\mu_0 N^2}{\ell} S;$

b. $L = \frac{\mu_0 N \ell}{S};$

c. $L = \frac{\mu_0 N \ell^2}{S}.$

3. La valeur de l'inductance est :

a. $L = 3,55 \cdot 10^{-2}$ H;

b. $L = 3,55 \cdot 10^{-3}$ H;

c. $L = 2,75 \cdot 10^{-2}$ H

Recopie la lettre qui correspond à la bonne option pour chacune des propositions ci-dessus.

EXERCICE 2 (5 points)

Le laboratoire d'un lycée de la place dispose de flacons de produits chimiques. L'étiquette d'un de ces flacons porte l'indication $C_5H_{10}O_2$. On note A le composé contenu dans le flacon.

En vue de faire la synthèse d'un composé organique F à partir de A, les élèves, sous la supervision de leur professeur, réalisent une série d'expériences.

Expérience 1 : l'action de l'eau sur A donne deux composés B et D. La solution de B a un pH inférieur à 7.

Expérience 2 : l'oxydation ménagée de D conduit à la formation d'un composé E qui réagit avec la 2,4-DNPH, mais n'a pas d'effet sur le réactif de Schiff.

Expérience 3 : l'action d'une solution d'hydroxyde de potassium sur 17 g de A donne les composés F et D.

Données : $M_C = 12 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$; $M_O = 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$; $M_H = 1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$; $M_K = 39 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Pourcentage massique en oxygène de B: 53,33%.

Pourcentage massique en oxygène de D: 26,66%.

1. Donne les fonctions chimiques de A, B, D et E.
2. Détermine :
 - 2.1 les formules brutes de B et D ;
 - 2.2 la formule semi-développée et le nom de A.
3. Écris l'équation-bilan de la réaction entre A et la solution d'hydroxyde de potassium.
4. Détermine la masse du composé F.

EXERCICE 3 (5 points)

Au cours d'une séance de travaux pratiques, votre professeur vous demande d'étudier un circuit RLC série. Ce circuit comprend un conducteur ohmique de résistance $R = 100 \, \Omega$, une bobine d'inductance $L = 1 \, \text{H}$ et de résistance interne $r = 20 \, \Omega$ et un condensateur de capacité variable.

Le circuit est soumis à une tension $u(t) = U_m \cos \omega t$ (figure 1).

Vous observez à l'oscilloscope les variations des tensions en fonction du temps (figure 2).

Vous poursuivez l'expérience en faisant varier la capacité du condensateur, vous obtenez l'oscillogramme de la figure 3.

Le balayage horizontal correspond à $1 \, \text{ms/division}$ et la déviation verticale $2 \, \text{V/division}$.

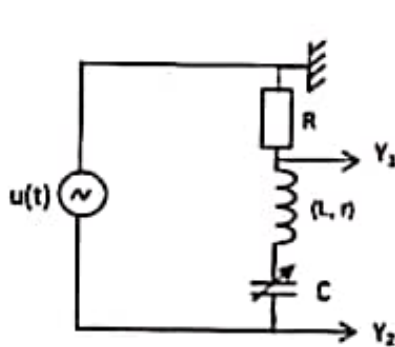


Figure 1

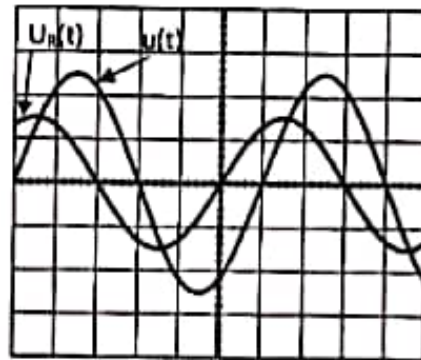


Figure 2

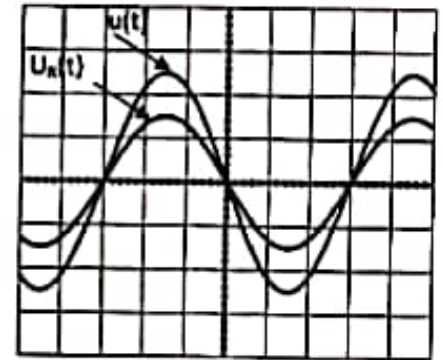


Figure 3

1. Nomme :
 - 1.1 les grandeurs visualisées sur les voies Y_1 et Y_2 ;
 - 1.2 le phénomène observé à la figure 3.
2. Détermine à partir de l'oscillogramme de la figure 2 :
 - 2.1. la période T de la tension ;
 - 2.2. l'impédance Z du circuit électrique ;
 - 2.3. la phase $\varphi_{u/i}$;
 - 2.4. la tension électrique $u(t)$;
 - 2.5. l'intensité $i(t)$ du courant électrique.
3. Dédus de ce qui précède :
 - 3.1. la capacité C du condensateur (figure 2) ;
 - 3.2. la capacité C_0 du condensateur (figure 3).

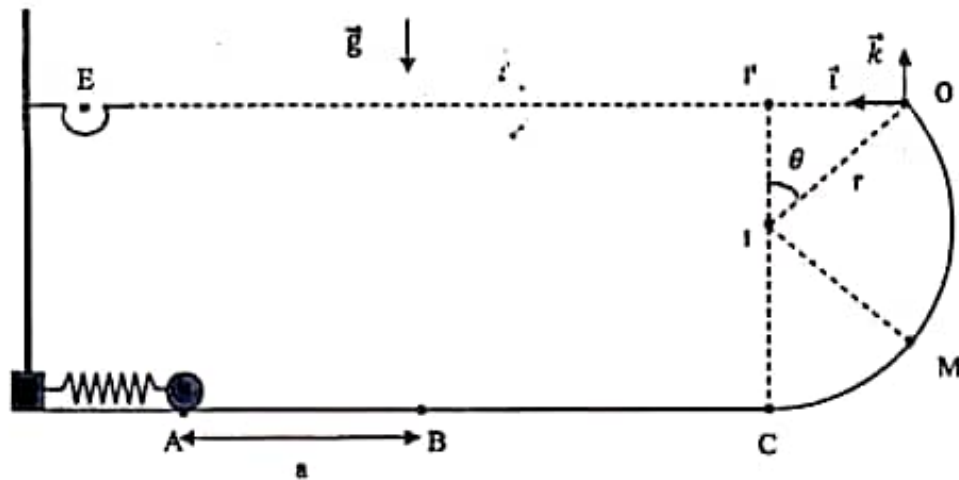
EXERCICE 4 (5 points)

Un jeu dont le dispositif est représenté par le schéma ci-après, comprend un lanceur de projectile et une piste ABCO située dans le plan vertical.

La partie horizontale AC de la piste est raccordée au point C à la partie circulaire CO de centre I et de rayon r .

Pour gagner à ce jeu, il faut faire tomber le projectile de masse $m = 100 \, \text{g}$ dans le réceptacle E distant de O tel que $OE = 9 \, \text{m}$, à l'aide d'un ressort à spires non jointives de constante de raideur $k = 250 \, \text{N.m}^{-1}$ (voir figure).

Un élève de ta classe prend part à ce jeu. Le projectile étant accroché à l'extrémité libre du ressort au point B, il le comprime d'une longueur $a = 20 \, \text{cm}$, puis abandonne l'ensemble {ressort + projectile} sans vitesse initiale.



Le projectile se détache du ressort au point B, arrive au point C avec une vitesse V_C et aborde la partie circulaire CO. Il quitte la piste au point O avec la vitesse V_0 .

Ce projectile est assimilé à un objet ponctuel. Les forces de frottement le long du trajet et l'action de l'air sont négligées.

La référence de l'énergie potentielle élastique est prise au point B (ressort détendu).

Données :

- $r = 1 \text{ m}$, le rayon de la partie circulaire de la piste.
- $\theta = 60^\circ$.
- $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$, l'intensité de la pesanteur.

Il t'est demandé de dire si le jeu est réussi.

1. Représente les forces qui s'exercent sur le projectile :
 - 1.1. en un point situé entre A et B ;
 - 1.2. au point M.
2. Détermine la vitesse :
 - 2.1. V_B du projectile au point B ;
 - 2.2. V_C du projectile au point C.
3. Montre que :
 - 3.1. la vitesse du projectile au point O est $V_0 = 8,36 \text{ m.s}^{-1}$;
 - 3.2. l'équation cartésienne de la trajectoire du projectile dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{k})$ est :

$$z = -0,29x^2 + 1,73x$$
 ;
 - 3.3 le projectile ne tombe pas dans le réceptacle E.
4. Détermine la vitesse avec laquelle le projectile doit quitter le point O pour réussir à ce jeu.