AN-NOUR MATHEMATIQUE

BAC C&D

3è édition Volume I

Nombres complexes similitudes planes directes probabilités équations différentielles statistiques suites numériques calcul intégral fonctions numériques

Auteur : Mr *Moussa Abdoulaye Diallo*

25 / 09 / 2013 à Niamey (Niger)

As salam aleykoum war rah matoul la wa barkatouhou

Au nom d'Allah, L'infiniment Miséricordieux, Le Très Miséricordieux

Mes chers frères et sœurs

Louange à Allah et que la prière et le salut soient sur le serviteur et Messager d'Allah, Muhammad, le meilleur que l'humanité est porté (malheur à ceux qui l'ont insultés et mentis sur lui.), sa famille et ses Compagnons.
Gloire à Dieu, mon Maitre Qui m'a tout donné et continue à me donner. Je n'ai de savoir de ce qu'Allah (soub hana wat tala), Le Tout Miséricordieux m'avait offert.
Seigneur pardonne nos péchés, fais-nous miséricorde, accepte nos bonnes œuvres et bénit nos actions. Ta parole est véridique.
Louange à Allah, Qui de Sa Grace, j'avais pu proposer cette œuvre Qui sans Lui, je ne serais pas à ce niveau. « Gloire et pureté à Toi, ô Allah, et à Toi la louange. Que ton Nom soit béni et Ta Majesté soit élevée, et il n'y a pas d'autre divinité [digne d'adoration] en dehors de Toi »

Gloire et pureté à mon Seigneur le Très Grand, béni soit à mes parents et les remerciements à mes frères et sœurs. **Chers élèves et enseignants, je vous demande de me pardonner pour tous les torts commis.**

Confiez-vous à enseignants pour les réponses et détailles de ces exercices que je vous ai proposés. Si vous trouverez des erreurs ; des méthodes concises ou des remarques afin d'améliorer notre œuvre, svp contacter moi par sms au 90 10 89 59 en précisant l'exercice concerné.

An-nour Mathématique, **3e édition (Volume 1)**, est une annale unique conforme au programme officiel nigérien, axé sur les chapitres suivants : nombres complexes ; similitudes planes directes ; probabilités ; statistiques ; suites numériques ; calcul intégral et fonctions numériques. Il en a plus de 350 exercices types bac corrigés. En effet ces exercices tirent leurs sources dans les documents des élèves tels que les collections : IRMA, Delagrave, Terracher, Di mathème, Cube, Radial, Hachette, Durrande, CIAM, Vuibert, Bordas, les examens, les planches d'exercices…. pour ne citer que ceux-là. Ces exercices sont très pertinents.

Nous sommes ouvert à tout ce qui désire se lancer dans ce type de projet, d'éditer un ouvrage de mathématique au collège ou au lycée. D'ailleurs, une annale corrigée de Physique-Chimie est en cours, nous attendons votre participation à son élaboration.

Nul n'est parfait, la perfection appartient à Allah et Il l'a donne à celui qu'Il veut, donc nous espérons nos suggestions afin d'aider nos frères et sœurs à réussir leur examen.

Je vous souhaite bon usage et sollicite vos invocations.

A ma femme, Maryam Abdou, je t'aime par Allah.

Auteur : **Mr** ***Moussa Abdoulaye Diallo***

AVANT PROPOS

Gloire et pureté à mon Seigneur le Très Grand, béni soit à mes parents et les remerciements à mes frères et sœurs.

Tous les remerciements sont à mes frères de la Mosquée de l'UAM de Niamey aux deux premier rang le frère Lawali Salifou qui m'a aidé à avoir l'outils informatique et le tonton Moussa Mahamadou en plus de l'outil informatique il est aussi mon producteur.

J'en suis à la troisième (3è) édition d'An-nour Mathématique.

Tous les remerciements sont à mes enseignants :

- *Dr Otto Adamou à l'université de Niamey*
- *Mr Mali Abdoulaye au Lycée municipal de Niamey*
- *Mr Alako Adji au Lycée de Doutchi*
- *Mr Sani Mainassara au Lycée Sarawnia de Dosso*
- *Mr Dingamyo N'gonn Dingam au CES sony à Niamey (32 ans d'expérience d'enseignement)*
- *Mr Abdoul Latif Waidi au Collège Mariama à Niamey (26 ans d'expérience d'enseignement).*

AUTEUR Mr *MOUSSA ABDOULAYE DIALLO*

SVP MAITRISER TOUS LES COURS AVANT DE COMMERCER A TRAITER LES EXERCICES

ET CHERCHER AN-NOUR *(3è) édition (volume 2)* **POUR COMPLETER VOTRE FORMATION.**

BON USAGE ET SOLLICITE VOS INVOCATIONS

Sommaire

Nombres complexes

Louange à Allah et que la prière et le salut soient sur le serviteur et Messager d'Allah, Muhammad, le meilleur que l'humanité est porté (malheur à ceux qui l'ont insultés et mentis sur lui.), sa famille et ses Compagnons.
Gloire à Dieu, mon Maitre Qui m'a tout donné et continue à me donner. Je n'ai de savoir de ce qu'Allah (soub hana wat tala), Le Tout Miséricordieux m'avait offert.
Seigneur pardonne nos péchés, fais-nous miséricorde, accepte nos bonnes œuvres et bénit nos actions. Ta parole est véridique.
Louange à Allah, Qui de Sa Grace, j'avais pu proposer cette œuvre Qui sans Lui, je ne serais pas à ce niveau. « Gloire et pureté à Toi, ô Allah, et à Toi la louange. Que ton Nom soit béni et Ta Majesté soit élevée, et il n'y a pas d'autre divinité [digne d'adoration] en dehors de Toi »

ALLAH MERCI

Auteur Moussa Abdoulaye Diallo

SMS 90 10 89 59

Nombres complexes

En classe terminale, les nombres complexes sont vus essentiellement comme constituant un nouvel ensemble de nombres avec ses opérations propres. Cette introduction s'inscrit dans la perspective d'un approfondissement lors d'une poursuite d'études.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Forme algébrique, conjugué. Somme, produit, quotient.	• Effectuer des calculs algébriques avec des nombres complexes.	On introduit dans ce chapitre des éléments lui donnant une dimension historique.
Équation du second degré à coefficients réels.	• Résoudre dans C une équation du second degré à coefficients réels.	
Représentation géométrique.	• Représenter un nombre complexe par un point ou un vecteur.	Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.
Affixe d'un point, d'un vecteur.	• Déterminer l'affixe d'un point ou d'un vecteur.	
Forme trigonométrique : - module et argument, interprétation géométrique dans un repère orthonormé direct ; - notation exponentielle.	• Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique et inversement. • Connaître et utiliser la relation $z\bar{z}=\|z\|^2$. • Effectuer des opérations sur les nombres complexes écrits sous différentes formes.	La notation exponentielle est introduite après avoir montré que la fonction $\theta \mapsto \cos\theta + i\sin\theta$ vérifie la même relation fonctionnelle que la fonction exponentielle. Les nombres complexes permettent de mémoriser les formules trigonométriques d'addition et de duplication vues en première. ⇆ [SI] Analyse fréquentielle d'un système.

Objectifs :

- **Connaître les notions de base se rapportant aux nombres complexes : partie réelle et partie imaginaire, module et argument, forme algébrique et forme trigonométrique, opérations, affixe d'un point M du plan complexe.**
- **Utiliser les notations algébrique, trigonométrique et exponentielle d'un nombre complexe pour les calculs.**
- **Résoudre des équations dans ℂ.**

Cours :

Représentation du chapitre :

Dans IR, l'équation $x^2+1=0$ n'a pas de solution. Dans ℂ, ensemble des nombres complexes, elle en a deux : i et $-i$.

La notation i fut introduite par Euler, le grand mathématicien suisse. Dans ce livre, on notera j à la place de i, notation utilisée pour l'intensité en électricité.

Les nombres complexes sont aussi très utilisés en géométrie, en particulier pour caractériser les transformations ponctuelles.

A. Rappel sur les ensembles :

⌧ ℕ est l'ensemble des entiers naturels. C'est l'ensemble des entiers positifs ou nuls.
Dans ℕ l'équation $x+1=0$ n'a pas de solution. Cette équation a une solution notée -1, cette solution est un élément de l'ensemble ℤ.

⌧ ℤ est l'ensemble des entiers relatifs. C'est l'ensemble des entiers positifs, négatifs ou nuls.
ℤ contient ℕ , c'est-à-dire que ℕ est contenu dans ℤ , ce que l'on note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
Dans ℤ l'équation $2x=1$ n'a pas de solution. Cette équation a une solution notée $\frac{1}{2}$, cette solution est un élément de l'ensemble ℚ.

⌧ ℚ est l'ensemble des nombres rationnels. C'est l'ensemble de tous les nombres de la forme $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$.
ℚ contient ℤ. On a donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$
Dans ℚ l'équation $x^2=3$ n'a pas de solutions. Cette équation a deux solutions notées $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$, ces solutions sont des éléments de l'ensemble ℝ.

⌧ ℝ est l'ensemble des nombres réels. C'est l'ensemble des abscisses de tous les points d'une droite. ℝ contient ℚ. On a donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
Dans ℝ l'équation $x^2+1=0$ n'a pas de solutions. Cette équation a deux solutions notées $-i$ et i, ces solutions sont des éléments de l'ensemble ℂ.

⌧ ℂ est l'ensemble des nombres complexes. C'est l'ensemble des nombres de la forme $a+bi$ ou $x+yi$, vérifiant l'égalité $i^2=-1$, et a, b, x et y étant des réels quelconques. ℂ contient ℝ . On a donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

B. **Définitions :**

On appelle corps des nombres complexes, et on note $\mathbb{C}$ un ensemble contenant $\mathbb{R}$ tel que :

☒ **Il existe dans $\mathbb{C}$ 1 élément noté i tel que $i^2 = -1$**

☒ **Tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit sous la forme $a + bi$ ou $x + yi$, vérifiant l'égalité $i^2 = -1$, et a, b, x et y étant des réels quelconques.**

☒ **$\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent l'addition et la multiplication de $\mathbb{R}$, et qui suivent les mêmes règles de calcul. Un nombre complexe sera souvent représenté par la lettre z.**

☒ $i^0 = 1$; $i^1 = i$; $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$.

☒ $\forall\, n \in IN;\ i^{4n} = 1$

☒ $\forall\, n \in IN;\ i^{4n+1} = i$

☒ $\forall\, n \in IN;\ i^{4n+2} = i^{4n} \times i^2 = -1$

☒ $\forall\, n \in IN;\ i^{4n+3} = i^{4n} \times i^2 \times i = -i$.

Dans tout ce qui suit le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

C. **Module et argument d'un nombre complexe.**

1. **Module d'un nombre complexe :**

a) **Définition :**

Le module de z est le nombre réel positif, noté $|z| = r$ et défini par $|z| = \mathrm{r} = \sqrt{z.\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

Ou bien si le point M est l'image du complexe $z = a + ib$ (a ∈ IR , b ∈ IR) dans le plan complexe $\mathbb{C}$, on appelle module de z, noté $|z|$, la distance OM telle que : $|z| = \mathrm{OM} = \mathrm{r} = \sqrt{z.\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

b) **Propriétés :**

Soient z et z' deux nombres complexes.

☒ $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

☒ $|z| = |-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}| = |z|$ **quel que soit z.**

☒ $|z.z'| = |z|.|z'|$

☒ $\big||z| - |z'|\big| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$

☒ $|z^n| = |z|^n$ **avec** $n \in \mathbb{N}^*$

☒ $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ **avec** $z' \neq 0$

Soient les points M et M′ d'affixes respectives $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$.

☒ $\mathrm{OM} = \|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$

☒ $\mathrm{MM'} = \left\|\overrightarrow{\mathrm{MM'}}\right\| = \sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2}$

2. **Argument d'un nombre complexe :**

a) **Définition :**

Un argument du nombre complexe z non nul est une mesure de l'angle polaire du point M dans le plan complexe muni du repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$, c'est à dire une mesure θ de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{OM}})$.

b) **Propriétés :**

☒ $arg(\bar{z}) = -arg(z)\ [2\pi]$ **et** $|\bar{z}| = |z|$.

☒ $arg(-z) = arg(z) + \pi\ [2\pi]$ **et** $|-z| = |z|$.

☒ $arg(z^n) = n \times arg(z) + 2k\pi\ \ [k \in \mathbb{Z}]$

☒ $arg(zz') = arg(z) + arg(z') + 2k\pi\ \ [k \in \mathbb{Z}]$

☒ $arg\left(\frac{z}{z'}\right) = arg(z) - arg(z') + 2k\pi\ \ [k \in \mathbb{Z}]$

☒ $|z \times z'| = |z| \times |z'|$ **et** $arg(z \times z') = arg(z) + arg(z') + 2\pi k$.

☒ $|z^n| = |z|^n\ n \in \mathbb{N}$ **et** $arg(z^n) = n \times arg(z)[2\pi]$.

☒ $z \times z' = |z| \times |z'|[\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')]$

☒ $\frac{z}{z'} = \frac{|z|}{|z'|}[\cos(\theta - \theta') + i\sin(\theta - \theta')]$.

☒ **l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{AB})$ a pour mesure $arg(z_B - z_A)\ [2\pi]$**

☒ **l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ a pour mesure**
$arg(z_D - z_C) - arg(z_B - z_A) = arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi]$

D. **Formes d'un nombre complexe :**

1. **Forme algébrique ;**

a) **Définition :**

La forme algébrique d'un nombre complexe z est son écriture de la forme $z = a + bi$ ou $z = x + iy$ avec$(a; b)$ ou $(x; y)$sont des réels.

a ou x est la partie réelle de z, on note $\begin{cases} \mathrm{R}_e(z) = a \\ \mathrm{R}_e(z) = x \end{cases}$

b ou y est la partie imaginaire de z, on note $\begin{cases} \mathrm{Im}(z) = a \text{ ou} \\ \mathrm{Im}(z) = x \end{cases}$.

La partie réelle de z est un nombre réel.

La partie imaginaire de z est un nombre réel.

Ecriture algébrique : $z = a + ib = x + iy$.

b) **Propriétés :** **soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$**

☒ $z = z' \Leftrightarrow [a = a'$ et $b = b']$

☒ $z = 0 \Leftrightarrow [a = 0$ et $b = 0]$

☒ $z + z' = (a + a') + (b + b')i$

☒ $z + \bar{z} = 2Re(z) = 2a$

☒ $z - \bar{z} = 2iIm(z) = 2ib$

☒ $|z|^2 = z\bar{z} = [Re(z)]^2 + [Im(z)]^2 = a^2 + b^2$

☒ $z \times z' = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$

☒ $\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$

☒ $\frac{z}{z'} = \frac{a+bi}{a'+b'i} = \frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2} - i\frac{a'b-ab'}{a'^2+b'^2}$

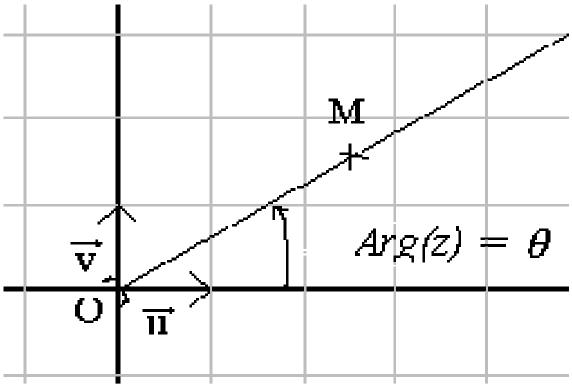
2. **Forme trigonométrique :**

a) **Définition :**

La forme trigonométrique d'un nombre complexe z est son écriture de la forme $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ ou $z = |z|(\cos x + i\sin x)$, avec

- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ **étant son module ;**
- $\begin{cases} arg(z) = \theta + 2k\pi \text{ ou} \\ arg(z) = x + 2k\pi \end{cases}$ **θ ou x étant son argument.**

Exemple 1 : Ensemble des points M d'affixe z tel que $Arg(z) = \theta$. Cet ensemble est une demi droite d'origine O (O non compris dans la demi droite) et dont l'angle avec l'axe (O ; $\vec{u}$) mesure θ radians.



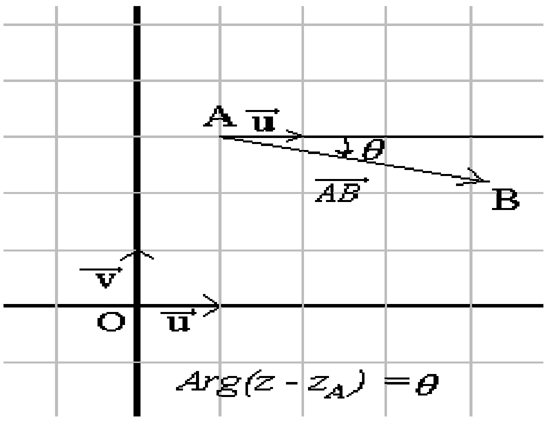
exemple 2 : Ensemble des points M d'affixe z tels que $Arg(z - z_A) = \theta$ où z_A est l'affixe d'un point A et θ est un réel . Cet ensemble est une demi droite d'origine A (A non compris dans cette demi-droite) et dont l'angle avec la parallèle à l'axe des réels passant par A mesure θ radians.

$z - z_A$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AM}$

$Arg(z - z_A)$ est une mesure de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{AM})$

l'ensemble des points M du plan tels que $Arg(z - z_A) = \theta$

est l'ensemble des points M tels que $mes(\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = \theta$



b) **Propriétés :**

☒ $[\cos(\theta) + i\sin(\theta)].[\cos(\theta') - i\sin(\theta')] = [\cos(\theta - \theta') + i\sin(\theta - \theta')]$

☒ $[\cos(\theta) + i\sin(\theta)].[\cos(\theta') + i\sin(\theta')] = [\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')]$

☒ $\frac{1}{\cos(\theta)+i\sin(\theta)} = \begin{cases} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) \\ ou = \cos(\theta) - i\sin(\theta) \end{cases}$

☒ $\frac{\cos(\theta)+i\sin(\theta)}{\cos(\theta')+i\sin(\theta')} = \cos(\theta - \theta') + i\sin(\theta - \theta')$

Formule de Moivre : $\forall\, n \in \mathrm{IN}$ *et* $\theta \in \mathrm{IR}$

$[\cos\theta + i\sin\theta]^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

$[\cos\theta - i\sin\theta]^n = \cos(n\theta) - i\sin(n\theta)$

☒ $z^n = |z|^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n = |z|^n\cos(n\theta) + |z|^n i\sin(n\theta) = |z|^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]$

☒ $z^n + \overline{z^n} = 2|z|^n\cos(n\theta)$.

☒ $z^n - \overline{z^n} = 2i|z|^n\sin(n\theta)$.

3. **Forme exponentielle :**

a) **Définition :**

La forme exponentielle d'un nombre complexe z est son écriture de la forme $z = |z|e^{\theta i}$.

On déduit la forme exponentielle à partir de celle trigonométrique.

$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|e^{\theta i} = re^{\theta i} = [r;\theta]$.

b) **Propriétés :**

☒ $z = |z|[\cos x + i\sin x] = |z|e^{xi} = [|z|; x]$

☒ $|e^{\theta i}| = 1$ et $arg(e^{\theta i}) = \theta\ [2\pi]$

☒ $e^{\theta i}.e^{\theta' i} = e^{(\theta+\theta')i}$

☒ $\frac{z}{z'} = \frac{|z|}{|z'|}\frac{e^{\theta i}}{e^{\theta' i}} = \frac{|z|}{|z'|}e^{(\theta-\theta')i}$

☒ $z \times z' = |z| \times |z'| \times e^{(\theta+\theta')i}$.

☒ $\bar{z} = |z|\overline{e^{\theta i}} = |z|e^{-\theta i}$

☒ $[e^{\theta i}]^n = e^{n\theta i}$ $\quad avec\ n \in \mathbb{Z}$

☒ $-e^{\theta i} = e^{(\theta+\pi)i}$

Formule d'Euler : $\forall\, n \in \mathrm{IN}$ *et* $x \in \mathrm{IR}$

$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ ou $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

$\cos(nx) = \frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}$ ou $\sin(nx) = \frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}$

☒ $re^{\theta i} = r'e^{\theta' i} \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta'\ [2\pi] \end{cases}$

Relations : $\forall\, n \in \mathrm{IN}$ *et* $x \in \mathrm{IR}$

☒ $\cos x = \frac{z+\bar{z}}{2} = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ ou $\sin x = \frac{z-\bar{z}}{2i} = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ et $z\bar{z} = 1$

☒ $z^n + \overline{z^n} = |z|^n(e^{inx} + e^{-inx}) = 2|z|^n\cos(nx)$.

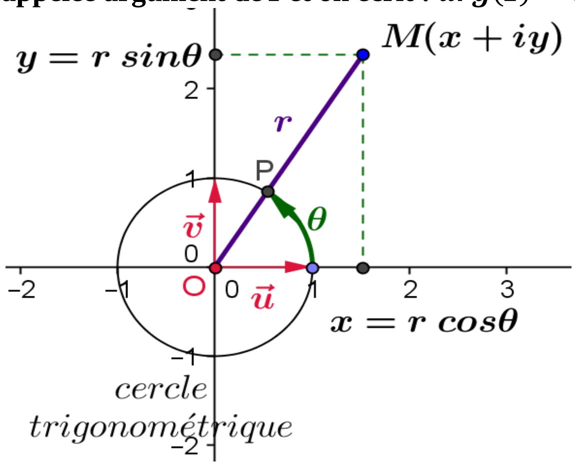
☒ $z^n - \overline{z^n} = |z|^n(e^{inx} - e^{-inx}) = 2i|z|^n\sin(nx)$.

☒ $1 + e^{i\alpha} = 2e^{i\frac{\alpha}{2}} \times \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$; $\alpha \in IR$

☒ $1 - e^{i\alpha} = -2ie^{i\frac{\alpha}{2}} \times \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$; $\alpha \in IR$

E. Représentation géométrique ;

☒ L'axe des abscisses est l'ensemble des points M d'affixe un réel, on l'appellera aussi « axe des réels »
☒ L'axe des ordonnées est l'ensemble des points M d'affixe un imaginaire pur : on l'appellera aussi « axe des imaginaires purs ».
☒ Un point M distinct de O est repéré de deux façons, soit par ses coordonnées cartésiennes $(a; b)$ ou soit par ses coordonnées polaires $(r; \theta)$.
☒ Soit M l'image du nombre complexe z tel que $z = a + bi$. On pose $OM = r$ avec $r \geq 0$. Le nombre positif $OM = r$ est appelé module de z et noté $|z|$.
Le nombre réel θ est une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$. Cette mesure est définie à $2\pi k$ près avec $k \in \mathbb{Z}$ et est appelée argument de z et on écrit : $arg(z) = \theta\ [2\pi]$.



F. Racines n-ième d'un nombre complexe :

a) **Définition :** Soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in$ IN.

On appelle racine n-ième du nombre complexe Z tout nombre complexe z vérifiant $z^n = Z$.
Rechercher les racines n-ieme d'un nombre complexe Z revient à résoudre, dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) $z^n = Z,\ n \geq 2$.

Exemple : Soit à rechercher les racines n-ième de Z

En générale les racines n-ièmes d'un nombre complexe se déterminent par :
$(\rho; r) \in (\mathrm{IR}_+^*)^2; (\theta; \alpha) \in \mathrm{IR}^2$.

$$\begin{cases} Z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = [\rho; \theta] \\ z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = [r; \alpha] \\ z^n = r^n[\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)] = [r^n; n\alpha] \ \text{(E)} \end{cases}$$

Les solutions de (E) sont :

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}e^{\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)i} = \left[\sqrt[n]{\rho}; \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

avec $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ et $\sqrt[n]{\rho} \in \mathrm{IR}_+^*$.

NB : Tout nombre complexe non nul possède exactement deux racines carrées. De plus, ces deux racines carrées sont opposées l'une de l'autre.
☒ **Exemple :** racines carrées $n = 2$; $k = \{0; 1\}$

$$k = 0,\ z_0 = \left[\rho; \frac{\theta}{2}\right] = \rho\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

$$k = 1,\ z_1 = \left[\rho; \frac{\theta}{2} + \pi\right] = -z_0 = -\left[\rho; \frac{\theta}{2}\right]$$

☒ **Exemple :** racines cubiques $n = 3$; $k = \{0; 1; 2\}$

$$k = 0,\ z_0 = \left[\sqrt[3]{\rho}; \frac{\theta}{3}\right] = \sqrt[3]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{3}\right)\right]$$

$$k = 1,\ z_1 = \left[\sqrt[3]{\rho}; \frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}\right]$$

$$k = 2,\ z_2 = \left[\sqrt[3]{\rho}; \frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}\right] = \left[\sqrt[3]{\rho}; \frac{\theta}{3} - \frac{2\pi}{3}\right]$$

G. Racine n-ième de l'unité :

On appelle *racine n-ième de l'unité* une racine n-ième de 1, c'est-à-dire un nombre complexe z tel que $z^n = 1$. On notera $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} / z^n = 1\}$. Les racines n-ièmes de l'unité sont de la forme $z_k = e^{\left(\frac{2k\pi}{n}\right)i} = \left[1; \frac{2k\pi}{n}\right]$ avec $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Ces racines sont situées au sommet d'un polygone régulier de n côtés.

H. Résolution d'équation dans $\mathbb{C}$:

Les méthodes de résolution sont souvent les mêmes que dans IR : il faut d'abord essayer de factoriser, voir s'il y a une identité remarquable, chercher une racine évidente. On désire donc se ramener à des produits de facteurs du premier degré ou du second degré.
Remarque : il faut penser que $-1 = i^2$ et donc que $z^2 + 1$ est factorisable dans $\mathbb{C}$ alors qu'il ne l'est pas dans IR.

1. Résolution d'une équation du type $z^n = a$:

Si $n > 2$ avec $n \in$ IN, $(z; a) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$, on écrit z et a sous forme exponentielle. L'équation admet alors n solutions en donnant à k, n valeurs consécutives : $z = re^{\theta i}$ et $a = \rho e^{\alpha i}$;

$$\begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n},\ [k \in \mathbb{Z}] \end{cases} \text{ou } z_k = \sqrt[n]{\rho}e^{\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)i} = \left[\sqrt[n]{\rho}; \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

avec $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ et $\sqrt[n]{\rho} \in \mathrm{IR}_+^*$.

2. **Résolution d'une équation du 1^{nd} degré :**

Toute équation du premier degré d'inconnue z se ramène à $az+b=0$ avec $(a;b)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}$ doit avoir une solution. Cette équation a pour solution $z=-\frac{b}{a}$.

3. **Résolution d'une équation du 2^{nd} degré :**

a) **A coefficient réels :**

Toute équation du second degré d'inconnue z se ramène à $az^2+bz+c=0$ avec $(a;b;c)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^2$ peut avoir un discriminent Δ soit $\begin{cases}\Delta>0\\ \Delta=0\\ \Delta<0\end{cases}$. Il y aura trois possibilités, d'avoir au moins une solution :

☒ **Si $\Delta>0$, alors $z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$**

☒ **Si $\Delta<0$, alors $z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$**

☒ **Si $\Delta=0$, alors l'équation admet une seule solution $z=\frac{-b}{2a}$.**

b) **A coefficient au moins complexes :**

Toute équation du second degré d'inconnue z se ramène à $az^2+bz+c=0$ avec $(a;b;c)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^2$ peut avoir son discriminant une partie imaginaire. on calcule la racine carrée du **discriminent Δ et on choisit l'une des racines trouvée : $\Delta=\delta^2$.**

☒ **Si $\Delta\neq0$, alors $z_1=\frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2=\frac{-b+\delta}{2a}$**

☒ **Si $\Delta=0$, alors l'équation admet une seule solution $z=\frac{-b}{2a}$.**

Les autres propriétés sur les Nombres complexes :

☒ le milieu I de $[MM']$ **a pour affixe** $z_I=\frac{1}{2}(z+z')$

☒ le barycentre G de $(M;\ \alpha)$ **et** $(M';\ \beta)$ **a pour affixe** $z_G=\frac{1}{\alpha+\beta}(\alpha z+\beta z')$ **avec** $\alpha+\beta\neq0$.

☒ $si\ z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z=0\Leftrightarrow\begin{cases}Im(z)=0\\ arg(z)=0\ [\pi]\end{cases}$

☒ $si\ z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow z=0\Leftrightarrow\begin{cases}Re(z)=0\\ arg(z)=\frac{\pi}{2}\ [\pi]\end{cases}$

☒ $si\ z\neq0,\ z\in\mathbb{R}^*\Leftrightarrow\bar{z}=z\Leftrightarrow\begin{cases}Im(z)=0\\ arg(z)=0\ [\pi]\end{cases}$

☒ $si\ z\neq0, z\in\mathbb{R}_+^*\Leftrightarrow\bar{z}=z\Leftrightarrow\begin{cases}Im(z)=0\\ arg(z)=0\ [2\pi]\end{cases}$

☒ $si\ z\neq0, z\in\mathbb{R}_-^*\Leftrightarrow\bar{z}=z\Leftrightarrow\begin{cases}Im(z)=0\\ arg(z)=\pi\ [2\pi]\end{cases}$

☒ $z\neq0, z\in i\mathbb{R}^*\Leftrightarrow\bar{z}=-z\Leftrightarrow\begin{cases}Re(z)=0\\ arg(z)=\frac{\pi}{2}\ [\pi]\end{cases}$

☒ **MA = MB ⇔ M appartient à la médiatrice de segment [AB].**

☒ $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})=0\ [2\pi]$ **⇔ M appartient à la droite (AB) privée de tous les points de [AB]**

☒ $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})=0\ [\pi]$ **⇔ M appartient à la droite (AB) privée des points de A et B.**

☒ $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})=\pi\ [2\pi]$ **⇔ M appartient au segment [AB] privé des points A et B.**

☒ $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})=\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ **⇔ M appartient à l'un des demi-cercles de diamètre [AB], privé de A et de B (on précisera lequel sur la figure) ; même résultat avec** $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})=-\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

☒ $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})=\frac{\pi}{2}\ [\pi]$ **⇔ M appartient au cercle de diamètre [AB], privé de A et de B.**

☒ **A, B et C sont alignés ⇔** $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}$

☒ **C, A et B sont alignés dans cet ordre** $\Leftrightarrow\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}_-$

☒ **ABC est un triangle rectangle en A** $\Leftrightarrow\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in i\mathrm{IR}$

☒ **ABC est un triangle direct rectangle en A** $\Leftrightarrow\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in i\mathbb{R}_+^*$.

☒ **ABC est un triangle isocèle en A** $\Leftrightarrow|z_B-z_A|=|z_C-z_A|$

☒ **ABC est triangle rectangle isocèle en A** $\Leftrightarrow\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=i$.

☒ **ABC est un triangle équilatéral direct** $\Leftrightarrow\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{\frac{\pi}{3}i}$

Formule du binôme de Newton : $n\in\mathrm{IN}^*$

$$(u+v)^n=C_n^0u^nv^0+C_n^1u^{n-1}v^1+\cdots+C_n^nu^0v^n$$

$$(u+v)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^ku^{n-k}v^k$$

☒ **Caractérisation de la médiatrice d'un segment.**

Soit z_A l'affixe du point A et z_B l'affixe du point B. Le point M (z_M) appartient à la médiatrice de [AB] si et seulement si AM = BM soit $|z_M-z_A|=|z_M-z_B|$

☒ **Caractérisation d'un cercle.**

Soit C le cercle de centre A (z_A) et de rayon R.

☒☒ **Le point M (z_M) appartient à C si et seulement si AM = R soit $|z_M-z_A|=$ R.**

⊠⊠ Le point M (z_M) appartient à C si et seulement si $z_M - z_A = Re^{\theta i}$ avec θ réel quelconque.

⊠⊠ Equation paramétrique d'un cercle : $z = \mathrm{R}e^{\theta i} + z_A$.

⊠⊠ Cercle dont on connaît un diamètre : de diamètre $[AB]$, A et B étant deux points distincts d'affixes respectives z_A et z_B. Le point M, différent de A et B, d'affixe z appartient à $\mathcal{C}$ si, et seulement si le complexe $\frac{z-z_B}{z-z_A}$ est un imaginaire pur. Remarque : cette caractérisation traduit simplement le fait que l'angle $\widehat{AMB}$ est droit.

Formules de trigonométrique :

$\cos(-x) = \cos(x)$	$\sin(-x) = -\sin(x)$
$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$	$\sin(\pi - x) = \sin(x)$
$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$	$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$

⊠ $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$

⊠ $1 + \cos x = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$

⊠ $1 - \cos x = \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$

⊠ $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

⊠ $\cos(a-b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

⊠ $\sin(a+b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b$

⊠ $\sin(a-b) = \cos a \sin b - \sin a \cos b$

⊠ $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

⊠ $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

⊠ $\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

⊠ $\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

⊠ $\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

⊠ $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

⊠ $\cos p + \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

⊠ $\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

⊠ $\sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

⊠ $\tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$

⊠ $\tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$

⊠ posons $t = \tan\frac{a}{2}$

⊠⊠ où $a \neq \pi$, $[2\pi]$ on a $\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

⊠⊠ où $a \in \mathbb{R}$, $[2\pi]$ on a $\sin a = \frac{2t}{1+t^2}$

⊠⊠ où $a \in \mathbb{R}$, $a \neq \pi$, $[2\pi]$ on a $\tan a = \frac{2t}{1-t^2}$

Méthodes de calcul sur les Nombres complexes.

Comment écrire un nombre complexe sous forme trigonométrique ? En générale, si $z = a + ib$ avec $(a, b) \in IR \times IR^*$, on procède à :

⊠ Calculer le module de z : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

⊠ Résoudre $\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ afin de déterminer $arg(z) = \theta\ [2\pi]$.

⊠ Enfin on a : $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z = \sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta + i\sin\theta)$. On en déduit la forme exponentielle $z = |z|e^{\theta i} = \sqrt{a^2+b^2}e^{\theta i}$.

Comment déterminer un ensemble de points (dans le plan) tel que …?

⊠⊠ Soient $a \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. Soit A le point du plan d'affixe a. L'ensemble des points du plan d'affixe $z \in \mathbb{C}$ vérifiant :

⊠⊠⊠ $|z - a| = r$ est le cercle de centre A et de rayon r

⊠⊠⊠ $|z - a| \leq r$ est le disque fermé de centre A et de rayon r.

⊠⊠⊠ $|z - a| < r$ est le disque ouvert de centre A et de rayon r.

⊠⊠ $\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}} = \mathrm{k} \Leftrightarrow \mathrm{MA} = \mathrm{kMB}$.

⊠⊠⊠ Si $\mathrm{k} = 1$, l'ensemble n'est rien d'autre que la médiatrice (ou le plan médiateur si on travaille dans l'espace) du segment [AB].

⊠⊠⊠ Si k est donc un réel positif différent de 1, alors E est le cercle (ou la sphère) de diamètre [GG'] où G et G' sont les barycentres des systèmes A(1) ; B(k) et A(1) ;B(-k).

⊠⊠ Si on voit des points M de partout, on fait intervenir les barycentres pour se ramener à quelque chose de la forme GM = k ou AM = BM et on discute :

⊠⊠ si on donne la forme $\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = k$ avec $k \in IR$ et $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, donc G existe tel que $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = k \Leftrightarrow (\alpha+\beta+\gamma)MG^2 + \alpha GA^2 + \beta GB^2 + \gamma GC^2 = k \Leftrightarrow MG^2 = \frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}(k - \alpha GA^2 - \beta GB^2 - \gamma GC^2)$. Posons $h = \alpha GA^2 + \beta GB^2 + \gamma GC^2$, donc $MG^2 = \frac{k-h}{\alpha+\beta+\gamma}$. Plusieurs cas

se présentent suivant la valeur du second membre $k - h$:

☒☒☒ **Si $k - h < 0$ alors aucun point M ne peut satisfaire cette égalité, donc l'ensemble E est vide.**
☒☒☒ **Si k − h est nul alors l'égalité devient $MG^2 = 0$.**
L'ensemble E se réduit donc au seul point G.
☒☒☒ **Si $k - h > 0$ est positif alors E est le cercle (ou la sphère dans l'espace) de centre G et de rayon $\sqrt{\frac{k-h}{\alpha+\beta+\gamma}}$.**

☒☒ **$(\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC})\vec{u} = k$ avec $k \in IR$ et $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, donc G existe tel que $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ et $\vec{u}$ un vecteur quelconque. D'après le** **théorème de réduction, nous pouvons écrire que : $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG}$. Devant faire appel aux propriétés du produit scalaire : $\overrightarrow{\mathrm{MG}}.\vec{u} = \frac{\mathrm{k}}{\alpha+\beta+\gamma}$. Là, plusieurs cas sont à envisager suivant la nullité du paramètre k.**

☒☒☒ **Si $k = 0$ alors $\overrightarrow{\mathrm{MG}}.\vec{u} = 0$, l'ensemble E est alors la droite ou le plan passant par G et dont $\vec{u}$ est un vecteur normal.**
☒☒☒ **Si $k \neq 0$ alors $\overrightarrow{\mathrm{MG}}.\vec{u} = \frac{\mathrm{k}}{\alpha+\beta+\gamma}$, alors le point G et le vecteur directeur $\vec{u}$ définissent une droite D. On appelle H le point de cette droite D tel que : $\overrightarrow{\mathrm{GH}} = \frac{-\mathrm{k}}{(\alpha+\beta+\gamma)\|\vec{u}\|^2}\vec{u}$. L'ensemble E est la droite (ou le plan) dont $\vec{u}$ est l'un des vecteurs normaux et passant par le point H qui lui est défini par : $\overrightarrow{\mathrm{GH}} = \frac{-\mathrm{k}}{(\alpha+\beta+\gamma)\|\vec{u}\|^2}\vec{u}$.**
☒☒ **$\|\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}\| = \|\gamma\overrightarrow{MA} + \delta\overrightarrow{MC}\|$, avec $\alpha + \beta \neq 0$ et $\gamma + \delta \neq 0$. On appelle G le barycentre des points A(α) et B(β). G' est celui des points A(γ) et C(δ). D'emblée par une simple application du théorème de réduction, il vient : $\|\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}\| = (\alpha + \beta)MG$ et $\|\gamma\overrightarrow{MA} + \delta\overrightarrow{MC}\| = (\gamma + \delta)MG'$, on a : $(\alpha + \beta)MG = (\gamma + \delta)MG' \Leftrightarrow \frac{MG'}{MG} = \frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}$. Et là, nous tombons sur un problème que nous avons déjà traité ! Avec ce qui a déjà été fait, nous pouvons conclure directement que :**
L'ensemble E est le cercle (ou la sphère dans l'espace) de diamètre [HH'] où H et H' sont les barycentres respectifs des systèmes de points pondérés G'(1); G($\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}$) et G'(1);G($-\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}$).
☒ **Pour GM = k, avec k >0 : on a le cercle de centre G et de rayon k.**

☒☒ **on peut remplacer l'affixe du point M, le plus souvent on prend : $z = x + iy$.**

☒☒ **Pour $arg(z - z_A)$, on a les demi-droites d'origine A (A exclu) et d'angle polaire $k[2\pi]$.**

☒☒ **θ est un réel dans $]0; \pi[$. L'ensemble E des points M tels que $(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{MA}}; \overrightarrow{\mathrm{MB}}}) = \theta\ [\pi]$ est un cercle passant par A et B privé des points A et B.**

☒☒ **L'ensemble des points M d'affixe z tel que z est réel est l'axe des réels.**

☒☒ **L'ensemble des points M d'affixe z tel que z est un imaginaire pur est l'axe des imaginaires purs.**

[Comment faire la linéarisation de polynômes trigonométrique ?](#) **$(\cos x)^n$ ou $(\sin x)^n$**

☒ **On peut également utiliser les formules de trigonométrie si $n = 2$.**

$$(\cos x)^2 = \cos^2(x) = \frac{1}{2}[1 - \cos(2x)]$$

$$(\sin x)^2 = \sin^2(x) = \frac{1}{2}[1 + \cos(2x)]$$

☒ **si l'entier naturel n est tel $n > 2$**

$$(\cos x)^n = \frac{1}{2^n}(z + \bar{z})^n = \frac{1}{2^n}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^n \text{ ou}$$
$$(\sin x)^n = \frac{1}{(2i)^n}(z - \bar{z})^n = \frac{1}{(2i)^n}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^n.$$

Prenez une des valeurs de $(\cos x)^n$ ou $(\sin x)^n$ et développer à l'aide de la formule du binôme de Newton tout en sachant que $z^n + \overline{z^n} = e^{inx} + e^{-inx} = 2\cos(nx)$ ou $z^n - \overline{z^n} = e^{inx} - e^{-inx} = 2i\sin(nx)$ et $z\bar{z} = 1$.

<u>NB</u> La formule du binôme de Newton

$(u + v)^n = C_n^0 u^n v^0 + C_n^1 u^{n-1} v^1 + \cdots + C_n^n u^0 v^n$ il suffit de considérer que u^n descend en puissance alors v^n monte en puissance jusqu'à n. Ici on considère soit $u = z$ ou $u = e^{ix}$ et $v = \bar{z}$ ou $v = e^{-ix}$.

[Comment déterminer l'opération inverse de la linéarisation ?](#) **Il s'agit à ce niveau de donner <u>une expression de $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$ en fonction de $\cos x$ et/ou $\sin x$:</u>**

☒ **appliquer la <u>formule de Moivre</u> : $(\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i\sin nx$**

☒ **à l'aide de la <u>formule du binôme</u> de Newton développer $(\cos x + i\sin x)^n$**

☒ en procédant sur l'égalité des deux formules, on identifie les parties réelles ou les parties imaginaires de $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$ en fonction de $\cos x$ et/ou $\sin x$. En résumé :

$$\cos(nx) = \mathrm{R}_e[(\cos x + i \sin x)^n]$$

$$\sin(nx) = \mathrm{I}m[(\cos x + i \sin x)^n].$$

Comment déterminer les racines carrées d'un nombre complexe : $Z = a + ib$? On pose $z = x + iy$ tel que $z^2 = Z$ ou $(x+iy)^2 = a + ib$ ou $x^2 + 2ixy + (-y)^2 = a + ib$ ou $x^2 + 2ixy - y^2 = a + ib$ et $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. On résout le système d'inconnus x et y suivant : $\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \\ x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$ l'ensemble des solutions de ce système est les deux couples de racines carrées qui dépendent du signe de b.

Comment déterminer les racines n-ièmes d'un nombre complexe $Z = a + ib$?

☒☒ Si $Z = 0$, alors z admet une seule racine n-ièmes : 0.

☒☒ Si $Z \neq 0$, alors Z admet n racines n-ièmes : $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) $z^n = Z$: cela revient à rechercher r et α. $[r^n; n\alpha] = [\rho; \theta]$. Les solutions de (E) sont :

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\, e^{\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)i} = \left[\sqrt[n]{\rho}; \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

avec $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ et $\sqrt[n]{\rho} \in \mathrm{IR}_+^*$.

Comment déterminer les racines carrées du discriminant Δ dans la résolution ?

On pose $z = x + iy$ tel que $z^2 = \Delta$.

On résout le système suivant : $z^2 = \Delta$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{[\mathrm{R}_e(\Delta)]^2 + [\mathrm{I}m(\Delta)]^2} \\ x^2 - y^2 = [\mathrm{R}_e(\Delta)]^2 \\ 2xy = \mathrm{I}m(\Delta) \end{cases}.$$

Comment résoudre les équations du second degré ?

☒☒ Les méthodes de résolution sont souvent les mêmes que dans IR : il faut d'abord essayer de factoriser, voir s'il y a une identité remarquable, chercher une racine évidente. On désire donc se ramener à des produits de facteurs du premier degré ou du second degré.

Remarque : il faut penser que $-1 = i^2$ et donc que $z^2 + 1$ est factorisable dans $\mathbb{C}$ alors qu'il ne l'est pas dans IR.

On calcule toujours le discriminant Δ

☒☒ *les équations du second degré à coefficients réels :* $a \neq 0$

☒ Si $\Delta > 0$, alors $z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

☒ Si $\Delta < 0$, alors $z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

☒ Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une seule solution $z = \frac{-b}{2a}$.

☒☒ *les équations du second degré à coefficients complexes :* $a \neq 0$, on calcule la racine carrée du discriminant Δ et on choisit l'une des racines trouvée : $\Delta = \delta^2$.

☒ Si $\Delta \neq 0$, alors $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$

☒ Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une seule solution $z = \frac{-b}{2a}$.

Comment résoudre les équations du type $z^n = a$?

Si $n > 2$ avec $n \in \mathrm{IN}$, $(z; a) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$, on écrit z et a sous forme exponentielle. L'équation admet alors n solutions en donnant à k, n valeurs consécutives : $z = re^{\theta i}$ et $a = \rho e^{\alpha i}$;

$$\begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \ [k \in \mathbb{Z}] \end{cases} \text{ ou}$$

$z_k = \sqrt[n]{\rho}\, e^{\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)i} = \left[\sqrt[n]{\rho}; \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$ avec $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ et $\sqrt[n]{\rho} \in \mathrm{IR}_+^*$.

Comment calculer l'affixe d'un vecteur ou distance ?

☒ Soit $\overrightarrow{AB}$ alors son affixe est $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.

☒ Soit la distance $AB = |z_{\overrightarrow{AB}}| = |z_B - z_A|$.

Comment interpréter le quotient $Z = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$?

☒ Si $|Z| = \left|\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right| = 1$ alors ACB est isocèle en C.

☒ Si $arg(Z) = arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right) = \left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$, alors ACB est rectangle en C.

☒ Si $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \pm i$, alors ACB est rectangle isocèle en C.

☒ Si $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = e^{\pm\frac{\pi}{3}}$, alors ACB est équilatéral.

Comment montrer que deux vecteurs / droites sont orthogonaux / orthogonales ?

☒ On calcule leur produit scalaire

☒ $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM} \Leftrightarrow Re\left(z_{\overrightarrow{AM}} \times z_{\overrightarrow{BM}}\right) = 0$

☒ $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \frac{z_M - z_B}{z_M - z_A} \in i\mathrm{IR}$.

☒ $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM} \Leftrightarrow arg\left(\frac{z_M - z_B}{z_M - z_A}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Comment montrer que deux droites sont parallèle ?

Deux droites sont parallèles si elles possèdent des vecteurs colinéaires. Il s'agit de montrer d'abord que le rapport leurs affixes sont est un réel non nul.

Comment montrer qu'ABCD est parallélogramme ?

On montre que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow z_B - z_A = z_C - z_D$ puis $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow z_D - z_A = z_C - z_B$.

Comment montrer qu'ABC est triangle équilatéral ?

☒ ABC est un triangle équilatéral, on montre $|z_B - z_A| = |z_C - z_B| = |z_C - z_A|$.

☒ ABC est un triangle équilatéral direct, on montre ☒☒ $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{\frac{\pi}{3}i}$.

☒☒ $arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{3}$ et $arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right) = \frac{\pi}{3}$.

Comment montrer qu'ABC est un triangle rectangle et isocèle direct en B ?

On montre que $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = e^{\frac{\pi}{2}i} = \pm i$.

Comment montrer que le triangle AMB est rectangle en M ?

☒ On vérifie que $Z = \frac{z_A - z_M}{z_B - z_M} \in i\mathrm{IR}$.

☒ On vérifie que : $|z_B - z_A|^2 = |z_M - z_A|^2 + |z_M - z_B|^2$ ou $AB^2 = AM^2 + BM^2$ d'après la réciproque de Pythagore AMB est rectangle en M.

☒ On démontrer que $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM}$.

Comment montrer que trois points sont alignés ?

Soit A, B et C sont des points alignés.

☒ On montre que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires en procédant, soit à calculer leur déterminant : $dét\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = 0$ ou montrer que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow z_B - z_A = k(z_C - z_A) \Leftrightarrow \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = k \in \mathrm{IR}$.

☒ On montre que $Im\left(z_{\overrightarrow{AB}} \times z_{\overrightarrow{AC}}\right) = 0$.

☒ ou encore, on montre que $arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = 0$

Comment chercher l'antécédent d'un nombre a ?

☒ Chercher un antécédent de *a*, c'est déterminer z tel que $a = f(z)$

☒ Chercher l'image de *a*, c'est déterminer *f*(*a*).

Comment montrer qu'un point A appartient au cercle de centre I de rayon r ?

☒ On calcule le module de IA = r.

Comment déterminer l'affixe du point C symétrique du point A par rapport au point I ?

☒ A partir du milieu I du segment [AC], on déduit l'affixe du point C : $z_I = \frac{z_A + z_C}{2} \Leftrightarrow z_C = 2z_I - z_A$

Comment déterminer l'affixe du point G barycentre ?

☒ Si G est le barycentre de (A,a), (B,b) avec a et b réels (et a+b non nul), alors $z_G = \frac{az_A + bz_B}{a+b}$.

☒ En particulier, l'affixe du milieu I de [AB] est $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$.

Exercices sur les nombres complexes

Dans les exercices, on considère z un nombre complexe et un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Exercice 1 :

1. **Déterminer la forme algébrique de l'inverse des complexes suivants :**
$\mathbf{A = 2 - 2i, B = -2 + 4i, C = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}}$ **et** $\mathbf{D = \frac{1}{2}i.}$
2. **Déterminer la forme algébrique des complexes suivants :** $\mathbf{A = \frac{3+i}{1-i}, B = \frac{3i}{2i-1}.}$

Correction :

1. **Forme algébrique de l'inverse des complexes :**
$\frac{1}{\mathbf{A}} = 1 + i$; $\frac{1}{\mathbf{B}} = -\frac{1+2i}{10}$; $\frac{1}{\mathbf{C}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{1}{\mathbf{D}} = -2i.$
2. **Forme algébrique des complexes suivants :**
$\mathbf{A} = \frac{3+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = 1 + 2i$; $\mathbf{B} = \frac{3i}{2i-1} \times \frac{-2i-1}{-2i-1} = \frac{6-3i}{5}.$

Exercice 2 :

1. **Déterminer le module des complexes suivants :**
$\mathbf{A = (1 + 3i)^2, B = (1 - 2i)(3 + i), C = \frac{1+i}{2+i},}$
$\mathbf{D = \frac{(2+3i)^2}{(1-i)^5}, E = \cos\theta + i\sin\theta.}$
2. **On pose $z_1 = 3 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = -1 + 2i$. Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes :**
$\boldsymbol{A = z_1 - \bar{z}_2 \ ;\ B = z_1 \times \bar{z}_2 \ ;\ C = \frac{z_1}{z_2} - \bar{z}_2.}$
3. **Soit z un nombre complexe de module ρ, d'argument θ, et soit $\bar{z}$ son conjugué. Calculer $(z + \bar{z})(z^2 + \overline{z^2}) \dots (z^n + \overline{z^n})$ en fonction de ρ et θ.**

Correction :

1. **Module des complexes suivants :**
$|\mathbf{A}| = |(\mathbf{1 + 3i})^2| = 1^2 + 3^2 = 10,$
$|\mathbf{B}| = |1 - 2i|.|3 + i| = \sqrt{1^2 + 2^2}.\sqrt{3^2 + 1^2} = 5\sqrt{2},$
$|C| = \frac{|1+i|}{|2+i|} = \frac{\sqrt{1^2+1^2}}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}, |\mathbf{D}| = \frac{13}{4\sqrt{2}}, |\mathbf{E}| = 1.$
2. $\boldsymbol{z_1 = 3 + i\sqrt{3} \Leftrightarrow \bar{z}_1 = 3 - i\sqrt{3}}$ **et** $\boldsymbol{z_2 = -1 + 2i \Leftrightarrow \bar{z}_2 = -1 + 2i}$
$A = z_1 - \bar{z}_2 = 3 + i\sqrt{3} + 1 + 2i = 4 + i(2 + \sqrt{3})$;
$B = z_1 \times \bar{z}_2 = (3 + i\sqrt{3})(-1 - 2i) = -3 + 2\sqrt{3} - i(6 + \sqrt{3})$; $C = \frac{z_1}{z_2} - \bar{z}_2 = \frac{3+i\sqrt{3}}{-1+2i} + 1 + 2i = \frac{2\sqrt{3}-3+5}{5} + i\frac{-6+10-\sqrt{3}}{5} = \frac{2\sqrt{3}+2}{5} + i\frac{4-\sqrt{3}}{5}.$
3. $\boldsymbol{z = \rho e^{\theta i} \Leftrightarrow \bar{z} = \rho e^{-\theta i}\ ;\ z + \bar{z} = 2\rho\cos\theta}$ **et** $\boldsymbol{z^n + \overline{z^n} = 2n\rho^n\cos\theta.}$
Calculons $(\boldsymbol{z + \bar{z}})(\boldsymbol{z^2 + \overline{z^2}}) \dots (\boldsymbol{z^n + \bar{z}^n}) = \prod_{k=1}^{n}(z^k + \bar{z}^k) = \prod_{k=1}^{n}[2\rho^k(\cos k\theta)] = 2^n.\rho.\rho^1 \dots .\rho^n \prod_{k=1}^{n}(\cos k\theta) =$
$(\boldsymbol{z + \bar{z}})(\boldsymbol{z^2 + \overline{z^2}}) \dots (\boldsymbol{z^n + \bar{z}^n}) =$
$2^n.\rho^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{k=1}^{n}(\cos k\theta).$

Exercice 3 : **Soit A(-2 + i) , B(2+ 3i) et C(4 + 4i).**

1. **Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.**
2. **En déduire que les points A, B et C sont alignés.**

Correction :

1. **Affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:**
$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 4 + 2i = 2(2 + i)$ et
$z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A = 6 + 3i = 3(2 + i).$
2. **A, B et C sont alignés :** $2 + i = \frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{2} = \frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{3} \Leftrightarrow$ $z_{\overrightarrow{AC}} = \frac{3}{2}z_{\overrightarrow{AB}}$ donc $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$: ces deux vecteurs étant colinéaires, avec le point A en commun, les points A, B et C sont alignés.

Exercice 4: **Dans chacun des cas suivants, montrer que :**

1. $\boldsymbol{Z = \frac{z+z'}{1+zz'}}$ **est un réel si** $\boldsymbol{|z| = |z'| = 1}$ **et** $\boldsymbol{1 + zz' \neq 0.}$
2. $\boldsymbol{(z - 2)(\bar{z} - 2)}$ **est réel.**
3. **Les droites (AP) et (BP') sont parallèles si $A(2)$, $B(-2)$, $P(1 + i)$ et $P'(-1 - i)$.**
4. **Les droites (AP) et (PP') sont perpendiculaires si $A(2)$, $B(-2)$, $P(1 + i)$ et $P'(-1 - i)$.**

Correction :

1. Si $\boldsymbol{Z = \frac{z+z'}{1+zz'}} \in$ **IR**, alors $Z = \frac{(z+z')(1+\overline{zz'})}{(1+zz')(1+\overline{zz'})} = \frac{z+\bar{z}+z'+\overline{z'}}{|1+zz'|^2}$ ainsi $z + \bar{z} = 2x$; $z' + \overline{z'} = 2x'$ et $|1 + zz'|^2 \in$ **IR** donc Z est réel.
2. $\boldsymbol{(z - 2)(\bar{z} - 2)}$ **est réel**, il faut remarquer qu'on pourrait écrire $(\bar{z} - 2) = \overline{z - 2}$ alors $(z - 2)(\bar{z} - 2) = (z - 2)(\overline{z - 2}) = |z - 2|^2$ est bien sûr un réel.

3. $(\boldsymbol{AP})//(\boldsymbol{BP'})$ **:** Deux droites sont parallèles si elles possèdent des vecteurs colinéaires. Alors on peut calculer les affixes des vecteurs : $z_{\overrightarrow{AP}} = -1 + i$ et $z_{\overrightarrow{BP'}} = 1 - i$, ce qui donne $z_{\overrightarrow{AP}} = -z_{\overrightarrow{BP'}}$ d'où $\overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{BP'}$ ce qui prouve que les droites (AP) et (BP') sont parallèles.

4. $(\boldsymbol{AP}) \perp (\boldsymbol{PP'})$ **:** $\frac{z_{P'}-z_P}{z_P-z_A} = 2i$ Calculons l'argument de $\left(\overrightarrow{AP};\overrightarrow{PP'}\right) = arg\left(\frac{z_{P'}-z_P}{z_P-z_A}\right) + 2\pi k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, alors les droites (AP) et (PP') sont perpendiculaires.

<u>Exercice 5 :</u> $\mathbf{n \in IN}$ Soit $\mathbf{A = \frac{2}{1-i}}$; $\mathbf{B = e^{-i\frac{\pi}{2}}}$;
$\mathbf{C = i^{100n}}$; $\mathbf{D = i^{4n+100}}$; $\mathbf{E = \frac{i-1}{1-i\sqrt{3}}}$;
$\mathbf{F = (1-2i)(3+i)}$ et $\mathbf{G = \sqrt{3}e^{i\theta}}$.

Déterminer dans chacune des cas :

1. **les formes algébriques et trigonométriques.**
2. **Les entiers $\boldsymbol{n}$ pour que $\mathbf{A}^{\boldsymbol{n}}$ et $\mathbf{B}^{\boldsymbol{n}}$ soient réels.**
3. **Les entiers $\boldsymbol{n}$ pour que $\mathbf{F}^{\boldsymbol{n}}$ soit un réel négatif.**
4. **l'entier $\boldsymbol{n}$ pour que $\mathbf{A}^{\boldsymbol{n}}$ soit un imaginaire pur.**

Calculer $\mathbf{C^{2014}}$ et $\mathbf{G^{2015}}$.

<u>Correction :</u> $\mathbf{n \in IN}$:

1. $\mathbf{A} = \frac{2}{1-i} = \frac{2(1+i)}{1+1} = 1 + i = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$; $\mathbf{B} = e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -i$; $\mathbf{C} = i^{100n} = i^{4n\times 25} = (i^{4n})^{25} = 1^{25} = 1 = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi)$; $\mathbf{D} = i^{4n+100} = i^{4n} \times i^{100} = i^{4\times 25} = 1 = \cos(0) + i\sin(0)$; $\mathbf{E} = \frac{i-1}{1-i\sqrt{3}} = \frac{(i-1)(1+i\sqrt{3})}{1+3} = \frac{-1-\sqrt{3}}{4} + i\frac{1-\sqrt{3}}{4} = \frac{(i-1)(1+i\sqrt{3})}{1+3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{e^{\frac{3\pi}{4}i}}{e^{-\frac{\pi}{3}i}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{13\pi}{12}i} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{11\pi}{12}i} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) - i\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right]$; $\mathbf{F} = (1-2i)(3+i) = 5(1-i) = 5\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$ et $\mathbf{G} = \sqrt{3}e^{i\theta} = \sqrt{3}[\cos(\theta) + i\sin(\theta)]$.

2. Les entiers $\boldsymbol{n}$ pour que $\mathbf{A^n}$ et $\mathbf{B^n}$ soient réels :

- $A^n = \left(\sqrt{2}\right)^n\left[\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right] \in IR \Leftrightarrow$ $\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right) = 0 = \sin 0 \Leftrightarrow$ $\begin{cases} n\frac{\pi}{4} = 0 + 2\pi k \Leftrightarrow n = 8k \\ n\frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi k \Leftrightarrow n = 4 + 8k \end{cases}$ ou encore $\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right) = 0 = \sin 2\pi \Leftrightarrow \begin{cases} n\frac{\pi}{4} = 2\pi + 2\pi k \Leftrightarrow n = 8 + 8k \\ n\frac{\pi}{4} = -\pi \Leftrightarrow n = -4 + 8k \end{cases}$.
$A^n \in IR \Leftrightarrow n \in 4\{-1 + 2k; 2k ; 1 + 2k ; 2 + 2k\}$ avec $n \in IN$ et $k \in \mathbb{Z}$.
- $B^n = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - i\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \in IR \Leftrightarrow$ $\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = 0 = \sin 0 \Leftrightarrow$ $\begin{cases} n\frac{\pi}{2} = 0 + 2\pi k \Leftrightarrow n = 4k \\ n\frac{\pi}{2} = \pi + 2\pi k \Leftrightarrow n = 2 + 4k \end{cases}$ ou $\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = 0 = \sin 2\pi \Leftrightarrow \begin{cases} n\frac{\pi}{2} = 2\pi + 2\pi k \Leftrightarrow n = 4 + 4k \\ n\frac{\pi}{2} = -\pi + 2\pi k \Leftrightarrow n = -2 + 4k \end{cases}$
$B^n \in IR \Leftrightarrow n \in 2\{-1 + 2k; 2k ; 1 + 2k ; 2 + 2k\}$ avec $n \in IN$ et $k \in \mathbb{Z}$.

3. l'entier $\boldsymbol{n}$ pour que $\mathbf{F}^{\boldsymbol{n}}$ soit un réel négatif :
$F^n = \left(5\sqrt{2}\right)^n\left[\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right] \in IR_- \Leftrightarrow$ $\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right) = 0 = \sin 0 \Leftrightarrow n\frac{\pi}{4} = 0 + 2\pi k \Leftrightarrow n = 8k$ ou $\Leftrightarrow n\frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi k \Leftrightarrow n = 4 + 8k$, donc $\mathbf{n = 4 + 8k}$, car $F^{8k} = \left(5\sqrt{2}\right)^{8k}\left[\cos\left(8k \times \frac{\pi}{4}\right) + \right.$ isin8k×π4=528kcos2πk+isin2πk=528k>*0* et $F^{4+8k} = \left(5\sqrt{2}\right)^{4+8k}\left[\cos\left((4+8k) \times \frac{\pi}{4}\right) + \right.$ isin4+8k×π4=−524+8k<*0*.

4. $\mathbf{A^n = \left(\sqrt{2}\right)^n\left[\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right] \in iIR} \Leftrightarrow$ $\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) = 0 = \cos\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} n\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Leftrightarrow n = 2 + 8k \\ n\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \Leftrightarrow n = -2 + 8k \end{cases}$. $A^n \in iIR \Leftrightarrow n \in 2\{-1 + 2k; 1 + 2k\}$ avec $n \in IN$ et $k \in \mathbb{Z}$.

Calculons $C^{2014} = (1)^{2014} = 1$ et

$G^{2015} = \left(\sqrt{3}e^{i\theta}\right)^{2015} = \left(\sqrt{3}\right)^{2015}e^{2015\theta i} = \left(\sqrt{3}\right)^{2015}e^{2014\theta i}.e^{\theta i} = \left(\sqrt{3}\right)^{2015}e^{\theta i}$.

<u>Exercice 6 :</u>

1. Soit $\boldsymbol{z} = \mathbf{2 + 2i}$.

a) Déterminer la forme algébrique de $\boldsymbol{\frac{z^2}{\bar{z}}}$.

b) Déterminer la forme exponentielle de $\boldsymbol{\frac{z^2}{\bar{z}}}$.

c) Trouver le plus petit entier naturel *n* tel que $\boldsymbol{z^n}$ soit un réel positif.

2. On considère le nombre complexe : $\boldsymbol{z = x + iy}$ où les réels *x* et *y* ne sont pas tous les deux nuls.

a) Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $\boldsymbol{\frac{z^2}{\bar{z}}}$ en fonction de *x* et *y*.

b) Déterminer les nombres complexes z tels que $\frac{z^2}{\bar{z}}$ soit un imaginaire pur.

Correction :

1. $z = 2 + 2\mathrm{i} = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$.

a) $\frac{z^2}{\bar{z}} = \frac{(2+2\mathrm{i})^2}{\overline{2+2\mathrm{i}}} = \frac{8i}{2-2i} \times \frac{2+2i}{2+2i} = \frac{8i(2+2\mathrm{i})}{8} = -2 + 2i$.

b) $\frac{z^2}{\bar{z}} = -2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}}$.

c) **Trouvons le plus petit entier naturel n tel que z^n soit un réel positif :** $z^2 = 8i$; $z^3 = 8i(2+2\mathrm{i}) = 16\mathrm{i} - 16$; donc $z^4 = z^2 \times z^2 = 8i \times 8i = -64$ donc $z^8 = z^4 \times z^4 = 4096$. L'entier 8 est le plus petit tel que z^8 soit un réel positif.

2. $\boldsymbol{z = x + iy}$ /x et y ne sont pas tous les deux nuls.

a) $\frac{z^2}{\bar{z}} = \frac{(x+iy)^2}{\overline{x+iy}} = \frac{x^2+2ixy-y^2}{x-iy} \times \frac{x+iy}{x+iy} = \frac{x^3-3xy^2+i(2x^2y+y^3)}{x^2+y^2}$, nous déduisons que $(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) \neq (\boldsymbol{0};\boldsymbol{0})$

$\mathrm{R}_e\left(\frac{z^2}{\bar{z}}\right) = \frac{x^3-3xy^2}{x^2+y^2}$ et $\mathrm{Im}\left(\frac{z^2}{\bar{z}}\right) = \frac{2x^2y+y^3}{x^2+y^2}$.

b) $\frac{z^2}{\bar{z}}$ **est un imaginaire pur si et seulement si** $\frac{x^3-3xy^2}{x^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow x(x^2-3y^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = y\sqrt{3}$ ou $x = -y\sqrt{3}$ avec $(x;y) \neq (0;0)$. On doit remplacer chaque valeur de x dans $z = x + iy$ et en déduire z :

- $x = 0 \Leftrightarrow z = iy$.
- $x = y\sqrt{3} \Leftrightarrow z = y\sqrt{3} + iy = y(\sqrt{3} + i)$.
- $x = -y\sqrt{3} \Leftrightarrow z = -y\sqrt{3} + iy = y(-\sqrt{3} + i)$.

Les nombres complexes z tels que $\frac{z^2}{\bar{z}}$ soit un imaginaire pur sont iy ; $y(\sqrt{3}+i)$ et $y(-\sqrt{3}+i)$.

<u>Exercice 7 :</u> Soit $z = x + iy$ et $z^2 = a + ib$ où x, y, a, b sont des réels.

1. **Montrer que, si |z| = 1, on a $x^2 = \frac{1+a}{2}$ et $y^2 = \frac{1-a}{2}$.**
2. **On suppose que $arg(z) = \frac{\pi}{8}$. Déterminer la forme algébrique de z^2.**
3. **Déterminer alors les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$. NB : $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$**

<u>Correction :</u> $z = x + iy$ et $z^2 = a + ib$ où x, y, a, b sont des réels.

1. $z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = a + ib$

$x^2 - y^2 = a$ ou $2xy = b$, si $|z| = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$.

En résumé on résout $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = 1 \\ 2xy = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 1 + a \\ 2y^2 = 1 - a \\ 2xy = b \end{cases}$

pour obtenir $x^2 = \frac{1+a}{2}$ et $y^2 = \frac{1-a}{2}$.

2. $\mathrm{z} = \left[\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right] = e^{i\frac{\pi}{8}}$, la forme algébrique de z^2 est : $z^2 = \left(e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^2 = e^{i\frac{2\pi}{8}} = e^{i\frac{\pi}{4}}$, donc $z^2 = \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. $\begin{cases} z^2 = a + ib \\ z^2 = (x+iy)^2 \\ z^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ alors $a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Or

$\begin{cases} x^2 = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} \\ y^2 = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} \end{cases}$. Ainsi $x = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$ et $y = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$.

<u>Exercice 8 :</u> Soit α un réel différent de $\frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $t = \tan\alpha$.

1. **Montrer que $z = \frac{1+it}{1-it} = e^{2i\alpha}$.**
2. **Exprimer la forme algébrique de z en fonction de t. A partir de la forme trigonométrique en déduire que $\cos(2\alpha) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin(2\alpha) = \frac{2t}{1+t^2}$.**

<u>Correction :</u> $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et $t = \tan\alpha$.

1. $z = \frac{1+it}{1-it} = \frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\alpha - i\sin\alpha} = \frac{e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha}} = e^{2i\alpha}$.

2. $z = \frac{1+it}{1-it} = \frac{(1+it)(1+it)}{(1-it)(1+it)} = \frac{1+2it-t^2}{1+t^2}$, donc **forme algébrique de z est** $z = \frac{1-t^2}{1+t^2} + i\frac{2t}{1+t^2}$.

$\begin{cases} z = e^{2i\alpha} = \cos(2\alpha) + i\sin(2\alpha) \\ z = \frac{1-t^2}{1+t^2} + i\frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$, on en déduit que $\cos(2\alpha) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin(2\alpha) = \frac{2t}{1+t^2}$.

<u>Exercice 9 :</u> Soit $z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{4}$ et $z_2 = 1 - i$.

1. **Déterminer une forme trigonométrique de z_1 et de z_2.**
2. **On pose $Z = \frac{z_1}{z_2}$. Déterminer :**

a) **La forme algébrique de Z.**

b) **La forme trigonométrique de Z.**

c) **La forme exponentielle de Z.**

3. **En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$ et de $\sin\frac{\pi}{12}$.**

Correction : $z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{4}$ **et** $z_2 = 1 - i$.

1. $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$ et $z_2 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$.

2. Déterminons:

a) $Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{4}}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}$.

b) $|Z| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$.

$arg(Z) = arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = arg(z_1) - arg(z_2) = \frac{\pi}{12}$, donc $Z = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$

c) $Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]}{\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]} = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$.

3. $\begin{cases} Z = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8} \\ Z = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right] \end{cases}$, on en déduit la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et de $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Exercice 10 : **Soit z = 1 - i et z' = 1 + i$\sqrt{3}$.**

1. Déterminer la forme trigonométrique de z ; z' ; z^4.

2. Donner la forme algébrique de z^4 et de $\frac{z}{z'}$

3. Déterminer la forme trigonométrique de $\frac{z}{z'}$.

4. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

Correction: z = 1 - i et z' = 1 + i$\sqrt{3}$.

1. $z = 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) -\right.$ $i\sin\pi 4$; $z'=1+i3=212+i32=2\cos\pi 3+i\sin\pi 3$; $z^4 = 4[\cos(\pi) - i\sin(\pi)]$.

2. $z^4 = 4[\cos(\pi) - i\sin(\pi)] = -4$ et $\frac{z}{z'} = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}} \times \frac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} = \frac{1-\sqrt{3}}{4} + i\frac{-1-\sqrt{3}}{4}$.

3. $\frac{z}{z'} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{e^{-\frac{\pi}{4}i}}{e^{\frac{\pi}{3}i}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)i} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{-7\pi}{12}i} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) - i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right]$.

2. $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

Exercice 11 : **Soit $z_1 = -(\sqrt{3} + i)$ et $z_2 = 1 + i$.**

1. Déterminer une forme trigonométrique de z_1 et de z_2.

2. Déterminer dans chacune des cas, les entiers n pour que $(z_1)^n$ et $(z_2)^n$ soient un réel positif.

3. On pose $Z = \frac{z_1}{z_2}$. Déterminer :

a) La forme algébrique de Z.

b) La forme trigonométrique de Z.

c) En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{11\pi}{12}$ et de $\sin\frac{11\pi}{12}$.

Correction : **Soit $z_1 = -(\sqrt{3} + i)$ et $z_2 = 1 + i$.**

1. $z_1 = -(\sqrt{3} + i) = 2\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]$ et $z_2 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$.

2. $(z_1)^n = 2^n\left[\cos\left(n\frac{5\pi}{6}\right) - i\sin\left(n\frac{5\pi}{6}\right)\right] \in IR_+ \Leftrightarrow$ $\sin\left(n\frac{2\pi}{3}\right) = 0 = \sin 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n\frac{5\pi}{6} = 0 \Leftrightarrow n = 0 \\ n\frac{5\pi}{6} = \pi \Leftrightarrow n = \frac{6}{5} \end{cases}$, donc n = 0, car $(z_1)^0 = 2^0\left[\cos\left(0 \times \frac{5\pi}{6}\right) - i\sin\left(0 \times\right.\right.$ $5\pi 6=1>0$ et

$(z_1)^{\frac{6}{5}} = 2^{\frac{6}{5}}\left[\cos\left(\frac{6}{5} \times \frac{5\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{6}{5} \times \frac{5\pi}{6}\right)\right] =$ $2\,65\cos\pi-i\sin\pi=-2\,65<0$.

$\sin\left(n\frac{5\pi}{6}\right) = 0 = \sin 2\pi \Leftrightarrow \begin{cases} n\frac{5\pi}{6} = 2\pi \Leftrightarrow n = \frac{12}{5} \\ n\frac{5\pi}{6} = -\pi \Leftrightarrow n = -\frac{6}{5} \end{cases}$

donc $n = \frac{12}{5}$, car $(z_1)^{\frac{12}{5}} = 2^{\frac{12}{5}}\left[\cos\left(\frac{12}{5} \times \frac{5\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{12}{5} \times \frac{5\pi}{6}\right)\right] = 2^{\frac{12}{5}} > 0$ et $(z_1)^{-\frac{6}{5}} = 2^{-\frac{6}{5}}\left[\cos\left(-\frac{6}{5} \times \frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{6}{5} \times \frac{5\pi}{6}\right)\right] = 2^{-\frac{6}{5}}[\cos(\pi) + i\sin(\pi)] < 0$.

D'où $(z_1)^n \in IR_+ \Leftrightarrow n \in \left\{0; \frac{12}{5}\right\}$.

$\boldsymbol{(z_2)^n = (\sqrt{2})^n\left[\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right] \in IR_+ \Leftrightarrow}$

$\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right) = 0 = \sin 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n\frac{\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow n = 0 \\ n\frac{\pi}{4} = \pi \Leftrightarrow n = 4 \end{cases}$, donc n = 0, car $(z_2)^0 = (\sqrt{2})^0\left[\cos\left(0 \times \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(0 \times\right.\right.$ $\pi 4=1>0$ et $z24=24\cos 4\times\pi 4+i\sin 4\times\pi 4=-4<0$.

$\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right) = 0 = \sin 2\pi \Leftrightarrow \begin{cases} n\frac{\pi}{4} = 2\pi \Leftrightarrow n = 8 \\ n\frac{\pi}{4} = -\pi \Leftrightarrow n = -4 \end{cases}$ donc n = 8, car $(z_1)^8 = (\sqrt{2})^8\left[\cos\left(8 \times \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(8 \times\right.\right.$

$\left.\frac{\pi}{4}\right)\Big] = 16 > 0$ et $(z_1)^{-4} = 2^{-4}\left[\cos\left(-4\times\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(4\times\frac{\pi}{4}\right)\right] = 2^{-4}[\cos(\pi) + i\sin(\pi)] = \frac{-1}{16} < 0$.
D'où $(z_2)^n \in \mathrm{IR}_+ \Leftrightarrow n \in \{0; 8\}$.

3. $\boldsymbol{Z = \frac{z_1}{z_2}}$**. Déterminer :**

a) $Z = \frac{-(\sqrt{3}+i)}{1+i} = \frac{-(\sqrt{3}+i)(1-i)}{1+1} = \frac{-\sqrt{3}-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

b) $Z = \frac{2\sqrt{2}}{2} \times \frac{e^{-\frac{5\pi}{6}i}}{e^{\frac{\pi}{4}i}} = \sqrt{2}e^{\left(-\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)i} = \sqrt{2}e^{-\frac{13\pi}{12}i} = \sqrt{2}e^{\frac{11\pi}{12}i} = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right]$.

c) $\begin{cases} Z = \frac{-\sqrt{3}-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ Z = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right] \end{cases}$, on en déduit la valeur exacte de $\sqrt{2}\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{3}-1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ et de $\sqrt{2}\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

__Exercice 12 :__

1. Déterminer les nombres complexes z non nuls, tels que z, $\frac{1}{z}$ et $1 - z$ aient le même module.
2. Montrer que si $|z| = 1$ et $z \neq 1$, alors le nombre complexe $\frac{1+z}{1-z}$ est imaginaire pur.

__Correction :__

1. $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |1-z| \Leftrightarrow |z| = \left|\frac{1}{z}\right| \Leftrightarrow |z|.|z| = 1$.
Posons $z = x + iy \Leftrightarrow |z|.|z| = x^2 + y^2 = 1$ zt d'autre part $|1-z|^2 = |1-x-iy|^2 = (1-x)^2 + y^2 = 1 - 2x + x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. On en déduit $\frac{1}{4} + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ainsi les nombres complexes z non nuls, tels que $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |1-z|$ sont les nombres $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

2. On a $|z| = 1$ et $z \neq 1$; si $z = x + iy \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$, on a : $\frac{1+z}{1-z} = \frac{1+x+iy}{1-x-iy} \times \frac{1-x+iy}{1-x+iy} = \frac{1-x^2-y^2+2iy}{(1-x)^2+y^2} = \frac{1-(x^2+y^2)+2iy}{(1-x)^2+y^2} = \frac{1-1+2iy}{(1-x)^2+y^2} = \frac{2iy}{(1-x)^2+y^2} \in i$ IR.

__Exercice 13 :__ **Soit $Z = \frac{a-ib}{c-id}$ où a, b, c et d sont des nombres réels positifs tels que $c - id \neq 0$.**

Trouver une relation entre a, b, c et d pour que :
1. Z soit un nombre réel.
2. Z soit un nombre imaginaire pur.
3. Interpréter géométriquement $arg\left(\frac{a-ib}{c-id}\right)$.

__Correction :__ $\frac{a-ib}{c-id} = \frac{(a-ib)(c+id)}{(c-id)(c+id)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{ad-bc}{c^2+d^2}$, avec $c - id \neq 0$.

Trouvons une relation entre a, b, c et d pour que :

1. $Z \in IR \Leftrightarrow Im(Z) = \frac{ad-bc}{c^2+d^2} = 0 \Leftrightarrow ad = bc \Leftrightarrow a = \frac{bc}{d}$.

2. $Z \in iIR \Leftrightarrow Re(Z) = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} = 0 \Leftrightarrow ac = -bd$.

On remarque que : $\frac{bc}{d}c = -bd \Leftrightarrow c^2 - (di)^2 = 0 \Leftrightarrow c = -di$ et $a = -bi$ avec $c - id \neq 0$.

2. Interprétons géométriquement $arg\left(\frac{a-ib}{c-id}\right)$:
soit les points A et B d'affixe respectives $z_A = c - id$ et $z_B = c - id$, on a : $arg\left(\frac{a-ib}{c-id}\right) = arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = arg\left(\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O}\right) = \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$ $[2\pi]$.

__Exercice 14 :__ **Pour tout nombre complexe z différent de $2i$, on donne $Z = \frac{z+1}{z-2i}$. On pose $z = x + iy$ et $Z = X + iY$ où x ; y ; X et Y sont des réels.**

1. Calculer X et Y en fonction de x et y.
2. Déterminer les ensembles des points M :
a) Tels que Z soit réel
b) Tels que Z ait pour argument $\frac{\pi}{2}$.

__Correction :__ **$z \neq 2i$, on donne $Z = \frac{z+1}{z-2i}$.**

1. Calculer X et Y en fonction de x et y.
$Z = \frac{z+1}{z-2i} = \frac{x+iy+1}{x+iy-2i} = \frac{x+iy+1}{x+i(y-2)} = \frac{x+iy+1}{x+i(y-2)} \times \frac{x-i(y-2)}{x-i(y-2)}$
$Z = X + iY = \frac{x^2-ix(y-2)+xyi+y(y-2)+x-i(y-2)}{x^2+(y-2)^2} =$
$Z = X + iY = \frac{x^2+y(y-2)+x}{x^2+(y-2)^2} + i\frac{-x(y-2)+xy-(y-2)}{x^2+(y-2)^2}$
$X = \frac{x^2+y^2+x-2y}{x^2+(y-2)^2}$ et $Y = \frac{2x+2-y}{x^2+(y-2)^2}$ où $(x; y) \neq (0; 2)$

2. Déterminer les ensembles des points M :
a) Tels que Z soit réel
$Y = \frac{2x+2-y}{x^2+(y-2)^2} = 0 \Leftrightarrow 2x + 2 - y = 0 \Leftrightarrow y = 2x + 2$
Or si $x = 0$ alors $y = 2 \times 0 + 2 = 2$ d'où cet ensemble recherché est la droite d'équation $y = 2x + 2$ privé du point de coordonnée $(0; 2)$.
b) Tels que Z ait pour argument $\frac{\pi}{2}$.
1er méthode $arg\left(\frac{z+1}{z+2i}\right) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow X = \frac{x^2+y^2+x-2y}{x^2+(y-2)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x - 2y = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 +$

$(y-1)^2 = \frac{\sqrt{5}}{2}$, M est sur le cercle C de I $\left(-\frac{1}{2};1\right)$ centre I $\left(-\frac{1}{2};1\right)$ et de rayon $r = \frac{\sqrt{5}}{2}$ privé des points A et B (z ≠2i et de -1).

2er méthode $arg\left(\frac{z+1}{z+2i}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2}[\pi]$, M est sur le cercle de diamètre [AB] privé de A et B (z ≠2i et de -1).

<u>Exercice 15 :</u> Soit A et B les points d'affixes respectives 1 et i dans le plan complexe. Pour tout nombre complexe z différent de 1, on donne $Z = \frac{(1-i)(z-i)}{z-1}$. On pose $z = x + iy$ et $Z = X + iY$ où x ; y ; X et Y sont des réels.

1. **Calculer X et Y en fonction de x et y.**
2. **Déterminer les ensembles des points M :**
a) **Tels que Z soit réel**
b) **Tels que $R_e(Z) = X$ soit négatif ou nul.**
3.
a) **Démontrer que le nombre complexe Z est un réel non nul si, et seulement si, il existe un entier k tel que $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{4} + k\pi$.**
b) **En déduire l'ensemble des points du plan M :**
- **Tels que $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{4}\ [\pi]$**
- **Tels que $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.**

<u>Correction :</u> Soit A(1) et B(i) / $Z = \frac{(1-i)(z-i)}{z-1}$.

1. **Calculer X et Y en fonction de x et y.**

$Z = \frac{(1-i)(z-i)}{z-1} = \frac{(1-i)(x+iy-i)}{x-1+iy} \times \frac{x-1-iy}{x-1-iy}$ = après tout calcul $Z = X + iY = \frac{(x-1)^2+(y-2)^2-1}{(x-1)^2+y^2} + i\,\frac{1-x^2-y^2}{(x-1)^2+y^2}$

$X = \frac{(x-1)^2+(y-2)^2-1}{(x-1)^2+y^2}$ et $Y = \frac{1-x^2-y^2}{(x-1)^2+y^2}$.

2. **Déterminer les ensembles des points M :**
a) **Tels que Z soit réel**

$Y = \frac{1-x^2-y^2}{(x-1)^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$ cet ensemble recherché est le cercle trigonométrique de centre O et de rayon $r = 1$ d'équation $x^2 + y^2 = 1$ privé du point A de coordonnée $(0;1)$.

b) **Tels que $R_e(Z) = X$ soit négatif ou nul.**

$R_e(Z) = X \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 1$ cet ensemble est le disque fermé de centre I$(1;2)$et de rayon $r = 1$.

3.
a) $arg(Z) = arg\left[\frac{(1-i)(z-i)}{z-1}\right]\ [2\pi] = arg(1-i) + arg\left(\frac{z-i}{z-1}\right)\ [2\pi] = -\frac{\pi}{4} + arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right)\ [2\pi] = -\frac{\pi}{4} + (\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM})\ [2\pi] = -\frac{\pi}{4} + (\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})\ [2\pi]$

$Z \in IR^* \Leftrightarrow arg(Z) = 0\ [\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{4} + k\pi$

b) **En déduire l'ensemble des points du plan M :**
- **Tels que $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{4}\ [\pi]$**

$Z \neq 0$ alors cet ensemble recherché est le cercle trigonométrique de centre O et de rayon $r = 1$ d'équation $x^2 + y^2 = 1$ privé des point A et B.

- **Tels que $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.**

$arg(Z) = 0\ [2\pi]$ et $Z \neq 0$ alors Z réel non nul et z positif.

$\mathbf{Im}(Z) = Y = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$ et
$R_e(Z) = X > 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 > 1$ cet ensemble recherché est le cercle trigonométrique de centre O et de rayon $r = 1$ d'équation $x^2 + y^2 = 1$ privé de l'arc $\widehat{\mathbf{AB}}$.

<u>Exercice 16 :</u> Soit A le point d'affixe $3 - i$ dans le plan complexe. Pour tout nombre complexe z différent de $3 - i$, on donne $Z = \frac{2iz-4+2i}{z-3+i}$. On pose $z = x + iy$ et $Z = X + iY$ où x ; y ; X et Y sont des réels.

1. **Calculer X et Y en fonction de x et y.**
2. **Déterminer les ensembles des points M :**
a) **Tels que Z soit réel**
b) **Tels que Z soit imaginaire pur**

<u>Correction :</u> A$(3-i)$ / $Z = \frac{2iz-4+2i}{z-3+i}$.

1. **Calculer X et Y en fonction de x et y.**

$Z = \frac{2iz-4+2i}{z-3+i} = \frac{2i(x+iy)-4+2i}{x+iy-3+i} = \frac{2ix-2y-4+2i}{x-3+i(y+1)} =$

$Z = \frac{2ix-2y-4+2i}{x-3+i(y+1)} \times \frac{x-3-i(y+1)}{x-3-i(y+1)} =$

$Z = X + iY = \frac{8y-2x+14}{(x-3)^2+(y+1)^2} + 2i\,\frac{x^2+y^2-2x+4y-1}{(x-3)^2+(y+1)^2}$

$X = 2\,\frac{4y-x+7}{(x-3)^2+(y+1)^2}$ et $Y = 2\,\frac{x^2+y^2-2x+4y-1}{(x-3)^2+(y+1)^2}$

2. **Déterminer les ensembles des points M :**
a) **Tels que Z soit réel**

$Y = 2\,\frac{x^2+y^2-2x+4y-1}{(x-3)^2+(y+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x + 4y = 1$

$(x-1)^2 + (y+2)^2 = \sqrt{6}$ cet ensemble recherché est le cercle de centre I$(1;\ -2)$ et de rayon $r = \sqrt{6}$.

b) **Tels que Z soit imaginaire pur**

$X = 2\frac{4y-x+7}{(x-3)^2+(y+1)^2} = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x - \frac{7}{4}$ d'où cet ensemble recherché est la droite d'équation $y = \frac{1}{4}x - \frac{7}{4}$ privé du point A$(3-i)$.

<u>Exercice 17 :</u> Soit $f(z) = (1 + z)(i + \bar{z})$ une fonction de la variable complexe.

1. Déterminer l'ensemble géométrique des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit réel.
2. Déterminer l'ensemble géométrique des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un imaginaire pur.

<u>Correction :</u> Posons $z = x + iy$: il vient $f(z) = [x(1+x) - y(1-y)] + i[(1+x)(1-y) + yx]$.

1. $f(z) \in IR \Leftrightarrow Im[f(z)] = 0 \Leftrightarrow (1+x)(1-y) + yx = 0 \Leftrightarrow y = x + 1$. L'ensemble des points M d'affixe z est donc la droite D d'équation cartésienne $y = x + 1$.
2. $f(z) \in iIR \Leftrightarrow Re[f(z)] = 0 \Leftrightarrow x(1+x) - y(1-y) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + y^2 - y = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, donc l'ensemble des points M d'affixe z est un cercle de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

<u>Exercice 18 :</u> Soit les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2i$ et $z_B = -1$ et soit M d'affixe $z \in \mathbb{C} \setminus \{1;-2i\}$. On considère $Z = \frac{z-1}{z+2i}$.
1. Interpréter géométriquement $arg(Z)$.
2. Déterminer l'ensemble des points M(z) tel que $arg(Z) = \frac{\pi}{2}[\pi]$.
3. Déterminer l'ensemble des points M(z) tel que Z soit réel.

<u>Correction :</u> $z \in \mathbb{C} \setminus \{1;-2i\}$/ $Z = \frac{z-1}{z+2i}$

1. Interprétons géométriquement arg $arg(Z)$:
$arg(Z) = arg(z+1) - arg(z-2i) = (\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}) = (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB})\ [2\pi]$
2. **l'ensemble des points M(z) tel que $arg(Z) = \frac{\pi}{2}[\pi]$:** $arg\left(\frac{z-1}{z+2i}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2}[\pi]$, M est sur le cercle de diamètre [AB] privé de A et B (z ≠2i et de 1).
3. $Z \in IR \Leftrightarrow Im(Z) = arg(Z) = 0[\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = 0\ [\pi]$,
M appartient à (AB) privée de A et B.

<u>Exercice 19 :</u> Soient A, B et C les points d'affixe respective $a = -1$, $b = 2i$, $c = -i$. On considère l'application f qui a tout point M d'affixe $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \frac{-iz-2}{z+1}$.

1. Soit C' l'image du point C par f. Donner l'affixe c' du point C' sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.
2. Calculer l'affixe d du point D ayant pour image par f le point D' d'affixe $d' = \frac{1}{2}$.
3. Pour tout nombre complexe z différent de -1 on note p le module de $z + 1$ (c'est à dire $|z+1| = p$) et p' le module de $z' + i$ (c'est à dire $|z' + i| = p'$).
a) Démontrer que, pour tout nombre complexe z différent de -1, on a : $pp' = \sqrt{5}$.
b) Si le point M appartient au cercle (G) de centre A de rayon 2, montrer alors que M' = f(M) appartient au cercle (G') dont on précisera le centre et le rayon.

<u>Correction :</u>

1. $c' = \frac{-i(-i)-2}{-i+1} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i = \frac{3}{2}\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$.
2. $d' = \frac{-iz-2}{z+1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow d = -1 + 2i$.
3. $|z+1| = p$ et $|z' + i| = p'$.
a) $pp' = |z+1| \times |z' + i| = |-2+i| = \sqrt{5}$.
b) $AM = 2 \Leftrightarrow |z+1| = 2$, $p = 2$, on a alors $|z+1| \times |z' + i| = 2p' \Leftrightarrow p' = \frac{\sqrt{5}}{2}$, ainsi M' = f(M) appartient au cercle (G') de centre C et rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

<u>Exercice 20 :</u> On considère l'application f du plan qui à tout point M d'affixe z distinctes de $2i$, associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z+i}{z-2i}$.

1. Pour $z \neq 2i$, on pose $z = 2i + re^{i\theta}$, avec $r > 0$ et $\theta \in IR$. Ecrire $z' - 1$ à l'aide de r et θ.
2. Soit A le point d'affixe $(2i)$.
a) Déterminer l'ensemble Γ_1 des points M d'affixe z du plan tel que $|z' - 1| = 3$.
b) Déterminer l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z du plan tel que $arg(z' - 1) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

<u>Correction :</u>

1. Pour $z \neq 2i$, on pose $z = 2i + re^{i\theta}$, avec $r > 0$ et $\theta \in IR$. $z' - 1 = \frac{z+i}{z-2i} - 1 = \frac{2i+re^{i\theta}+i}{2i+re^{i\theta}-2i} = \frac{1+re^{i\theta}}{re^{i\theta}} = \frac{3i}{r}e^{-i\theta} = \frac{3}{r}e^{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)i}$.

2. A$(2i)$.

a) **L'ensemble Γ_1 des points M d'affixe z du plan tel que $|z' - 1| = 3$:** $|z' - 1| = \left|\frac{z+i}{z-2i} - 1\right| = \left|\frac{3}{r}e^{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)i}\right| = 3 \Leftrightarrow \frac{3}{r} = 3 \Leftrightarrow r = 1$, car $\left|e^{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)i}\right| = 1$.
$z = 2i + re^{i\theta} = z = z_A + e^{i\theta} \Leftrightarrow z - z_A = e^{i\theta} \Leftrightarrow |z - z_A| = |e^{i\theta}| = 1 \Leftrightarrow AM = 1$ et $arg(z - z_A) = \theta\ \ [2\pi]$, donc Γ_1 est le cercle de centre A$(2i)$ et de rayon 1.

b) **L'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z du plan tel que $arg(z' - 1) = \frac{\pi}{4}\ \ [2\pi]$:** $arg(z' - 1) = arg\left(\frac{3}{r}e^{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)i}\right) = \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{4}\ \ [2\pi] \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}\ \ [2\pi]$, donc Γ_2 est la demi-droite d'origine A$(2i)$ et d'équation polaire $\theta = \frac{\pi}{4}$.

<u>Exercice 21 :</u>

1. **Calculer i^2 ; i^3 ; i^4 ; i^5 et i^6.**
2. **En déduire la valeur de i^{2014} et celle de i^{2015}.**
3. **Pour tout entier naturel k, en déduire i^{4k} ; i^{4k+1} ; i^{4k+10}.**
4. **Déterminer les entiers naturels n tels que i^n soit imaginaire pur.**
5. **Déterminer les entiers naturels n tels que $(1 + i)^n$ soit un réel négatif.**

<u>Correction :</u>

1. $i^2 = -1$; $i^3 = i^2 \times i^1 = -i$; $i^4 = i^2 \times i^2 = 1$; $i^5 = i^2 \times i^2 \times i^1 = i$ et $i^6 = i^2 \times i^2 \times i^2 = -1$.
2. $i^{2014} = i^{4\times503} \times i^2 = -(i^4)^{503} = -1$ et celle de $i^{2015} = i^{4\times503+3} = (i^4)^{503} \times i^2 \times i^1 = -i$.
3. $k \in$ IN, $i^{4k} = i^{4\times k} = (i^4)^k = (1)^k = 1$; $i^{4k+1} = i^{4\times k+1} = (i^4)^k \times i^1 = (1)^k \times i^1 = i$; $i^{4k+10} = (i^4)^k \times i^{10} = (1)^k \times i^4 \times i^4 \times i^2 = -1$.
4. **$n \in IN$; i^n soit imaginaire pur :** Notons que q et r le quotient et le reste de la division de n par 4. On a $n = 4q + r$ avec $0 \le r \le 3$. Entamons une discussion de la valeur de $i^n = i^{(4q+r)} = (i^4)^q \times i^r = (1)^q \times i^r = i^r$ en fonction de r : si $r = 0 \Leftrightarrow i^n = i^0 = 1$; si $r = 1 \Leftrightarrow i^n = i^1 = i$; si $r = 2 \Leftrightarrow i^n = i^2 = -1$ et $r = 3 \Leftrightarrow i^n = i^3 = -i$; les entiers naturels n tels que i^n soit imaginaire pur sont donc de la forme $n = 4q + 1$ ou $n = 4q + 3$.
5. **$n \in IN$; $(1 + i)^n$ soit un réel négatif :**

$(1 + i)^n = \left[\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\right]^n = \sqrt[n]{2}e^{\frac{\pi n}{4}i} \in IR_- \Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{4}n = 0 = \sin\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{4}n = \pi + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow n = 4 + 8k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

<u>Exercice 22 :</u> Linéariser

1. **$\cos^3 x$ et $\sin^4 x$.**
2. **$\cos^5 x$ et $\sin^5 x$.**
3. **$(\cos^2 x)(\sin^3 x)$ et $(\cos^4 x)(\sin^2 x)$.**
4. **$\cos^6$ x ; $\sin^6$ x et $(\sin^4$ x$)(\cos^2$ x$)$.**

<u>Correction :</u> Linéariser

1. **$\cos^3 x$** $= \frac{1}{2^3}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{3ix}.e^{-0ix} + 3e^{2ix}.e^{-ix} + 3e^{ix}.e^{-2ix} + e^{0ix}.e^{-3ix}\right) = \frac{1}{8}\left(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}\right) = \frac{1}{8}\left[\left(e^{3ix} + e^{-3ix}\right) + 3\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\right]$ or $e^{inx} + e^{-inx} = 2\cos(nx)$ donc $\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$.

et **$\sin^4 x$** $= \frac{1}{(2i)^4}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{4ix} - 4e^{2ix} + \right.$
6− 4e− 2ix+e− 4ix=18cos 4x− 4cos 2x+3.

2. **$\cos^5 x$** $= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}\left(e^{5ix} + 5e^{3ix} + \right.$
10eix+10e− ix+5e− 3ix+e− 5ix

$\cos^5 x = \frac{1}{16}(\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x)$. Le même raisonnement de $\sin^5 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^5$ donne

$\sin^5 x$ $= \frac{1}{(2i)^5}(z - \bar{z})^5 = \frac{1}{16}(\sin 5x - 5\sin 3x +$
10sinx.

3. **$(\cos^2 x)(\sin^3 x)$** $= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 \times \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3$

$(\cos^2 x)(\sin^3 x) = \frac{-1}{16}\sin 5x + \frac{1}{16}\sin 3x + \frac{1}{8}\sin x$

$(\cos^4 x)(\sin^2 x)$ $= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 \times \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2$
$= \frac{-1}{16}(\cos 6x + 2\cos 4x + \cos 2x - 2)$.

4. **$\cos^6 x$** $= \frac{1}{2^6}(z + \bar{z})^6 = \frac{1}{64}(z^6.\bar{z}^0 + 6z^5.\bar{z}^1 +$
15z4.z2+20z3.z3+15z2.z4+6z1.z5+6z0.z6=164z6 +z6+6zz.z4+z4+15zz2.z2+z2++20zz2 or $z^n + \overline{z^n} = 2\cos(nx)$ et $z\bar{z} = 1$ donc **$\cos^6 x$** $=$
$\frac{1}{32}(\cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10)$

$\sin^6 x = \frac{1}{(2i)^6}(z-\bar{z})^6 = \frac{1}{32}(-\cos 6x + 6\cos 4x - 15\cos 2x + 10$.

$(\sin^4 x)(\cos^2 x) = \frac{1}{(2i)^4} \times \frac{1}{2^2}(z-\bar{z})^4 \times (z+\bar{z})^2 = \frac{1}{32}(\cos 6x - 2\cos 4x - \cos 2x + 2)$.

Exercice 23 :

1. **Exprimer $\sin 5x$ en fonction de $\sin x$.**
2. **Exprimer $\sin(3x)$ en fonction de $\sin x$.**

Correction :

1. **$\sin 5x$ en fonction de $\sin x$:**

$\cos 5x + i\sin 5x = (\cos x + i\sin x)^5$. En développant par la formule du binôme de Newton, on a : $(\cos x + i\sin x)^5 = C_5^0\cos^5 x\,(i\sin x)^0 + C_5^1\cos^{5-1} x\,(i\sin x)^1 + C_5^2\cos^{5-2} x\,(i\sin x)^2 + C_5^3\cos^{5-3} x\,(i\sin x)^3 + C_5^4\cos^{5-4} x\,(i\sin x)^4 + C_5^5\cos^{5-5} x\,(i\sin x)^5 = \cos^5 x + 5i\cos^4 x\sin x - 10\cos^3 x\,(\sin x)^2 - 10i\cos^2 x\,(\sin x)^3 + 5\cos^1 x\,(\sin x)^4 + i(\sin x)^5 = \cos^5 x - 10\cos^3 x\,(\sin x)^2 + 5\cos^1 x\,(\sin x)^4 + i[5\cos^4 x\sin x + (\sin x)^5]$, on en déduit que $\sin 5x = 5\cos^4 x\sin x - 10\cos^2 x\sin^3 x + \sin^5 x$ ou

$\sin 5x$ $= 5\sin x - 20\sin^3 x + 16\sin^5 x$.

2. **Exprimer $\sin(3x)$ en fonction de $\sin x$** : avec le même raisonnement $\sin(3x) = 3\sin x - \sin^3 x$.

Exercice 24 : Dans chacun des cas déterminer l'ensemble des points M(z) vérifiant les conditions suivantes :

1. $|(1+i)\bar{z} - 2i| = 2$.
2. $|iz+3| = |z+4-i|$.
3. $Z = (z-1)(\bar{z}-i)$ **soit un imaginaire pur non nul.**
4. $|z+i| = |z-1|$.
5. $\frac{z+i}{z+1}$ **soit un imaginaire pur non nul.**
6. $arg(z-i) = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ **où** $k \in \mathbb{Z}$.
7. $|z-1| < |z+1|$
8. $|z-1| = |z|$
9. $z - \bar{z} = 0$
10. $|z+1+i| \leq \sqrt{2}$
11. $z\bar{z} = a\bar{z} + \bar{a}z$ **avec** $A(a)$
12. $z + \bar{z} + z\bar{z} = 0$
13. $\mathrm{Im}(z^2) = 2$
14. $\mathrm{Re}(z^2) = 0$
15. $z + \bar{z} = |z|^2 - 1$
16. $|z|^2 + z + \bar{z} = 8$
17. $e^{i\frac{\pi}{3}}z \in \mathbb{R}$
18. $e^{i\frac{\pi}{3}}\bar{z} \in \mathbb{R}$
19. $arg(z) = \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
20. $arg\left(e^{-i\frac{\pi}{6}}z\right) = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
21. $arg(\bar{z}) = arg(-z)\ [2\pi]$.
22. $arg(iz) = \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$ **et** $|z| = 2$.
23. $arg\left(\frac{z}{1+i}\right) = -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ **et** $|z| = \frac{1}{2}$.
24. $arg\left(\frac{z}{1+i\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ **et** $|z| = 1$.

Correction : l'ensemble des points M(z)

1. $|(1+i)\bar{z} - 2i| = 2$ On pose $z = x+iy$ et $\bar{z} = x - iy$, après tout calcul, on trouve $(1+i)\bar{z} - 2i = x + y + i(x-y-2)$, donc $|(1+i)\bar{z} - 2i| = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$, d'où l'ensemble des points M(z) cherché est le cercle de centre $\Omega(1;1)$ et de rayon $R = \sqrt{2}$.
2. $|iz+3| = |z+4-i|$**.** Vous pourriez soit utiliser la formule $z\bar{z} = |z|^2$ ou soit $z = x+iy$. Ainsi l'ensemble des points M(z) est la droite d'équation $y = -4x - 4$.
3. $Z = (z-1)(\bar{z}-i)$ **soit un imaginaire pur non nul.** Il suffit de remplacer z par $z = x+iy$ dans l'expression Z, donc $Z = x^2 + y^2 - x + y + i(y - x + 1)$. Ainsi $Z \in i\mathrm{IR}^*$ alors $x^2 + y^2 - x + y = 0$ soit $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ avec $y - x + 1 \neq 0$. D'où l'ensemble des points recherché est le cercle de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $R = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ privé des points $A(1,0)$ et $B(0,1)$.
4. L'ensemble cherché est donc la médiatrice du segment [AD] avec $D(-i)$ et $A(1)$.
5. $\frac{z+i}{z+1}$ **soit un imaginaire pur non nul.**

Soit les points $A(-1)$ et $B(-i)$. $\frac{z+i}{z+1} \in i\mathrm{IR} \Leftrightarrow arg\left(\frac{z+i}{z+1}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ d'où on obtient le cercle de diamètre [AB], privé de A.
Vous pouvez aussi utiliser la méthode analytique pour résoudre le problème posé.

6. $arg(z-i) = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ **où** $k \in \mathbb{Z}$**.** Soit les points $A(i)$ et $B(-i)$, $arg(z-i) = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k =$

$arg\left(z_{\overrightarrow{AM}}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$. $arg(z-i)$ n'existe que si $z \neq i$, donc $M \neq A$. On obtient la demi-droite]AB].

7. **$|z-1| < |z+1|$.** L'ensemble cherché est donc le demi-plan ouvert $x > 0$.
8. **$|z-1| = |z|$.** L'ensemble cherché est donc la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$.
9. **$z - \bar{z} = 0$** L'ensemble cherché est l'axe réel.
10. L'ensemble cherché est donc le disque fermé de centre $\mathrm{I}(-1;-1)$ et de rayon $\mathrm{R} = \sqrt{2}$.
11. **$z\bar{z} = a\bar{z} + \bar{a}z$ avec $A(a)$.** L'ensemble cherché est le cercle de centre $\mathrm{A}(a)$ passant par l'origine O
12. L'ensemble cherché est donc le cercle de centre $\mathrm{I}(-1)$ et de rayon $\mathrm{R} = 1$.
13. $\mathrm{xy} = 1$, l'ensemble cherché est donc l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{\mathrm{x}}$.
14. $\mathrm{x}^2 - \mathrm{y}^2 = 0$, l'ensemble cherché est donc la réunion des bissectrices d'équations respectives $y = \mathrm{x}$ et $y = -\mathrm{x}$.
15. **$z + \bar{z} = |z|^2 - 1$** ou $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$, donc l'ensemble des points M d'affixe z qui vérifient $z + \bar{z} = |z|^2 - 1$ est un cercle de centre Ω d'affixe 1 et de rayon $\sqrt{2}$.
16. **$|z|^2 + z + \bar{z} = 8$** ou $x^2 + y^2 + 2x - 8 = 0$, donc l'ensemble des points M d'affixe z qui vérifient $|z|^2 + z + \bar{z} = 8$ est un cercle de centre Ω d'affixe -1 et de rayon 3.
17. **$e^{i\frac{\pi}{3}}z$** $\in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im\left(e^{i\frac{\pi}{3}}z\right) = Im\left[\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}y + i\left(\frac{y}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right] = 0 \Leftrightarrow \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}x = 0 \Leftrightarrow y = -x\sqrt{3}$, l'ensemble cherché est donc la droite d'équation $y = -x\sqrt{3}$.
18. **$e^{i\frac{\pi}{3}}\bar{z}$** $\in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im\left(e^{i\frac{\pi}{3}}z\right) = Im\left[\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}y + i\left(\frac{y}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right] = 0 \Leftrightarrow \frac{y}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}x = 0 \Leftrightarrow y = x\sqrt{3}$, l'ensemble cherché est donc la droite d'équation $y = x\sqrt{3}$.
19. **$arg(z) = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$** donc l'ensemble cherché est la demi-droite d'origine O(0) et d'équation polaire $\theta = \frac{\pi}{4}$.
20. **$arg\left(e^{-i\frac{\pi}{6}}z\right) = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$** ou $arg(z) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + k\pi = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ donc l'ensemble cherché est la demi-droite d'origine O(0) exclu, et d'équation polaire $\theta = \frac{\pi}{2}$.
21. **$arg(\bar{z}) = arg(-z)$ $[2\pi]$**..$arg(\bar{z}) = arg(-z)$ $[2\pi]$ ou $arg(-z) = -arg(z) = arg(z) + \pi$ $[2\pi]$ ou $arg(\bar{z}) = arg(-z) = -arg(z) = arg(z) + \pi$ $[2\pi]$, donc $-arg(z) = arg(z) + \pi$ $[2\pi] \Leftrightarrow arg(z) = -\frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$. L'ensemble Γ des points M d'affixe z du plan tel que $arg(\bar{z}) = arg(-z)$ $[2\pi]$ est le demi-axe de ordonnées constitué des points dont l'affixe est un imaginaire pur de partie imaginaire négative.
22. **$arg(iz) = \frac{3\pi}{4}$ $[2\pi]$ et $|z| = 2$.**
 $arg(iz) = \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow arg(z) = \frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$ et $|z| = 2$, donc l'ensemble cherché est le diamètre [OB], privé de O tel que $OB = 2$ et d'équation polaire $\theta = \frac{\pi}{4}$.
23. **$arg\left(\frac{z}{1+i}\right) = -\frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$ et $|z| = \frac{1}{2}$.**
.$arg\left(\frac{z}{1+i}\right) = -\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow arg(z) = 0$ $[2\pi]$ et $|z| = \frac{1}{2}$, donc l'ensemble cherché est le diamètre [OB], privé de O tel que $OB = \frac{1}{2}$ et d'équation polaire $\theta = 0$.
24. **$arg\left(\frac{z}{1+i\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$ et $|z| = 1$.**
$arg\left(\frac{z}{1+i\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow arg(z) = \frac{2\pi}{3}$ $[2\pi]$ et $|z| = 1$, donc l'ensemble cherché est le diamètre [OB], privé de O tel que $OB = 1$ et d'équation polaire $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

<u>Exercice 25 :</u> soient $P = \{z \in \mathbb{C} \,/\, Im(z) > 0\}$, $D = \{z \in \mathbb{C} \,/ |z| < 1\}$ et on considère l'application f du plan qui à tout point M d'affixe z distinctes de $-i$, associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z-i}{z+i}$.

1. **Montrer que tout élément de P à son image par f dans D.**
2. **Montrer que tout élément de D possède un unique antécédent par f dans P.**

<u>**Correction :**</u> soient $P = \{z \in \mathbb{C} \,/\, Im(z) > 0\}$, $D = \{z \in \mathbb{C} \,/ |z| < 1\}$ et $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$.

1. $[f(z)]^2 = \left|\frac{z-i}{z+i}\right|^2 = \frac{x^2+(y-1)^2}{x^2+(y+1)^2}$, si $y > 0 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 < x^2 + (y+1)^2 \Leftrightarrow |z'| < 1$. Ainsi $\forall\, z \in P, z' = f(z) \in D$.
2. $z' \in D, z' = \frac{z-i}{z+i} \Leftrightarrow z = \frac{z'+1}{1-z'}i \in P$. Ainsi $\forall\, z \in D, \exists!\, z \in P, z' = f(z) = z'$.

<u>Exercice 26 :</u>

1. **Déterminer les racines carrées de $5 - 12i$.**
2. **Trouver les racines cubiques de $-4 + 4i\sqrt{3}$.**
3. **Déterminer les racines cubiques de 1.**
4. **Déterminer les racines quatrièmes de $\frac{16\sqrt{2}+16i\sqrt{2}}{-i+\sqrt{3}}$.**
5. **Trouver les racines cinquièmes de -1.**

Correction : **Les racines n-ièmes sont déduites de** $z_k = \left[\sqrt[n]{\rho}, \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$ **avec** $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

1. Posons $z = x + iy$ /$z^2 = 5 - 12i$ alors
$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{5^2 + 12^2} \\ x^2 - y^2 = 5 \\ 2xy = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x^2 - y^2 = 5 \\ xy = -6 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} 2x^2 = 18 \\ 2y^2 = 8 \\ xy = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 4 \\ xy = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \mp 3 \\ y = \mp 2 \\ xy = -6 \end{cases}$ donc les racines carrées de $5 - 12i$ sont $3 - 2i$ et $-3 + 2i$.

2. On sait que $-4 + 4i\sqrt{3} = 8e^{\frac{2\pi}{3}i}$, alors les racines cubiques de $-4 + 4i\sqrt{3}$ sont $z_0 = 2e^{\frac{2\pi}{9}i}$; $z_1 = 2e^{\frac{8\pi}{9}i}$ et $z_2 = 2e^{\frac{12\pi}{9}i}$.

3. On sait que $1 = e^{0i}$, alors les racines cubiques de 1 sont $z_0 = 1$; $z_1 = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ et $z_2 = e^{\frac{4\pi}{3}i}$.

4. On sait que $\frac{16\sqrt{2}+16i\sqrt{2}}{-i+\sqrt{3}} = 16e^{\frac{5\pi}{12}i}$, alors les racines quatrièmes de $\frac{16\sqrt{2}+16i\sqrt{2}}{-i+\sqrt{3}}$ sont $z_0 = 2e^{\frac{5\pi}{48}i}$; $z_1 = 2e^{\frac{29\pi}{48}i}$; $z_2 = 2e^{\frac{53\pi}{48}i}$ et $z_3 = 2e^{\frac{77\pi}{48}i}$.

5. On sait que $-1 = e^{\pi i}$, alors les racines cinquièmes de -1 sont $z_0 = e^{\frac{\pi}{6}i}$; $z_1 = e^{\frac{\pi}{2}i}$; $z_2 = e^{\frac{5\pi}{6}i}$; $z_3 = e^{\frac{7\pi}{6}i}$ et $z_4 = e^{\frac{3\pi}{2}i}$.

Exercice 27 :

1. Résoudre dans ℂ l'équation $\frac{z-2}{z-1} = z$. Donner les solutions sous la forme algébrique et trigonométrique.

2. Résoudre dans ℂ l'équation $\frac{z-2}{z-1} = i$. Donner les solutions sous la forme algébrique.

3. On considère les points A, B et M d'affixes respectives $z_1 = 1$, $z_2 = 2$ et $z_3 = z$.

a) Interpréter géométriquement le module et un argument de $\frac{z-2}{z-1}$.

b) Montrer, à l'aide d'une interprétation géométrique que toute solution de l'équation $\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^n = i$, où n désigne un entier naturel non nul, a une partie réelle égale à $\frac{3}{2}$. Résoudre alors dans ℂ l'équation $\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^2 = i$.

Correction : $z \in \frac{\mathbb{C}}{} \exists\, z \neq 1$

1. $\frac{z-2}{z-1} = z \Leftrightarrow z^2 - 2z + 2 = 0$, $\Delta = -4 < 0$, donc il y a deux solutions complexes :
$z_1 = 1 + i = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$.
$z_2 = 1 - i = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$.

2. $\frac{z-2}{z-1} = i \Leftrightarrow z = \frac{2-i}{1-i} = \frac{3+i}{2}$.

3. A(1), B(2) et M(z).

a) Interprétons géométriquement le module et un argument de $\frac{z-2}{z-1}$: $\left|\frac{z-2}{z-1}\right| = \frac{BM}{AM}$ et $arg\left(\frac{z-2}{z-1}\right) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM})$. $\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^n = i$, où $\left|\frac{z-2}{z-1}\right|^n = \left|\frac{BM}{AM}\right|^n = |i| = 1$, soit $BM = AM$ et $arg\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^n = n\, arg\left(\frac{z-2}{z-1}\right) = n(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = arg(i) = \frac{\pi}{2}$, soit $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{2n}$.

b) Puisque $BM = AM$, le point M est sur la médiatrice du segment [AB] qui a pour équation $x = \frac{3}{2}$. Donc toute solution de l'équation $\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^2 = i$ a une partie réelle égale à $\frac{3}{2}$. **Résoudre alors dans ℂ l'équation $\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^2 = i$:**
$BM = AM$ et $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{4}$ $[\pi]$. Donc $\frac{z-2}{z-1} = e^{i\frac{\pi}{4}}$ ou $\frac{z-2}{z-1} = e^{i\frac{5\pi}{4}}$, soit $z = \frac{2-e^{i\frac{\pi}{4}}}{1-e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{3}{2} - i\,\frac{1+\sqrt{2}}{4}$. $S_{\mathbb{C}} = \left\{\frac{3}{2} - i\,\frac{1+\sqrt{2}}{4}\right\}$.

Exercice 28 : **Résoudre dans ℂ :**

1. $\boldsymbol{z^2 = -11}$
2. $\boldsymbol{z^2 = 9 + 5i}$
3. $\boldsymbol{z^2 - 2z + 3 = 0}$.

Correction : **Résoudre dans ℂ**

1. $\boldsymbol{z^2 = -11}$; -11 est un nombre entier négatif. Ses racines carrées sont donc $i\sqrt{11}$ et $-i\sqrt{11}$.

2. $\boldsymbol{z^2 = 9 + 5i}$, on pose $z = x + iy$ et on cherche les racines carrées $\boldsymbol{9 + 5i}$. En résumé on résout
$\begin{cases} x^2 - y^2 = 9 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{106} \\ 2xy = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{\sqrt{106}+9}{2} \\ y^2 = \frac{\sqrt{106}-9}{2} \end{cases}$ On en tire immédiatement $z = \mp\left(\sqrt{\frac{\sqrt{106}+9}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{106}-9}{2}}\right)$.

3. $\boldsymbol{z^2 - 2z + 3 = 0}$, $\Delta = 2i\sqrt{2}$, donc il y a deux solutions complexes : $z_1 = 1 + i\sqrt{2}$, $z_2 = 1 - i\sqrt{2}$. $S_{\mathbb{C}} = \{1 + i\sqrt{2}; 1 - i\sqrt{2}\}$.

Exercice 29 : **Résoudre dans ℂ : $\theta \in IR$**

Les nombres a, b et c sont tous des réels.

1. $\boldsymbol{2z^2 - 6\sqrt{3}z + 9 = 0}$
2. $\boldsymbol{4z^2 + 8|z^2| - 3 = 0}$
3. $\boldsymbol{z + 3\bar{z} = (2 + i\sqrt{3})|z|}$
4. $\boldsymbol{2z^2 - 2(1 + \cos\theta)z + \cos\theta = -1}$, **avec $\theta \in IR$ et $0 \leq \theta \leq \pi$.**

5. $\boldsymbol{z^2 - 2\cos\theta\, z = -1}$**, avec** $\boldsymbol{\theta \in IR\,/ 0 \le \theta \le \pi}$**.**
6. $\boldsymbol{z^2 - 2\sin^2\theta\, z + \sin^2\theta = 0}$**, avec** $\boldsymbol{\theta \in IR}$ **et** $\boldsymbol{-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}}$**.**
7. $\boldsymbol{z^3 + 1 = 0}$
8. $\boldsymbol{z^8 + 1 = 0}$

<u>Correction :</u> Résoudre dans $\mathbb{C}$: $\boldsymbol{\theta \in IR}$

Les nombres a, b et c sont tous des réels.

1. $\boldsymbol{2z^2 - 6\sqrt{3}z + 9 = 0}$, $\Delta = -36 = (6i)^2$,
$S = \left\{\frac{3}{2}(1-i); \frac{3}{2}(1+i)\right\}$.
2. $4z^2 + 8|z^2| - 3 = 0$
3. $\boldsymbol{z + 3\bar{z} = (2 + i\sqrt{3})|z|}$, Remplacer la forme trigonométrique de z par $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ dans l'équation. Ainsi après tout calcul la solution est $z = \rho e^{-\frac{\pi}{3}i}$ avec $\rho \ge 0$.
4. $\boldsymbol{2z^2 - 2(1 + \cos\theta)z + \cos\theta + 1 = 0}$,
$\Delta = 4(1 + \cos\theta)^2 - 8(\cos\theta + 1) = -4\sin^2\theta$
- **Pour $\theta = 0$** :
$z^2 - 2z + 1 = (z-1)^2 = 0 \Leftrightarrow z = 1$.
- **Pour $\theta = \pi$** : $2z^2 = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
- **Pour $\theta \in]0; \pi[$**: $\Delta = -4\sin^2\theta = (2i\sin\theta)^2$
$z = z_1 = \frac{(1+\cos\theta) - i\sin\theta}{2}$ ou $z = \bar{z}_1$.
5. $\boldsymbol{z^2 - 2\cos\theta\, z + 1 = 0}$,
- **Pour $\theta = 0$** :
$z^2 - 2z + 1 = (z-1)^2 = 0 \Leftrightarrow z = 1$.
- **Pour $\theta = \pi$** :
$z^2 + 2z + 1 = (z+1)^2 = 0 \Leftrightarrow z = -1$.
- **Pour $\theta \in]0; \pi[$**, $\Delta = -4\sin^2\theta = (2i\sin\theta)^2$
alors $z = z_1 = \cos\theta - i\sin\theta$ ou $z = \bar{z}_1$.
6. $\boldsymbol{z^2 - 2\sin^2\theta\, z + \sin^2\theta = 0}$**,** $\Delta = (i\sin 2\theta)^2$
- Pour $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$: $z^2 = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
- Pour $\theta = -\frac{\pi}{2}$:
$z^2 - 2z + 1 = (z-1)^2 = 0 \Leftrightarrow z = 1$.
- Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$: $z^2 - 2z + 1 = (z-1)^2 = 0 \Leftrightarrow z = 1$.
- Pour $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$: $z = z_1 = \frac{2\sin^2\theta - i\sin 2\theta}{2}$ ou $z = \bar{z}_1$.
7. $\boldsymbol{z^3 + 1 = 0}$, on cherche les nombres complexes $z = \rho e^{i\theta}$ vérifiant l'équation $z^3 = -1 = e^{i\pi}$. (On doit en trouver trois distincts). On a donc le système $\begin{cases} \rho^3 = 1 \\ 3\theta = \pi + 2k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$ soit $\rho = 1$ et $\theta = \frac{\pi + 2k\pi}{3}$ ou $z_k = \left[1; \left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right]$ avec $k \in \{0, 1, 2\}$. L'ensemble des solutions recherchées est : $z_0 = \left[1; \frac{\pi}{3}\right] = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $z_1 = [1; \pi] = -1$ et $z_2 = \left[1; \frac{5\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}\right] = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
8. $\boldsymbol{z^8 + 1 = 0}$, On cherche les nombres complexes $z = \rho e^{i\theta}$ vérifiant l'équation $z^8 = -1 = e^{i\pi}$. (On doit en trouver huit distincts). On a donc le système $\begin{cases} \rho^8 = 1 \\ 8\theta = \pi + 2k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$ soit $\rho = 1$ et $\theta = \frac{\pi + 2k\pi}{8}$ ou $z_k = \left[1; \left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}\right)\right]$ avec $k \in \{0, 1, 2, \dots, 7\}$. On peut par ailleurs remarquer que $z^8 = -1 = i^2 \Leftrightarrow z^4 = i$ ou $z^4 = -i$. L'ensemble des solutions recherchées est $z_0 = \left[1; \frac{\pi}{8}\right]$; $z_1 = \left[1; \frac{5\pi}{8}\right]$; $z_2 = \left[1; \frac{9\pi}{8} = -\frac{\pi}{8}\right]$; $z_3 = \left[1; \frac{13\pi}{8} = -\frac{5\pi}{8}\right]$; $z_4 = \left[1; -\frac{\pi}{8}\right]$; $z_5 = \left[1; -\frac{5\pi}{8}\right]$; $z_6 = \left[1; -\frac{9\pi}{8} = \frac{\pi}{8}\right]$ et $z_7 = \left[1; \frac{-13\pi}{8} = \frac{5\pi}{8}\right]$.

<u>Exercice 30 :</u> Résoudre dans $\mathbb{C}$:

Les nombres a, b et c ne sont pas tous des réels.

1. $\boldsymbol{z^2 - 3z + 3 + i = 0}$
2. $\boldsymbol{z^2 - (3 + 3i)z + 5i = 0}$
3. $\boldsymbol{iz^2 - 2\bar{z} + 2 - i = 0}$
4. $\boldsymbol{z^2 - (5 - 14i)z - 24 - 10i = 0}$
5. $\boldsymbol{z^2 - (2 + mi)z + 2 + mi - m = 0}$**,** $\boldsymbol{m \in \mathbb{C}}$**.**
6. $\boldsymbol{z^4 - i = 0}$**.**

<u>Correction :</u> Résoudre dans $\mathbb{C}$:

Les nombres a, b et c ne sont pas tous des réels.

1. $\boldsymbol{z^2 - 3z + 3 + i = 0}$, $\Delta = -3 - 4i$, les deux racines de Δ sont : $z_0 = 1 - 2i$ et $z_1 = -1 + 2i$ donc $S = \{(2 - i); (1 + i)\}$.
2. $\boldsymbol{z^2 - (3 + 3i)z + 5i = 0}$, $\Delta = -2i$, les deux racines de Δ sont : $z_0 = 1 - i$ et $z_1 = -1 + i$ donc $S = \{(2 + i); (1 + 2i)\}$.
3. $\boldsymbol{iz^2 - 2\bar{z} + 2 - i = 0}$, Vous devrez remplacer l'écriture de z par $z = x + iy$ et $\bar{z} = x - iy$ afin de retrouver les solutions de l'équation. Ainsi après tout calcul les solutions de l'équation sont $z_1 = 1$; $z_2 = -1 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $z_3 = -1 - \sqrt{2} - i\sqrt{2}$.
4. $\boldsymbol{z^2 - (5 - 14i)z - 24 - 10i = 0}$,
$\Delta = 25(-3 - 4i)$, posons $z = x + iy / z^2 = -3 - 4i$
En résumé on résout $\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ x^2 + y^2 = 5 \\ 2xy = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 4 \end{cases}$ On en obtient $z = \mp 5(1 - 2i)$. L'ensemble des solutions recherchées est : $z = \frac{(5-14i) \mp 5(1-2i)}{2}$, ou $S_{\mathbb{C}} = \{5 - 12i; 2i\}$.
5. $\boldsymbol{z^2 - (2 + mi)z + 2 + mi - m = 0}$, $m \in \mathbb{C}$, $\Delta = -(m-2)^2 = [i(m-2)]^2$. L'ensemble des solutions recherchées est : $z = \frac{(2+mi) \mp i(m-2)}{2}$, ou $S_{\mathbb{C}} = \{1 + i; 1 + i(m-1)\}$.

6. $\boldsymbol{z^4 - i = 0}$, on cherche les nombres complexes $z = \rho e^{i\theta}$ vérifiant l'équation $z^4 = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$. (On doit en trouver quatre distincts). On a donc le système $\begin{cases} \rho^4 = 1 \\ 4\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$ soit $\rho = 1$ et $\theta = \frac{\pi + 4k\pi}{8}$ ou $z_k = \left[1; \left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right)\right]$ avec $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. L'ensemble des solutions recherchées est : $z_0 = \left[1; \frac{\pi}{8}\right]$; $z_1 = \left[1; \frac{5\pi}{8}\right]$; $z_2 = \left[1; \frac{9\pi}{8} = -\frac{\pi}{8}\right]$ et $z_3 = \left[1; \frac{13\pi}{8} = -\frac{5\pi}{8}\right]$.

<u>Exercice 31 :</u> Soit l'application de $\boldsymbol{f}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $\boldsymbol{f(z) = z^3 + (1-5i)z^2 + 2(5+i)z + 8i}$.

1. Démontrer que l'équation $\boldsymbol{f(z) = 0}$ admet une solution qui est un nombre imaginaire pur que l'on déterminera.
2. En déduire que $\boldsymbol{f(z)}$ peut s'écrire sous la forme $\boldsymbol{f(z) = (z-2i)(z^2 + az + b)}$ où $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont deux complexes à déterminer.
3. Déterminer la racine carrée de $\boldsymbol{8 - 6i}$.
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\boldsymbol{f(z) = 0}$.

<u>Correction :</u>

$$\boldsymbol{f(z) = z^3 + (1-5i)z^2 + 2(5+i)z + 8i}$$

1. $f(ai) = -a^3 i - (1-5i)a^2 + 2(5+i)ai + 8i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -a^2 + 2a = 0 \\ -a^3 + 5a^2 - 10a + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}$
Or seul $a = 2$ vérifie la 2nd équation du système ; donc l'équation $f(z) = 0$ admet une solution qui est un nombre imaginaire pur $z_0 = 2i$.
2. $f(z) = (z-2i)(z^2 + az + b) = z^3 + (a-2i)z^2 + 2(b-2ai)z - 2ib$, par identification on aura : $a = 1 - 3i$ et $b = -4$.
3. racine carrée de $\boldsymbol{8 - 6i}$:
posons $\mu = x + yi$ / $\begin{cases} \mu^2 = 8 - 6i \\ \mu^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \\ |\mu| = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ x^2 + y^2 = 10 \\ 2xy = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 18 \\ 2y^2 = 2 \\ xy = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \mp 3 \\ y = \mp 1 \\ xy = -3 \end{cases}.$$

Les racines carrées de $\boldsymbol{8 - 6i}$ **sont** $\begin{cases} \mu = -3 + i \ et \\ \mu' = 3 - i \end{cases}$
4. $z^2 + (1-3i)z - 4 = 0$, $\Delta = 8 - 6i$ où les racines carrées étaient $\begin{cases} \mu = -3 + i \ et \\ \mu' = 3 - i \end{cases}$.
$z_1 = \frac{-1+3i+3-i}{2} = 1 - i$ et $z_2 = \frac{-1+3i-3+i}{2} = -2 + 2i$.
$S_{\mathbb{C}} = \{2i; 1 - i; -2 + 2i\}$.

<u>Exercice 32 :</u> Pour tout point $\boldsymbol{M(p, q)}$ tels que $\boldsymbol{(p, q) \in IR^{*2}}$, on considère l'équation (E) définie par $\boldsymbol{z^2 - 2pz + q = 0}$. Déterminer les ensembles A, B, C des points M tels que (E) possède :

a) Des racines complexes
b) Des racines réelles et distinctes
c) Une racine double.
Calculer les racines dans chacun des cas.

<u>Correction :</u> Déterminons les ensembles A, B, C des points M tels que (E) possède :

On calcule $\Delta' = p^2 - q$

a) Des racines complexes : $M \in A \Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow q > p^2$, d'où l'ensemble A est la région de la parabole d'équation $y = x^2$ et sa partie intérieure. Les racines sont : $z_1 = p - i\sqrt{q - p^2}$ et $z_2 = p + i\sqrt{q - p^2}$.
b) Des racines réelles et distinctes : $M \in B$
$M \in B \Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow q < p^2$, d'où l'ensemble B est la région de la parabole d'équation $y = x^2$ et sa partie extérieure. Les racines sont : $z_1 = p - \sqrt{p^2 - q}$ et $z_2 = p + \sqrt{p^2 - q}$.
c) Une racine double : $M \in C$
$M \in B \Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow q = p^2$, d'où l'ensemble C est la parabole d'équation $y = x^2$.
Les racines sont : $z_1 = z_2 = p$.

<u>Exercice 33 :</u> On pose $\boldsymbol{j = e^{2i\frac{\pi}{3}}}$.

1. Calculer $\boldsymbol{j^2}$ et $\boldsymbol{j^3}$.
2. Montrer que $\boldsymbol{1 + j + j^2 = 0}$.
3. On note $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{C}$ les points du plan complexe d'affixes respectives $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{j^2}$ et $\boldsymbol{j^3}$.
a) Démontrer que ces trois points appartiennent à un même cercle ℸ dont on déterminera le centre et le rayon.
b) Démontrer que le triangle $\boldsymbol{ABC}$ est équilatéral.
c) Déduire le centre de gravité du triangle $\boldsymbol{ABC}$ et retrouver ainsi que le nombre complexe $\boldsymbol{j}$ est une solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\boldsymbol{z^2 + z + 1 = 0}$.

<u>Correction :</u> $j = e^{\frac{2\pi}{3}i} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

1. $j^2 = \left(e^{2i\frac{\pi}{3}}\right)^2 = e^{\frac{4\pi}{3}i} = e^{-\frac{\pi}{3}i} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $j^3 = \left(e^{2i\frac{\pi}{3}}\right)^3 = e^{2\pi i} = 1$.
2. $1 + j + j^2 = 1 + -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0$.

3. $A(j)$, $B(j^2)$ et $C(j^3)$.

a) $|z_{\overrightarrow{OA}}| = |z_A - z_O| = |z_A| = \left|-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = 1$; $|z_{\overrightarrow{OB}}| = |z_B - z_O| = |z_B| = \left|-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = 1$ et $|z_{\overrightarrow{OC}}| = |z_C - z_O| = |1| = 1$, donc ces trois points A, B et C appartiennent à un même cercle ꓶ de centre O et de rayon $r = |z_{\overrightarrow{OA}}| = 1$.

b) $|z_{\overrightarrow{AB}}| = |z_B - z_A| = \left|-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = |\sqrt{3}i| = \sqrt{3}$; $|z_{\overrightarrow{AC}}| = |z_C - z_A| = \left|1 + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \left|\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{3}$ et $|z_{\overrightarrow{BC}}| = |z_C - z_B| = \left|1 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \left|\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{3}$. On remarque que $|z_{\overrightarrow{AB}}| = |z_{\overrightarrow{AC}}| = |z_{\overrightarrow{BC}}| = \sqrt{3}$, donc ABC est un triangle équilatéral.

c) Soit G le centre de gravité du triangle ABC, donc $z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1}{3} = 0 = z_O$. On sait que $j^2 + j + 1 = 0$, donc le nombre complexe j est une solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$.

<u>Exercice 35 :</u> Soit un polynôme défini par $\mathbf{P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63}$.

1. **Calculer $\mathbf{P(i\sqrt{3})}$ et $\mathbf{P(-i\sqrt{3})}$.**
2. **Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que $\mathbf{P(z) = (z^2 + 3)Q(z)}$.**
3. **Résoudre dans $\mathbb{C}$ $\mathbf{P(z) = 0}$.**
4. **Montrer que les images A, B, C et D des quatre solutions de l'équation précédente appartiennent à un même cercle dont on déterminera le centre et le rayon. Représenter ces quatre points et le cercle.**

<u>Correction :</u> $\mathbf{P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63}$.

1. $P(i\sqrt{3}) = (i\sqrt{3})^4 - 6(i\sqrt{3})^3 + 24(i\sqrt{3})^2 - 18(i\sqrt{3}) + 63 = 9 + 18i\sqrt{3} - 72 - 18i\sqrt{3} + 63 = 0$, donc $P(i\sqrt{3}) = 0$ et comme $-i\sqrt{3}$ est le conjugué de $i\sqrt{3}$, alors $P(-i\sqrt{3}) = P\left(\overline{i\sqrt{3}}\right) = \overline{P(i\sqrt{3})} = 0$.

2. **Montrons qu'il existe un polynôme Q tel que $\mathbf{P(z) = (z^2 + 3)Q(z)}$:** On sait que $(z - i\sqrt{3})(z + i\sqrt{3}) = z^2 + 3$, ainsi, il existe un polynôme Q tel que $P(z) = (z^2 + 3)Q(z)$.

3. **Résoudre dans $\mathbb{C}$ $\mathbf{P(z) = 0}$:** Ce polynôme Q est de degré 2, puisque P est de degré 4. Donc il existe des réels a, b et c tels que $Q(z) = az^2 + bz + c = 0$. Ainsi après tout calcul, on retrouve $Q(z) = z^2 - 6z + 21 = 0$, $\Delta = -48 < 0$, donc il y a deux solutions complexes : $z_1 = 3 + 2i\sqrt{3}$, $z_2 = 3 - 2i\sqrt{3}$.
$S_{\mathbb{C}} = \{-i\sqrt{3}; i\sqrt{3}; 3 - 2i\sqrt{3}; 3 + 2i\sqrt{3}\}$.

4. En plaçant les images A, B, C et D des quatre solutions de l'équation précédente, on remarque qu'elles appartiennent au cercle de centre E d'affixe 3 et de rayon à déterminer : AE $= |3 - (3 - 2i\sqrt{3})| = 2\sqrt{3}$.
On calcule BE = CE = DE $= 2\sqrt{3}$. Donc les points A, B, C et D appartiennent au cercle de centre E d'affixe 3 et de rayon $2\sqrt{3}$.

<u>Exercice 36 :</u> On considère les points A, B et C d'affixes respectives $\mathbf{z_A = -1 + i\sqrt{3}}$, $\mathbf{z_B = -1 - i\sqrt{3}}$ et $\mathbf{z_C = 2}$.

1. **Placer les points sur un dessin.**
2. **Montrer que $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.**
3. **En déduire la nature du triangle ABC.**
4. **Déterminer le centre et le rayon du cercle Γ_1 circonscrit au triangle ABC. Tracer le cercle Γ_1.**
5.
a) **Établir que l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z qui vérifient $4(z + \bar{z}) + z\bar{z} = 0$ est un cercle de centre Ω d'affixe – 2.**
b) **Préciser son rayon. Construire Γ_2.**
c) **Montrer que A et B appartiennent à Γ_2.**
6.
a) **Déterminer l'ensemble Γ_3 des points M d'affixe z du plan tel que $|z - 2| = |z + 1 + i\sqrt{3}|$.**
b) **Montrer que le point A appartient à cet ensemble Γ_3.**

<u>Correction :</u> $A(-1 + i\sqrt{3})$, $B(-1 - i\sqrt{3})$ et $C(2)$.

1. **Placer les points sur un dessin.**
2. $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{-1 - i\sqrt{3} - 2}{-1 + i\sqrt{3} - 2} = \frac{-3 - i\sqrt{3}}{-3 + i\sqrt{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.
3. **Déduction de la nature du triangle ABC :** $\left|\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = \frac{BC}{AC} = 1 \Leftrightarrow BC = AC$ et $arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{3}$, donc le triangle ABC a deux côtés de même longueur et un angle de 60°, donc ABC est équilatéral.
4. On remarque sur le dessin que O semble être le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
Or OA $= |z_A| = |-1 + i\sqrt{3}| = 2$, OB $= |z_B| = |-1 - i\sqrt{3}|$, et OC = 2. Donc O est le centre du cercle Γ_1 circonscrit au triangle ABC et son rayon est égal à 2.
5.
a) Posons $z = x + iy$, ainsi $4(z + \bar{z}) + z\bar{z} = 0$ devient $(x + 2)^2 + y^2 = 4$, donc l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z qui vérifient $4(z + \bar{z}) + z\bar{z} = 0$ est un cercle de Ω centre d'affixe – 2.
b) R = 2.
c) **Montrons que A et B appartiennent à Γ_2 :**
ΩA $= |-1 + i\sqrt{3} + 2| = |1 + i\sqrt{3}| = 2$
ΩB $= |-1 - i\sqrt{3} + 2| = |1 - i\sqrt{3}| = 2$, donc A et B appartiennent à Γ_2.
6.
a) $|z - 2| = |z + 1 + i\sqrt{3}| \Leftrightarrow |z - 2| = |z — 1 - i\sqrt{3})| \Leftrightarrow$ MC = MB, l'ensemble Γ_3 des points

M d'affixe z du plan tel que $|z-2| = |z+1+i\sqrt{3}|$ est la médiatrice du segment [BC].

b) Comme le triangle ABC est équilatéral, le point A est équidistant de B et de C, donc appartient à cet ensemble Γ_3.

<u>Exercice 37 :</u> Soit un polynôme défini par $P(z) = z^4 - 6z^3 + 23z^2 - 34z + 26$ et on désigne par α un nombre complexe non nul.

1. Montrer que $P(\overline{\alpha}) = \overline{P(\alpha)}$. En déduire que si $P(\alpha) = 0$ alors $P(\overline{\alpha}) = 0$.

2. Calculer $P(1+i)$ avec $(1+i)^2 = 2i$. Indiquer deux solutions complexes de l'équation $P(z) = 0$.

3. Montrer qu'il existe un polynôme Q à déterminer tel que $P(z) = (z-\alpha)(z-\overline{\alpha})Q(z)$.

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ $Q(z) = 0$.

5. Résoudre dans $\mathbb{C}$ $P(z) = 0$.

<u>Correction :</u> $P(z) = z^4 - 6z^3 + 23z^2 - 34z + 26$ et on désigne par α un nombre complexe non nul.

1. Montrons que $P(\overline{\alpha}) = \overline{P(\alpha)}$:

On remarque que dans ce polynôme, l'inconnu z n'est pas affecté par un coefficient imaginaire dont son conjugué change de signe, d'où $\mathbf{P(\overline{\alpha}) = \overline{P(\alpha)}}$

$P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \overline{P(\alpha) = 0} \Leftrightarrow \overline{P(\alpha)} = P(\overline{\alpha}) = 0$.

2. $P(1+i) = (1+i)^4 - 6(1+i)^3 + 23(1+i)^2 - 34(1+i) + 26$, après tout calcul, on aura $P(1+i) = 0$, ce qui prouve que 1+i est solution de $\mathbf{P(z)}$. On sait que les nombres $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\overline{\alpha}}$ en sont solutions. Ce qui permet de déduire que $\boldsymbol{\alpha = 1 + i}$ et $\boldsymbol{\overline{\alpha} = 1 - i}$.

3. $P(z) = (z-\alpha)(z-\overline{\alpha})Q(z) = (z-1-i)(z-1+i)(z^2+az+b) = (z^2-2z+2)(z^2+az+b) = z^4 + (a-2)z^3 + (b-2a+2)z^2 + (2a-2b)z + 2b$, par identification on aura : $Q(z) = z^2 - 4z + 13$.

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ $Q(z) = 0$:

$\mathbf{Q(z) = z^2 - 4z + 13 = 0}$, $\Delta = -36 = (6i)^2$, donc il y a deux solutions complexes : $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 2 + 3i$.

5. Résoudre dans $\mathbb{C}$ $P(z) = 0$:

$S_{\mathbb{C}} = \{1+i; 1-i; 2-3i; 2+3i\}$.

<u>Exercice 38 :</u> Soit un polynôme défini par $P(z) = z^4 - 3z^3 + z^2 - 3z + 1$ et on désigne par α un nombre complexe non nul.

1. Montrer que si α est solution de l'équation $P(z) = 0$, alors on a $P(\overline{\alpha}) = \overline{P(\alpha)} = P\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$.

2. Calculer $P(1+i)$ avec $(1+i)^2 = 2i$. Déduisez en la solution de l'équation $P(z) = 0$.

3. Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que $P(z) = (z-\alpha)(z-\overline{\alpha})\left(z - \frac{1}{\alpha}\right)Q(z)$.

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ $P(z) = 0$.

<u>Correction :</u> $P(z) = z^4 - 3z^3 + z^2 - 3z + 1$ et on désigne par α un nombre complexe non nul.

1. Montrons que $P(\overline{\alpha}) = \overline{P(\alpha)} = P\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$:

$P\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha^4} - \frac{3}{\alpha^3} + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{3}{\alpha} + 1 = \frac{\alpha^4 - 3\alpha^3 + \alpha^2 - 3\alpha + 1}{\alpha^4}$

$P\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{\alpha^4 - 3\alpha^3 + \alpha^2 - 3\alpha + 1}{\alpha^4} = 0 \Leftrightarrow \alpha^4 - 3\alpha^3 + \alpha^2 - 3\alpha + 1 = 0$. D'autre part on remarque que dans ce polynôme, l'inconnu z n'est pas affecté par un coefficient imaginaire dont son conjugué change de signe, $\mathbf{P(\overline{\alpha}) = \overline{P(\alpha)} = P\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0}$.

2. $P(1+i) = (1+i)^4 - 3(1+i)^3 + (1+i)^2 - 3(1+i) + 1$, après tout calcul, on aura $P(1+i) = 0$, ce qui prouve que $1+i$ est solution de $\mathbf{P(z)}$. On sait que les nombres $\boldsymbol{\alpha}$; $\boldsymbol{\overline{\alpha}}$ et $\boldsymbol{\frac{1}{\alpha}}$ en sont solutions. D'où

$\boldsymbol{\alpha = 1 + i}$; $\boldsymbol{\overline{\alpha} = 1 - i}$ **et** $\boldsymbol{\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i}$

3. $P(z) = (z-\alpha)(z-\overline{\alpha})\left(z - \frac{1}{\alpha}\right)Q(z) = (z-1-i)(z-1+i)\left(z - \frac{1}{\alpha}\right)(z-b) = (z^2 - 2z + 2)\left[z^2 - \left(b + \frac{1}{\alpha}\right)z + \frac{b}{\alpha}\right] = z^4 - \left(b + \frac{1}{\alpha} + 2\right)z^3 + \left[\frac{b}{\alpha} + 2\left(b + \frac{1}{\alpha}\right) + 2\right]z^2 - \left[\frac{2b}{\alpha} + 2\left(b + \frac{1}{\alpha}\right)\right]z + \frac{2b}{\alpha}$, par identification on aura : $\frac{2b}{\alpha} = 1 \Leftrightarrow b = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

Donc $Q(z) = z - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ $P(z) = 0$:

$S_{\mathbb{C}} = \left\{1+i; 1-i; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i; \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right\}$.

<u>Exercice 39 :</u>

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.

On note z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive, et z_2 l'autre.

2. Donner les formes exponentielles des solutions z_1 et z_2.

3. Montrer que $(z_1)^6$ est un nombre réel strictement négatif.

4. Déterminer un entier n tel que $(z_2)^n$ est un nombre réel strictement positif.

5. Déterminer la solution réelle de l'équation : $z^3 = 8$.

6. Résoudre alors dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^3 = 8$. On note z_3 la solution dont la partie imaginaire est strictement positive et z_4 l'autre.

7. Montrer que $\frac{z_1 + z_2}{z_3 - z_4} = -i$.

<u>Correction :</u>

1. $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$, $\Delta = -4 < 0$, donc il y a deux solutions complexes : $z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = \sqrt{3} - i$.

$S_{\mathbb{C}} = \{\sqrt{3} + i; \sqrt{3} - i\}$.

2. $z_1 = \sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $z_2 = \sqrt{3} - i = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

3. **Montrons que $(z_1)^6$ est un nombre réel strictement négatif :**

$(z_1)^6 = \left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^6 = 2^6 e^{i\pi} = -64$.

4. $(z_2)^n = \left(2e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^n = 2^n e^{-i\frac{n\pi}{6}}$. Le nombre complexe $e^{-i\frac{n\pi}{6}}$ est un réel positif si $i\frac{n\pi}{6}$ est un multiple de 2π; on peut donc prendre $n = 12$ (ou $12k$ avec $k \in \mathbb{Z}$).

5. La solution réelle de l'équation : $\mathbf{z^3 = 8}$ est 2, puisque $2^3 = 8$.

6. $z^3 - 8 = (z^2 - 2)(az^2 + bz + c) = 0$. Après tout calcul, $z^3 - 8 = (z^2 - 2)(z^2 + 2z + 4) = 0$; $z^2 + 2z + 4 = 0$, $\Delta = -12 < 0$, il y a deux solutions complexes : $z_3 = -1 + i\sqrt{3}$, $z_4 = -1 - i\sqrt{3}$.

7. **Montrons que $\frac{z_1+z_2}{z_3-z_4} = -i$:**

$\frac{z_1+z_2}{z_3-z_4} = \frac{\sqrt{3}+i+\sqrt{3}-i}{-1+i\sqrt{3}+1+i\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{2i\sqrt{3}} = \frac{1}{i} = -i$.

Exercice 40 :

1. **Soit l'équation : (E)**
$$\boldsymbol{z^3 + 2(\sqrt{2} - 1)z^2 + 4(1 - \sqrt{2})z - 8 = 0.}$$

a) **Vérifier que 2 est solution de (E).**

b) **Terminer la résolution de cette équation dans $\mathbb{C}$. On appelle z_1 et z_2 les autres solutions avec $\mathrm{Im}(z_1) < \mathrm{Im}(z_2)$.**

c) **Montrer que $z_1 + z_2 = -2\sqrt{2}$.**

2. **On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2$, $z_B = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $z_C = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$. On note le point I milieu du $[AB]$.**

a) **Placer ces points sur un dessin.**

b) **Démontrer que le triangle OAB est isocèle en O.**

c) **En déduire la mesure de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{OI})$.**

3. **Déterminer :**

a) **La forme algébrique de z_I.**

b) **La forme trigonométrique de z_I.**

c) **En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{3\pi}{8}$ et de $\sin\frac{3\pi}{8}$.**

Correction :

1. $\boldsymbol{z^3 + 2(\sqrt{2} - 1)z^2 + 4(1 - \sqrt{2})z - 8 = 0}$

a) $(2)^3 + 2(\sqrt{2} - 1)(2)^2 + 4(1 - \sqrt{2})(2) - 8 = 0$.

b) **résolution de cette équation dans $\mathbb{C}$:**

$z^3 + 2(\sqrt{2} - 1)z^2 + 4(1 - \sqrt{2})z - 8 = (z - 2)(az^2 + bz + c) = (z - 2)(z^2 + 2\sqrt{2}z + 4) = 0$.

$z^2 + 2\sqrt{2}z + 4 = 0$, $\Delta = -8 = (2i\sqrt{2})^2$, donc il y a deux solutions complexes : $z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $z_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$, donc $S_{\mathbb{C}} = \{2; -\sqrt{2} + i\sqrt{2}; -\sqrt{2} - i\sqrt{2}\}$.

c) $z_1 + z_2 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} - \sqrt{2} - i\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$.

2. $A(2)$, $B(-\sqrt{2} + i\sqrt{2})$ et $C(-\sqrt{2} - i\sqrt{2})$. On note le point I milieu du [AB].

a) Placer ces points sur un dessin..

b) $|z_{\overrightarrow{OA}}| = |z_A - z_O| = 2$ et $|z_{\overrightarrow{OB}}| = |z_B - z_O| = 2$, donc $|z_{\overrightarrow{OA}}| = |z_{\overrightarrow{OB}}| = 2$, alors OAB est un triangle isocèle en O.

c) (OI) est la médiane issue de O et la bissectrice de l'angle AOB, donc la mesure de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{OI}) = \frac{1}{2} \times \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{8}$.

3. Déterminons :

a) $z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{2-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

b) $|z_I| = \left|1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right| = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ et $arg(z_I) = (\vec{u}; \overrightarrow{OI}) = \frac{3\pi}{8} + 2k\pi$.

$z_I = \left(\sqrt{2 - \sqrt{2}}\right)\left[\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right]$.

c) $\left(\sqrt{2 - \sqrt{2}}\right)\cos\frac{3\pi}{8} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et de $\left(\sqrt{2 - \sqrt{2}}\right)\sin\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

Exercice 41 : Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$\mathbf{z^3 - (7 + 9i)z^2 + (39i - 14)z + 50 = 0.}$$

1. **Montrer que cette équation admet une unique solution imaginaire pure z_0. Terminer la résolution de cette équation dans $\mathbb{C}$. On appelle z_1 et z_2 les autres solutions avec $\mathrm{Re}(z_1) < \mathrm{Re}(z_2)$.**

2. **On considère les points et leurs affixes $A(z_0)$; $B(z_1)$ et $C(z_2)$. Déterminer l'ensemble (E) des points M tels que : $MA^2 - MB^2 + MC^2 = 4$.**

Correction :

$\mathbf{z^3 - (7 + 9i)z^2 + (39i - 14)z + 50 = 0}$.

1. $z_0 \in i\mathbb{R}$, $z_0{}^3 - (7 + 9i)z_0{}^2 + (39i - 14)z_0 + 50 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_0(-z_0{}^2 + 9z_0 - 14) = 0 \\ 7z_0{}^2 - 39z_0 + 50 = 0 \end{cases}$, prenons $7z_0{}^2 - 39z_0 + 50 = 0$, $\Delta = 121 = (11)^2$, donc il y a deux solutions complexes : $x_1 = 2$, $z_2 = \frac{25}{7}$, seul $x_1 = 2$ est solution de $-z_0{}^2 + 9z_0 - 14 = 0$; donc $z_0 = 2i$. **Terminons la résolution de cette équation**

dans $\mathbb{C}$ **:** $z^3-(7+9i)z^2+(39i-14)z+50=(z-2i)(az^2+bz+c)=(z-2i)(z^2-7(1+i)z+25i)=0$. $z^2-7(1+i)z+25i=0$, $\Delta=-2i=\pm(1-i)^2$, donc il y a deux solutions complexes : $z_1=3+4i$, $z_2=4+3i$,
donc $S_{\mathbb{C}}=\{2i; 3+4i; -4+3i\}$.

2. **l'ensemble (E) des points M tels que $MA^2-MB^2+MC^2=4$:** $MA^2-MB^2+MC^2=4 \Leftrightarrow MG^2=4-GA^2+GB^2-GC^2$. $z_G=z_0-z_1+z_2=1+i$, et $GA=|z_{\overrightarrow{GA}}|=|-1+i|=\sqrt{2}$; $GB=|z_{\overrightarrow{GB}}|=|2+3i|=\sqrt{13}$; $GC=|z_{\overrightarrow{GC}}|=|3+2i|=\sqrt{13}$. Donc $MG^2=4 \Leftrightarrow \overrightarrow{MG}=2$, l'ensemble des points M tels que $MA^2-MB^2+MC^2=4$ est le cercle de centre G et de rayon 2.

Exercice 42 :

1. **Soit l'équation définie par**
   $$\mathbf{P}(z)=z^3-2(i+\sqrt{3})z^2+4(1+i\sqrt{3})z-8i$$
2. **Vérifier que cette l'équation admet une solution imaginaire pure si $P(z)=0$.**
Résoudre dans $\mathbb{C}$ $P(z)=0$.
3. **On considère les points M_1, M_2 et M_3 d'affixes respectives $z_1=i+\sqrt{3}$, $z_2=\sqrt{3}-i$ et $z_3=2i$.**
a) **Prouver que les trois points sont sur le cercle de centre O et rayon 2.**
b) **Déterminer l'affixe du point A, symétrique du point M_2 par rapport à M_3.**
c) **Démontrer que $OM_1M_2M_3$ est losange.**

Correction :

P(z) = $z^3-2(i+\sqrt{3})z^2+4(1+i\sqrt{3})z-8i$

1. **P admet une solution imaginaire pur :**
Soit bi cette solution, donc $P(bi)=0$ alors
$P(bi)=(bi)^3-2(i+\sqrt{3})(bi)^2+4(1+i\sqrt{3})(bi)-8i=0$. Après tout calcul et par identification, on obtient que b=2, d'où $P(2i)=0$.
2. **Résolution dans $\mathbb{C}$ *de* $P(z)=0$:**
$P(z)=(z-2i)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0 \Leftrightarrow z^2-2\sqrt{3}z+4=0$ ou $z-2i$. Pour $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$, $\Delta=-4=(2i)^2$, d'où $S_{\mathbb{C}}=\{\sqrt{3}-i; \sqrt{3}-i; 2i\}$
3. $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$ et $M_3(z_3)$.
a) **Prouvons que les trois points sur le cercle de centre O et rayon 2 :** Il s'agit de calculer pour chaque point le module. Ainsi on obtient : $|z_1|=2$, $|z_2|=2$ et $|z_3|=2$; donc $OM_1=OM_2=OM_3$, ce qui confirme que ces points soient sur le cercle de centre O et rayon 2.
b) **Démontrons que $OM_1M_2M_3$ est losange :**
$z_2-z_3=\sqrt{3}-i=z_1$ et $z_2-z_1=2i=z_3 \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_3}$, donc $OM_1M_2M_3$ est un parallélogramme et comme il a deux cotés consécutifs égaux ($OM_1=OM_3$), c'est un losange.

Exercice 43 :

1. **Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $(2z)^5-(z+1)^5=0$ et vérifier qu'elle admet une racine réelle.**
2. **Vérifier que dans le plan complexe, les images des racines de (E) appartiennent au cercle (C) d'équation $3(x^2+y^2)-2x-1=0$.**
3. **Montrer que, pour tout entier strictement positif n, les images des racines de l'équation $(2z)^n-(z+1)^n=0$ appartiennent au cercle (C) d'équation $3(x^2+y^2)-2x-1=0$.**

Correction :

1. **Résoudre dans $\mathbb{C}$ (E) : $(2z)^5-(z+1)^5=0$**
$(2z)^5=(z+1)^5 \Leftrightarrow \left(\frac{2z}{z+1}\right)^5=1$. Posons $\omega_k=e^{\left(\frac{2k\pi}{5}\right)i}$.
Il existe $k\in\{0,1,2,3,4\}$ tel que $\frac{2z}{z+1}=\omega_k \Leftrightarrow$
$z=\frac{\omega_k}{2-\omega_k}=\frac{e^{\left(\frac{2k\pi}{5}\right)i}}{2-e^{\left(\frac{2k\pi}{5}\right)i}}$. Donc
$S_{\mathbb{C}}=\left\{\frac{e^{\left(\frac{2k\pi}{5}\right)i}}{2-e^{\left(\frac{2k\pi}{5}\right)i}} \text{ tel que } k\in\{0,1,2,3,4\}\right\}$.
et vérifier qu'elle admet une racine réelle.
Pour $k=0$ alors $z=\frac{\omega_0}{2-\omega_0}=\frac{e^{(0)i}}{2-e^{(0)i}}=\frac{1}{2-1}=1$.
2. **Posons $\alpha=\frac{2k\pi}{5}$** et $z=x+iy$
$z=\frac{\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)}{2-\cos(\alpha)-i\sin(\alpha)}=\frac{2\cos(\alpha)-1+2i\sin(\alpha)}{5-4\cos(\alpha)}$ donc **les images des racines de (E) sont de la forme :**
$z=\frac{2\cos(\alpha)-1}{5-4\cos(\alpha)}+i\frac{2\sin(\alpha)}{5-4\cos(\alpha)} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2\cos(\alpha)-1}{5-4\cos(\alpha)} \\ y=\frac{2\sin(\alpha)}{5-4\cos(\alpha)} \end{cases}$
$x^2=\frac{4\cos^2(\alpha)-4\cos(\alpha)+1}{[5-4\cos(\alpha)]^2}$; $y^2=\frac{4\sin^2(\alpha)}{[5-4\cos(\alpha)]^2}$ en additionnant x^2+y^2 on aura $x^2+y^2=\frac{1}{5-4\cos(\alpha)}$, on déduit $3(x^2+y^2)=\frac{3}{5-4\cos(\alpha)}$ (1).
$-2x-1=\frac{-2\cos(\alpha)+2}{5-4\cos(\alpha)}-1=\frac{-3}{5-4\cos(\alpha)}$ (2).

$(1)+(2) \Leftrightarrow 3(x^2+y^2)-2x-1=\frac{3-3}{5-4\cos(\alpha)}=0$ d'où les images des racines de (E) appartiennent au cercle (C) d'équation $3(x^2+y^2)-2x-1=0$**.**

3. $(2z)^n=(z+1)^n \Leftrightarrow \left(\frac{2z}{z+1}\right)^n=1$. Il existe $k\in\{1,\dots,n-1\}$ tel que $\frac{2z}{z+1}=\omega_k \Leftrightarrow$

$z=\frac{\omega_k}{2-\omega_k}=\frac{e^{\left(\frac{2k\pi}{n}\right)i}}{2-e^{\left(\frac{2k\pi}{n}\right)i}}$. Donc

$S_{\mathbb{C}}=\left\{\frac{e^{\left(\frac{2k\pi}{n}\right)i}}{2-e^{\left(\frac{2k\pi}{n}\right)i}} \text{ tel que } k\in\{0,1,\dots,n-1\}\right\}$.

Posons $\alpha=\frac{2k\pi}{n}$ et $z=x+iy$

$z=\frac{\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)}{2-\cos(\alpha)-i\sin(\alpha)}=\frac{2\cos(\alpha)-1+2i\sin(\alpha)}{5-4\cos(\alpha)}$ donc **les images des racines de (E) sont de la forme :**

$z=\frac{2\cos(\alpha)-1}{5-4\cos(\alpha)}+i\frac{2\sin(\alpha)}{5-4\cos(\alpha)} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2\cos(\alpha)-1}{5-4\cos(\alpha)} \\ y=\frac{2\sin(\alpha)}{5-4\cos(\alpha)}\end{cases}$

$x^2=\frac{4\cos^2(\alpha)-4\cos(\alpha)+1}{[5-4\cos(\alpha)]^2}$; $y^2=\frac{4\sin^2(\alpha)}{[5-4\cos(\alpha)]^2}$ en additionnant x^2+y^2 on aura $x^2+y^2=\frac{1}{5-4\cos(\alpha)}$, on déduit $3(x^2+y^2)=\frac{3}{5-4\cos(\alpha)}$ (1).

$-2x-1=\frac{-2\cos(\alpha)+2}{5-4\cos(\alpha)}-1=\frac{-3}{5-4\cos(\alpha)}$ (2).

$(1)+(2) \Leftrightarrow 3(x^2+y^2)-2x-1=\frac{3-3}{5-4\cos(\alpha)}=0$

d'où les images des racines de $\boldsymbol{(2z)^n-(z+1)^n=0}$ appartiennent au cercle (C) d'équation $3(x^2+y^2)-2x-1=0$.

<u>**Exercice 44 :**</u> **Résoudre dans $\mathbb{C}$:**

1. $\boldsymbol{z^3=\bar{z}}$
2. $\boldsymbol{(1+iz)^5=(1-iz)^5}$
3. $\boldsymbol{(z-1)^6+(z-1)^3+1=0}$
4. $\boldsymbol{1+\frac{z+i}{z-i}+\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2+\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3=0}$

<u>**Correction :**</u> **Résoudre dans $\mathbb{C}$:**

1. $\boldsymbol{z^3=\bar{z}}$ on peut directement remarquer que 0 est solution de cette équation. <u>**NB**</u> **0 n'est pas solution de l'équation $\boldsymbol{\frac{z^3}{\bar{z}}=1}$.**

$z^3=\bar{z} \Leftrightarrow z^4=\bar{z}.z$ or $\bar{z}.z=1$ donc $z^4=1$ dont les racines sont $1, i, -1$ et $-i$. $S_{\mathbb{C}}=\{0,1,i,-1,-i\}$.

2. $\boldsymbol{(1+iz)^5=(1-iz)^5}$

$(1+iz)^5=(1-iz)^5 \Leftrightarrow \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^5=1$ avec $z\neq -i$

Posons $\omega_k=e^{\left(\frac{2k\pi}{5}\right)i}$. Il existe $k\in\{0,1,2,3,4\}$ tel que $\frac{1+iz}{1-iz}=\omega_k \Leftrightarrow z=-i\frac{\omega_k-1}{\omega_k+1}=\tan\left(\frac{k\pi}{5}\right)$.

Or pour $k=0 \Leftrightarrow \omega_0=e^{(0)i}=1$ et $k=4 \Leftrightarrow \omega_4=e^{\frac{8\pi}{5}i}=e^{-\frac{2\pi}{5}i}$ ne sont pas solution de cette équation, d'où $S_{\mathbb{C}}=\left\{\tan\left(\frac{k\pi}{5}\right) \text{ tel que } k\in\{1,2,3\}\right\}$.

3. $\boldsymbol{(z-1)^6+(z-1)^3+1=0}$

Posons $q=(z-1)^3 \Leftrightarrow q^2+q+1=0$, $\Delta=\left(i\sqrt{3}\right)^2$ d'où $q=\frac{1}{2}\left(-1\mp i\sqrt{3}\right)=e^{\pm\left(\frac{2\pi}{3}\right)i}$.

On sait que les racines cubiques de 1 sont de la forme $q_k=e^{\left(\frac{2k\pi}{3}\right)i}$avec $k\in\{0,1,2\}$.

- $(z-1)^3=q_k\times e^{\left(\frac{2\pi}{3}\right)i}=e^{\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}k\right)i} \Leftrightarrow$ $z-1=e^{\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi}{9}k\right)i} \Leftrightarrow z=e^{\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi}{9}k\right)i}+1$ avec $k\in\{0,1,2\}$, il y aura trois solutions suivant k.
- $(z-1)^3=q_k\times e^{-\left(\frac{2\pi}{3}\right)i}=e^{\left(\frac{2\pi}{3}k-\frac{2\pi}{3}\right)i} \Leftrightarrow$ $z-1=e^{\left(\frac{2\pi}{9}k-\frac{2\pi}{9}\right)i} \Leftrightarrow z=e^{\left(\frac{2\pi}{9}k-\frac{2\pi}{9}\right)i}+1$ avec $k\in\{0,1,2\}$, il y aura trois solutions suivant k.

$S_{\mathbb{C}}=\left\{e^{\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi}{9}k\right)i}+1; e^{\left(\frac{2\pi}{9}k-\frac{2\pi}{9}\right)i}+1 \ / \ k\in\{0,1,2\}\right\}$.

4. $\boldsymbol{1+\frac{z+i}{z-i}+\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2+\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3=0}$ ou $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^0+\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^1+\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2+\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3=0$ posons $q=\frac{z+i}{z-i}$

C'est une suite géométrique de raison q:

$q^0+q^1+q^2+q^3=\frac{q^4-1}{q-1}=0 \Leftrightarrow q^4-1=0 \Leftrightarrow$ $q^4=1$ dont les racines sont $1, i, -1$ et $-i$ car de la forme $\omega_k=e^{\left(\frac{k\pi}{2}\right)i}$ avec $k\in\{0,1,2,3\}$.

$\frac{z+i}{z-i}=\omega_k \Leftrightarrow z=i\frac{\omega_k+1}{\omega_k-1}$ avec $\omega_k\neq 1 \Leftrightarrow \omega_0=1$ n'est pas solution de l'équation, donc

$S_{\mathbb{C}}=\left\{i\frac{\omega_k+1}{\omega_k-1}=i\frac{e^{\left(\frac{k\pi}{2}\right)i}+1}{e^{\left(\frac{k\pi}{2}\right)i}-1} \ / \ k\in\{1,2,3\}\right\}$.

<u>**Exercice 45 :**</u> **Résoudre dans $\mathbb{C}$:**

1. $\boldsymbol{(z+1)^n=(z-1)^n, n\in IN^*.}$
2. $\boldsymbol{(z+i)^n=(z-i)^n, n\in IN^*.}$

Observer que celle-ci admet exactement $\boldsymbol{n-1}$ solutions, chacune réelle.

3. $\boldsymbol{\begin{cases} x+y=1+i \\ xy=2-i \end{cases}}$.
4. $\boldsymbol{\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos(kx)}{\cos^k x}=0, n\in IN.}$

<u>**Correction :**</u> **Résoudre dans $\mathbb{C}$:**

1. $\boldsymbol{(z+1)^n=(z-1)^n, n\in IN^*}$.

Posons $\omega_k=e^{\left(\frac{2k\pi}{n}\right)i}$, $(z+1)^n=(z-1)^n \Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n=1$, $n\in IN^*$. Il existe $k\in\{0,1,\dots,n-1\}$ tel que $\frac{z+1}{z-1}=\omega_k \Leftrightarrow z=\frac{\omega_k+1}{\omega_k-1}=-i\cos\frac{k\pi}{n}$. Pour $\omega_0=1$, n'a pas de solution dans $z=\frac{\omega_k+1}{\omega_k-1}$, donc

$S_{\mathbb{C}}=\left\{-i\cos\frac{k\pi}{n} \text{ tel que } k\in\{1,\dots,n-1\}\right\}$.

2. $(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}}=(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{n}\in \boldsymbol{IN}^*$.

Posons $\omega_k=e^{\left(\frac{2k\pi}{n}\right)i}$, $(z+i)^n=(z-i)^n \Leftrightarrow \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n=1, n\in IN^*$. Il existe $k\in\{0,1,\dots,n-1\}$ tel que $\frac{z+1}{z-1}=\omega_k \Leftrightarrow z=\frac{\omega_k+1}{\omega_k-1}=\cot\frac{k\pi}{n}$. Pour $\omega_0=i$, n'a pas de solution dans $z=i\frac{\omega_k+1}{\omega_k-1}$, donc $S_{\mathbb{C}}=\left\{\operatorname{cotg}\frac{k\pi}{n}\right\}$. deux à deux distincts car cotg est strictement décroissante sur l'intervalle $]0,\pi[$ où évoluent les $\frac{k\pi}{n}$ tel que $k\in\{1,\dots,n-1\}$.

3. $\begin{cases}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{1}+\boldsymbol{i}=\mathbf{S}\\ \boldsymbol{xy}=\boldsymbol{2}-\boldsymbol{i}=\mathbf{P}\end{cases}$. $z^2-\mathrm{S}z+\mathrm{P}=z^2-(1+i)z+2-i=0$ ainsi on obtient $S_{\mathbb{C}}=\{(1+2i;-i);(-i;1+2i)\}$.

4. $\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos(kx)}{cos^k x}=0, n\in IN. x\neq\frac{\pi}{2}\ [\pi]$

$\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos(kx)}{cos^k x}=Re\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{ikx}}{cos^k x}\right]=\frac{1}{cos^n x}Re\left[\frac{cos^{n+1}(x)-e^{i(n+1)x}}{\cos x-e^{xi}}\right]=0\Leftrightarrow cos^{n+1}(x)=\cos[(n+1)x]$. Si $x\neq\frac{\pi}{2}\ [\pi]\Leftrightarrow\frac{e^{ix}}{cosx}\neq 1$ et $\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{ikx}}{cos^k x}=\frac{1}{cos^n x}\frac{cos^{n+1}(x)-e^{i(n+1)x}}{\cos x-e^{xi}}$, donc $\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos(kx)}{cos^k x}=0\Leftrightarrow\sin[(n+1)x]=0\Leftrightarrow x=0\left[\frac{\pi}{n+1}\right]$. Si $x=0\ [\pi]\Leftrightarrow\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos(kx)}{cos^k x}=n+1$. Finalement $S_{\mathbb{C}}=\left\{\frac{k\pi}{n+1}/k\in\mathbb{Z}\ et\ (n+1)k\right\}$.

Exercice 46 :

1. **Donner les racines cubiques de l'unité.**
2. **Calculer $(\mathbf{2}+\boldsymbol{i})^{\mathbf{3}}$. On donnera le résultat sous sa forme algébrique.**
3. **En déduire les racines cubiques complexes du nombre $\mathbf{2}+\mathbf{11}\boldsymbol{i}$.**

Correction :

1. les racines cubiques de l'unité.

$u^3=1\Leftrightarrow u_k=\left[1;\frac{2\pi}{3}k\right]$ avec $k\in\{0;1;2\}$ donc les racines cubiques de 1 sont $u_0=1$; $u_1=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $u_2=\left[1;\frac{4\pi}{3}\right]=\left[1;-\frac{2\pi}{3}\right]=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. $(2+i)^3=(2+i)(2+i)^2=(2+i)(4+4i-1=2+i3+4i=6-4+8i+3i=2+11i$.

3. les racines cubiques du nombre $\mathbf{2}+\mathbf{11}\boldsymbol{i}$ sont :

- $z_0=u_0(2+i)=2+i$
- $z_1=u_1(2+i)=-1-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{3}\right)$
- $z_2=u_2(2+i)=-1+\frac{\sqrt{3}}{2}+i\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{3}\right)$

Exercice 47 :

1. **Donner les racines quatrièmes de l'unité.**
2. **Calculer $(\mathbf{1}-\boldsymbol{i})^{\mathbf{4}}$. On donnera le résultat sous sa forme algébrique.**
3. **En déduire les racines quatrièmes du $-\mathbf{4}$.**

Correction :

1. les racines quatrièmes de l'unité.

$u^4=1\Leftrightarrow u_k=\left[1;\frac{\pi}{2}k\right]$ avec $k\in\{0;1;2;3\}$ donc les racines quatrièmes de 1 sont $u_0=1$; $u_1=\left[1;\frac{\pi}{2}\right]=i$; $u_2=[1;\pi]=-1$ et $u_3=\left[1;-\frac{\pi}{2}\right]=-i$.

2. $(1-i)^4=(1-i)^2(1-i)^2=(1-2i-1)(1-2i-1=-2i-2i=-4$.

3. racines quatrièmes du nombre $\mathbf{2}+\mathbf{11}\boldsymbol{i}$ sont :

- $z_0=u_0(1-i)=1-i$
- $z_1=u_1(1-i)=1+i$
- $z_2=u_2(1-i)=-1+i$
- $z_3=u_3(1-i)=-1-i$

Exercice 48 :

1. On considère le nombre $\boldsymbol{z}=\mathbf{1}-\boldsymbol{i}\sqrt{\mathbf{3}}$.

a) Mettre $\boldsymbol{z}$ sous forme trigonométrique, puis exponentielle.

b) Calculer $\boldsymbol{z}^{\mathbf{2}}$et $\boldsymbol{z}^{\mathbf{3}}$.

c) En déduire $\boldsymbol{z}^{\mathbf{2012}}$ et $\boldsymbol{z}^{\mathbf{2013}}$.

2.

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\boldsymbol{z}^{\mathbf{3}}+\mathbf{8}=\mathbf{0}$ (on remarquera que cette équation a une racine évidente réelle) .

b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(\boldsymbol{iz}-\mathbf{1})^{\mathbf{3}}+\mathbf{8}=\mathbf{0}$. Donner les solutions sous forme algébrique.

Correction :

1. $\boldsymbol{z}=\mathbf{1}-\boldsymbol{i}\sqrt{\mathbf{3}}$.

a) $z=1-i\sqrt{3}=2\left[\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right]=2\left[\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\pi 3=2e\pi 3i\right.$.

b) $z^2=\left(2e^{\frac{\pi}{3}i}\right)^2=-2-2i\sqrt{3}$ et $z^3=\left(2e^{\frac{\pi}{3}i}\right)^3=-8$.

c) Déduction de $\boldsymbol{z}^{\mathbf{2012}}$ et $\boldsymbol{z}^{\mathbf{2013}}$: Comme on tourne a chaque fois de 60°, tous les exposants multiples de 3 ramèneront sur l'axe réel (un coup positif, un coup négatif) ; tous les multiples de 3 +1 (comme 1, 4, 7, …) seront sur la droite issue de *O* et passant par *z*, enfin tous les multiples de 3 + 2 seront sur la droite issue de O passant par z^2.

2012 est un multiple de 4 (2012=4x503), on a $z^{2012} = \left(2e^{\frac{\pi}{3}i}\right)^{2012} = 2^{2012}e^{503\pi} = 2^{2012}e^{\pi} = -2^{2012}$ et $z^{2013} = \left(2e^{\frac{\pi}{3}i}\right)^{2013} = 2^{2013}e^{503\pi}e^{\pi} = 2^{2012}e^{\pi} = +2^{2013}$.

2. **Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 + 8 =$** $(z+2)(z^2-2z+4) = 0$, $z^2 - 2z + 4 = 0$, $\Delta = \left(2i\sqrt{3}\right)^2$, les autres solutions sont $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$. **Déduction des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(iz-1)^3 + 8 = 0$.** Pour résoudre $(iz-1)^3 + 8 = 0$ on reprend l'équation précédente avec le changement d'inconnue *t* = *iz* −1, ce qui donne les solutions en Z ; on revient en arrière pour les solutions en z.

$t = iz - 1 \Leftrightarrow z = -it - i$, d'où les trois solutions : $z_0 = -i(-2) - i = i$, $z_1 = -i\left(1 - i\sqrt{3}\right) - i = \sqrt{3} - 2i$ et $z_2 = -i\left(1 + i\sqrt{3}\right) - i = -\sqrt{3} - 2i$.

<u>Exercice 49 :</u>

1. **Calculer pour $\varphi \in]0; 2\pi[$ et $n \in IN$, $M = \sum_{k=0}^{n}(\cos k\varphi)$ et $N = \sum_{k=0}^{n}(\sin k\varphi)$.**
2. **Calculer pour $\theta \in IR$ et $n \in IN$, $C = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\cos k\theta)$ et $S = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\sin k\theta)$.**

<u>Correction :</u>

4. **1.** $\varphi \in]0; 2\pi[$ et $n \in IN$, M et N sont les parties respectivement réelles et imaginaires de $\sum_{k=0}^{n} e^{\varphi ki} = M + iN$. Ainsi $\sum_{k=0}^{n} e^{\varphi ki} = \frac{e^{(n+1)\varphi i} - 1}{e^{\varphi i} - 1} = e^{\frac{n\varphi}{2}i}\frac{\sin\left[\frac{n+1}{2}\varphi\right]}{\sin\frac{\varphi}{2}}$.

Par identification on a : $M = \sum_{k=0}^{n}(\cos k\varphi) = \cos\frac{n\varphi}{2} \times \frac{\sin\left[\frac{n+1}{2}\varphi\right]}{\sin\frac{\varphi}{2}}$ et $N = \sum_{k=0}^{n}(\sin k\varphi) = \sin\frac{n\varphi}{2} \times \frac{\sin\left[\frac{n+1}{2}\varphi\right]}{\sin\frac{\varphi}{2}}$.

5. **2.** $\theta \in IR$ et $n \in IN$, C et S sont les parties respectivement réelles et imaginaires de $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{\theta ki} = C + iS$. Ainsi $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{\theta ki} = \left(1 + e^{\theta i}\right)^n = 2^n e^{\frac{n\theta}{2}i}\cos^n\frac{\theta}{2}$. Par identification on a : $C = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\cos k\theta) = 2^n\cos\frac{n\theta}{2} \times \cos^n\frac{\theta}{2}$ et $S = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\sin k\theta) = 2^n\sin\frac{n\theta}{2} \times \cos^n\frac{\theta}{2}$.

<u>Exercice 50 :</u> On pose :

$$\boldsymbol{C = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{10}\right) + \cdots + \cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)} \text{ **et**}$$

$$\boldsymbol{S = \sin\left(\frac{\pi}{10}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{10}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{9\pi}{10}\right).}$$

1. **Exprimer le nombre complexe $Z = C + iS$ sous la forme d'une somme d'exponentielles.**
2. **Déterminer une expression simplifier de Z.**
3. **En déduire une expression simplifiée de C et de S.**

<u>Correction :</u>

1. C et S sont les parties respectivement réelles et imaginaires de $Z = C + iS = \sum_{k=1}^{9} e^{\frac{\pi}{10}ki} = e^{\frac{i\pi}{10}} + e^{\frac{2i\pi}{10}} + \cdots + e^{\frac{9i\pi}{10}}$.
2. **expression simplifier de Z :** on remarque que Z est la somme d'une suite géométrique de 9 termes, de raison $q = e^{\frac{i\pi}{10}}$ et de premier terme $e^{\frac{i\pi}{10}}$:

$Z = \sum_{k=1}^{9} e^{\frac{\pi}{10}ki} = e^{\frac{i\pi}{10}} \times \frac{\left(e^{\frac{i\pi}{10}}\right)^9 - 1}{e^{\frac{i\pi}{10}} - 1}$, ou $Z = \frac{q - q^{10}}{1-q}$

Or $q^{10} = e^{\frac{10i\pi}{10}} = e^{\pi i} = -1$, donc $Z = \frac{q - q^{10}}{1-q} = \frac{1+q}{1-q}$

or $1 + q = 1 + e^{\frac{i\pi}{10}} = 2\cos\frac{\pi}{20}e^{\frac{i\pi}{20}}$ et $1 - q = 1 - e^{\frac{i\pi}{10}} = -2i\sin\frac{\pi}{20}e^{\frac{i\pi}{20}}$, donc $Z = \frac{2\cos\frac{\pi}{20}e^{\frac{i\pi}{20}}}{-2i\sin\frac{\pi}{20}e^{\frac{i\pi}{20}}} = i\frac{\cos\frac{\pi}{20}}{\sin\frac{\pi}{20}} = i\cot\frac{\pi}{20}$

3. $Z \in iIR \Leftrightarrow Re(Z) = C = 0$ et $Im(Z) = S = i\cot\frac{\pi}{20}$.

<u>Exercice 51 :</u> Soit x un réel, $x \neq 0\ [2\pi]$. On pose :

$\boldsymbol{A(x) = 1 + \cos x + \cos(2x) + \cdots + \cos(6x)}$
$\boldsymbol{B(x) = \sin x + \sin(2x) + \cdots + \sin(6x)}$
$\boldsymbol{S(x) = 1 + e^{ix} + e^{i2x} + \cdots + e^{i6x}}$

1.

a) **Exprimer $S(x)$ en fonction de $A(x)$ et $B(x)$.**

b) **En déduire une expression de $A(x)$ en fonction de $S(x)$.**

2. **Déterminer, uniquement en fonction des lignes trigonométriques de $\frac{7x}{2}$ et de $\frac{x}{2}$, une expression de $S(x)$, de $A(x)$ et de $B(x)$.**

<u>Correction :</u> x un réel, $x \neq 0\ [2\pi]$. On pose :

$A(x) = 1 + \cos x + \cos(2x) + \cdots + \cos(6x) = \sum_{k=0}^{7}(\cos kx)$
$B(x) = \sin x + \sin(2x) + \cdots + \sin(6x) = \sum_{k=0}^{7}(\sin kx)$
$S(x) = 1 + e^{ix} + e^{i2x} + \cdots + e^{i6x} = \sum_{k=0}^{7} e^{kix}$

1.

a) On sait que $e^{nix} = \cos nx + i\sin nx$, donc $S(x) = e^{i0} + e^{ix} + e^{i2x} + \dots + e^{i6x} = (\cos 0x + i\sin 0x) + (\cos x + i\sin x) + \dots + (\cos 6x + i\sin 6x) = A(x) + iB(x)$.

b) $S(x) = A(x) + iB(x) \Leftrightarrow A(x) = S(x) - iB(x)$.

2. $S(x) = \sum_{k=0}^{7} e^{xki} = \frac{(e^{xi})^7 - 1}{e^{xi} - 1} = \frac{e^{7xi} - 1}{e^{xi} - 1} = \frac{e^{i\frac{7x}{2}} \times \sin\left(\frac{7x}{2}\right)}{e^{i\frac{x}{2}} \times \sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{e^{3xi} \times \sin\left(\frac{7x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$. On déduit que :

$Im[S(x)] = B(x) = \sin 3x \frac{\sin\left(\frac{7x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ et

$Re[S(x)] = A(x) = \cos 3x \frac{\sin\left(\frac{7x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.

<u>Exercice 52 :</u> Soit la suite des n complexes, $u_1, u_2, \dots, u_p, \dots, u_n$ définie par : $u_1 = 1 - i$ et $\forall\, p \in [2, n]\ \ u_p = j.u_{p-1}$ avec $j = e^{\frac{2\pi}{3}i}$.

1. **Montrer que $j^2 = \bar{j}$. Calculer $1 + j + j^2 = 0$.**
2. **Vérifier que $u_1 + u_2 + u_3 = 0$.**
3. **Montrer que, pour tout entier p tel que $4 \le p \le n$, on a $u_p = u_{p-3}$.**

Construire les images des nombres u_p.

4. **En déduire $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.**

<u>**Correction :**</u> $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{\frac{2\pi}{3}i}$.

1. $j^2 = \left(e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)^2 = e^{\frac{4\pi}{3}i} = e^{\frac{-2\pi}{3}i} = \bar{j}$.

$1 + j + j^2 = 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0$.

2. $u_1 + u_2 + u_3 = u_1 + u_1 j + u_1 j^2 = u_1(1 + j + j^2)$ or $1 + j + j^2 = 0$,
donc $u_1 + u_2 + u_3 = 0$.

3. **Montrons que, pour tout entier p tel que $4 \le p \le n$, on a $u_p = u_{p-3}$:**

<u>Initialisation :</u> $n = 4$, $u_4 = u_1 = 1 - i = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$

<u>Hérédité :</u> supposons que $\forall\, k \in [4, n]\ \ u_k = u_{k-3}$ est vraie ; démontrons que $u_{k+1} = u_{k-2}$ l'est :
$u_k = u_{k-1}j \Leftrightarrow u_{k+1} = u_k j = u_{k-3}j$ or $u_{k-3}j = u_{k-2}$
donc $u_{k+1} = u_{k-2}$.

<u>Conclusion :</u> $\forall\, p \in [4, n]\ \ u_p = u_{p-3}$.

4. $u_2 = j.u_1$; $u_3 = j^2.u_1$; $u_4 = j^3.u_1$ … $u_n = j^{n-1}.u_1$.

$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 + j.u_1 + j^2.u_1 + j^3.u_1 + \dots + j^{n-1}.u_1 = u_1(1 + j + j^2 + \dots + j^{n-1}) =$
$S_n = u_1\left[j\frac{1 - j^{n-1+1}}{1 - j}\right] = u_1\left[j\frac{1 - j^n}{1 - j}\right] = u_1.e^{\frac{\pi}{3}(n-1)i}\frac{\sin\frac{n\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}$.

<u>Exercice 53 :</u> Soit $z = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)$; $S = z + z^2 + z^4$ et $T = z^3 + z^5 + z^6$.

1. **Montrer que $S = \bar{T}$ et que $\mathrm{Im}(S) > 0$.**
2. **Calculer $S + T$ et ST. En déduire S et T.**

<u>**Correction :**</u> $z = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) = e^{\frac{2\pi}{7}i}$

1. $S = z + z^2 + z^4 = e^{\frac{2\pi}{7}i} + e^{\frac{4\pi}{7}i} + e^{\frac{-6\pi}{7}i}$
$T = e^{\frac{6\pi}{7}i} + e^{\frac{10\pi}{7}i} + e^{\frac{12\pi}{7}i} = e^{\frac{6\pi}{7}i} + e^{\frac{-4\pi}{7}i} + e^{\frac{-2\pi}{7}i} \Leftrightarrow$
$\bar{T} = e^{\frac{-6\pi}{7}i} + e^{\frac{4\pi}{7}i} + e^{\frac{2\pi}{7}i} = S$.
$\mathbf{Im}(S) = \mathbf{Im}(\bar{T}) \Leftrightarrow \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{6\pi}{7} = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{6\pi}{7} \Leftrightarrow \mathbf{1} = \mathbf{1} > 0$.

2. $S + T = \left(e^{\frac{2\pi}{7}i} + e^{\frac{-2\pi}{7}i}\right) + \left(e^{\frac{4\pi}{7}i} + e^{\frac{-4\pi}{7}i}\right) + \left(e^{\frac{6\pi}{7}i} + e^{\frac{-6\pi}{7}i}\right) = 2\cos\frac{2\pi}{7} + 2\cos\frac{4\pi}{7} + 2\cos\frac{6\pi}{7}$ et
$ST = \left(e^{\frac{2\pi}{7}i} + e^{\frac{4\pi}{7}i} + e^{\frac{-6\pi}{7}i}\right)\left(e^{\frac{6\pi}{7}i} + e^{\frac{-4\pi}{7}i} + e^{\frac{-2\pi}{7}i}\right) = e^{\frac{8\pi}{7}i} + e^{\frac{-2\pi}{7}i} + 1 + e^{\frac{10\pi}{7}i} + 1 + e^{\frac{2\pi}{7}i} + 1 + e^{\frac{-10\pi}{7}i} + e^{\frac{-8\pi}{7}i} = 3 + e^{\frac{8\pi}{7}i} + e^{\frac{-8\pi}{7}i} + e^{\frac{2\pi}{7}i} + e^{\frac{-2\pi}{7}i} + e^{\frac{10\pi}{7}i} + e^{\frac{-10\pi}{7}i} = 3 + e^{\frac{6\pi}{7}i} + e^{\frac{-6\pi}{7}i} + e^{\frac{2\pi}{7}i} + e^{\frac{-2\pi}{7}i} + e^{\frac{4\pi}{7}i} + e^{\frac{-4\pi}{7}i} = 3 + 2\cos\frac{2\pi}{7} + 2\cos\frac{4\pi}{7} + 2\cos\frac{6\pi}{7}$.

Posons $h = 2\cos\frac{2\pi}{7} + 2\cos\frac{4\pi}{7} + 2\cos\frac{6\pi}{7}$,

$\begin{cases} S + T = h \\ ST = 3 + h \end{cases} \Leftrightarrow X^2 - hX + 3 + h = 0$,

$\Delta = h^2 - 4h - 12 = (h + 2)(h - 6)$ les solutions sont : $X' = \frac{1 - \sqrt{\Delta}}{2}$ et $X'' = \frac{1 + \sqrt{\Delta}}{2}$.

- S peut être égal $\frac{1 - \sqrt{\Delta}}{2}$ à ou à $\frac{1 + \sqrt{\Delta}}{2}$;
- T peut être égal $\frac{1 - \sqrt{\Delta}}{2}$ à ou à $\frac{1 + \sqrt{\Delta}}{2}$.

<u>Exercice 54 :</u> Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n la somme définie par : $S_n = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{n}\right) + \dots + \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$.

1. **Posons $z = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$.**

a) **Donner une expression simple de : $p = 1 + z + \dots + z^{n-1}$**

b) **Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de p.**

c) En déduire l'égalité : $S_n = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.

2. Quelle est la limite de la suite $\left(\frac{1}{n}S_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

Correction : $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{n}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$.

1. $z = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = e^{\frac{\pi}{n}i}$.

a) $p = 1 + z + \cdots + z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z}$ or $z = e^{\frac{\pi}{n}i} \Leftrightarrow z^n = -1$ et $1 - z = 1 - e^{\frac{\pi}{n}i} = -2ie^{\frac{\pi}{2n}i} \times \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)$;

Donc $p = \frac{2}{-2ie^{\frac{\pi}{2n}i}\times\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \frac{i}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}e^{\frac{-\pi}{2n}i}$ ou

$p = \frac{i}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right]$.

b) $p = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\left[i\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right]$

$R_e(p) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = 1$ et $Im(p) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.

c) $S_n = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{n}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.

2. Posons $t = \frac{\pi}{2n} \Leftrightarrow n \mapsto +\infty \Leftrightarrow t \mapsto 0$

$$\lim_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{1}{n}S_n\right) = \lim_{t\mapsto 0}\left(\frac{2}{\pi}\times\frac{\cos(t)}{\frac{\sin(t)}{t}}\right) = \frac{2}{\pi}.$$

Exercice 55 : **On considère la somme $S = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)$.**

1. Ecrire la formule permettant de mettre $\cos p + \cos q$ sous forme de produit et transformer $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)$.

2. Ecrire la formule exprimant $\cos 2x$ en fonction de $\cos x$; en remarquant que $\frac{3\pi}{5} = \pi - \frac{2\pi}{5}$. Calculer $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ en fonction de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

3. Démontrer que :
$1 + S = 4\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - 1$.

4. Soit $S' = \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{5}\right)$.

a) Démontrer que $S + iS'$ est la somme d'une progression géométrique.

b) En déduire $1 + S = 0$.

c) Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Correction :

1. $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$ et $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) = 2\cos\pi\cos\frac{3\pi}{5} = -2\cos\frac{3\pi}{5}$.

2. $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = -2\cos^2\frac{\pi}{5} + 1$.

3. $1 + S = 1 + \left[\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)\right] + \left[\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)\right] = 1 + 2\cos\pi\cos\frac{3\pi}{5} + 2\cos\pi\cos\frac{\pi}{5} = 4\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - 1$.

4. $S' = \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{5}\right)$.

$S = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)$.

a) $S + iS' = e^{\frac{2\pi}{5}i} + e^{\frac{4\pi}{5}i} + e^{\frac{6\pi}{5}i} + e^{\frac{8\pi}{5}i} = z + z^2 + z^3 + z^4$ avec $e^{\frac{2\pi}{5}i}$, donc $S + iS' = z\frac{1-z^4}{1-z} = \frac{z-z^5}{1-z} = \frac{z-1}{1-z} = -1$, car $z^5 = 1$.

b) $S' = 2\sin\pi\cos\frac{3\pi}{5} + 2\sin\pi\cos\frac{\pi}{5} = 0$, donc $S + iS' = -1 \Leftrightarrow 1 + S = 0$.

c) $1 + S = 4\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - 1 = 0$, posons $x = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$, $4x^2 - 2x - 1 = 0$, $\Delta' = 5$, $x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$, donc $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Similitudes planes directes

Louange à Allah et que la prière et le salut soient sur le serviteur et Messager d'Allah, Muhammad, le meilleur que l'humanité est porté (malheur à ceux qui l'ont insultés et mentis sur lui.), sa famille et ses Compagnons.
Gloire à Dieu, mon Maitre Qui m'a tout donné et continue à me donner. Je n'ai de savoir de ce qu'Allah (soub hana wat tala), Le Tout Miséricordieux m'avait offert.
Seigneur pardonne nos péchés, fais-nous miséricorde, accepte nos bonnes œuvres et bénit nos actions. Ta parole est véridique.
Louange à Allah, Qui de Sa Grace, j'avais pu proposer cette œuvre Qui sans Lui, je ne serais pas à ce niveau. « Gloire et pureté à Toi, ô Allah, et à Toi la louange. Que ton Nom soit béni et Ta Majesté soit élevée, et il n'y a pas d'autre divinité [digne d'adoration] en dehors de Toi »

ALLAH MERCI

Auteur Moussa Abdoulaye Diallo

SMS 90 10 89 59

Similitudes planes directes

⊠ **Définition d'une similitude :** Dire qu'une transformation du plan f est une similitude de rapport k signifie que pour tous points M et N du plan : $f(MN) = k \times MN$. Autrement écrit, est une similitude toute application bijective qui multiplie toutes les distances par un même réel k.
La similitude est composée d'une isométrie et d'une homothétie.
Globalement, nous savons qu'il se divise en deux :

- D'un côté, il y a les isométries qui conservent les angles orientés. On les appelle déplacements. Ce sont les translations et les rotations.
- De l'autre côté, il y a celles qui les changent en leurs opposés. Elles sont qualifiées d'antidéplacements. Ce sont les symétries axiales et les symétries glissées.

⊠⊠ Une homothétie est une transformation du plan qui conserve les angles orientés. Par conséquent, pour une similitude deux situations peuvent se présenter :

⊠⊠⊠ La similitude est la composée d'un déplacement et d'une homothétie.
⊠⊠⊠ La similitude est la composée d'un antidéplacement et d'une homothétie.
⊠⊠ Il existe deux types de similitude : les directes qui conservent les angles orientés et les indirectes qui les inversent.

⊠⊠⊠ Les similitudes planes directes sont les transformations du plan d'expression complexe $z' = az + b$, a et b complexes, $a \neq 0$.

⊠⊠⊠ Les similitudes planes indirectes sont les transformations du plan d'expression complexe $z' = a\bar{z} + b$, a et b complexes, $a \neq 0$. Une similitude indirecte peut avoir :

⊠⊠⊠ Aucun point fixe : c'est une symétrie glissée.

⊠⊠⊠ Avoir un unique point fixe. Elle est alors la composée d'une symétrie (axiale ou glissée) et d'une homothétie de rapport différent de 1.

⊠⊠⊠ Avoir une infinité de points fixes. C'est alors une réflexion.
(En fait deux points fixes suffisent à faire d'une similitude indirecte une symétrie axiale).

⊠⊠ Transformations usuelles
⊠⊠⊠ Translation $z' = z + b$
Éléments caractéristiques : Toute translation est caractérisée par un vecteur $\vec{x}$ d'affixe b et de rapport $a = 1$.
Translation avec $M' = t(M)$: $\overrightarrow{MM'} = \vec{x}$.
Écritures complexes : $t_{\vec{x}} : z' = z + b$.
⊠⊠⊠ Homothétie
Une homothétie de rapport k est une similitude de rapport $|k|$.$z' = kz + z_\Omega(1-k)$ ou $z' = kz + b$.
Éléments caractéristiques : Toute homothétie est caractérisée par un centre Ω d'affixe (z_Ω) et de rapport $a = k$ tel que $\begin{cases} k \in IR^* - \{1\} \\ \text{ou} \\ a = k = 1 \text{ et } b = 0 \end{cases}$.
Homothétie avec $M' = h(M)$: $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$.
Écritures complexes d'homothétie : $h(\Omega; k)$:

$z' - z_\Omega = k(z - z_\Omega) \Leftrightarrow z' = kz + z_\Omega(1-k)$ avec $a = k$ et $b = z_\Omega(1-k) \Leftrightarrow z_\Omega = \frac{b}{1-k}$ ou bien $z' = kz + b$.
⊠⊠⊠ Rotation $z' = e^{\alpha i}z + z_\Omega(1 - e^{\alpha i})$
Éléments caractéristiques : Toute rotation est caractérisée par un centre Ω d'affixe (z_Ω) et d'angle α $[2\pi]$ avec $\begin{cases} |a| = |e^{\alpha i}| = 1 \text{ et } a \neq 1 \\ \text{ou} \\ a = 1 \text{ et } b = 0 \end{cases}$
Définitions de rotation avec $M' = r(M)$:
$\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \alpha \end{cases}$.
Écritures complexes de rotation : $r(\Omega; \alpha)$:
$z' - z_\Omega = e^{\alpha i}(z - z_\Omega) \Leftrightarrow z' = e^{\alpha i}z + z_\Omega(1 - e^{\alpha i})$
avec $a = e^{\alpha i}$ et $b = z_\Omega(1 - e^{\alpha i}) \Leftrightarrow z_\Omega = \frac{b}{1 - e^{\alpha i}}$
ou bien $z' = e^{\alpha i}z + b$.

⊠⊠⊠ Symétrie d'axe réel
Éléments caractéristiques : L'axe réel.
Définitions de rotation avec $M' = S_{\vec{u}}(M)$:
$\begin{cases} OM = OM' \\ (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) \end{cases}$.
Écritures complexes d'homothétie : : $z' = \bar{z}$.

⊠ **Les propriétés des similitudes**
⊠⊠ Toute similitude est la composée d'une isométrie et d'une homothétie de même rapport. Réciproquement, la composée d'une isométrie et d'une homothétie est une similitude.

$$\begin{tikzcd}
MN \arrow[r, "f"', "\text{similitude de rapport } k"] \arrow[rr, bend right, "i = h\circ f"', "\text{isométrie}"] & M'N' & M''N'' \arrow[l, "h^{-1}", "\text{homothétie de rapport } k"']
\end{tikzcd}$$

⌧⌧ La similitude conserve l'alignement : l'image d'une droite est une autre droite, l'image d'un segment est un autre segment.

⌧⌧ La similitude conserve les angles géométriques, donc le parallélisme et l'orthogonalité.

⌧⌧ La similitude de rapport k multiplie les distances par k et les aires par k^2. Elle hérite cette propriété de l'homothétie.
L'image d'un cercle est un autre cercle de rayon multiplié par k.

⌧⌧ Une similitude de rapport k est la composée d'une isométrie et d'une homothétie de rapport k.

⌧⌧ Toute similitude plane conserve les angles géométriques. Une similitude plane qui conserve les angles orientés est dite directe.

⌧⌧ Une similitude plane qui change les angles orientés en leur opposé est indirecte.

⌧⌧ Il est clair que la composée d'une isométrie i et d'une homothétie h de rapport k est une similitude f de rapport $|k|$. Ceci car la situation est alors la suivante :

$$\begin{tikzcd}
MN \arrow[r, "i", "\text{conserve}"'] \arrow[rr, bend right, "f = i\circ h"', "\text{distances multipliées par } k"] & M'N' \arrow[r, "h", "\times|k|"'] & M''N''
\end{tikzcd}$$

Réciproquement, il est légitime de se demander si toute similitude ne serait pas la composée d'une isométrie et d'une homothétie.

⌧⌧ La composée d'une rotation r et d'une homothétie h de rapport k > 0 n'ayant pas nécessairement les mêmes centres est une similitude directe de rapport k. Quand r et h n'ont pas mêmes centres, on a en général $r\circ h \neq h\circ r$.

⌧⌧ Toute similitude plane directe f qui ni une translation, ni une homothétie s'écrit de manière unique f = h ∘ r où h est une homothétie et r est une rotation ayant mêmes centres. Dans ce cas, on a h ∘ r = r ∘ h.

⌧⌧ Toute similitude plane directe S qui n'est pas une translation admet un point fixe et un seul, son centre.

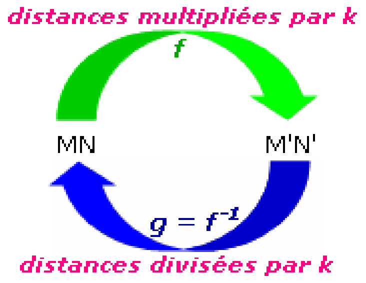
⌧⌧ La composée d'une similitude de rapport k et d'une similitude de rapport k′ est une similitude de rapport kk′.

⌧⌧ Toute similitude de rapport k > 0 est une bijection du plan sur lui-même et sa réciproque est une similitude de rapport $\frac{1}{k}$.

⌧⌧ la composée de deux similitudes de rapports k et k' est une autre similitude de rapport $k\times k'$:

$$\begin{tikzcd}
MN \arrow[r, "f", "\times k"'] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"', "\text{distances multipliées par } k\times k'"] & M'N' \arrow[r, "g", "\times k'"'] & M''N''
\end{tikzcd}$$

⌧⌧ la réciproque g de la similitude f de rapport k est une autre similitude de rapport $\frac{1}{k}$.



⌧⌧ la composée de $h \circ f$ est la suivante :

$$\begin{tikzcd}
MN \arrow[r, "f", "\times k"'] \arrow[rr, bend right, "h\circ f"', "\text{distances multipliées par } k/k = 1"] & M'N' \arrow[r, "h", "\times\frac{1}{k}"'] & M''N''
\end{tikzcd}$$

⌧⌧ L'identité Id (c'est-à-dire l'élément neutre pour la composition) est une similitude.
Pour toute similitude f, nous avons f ∘ Id = Id ∘ f = f.

⌧⌧ La composée de deux similitudes est une autre similitude.

⌧⌧ Toute similitude f admet une similitude inverse g (c'est-à-dire une réciproque).
Pour toute similitude f, il existe une similitude g telle que : $fog = gof = \mathrm{Id}$. Et réciproquement !

⌧⌧ points invariants : $z = az + b\ ssi\ (1 - a)z = b$

⌧⌧⌧ $si\ a=1\ et\ b=0$, l'équation est 0z=0 : tout point est invariant ;en effet $z'=z$ est l'écriture complexe de l'identité du plan .
⌧⌧⌧ $si\ a=1\ et\ b\neq 0$, l'équation est 0z=b : pas de point invariant; en effet $z'=z+b$ est l'écriture complexe d' une translation (de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b).
⌧⌧⌧ $si\ a\neq 1$, un unique point invariant d'affixe $z_\Omega=\frac{b}{1-a}$: <u>théorème</u> $si\ a\neq 1$, S a un unique point invariant Ω et S est la composée commutative d'une rotation et d'une homothétie de même centre Ω. <u>Remarque :</u> sur le rapport et l'angle on dit que S est une similitude de centre Ω, de rapport $k=|a|$ et d'angle $\alpha=arg(a)$.
⌧ <u>Une classification des similitudes</u>
⌧⌧ toute similitude directe S peut se ramener soit à l'identité du plan → id , soit à une translation → t, soit à une homothétie → h, soit à une rotation → r, soit à la composée commutative d'une homothétie et d'une rotation de même centre → hor

⌧⌧ toute similitude indirecte peut se ramener à la composée Sos = la symétrie axiale d'axe (Ox) suivie d'une similitude directe S voir ci-dessus

⌧⌧ Une conséquence (parmi d'autres) est qu'une réflexion (= symétrie axiale) d'axe quelconque peut se décomposer en : la symétrie axiale d'axe (Ox) suivie d'une similitude directe S
par exemple, la réflexion d'axe (Oy) est la composée de la symétrie axiale d'axe (Ox) suivie d'une similitude directe S z' = (-1)z voir ci-dessus

⌧⌧	Aucun point fixe	Un seul point fixe	Plus de deux points fixes
Similitude directe *(conserve les angles orientés)*	Translation	Homothétie, Rotation, Composée d'une rotation et d'une homothétie (défini par centre, angle, rapport)	Application identique
Similitude indirecte *(inverse les angles orientés)*	Symétrie glissée	Composée d'une symétrie axiale ou glissée, et d'une homothétie	Symétrie axiale (un axe de points fixes, c'est-à-dire une infinité)

Ce tableau nous amène à deux conclusions :

⌧⌧⌧ Toute similitude *f* n'ayant aucun point fixe est une isométrie : c'est soit une translation, soit une symétrie glissée.
C'est pour cela que la résolution de l'équation *f*(z) = z est intéressante : pas de solution signifie pas de point fixe...
⌧⌧⌧ Toute similitude *f* ayant au moins deux points fixes est soit l'identité, soit une réflexion.

<u>Méthodes de calcul sur les Similitudes Planes Directes.</u>

<u>*Comment identifier une similitude plane directe ?*</u>

⌧ il existe deux nombres complexes a et b avec $a\neq 0$, tels que tout point M d'affixe z ait pour image le point $M'=S(M)$ d'affixe : $z'=az+b$. On cherche cette forme $z'=az+b$.

<u>*Comment déterminer les éléments géométriques d'une similitude plane directe $z'=az+b$?*</u>

⌧ déterminer son rapport k :

⌧⌧ $k=|a|$.
⌧⌧ $k=\frac{\Omega M'}{\Omega M}$ ou $k=A'B'/AB$

⌧ déterminer son angle α :

⌧⌧ $\alpha=arg(a)\quad [2\pi]$
⌧⌧ $\alpha=arg\left(\frac{\Omega M'}{\Omega M}\right)=mes\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}}\right)[2\pi]$.

⌧ déterminer son centre Ω : $z_\Omega=\frac{b}{1-a}$.

<u>*Comment déterminer l'écriture complexe d'une similitude plane directe z' = az + b ?*</u>

⌧ si on connait ces éléments caractéristiques, on en déduit $z'-z_\Omega=ke^{\alpha i}(z-z_\Omega)$

S : $z'=ke^{\alpha i}z+z_\Omega(1-ke^{\alpha i})$

⌧ on détermine a et b : $A'=S(A), alors\ z_{A'}=az_A+b$ et $B'=S(B),\ alors\ z_{B'}=az_B+b$.

$$\begin{cases} z_{A'}=az_A+b \\ z_{B'}=az_B+b \end{cases}$$ d'où

$a=\frac{z_{A'}-z_{B'}}{z_A-z_B}$ et $b=\frac{z_Az_{B'}-z_{A'}z_B}{z_A-z_B}$.

S : $z'=\frac{z_{A'}-z_{B'}}{z_A-z_B}z+\frac{z_Az_{B'}-z_{A'}z_B}{z_A-z_B}$.

Comment identifier la translation à partir de l'écriture $z' = az + b$? **On commence par identifier le coefficient de z**

☒ **Si $a = 1$, alors il s'agit d'une translation du plan complexe de vecteur $\vec{x}$ d'affixe b.**
Remarque : si $a = 0$, la transformation considérée est simplement l'identité du plan.

Comment identifier l'homothétie à partir de l'écriture $z' = az + b$? **On commence par identifier le coefficient de z**

☒ **On conclura positivement s'il est réel, non nul et différent de 1 (si a =1, on a affaire à une translation. Dans le cas de l'identité, a =1 et b = 0, on a affaire à une homothétie …). Dans le cas (général) où a est réel non nul et différent de 1, l'affixe du centre sera alors $z_\Omega = \frac{b}{1-a}$), une homothétie de rapport différent de 1 ne possédant qu'un seul point invariant.**
☒ $arg(a) = \pi k$
Comment identifier la rotation à partir de l'écriture $z' = az + b$?

☒ **si $|a| = 1$, alors il s'agit d'une rotation du plan complexe de centre Ω (z_Ω) et d'angle α.**
Comment déterminer l'affixe du point A', image du point A par S ?

☒ **on calcule $z_{A'} = az_A + b$**

Comment déterminer l'équation de la droite (A'B') image de celle de la droite (AB) par S ?

☒ **on calcule $z_{A'} = az_A + b$ et $z_{B'} = az_B + b$**

☒ **soit le point M(z) appartenant à la droite (A'B') de façon que les vecteurs $\overrightarrow{A'M}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ soient colinéaires. On calcule leurs déterminants**

$$dét\left(\overrightarrow{A'M};\ \overrightarrow{A'B'}\right) = 0 \text{ avec } z = x + iy$$

Comment déterminer l'image d'un cercle C de centre A et rayon r par S ?

$C(A; r)$ image par S est $C'(A'; r' = kr)$ avec k le rapport de S et $z_{A'} = az_A + b$.

Comment déterminer l'image d'un polynôme par S ?

On calcule les images de ses points par S.
La similitude conserve les angles géométriques, donc le parallélisme et l'orthogonalité

Exemple ABCD image par S est A'B'C'D'.

La similitude conserve l'alignement : l'image d'une droite est une autre droite, l'image d'un segment est un autre segment.

Comment déterminer la composée d'une similitude ?

☒ **la composée de plusieurs similitudes identiques : Si S est caractérisée par**

$S\ [|a| = k; arg(a) = \alpha;\ \Omega\ ]$ alors on obtient les caractéristiques de S^n :

$S^n = S_0S_0S_0 \dots oS\ \ [k^n; n\alpha;\ \Omega\ ]$ afin de déterminer son écriture complexe.

☒ **la composée de plusieurs similitudes non identiques : exemple f_0g_0h où $|a| = k; arg(a) = \alpha$**

Soient f, g et h sont caractérisées respectivement par $f\ [k; \alpha;\ \mathrm{I}\ ]$; $g\ [k'; \alpha';\ \mathrm{I}'\ ]$ et $h\ [k''; \alpha'';\ \mathrm{I}''\ ]$.

Donc $f_0g_0h\ [(k.k'.k'');\ (\alpha + \alpha' + \alpha'');\ \Omega\ ]$ avec son centre Ω est d'affixe $z_\Omega = \frac{b+ab'+a.a'.b''}{1-a.a'.a''}$.

Comment déterminer l'écriture linéaire de S à partir de son écriture $z' = az + b$?

$$x' + iy = a(x + iy) + b \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \alpha x + \beta y + \gamma \\ y' = \alpha' x + \beta' y + \gamma' \end{cases}$$

Comment déterminer l'écriture complexe de S : $z' = az + b$ à partir de son écriture linéaire $\begin{cases} x' = \alpha x + \beta y + \gamma \\ y' = \alpha' x + \beta' y + \gamma' \end{cases}$?

☒ $x' + iy = \alpha x + \beta y + \gamma + i(\alpha' x + \beta' y + \gamma')$
afin de trouver l'écriture complexe : $z' = az + b$.

Comment montrer que S est bijective ? S :
$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$$

Si S est bijective, alors $dét\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \neq 0$.

Exercices sur les similitudes planes directes

Dans tous les exercices, on considère $z = x + iy$ un nombre complexe et un repère orthonormé direct $(O; \vec{U}, \vec{V})$.
On considère l'application S de l'ensemble P des points du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = x' + y'$.

<u>Exercice 1 :</u> Déterminer l'écriture complexe de la similitude S qui transforme le bipoint (A, B) en bipoint (A', B') dans les cas suivants :

1. $A(1,2)$ $B(3,-1)$ $A'(0,-3)$ $B'(1,1)$.
2. $A(1,0)$ $B(1,1)$ $A'(0,-1)$ $B'(3,3)$
3. $A(-1,-2)$ $B(2,0)$ $A'(1,1)$ $B'(2,1)$
4. $A(2,2)$ $B(3,-3)$ $A'(2,-3)$ $B'(-1,-1)$
5. $A(1,0)$ $B(0,1)$ $A'(3,0)$ $B'(0,3)$.

<u>Correction :</u> S : $z' = az + b$. Il ressort de celle-ci qu'on peut écrire : $A' = S(A)$ $alors$ $z_{A'} = az_A + b$ et $B' = S(B)$ $alors$ $z_{B'} = az_B + b$. $\begin{cases} z_{A'} = az_A + b \\ z_{B'} = az_B + b \end{cases}$ d'où $a = \frac{z_{A'} - z_{B'}}{z_A - z_B}$ et $b = \frac{z_A z_{B'} - z_{A'} z_B}{z_A - z_B}$.
C'est une routine, il suffit donc de remplacer dans chacun des cas les affixes de A, B, A' et B'. **<u>Exemple :</u> quetion 5.** : on a $a = \frac{3+4i}{5}$ et $b = \frac{-3+i}{5}$, d'où la similitude est définie par $z' = \left(\frac{3+4i}{5}\right)z + \frac{-3+i}{5}$.
Vous pouvez continuer pour les autres questions !

<u>Exercice 2 :</u> Donner dans chaque cas, l'écriture complexe de la transformation f du plan complexe donnée :

1. **f est la translation de vecteur $\vec{w}(1; -5)$.**
2. **f est l'homothétie de centre $O(0;0)$ et de rapport 3.**
3. **f est l'homothétie de centre $A(1-i)$ et de rapport -2.**
4. **f est l'homothétie de rapport $\frac{1}{4}$ qui transforme $B(8i)$ en $B'(-i)$.**
5. **f est la rotation de centre A$(1;1)$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$**
6. **f est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme $B(1-i)$ en $B'(-i)$.**

<u>Correction :</u>

1. **f est la translation de vecteur $\vec{w}(1; -5)$**
$z' = z + 1 - 5i$.
2. **f est l'homothétie de centre $O(0;0)$ et de rapport 3 :** $z' - 0 = 3(z - 0) \Leftrightarrow z' = 3z$.
3. **f est l'homothétie de centre $A(1-i)$ et de rapport -2 :** $z' = -2z + 3 - 3i$
4. **f est l'homothétie de rapport $\frac{1}{4}$ qui transforme $B(4i)$ en $B'(-i)$:**
$z_{B'} = kz_B + z_\Omega(1-k) \Leftrightarrow z_\Omega = \frac{z_{B'} - kz_B}{1-k} = \frac{-i - \frac{1}{4}(8i)}{1 - \frac{1}{4}} = 4i$
Donc $z' = \frac{1}{4}z + 3i$.
5. **f est la rotation de centre A$(1;1)$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$:** $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}z + z_A\left(1 - e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)$
$z' = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + \frac{3+\sqrt{3}}{2} + \frac{3-\sqrt{3}}{2}i$.
6. **f est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme $B(1-i)$ en $B'(-i)$:** $z_{B'} = e^{i\frac{\pi}{2}}z_B + z_\Omega\left(1 - e^{i\frac{\pi}{2}}\right) \Leftrightarrow$
$z_\Omega = \frac{z_{B'} - e^{i\frac{\pi}{2}}z_B}{1 - e^{i\frac{\pi}{2}}} = \frac{-i - i(1-i)}{1-i} = \frac{-1-2i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$.
$z' = e^{i\frac{\pi}{2}}z + z_\Omega\left(1 - e^{i\frac{\pi}{2}}\right)$ ou $z' = iz + \frac{-1-2i}{1-i}(1-i)$ ou $z' = iz - 1 - 2i$.

<u>Exercice 3 :</u> Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S dans les cas suivants :

1. $z' = (\sqrt{3} - i)z - 1 + \sqrt{3} - i$
2. $z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}}(iz + \sqrt{2})$
3. $z' + z = i - 1$
4. $z' - z = 1 + i\sqrt{2}$
5. $z' = 2iz + i - 1$

<u>Correction :</u> La nature et les éléments caractéristiques de S : $z' = az + b$

1. $z' = (\sqrt{3} - i)z - 1 + \sqrt{3} - i$, $a = \sqrt{3} - i = 2e^{-\frac{\pi}{6}i}$ et $z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{-(1-\sqrt{3}+i)}{1-\sqrt{3}+i} = -1$, **S** est **similitude plane directe** caractérisée par :
S ($k = 2$; $\alpha = -\frac{\pi}{6}$; $z_\Omega = -1$)
2. $z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}}(iz + \sqrt{2}) \Leftrightarrow z' = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)z + 1 + i = e^{\frac{3\pi}{4}i}z + 1 + i$, et $z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \sqrt{2}\frac{1+i}{\sqrt{2}-1-i}$ **S** est une **rotation** caractérisée par :
$S\left[k = 1\ ;\ \alpha = \frac{3\pi}{4}\ ;\ z_\Omega = \sqrt{2}\frac{1+i}{\sqrt{2}-1-i}\right]$.

3. $\boldsymbol{z' + z = i - 1 \Leftrightarrow z' = -z + i - 1}$, **S** est une **homothétie** de rapport -1 et de centre $\Omega\left(\frac{i-1}{2}\right)$.

4. $\boldsymbol{z' - z = 1 + i\sqrt{2} \Leftrightarrow z' = z + 1 + i\sqrt{2}}$, **S** est une **translation** de vecteur $\vec{x}$ d'affixe $1 + i\sqrt{2}$.

$\boldsymbol{z' = 2iz + i - 1}$**,** $a = 2i = 2e^{\frac{\pi}{2}i}$ et $z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{i-1}{1-2i} = \frac{-3-i}{5}$. S est une **similitude plane directe :**

$\boldsymbol{S\left[k = 2\ ;\ \alpha = \frac{\pi}{2}\ ;\ z_\Omega = \frac{-3-i}{5}\right]}$**.**

<u>Exercice 4 :</u>

A. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $\boldsymbol{2i}$; $\boldsymbol{1 - i}$; $\boldsymbol{i + \sqrt{3}}$ et $\boldsymbol{\sqrt{3} - i}$.

Déterminer dans chaque cas, l'écriture complexe de la similitude plane directe $\boldsymbol{f}$ du plan complexe donnée :

1. **$\boldsymbol{f}$ transformant O en D et A en C ;**
2. **$\boldsymbol{f}$ transformant A en B et C en D ;**
3. **$\boldsymbol{f}$ admet un centre D et transformant A en B ;**
4. **$\boldsymbol{f}$ laissant le point C invariant et transformant O en B**.

B. On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $\boldsymbol{z_A = \frac{3}{2}(1 + i)}$, $\boldsymbol{z_B = \frac{3}{2}(1 - i)}$ et $\boldsymbol{z_C = -2i\sqrt{3}}$. On note $\boldsymbol{S}$ le symétrique du point C par rapport à B. Vérifier que l'affixe $\boldsymbol{z_S}$ du point S est $\boldsymbol{3 + i\left(2\sqrt{3} - 3\right)}$.

<u>Correction :</u>

A. on sait que $\boldsymbol{O(0\ )}$; $\boldsymbol{A(2i\ )}$; $\boldsymbol{B(1 - i\ )}$; $\boldsymbol{C(i +}$ $\boldsymbol{3}$ et D$\boldsymbol{3 - i}$.

L'écriture complexe de la similitude plane directe $\boldsymbol{f}$:

1. **$\boldsymbol{f}$ transformant O en D et A en C ;**

$f(\mathrm{O}) = \mathrm{D} \Leftrightarrow z_\mathrm{D} = az_\mathrm{O} + b$ et

$f(\mathrm{A}) = \mathrm{C} \Leftrightarrow z_\mathrm{C} = az_\mathrm{A} + b$

$\begin{cases} z_\mathrm{D} = az_\mathrm{O} + b \\ z_\mathrm{C} = az_\mathrm{A} + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{z_\mathrm{D} - z_\mathrm{C}}{z_\mathrm{O} - z_\mathrm{A}} \\ b = z_\mathrm{D} - az_\mathrm{O} \end{cases}$

$a = \frac{z_\mathrm{D} - z_\mathrm{C}}{z_\mathrm{O} - z_\mathrm{A}} = \frac{\sqrt{3} - i - i - \sqrt{3}}{0 - 2i} = \frac{-2i}{-2i} = 1$

$b = z_\mathrm{D} - az_\mathrm{O} = \sqrt{3} - i - 0 = \sqrt{3} - i$

$\boldsymbol{f}$: $z' = z + \sqrt{3} - i$ c'est une translation de $\vec{u}\left(\sqrt{3} - i\right)$.

2. **$\boldsymbol{f}$ transformant A en B et C en D ;**

$f(\mathrm{A}) = \mathrm{B} \Leftrightarrow z_\mathrm{B} = az_\mathrm{A} + b$ et

$f(\mathrm{C}) = \mathrm{D} \Leftrightarrow z_\mathrm{D} = az_\mathrm{C} + b$

$\begin{cases} z_\mathrm{B} = az_\mathrm{A} + b \\ z_\mathrm{D} = az_\mathrm{C} + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{z_\mathrm{D} - z_\mathrm{B}}{z_\mathrm{C} - z_\mathrm{A}} \\ b = z_\mathrm{B} - az_\mathrm{A} \end{cases}$

$a = \frac{z_\mathrm{D} - z_\mathrm{B}}{z_\mathrm{C} - z_\mathrm{A}} = \frac{\sqrt{3} - i - 1 + i}{i + \sqrt{3} - 2i} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - i} \times \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} + i} = \frac{3 + i\sqrt{3} - \sqrt{3} - i}{4}$

Donc $a = \frac{3 - \sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3} - 1}{4}i$

$b = z_\mathrm{B} - az_\mathrm{A} = 1 - i - \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3} - 1}{4}i\right)(2i) = 1 - i - \frac{\sqrt{3} - 1}{2} + \frac{3 - \sqrt{3}}{2}i = \frac{2 - \sqrt{3} + 1}{2} + \frac{3 - 2 - \sqrt{3}}{2}i = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}i$

$f : z' = \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3} - 1}{4}i\right)z + \frac{3 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}i.$

3. **$\boldsymbol{f}$ admet un centre D et transformant A en B ;**

$f(\mathrm{A}) = \mathrm{B} \Leftrightarrow z_\mathrm{B} = az_\mathrm{A} + b$ et

$f(\mathrm{D}) = \mathrm{D} \Leftrightarrow z_\mathrm{D} = az_\mathrm{D} + b$

$\begin{cases} z_\mathrm{B} = az_\mathrm{A} + b \\ z_\mathrm{D} = az_\mathrm{D} + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{z_\mathrm{D} - z_\mathrm{B}}{z_\mathrm{D} - z_\mathrm{A}} \\ b = z_\mathrm{D} - az_\mathrm{D} \end{cases}$

$a = \frac{z_\mathrm{D} - z_\mathrm{B}}{z_\mathrm{D} - z_\mathrm{A}} = \frac{\sqrt{3} - i - 1 + i}{\sqrt{3} - i - 2i} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 3i} \times \frac{\sqrt{3} + 3i}{\sqrt{3} + 3i} = \frac{3 + 3i\sqrt{3} - \sqrt{3} - 3i}{12}$

Donc $a = \frac{3 - \sqrt{3}}{12} + \frac{\sqrt{3} - 1}{4}i$

$b = z_\mathrm{D} - az_\mathrm{D} = (1 - a)z_\mathrm{D} = \left(\sqrt{3} - i\right)\left(\frac{3 - \sqrt{3}}{12} +\right.$

3−14i=33−312+3−34i−3−312i+3−14=33−3+33
−312+9−33−3+3312i=3−12+12i

$f : z' = \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{12} + \frac{\sqrt{3} - 1}{4}i\right)z + \frac{\sqrt{3} - 1}{2} + \frac{1}{2}i$

4. **$\boldsymbol{f}$ laissant le point C invariant et transformant O en B**. $f(\mathrm{C}) = \mathrm{C} \Leftrightarrow z_\mathrm{C} = az_\mathrm{C} + b$ et

$f(\mathrm{O}) = \mathrm{B} \Leftrightarrow z_\mathrm{B} = az_\mathrm{O} + b$

$\begin{cases} z_\mathrm{C} = az_\mathrm{C} + b \\ z_\mathrm{B} = az_\mathrm{O} + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{z_\mathrm{C} - z_\mathrm{B}}{z_\mathrm{C} - z_\mathrm{O}} \\ b = z_\mathrm{B} - az_\mathrm{O} \end{cases}$

$a = \frac{z_\mathrm{C} - z_\mathrm{B}}{z_\mathrm{C} - z_\mathrm{O}} = \frac{i + \sqrt{3} - 1 + i}{i + \sqrt{3} - 0} = \frac{\sqrt{3} - 1 + 2i}{\sqrt{3} + i} \times \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i} = \frac{3 + i\sqrt{3} - \sqrt{3} - i + 2i\sqrt{3} - 2}{4} = \frac{1 - \sqrt{3} + 3i\sqrt{3} - i}{4} = \frac{1 - \sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3} - 1}{4}i$

$b = z_\mathrm{B} - az_\mathrm{O} = z_\mathrm{B} = 1 - i$

$f : z' = \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3} - 1}{4}i\right)z + 1 - i$

B. $z_A = \frac{3}{2}(1 + i)$, $z_B = \frac{3}{2}(1 - i)$ et $z_C = -2i\sqrt{3}$.

On note $S = s_B(C) \Leftrightarrow \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{BC}$ ou $z_{\overrightarrow{SB}} = z_{\overrightarrow{BC}} \Leftrightarrow z_S = 2z_B - z_C = 2 \times \frac{3}{2}(1 - i) + 2i\sqrt{3} = 3 + i\left(2\sqrt{3} - 3\right)$.

<u>Exercice 5 :</u>

1. **Résoudre dans $\mathbb{C}$: $\boldsymbol{z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0}$.**

On pose $\boldsymbol{a = i + \sqrt{3}}$ et $\boldsymbol{b = \sqrt{3} - i}$.
Ecrire $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sous forme exponentielle et placer les points $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ d'affixes respectives $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ dans le plan complexe. On prendra 2 $\boldsymbol{cm}$ pour unité graphique.

2.

a) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Calculer l'affixe a' du point A' image du point A par r. Ecrire a' sous forme algébrique et placer A' sur la figure précédente.

b) Soit h l'homothétie de centre de O et de rapport $-\frac{3}{2}$. Calculer l'affixe b' du point B' image du point B par h. Placer B' sur la figure précédente.

Correction :

1. $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$, $\Delta=12-16=-4=(2i)^2$

$z_1=\frac{2\sqrt{3}-2i}{2}=\sqrt{3}-i$ et$z_2=\frac{2\sqrt{3}+2i}{2}=\sqrt{3}+i$ alors

$$S_{\mathbb{C}}=\{\sqrt{3}-i\,;\,\sqrt{3}+i\}$$

$a=i+\sqrt{3}=2e^{\frac{\pi}{6}i}$ et $b=\sqrt{3}-i=2e^{-\frac{\pi}{6}i}$.

2.

a. $r\left(0;\frac{\pi}{3}\right)$: $z'=e^{\frac{\pi}{3}i}z=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$, on a : $a'=z_{A'}=e^{\frac{\pi}{3}i}z_A=e^{\frac{\pi}{3}i}.2e^{\frac{\pi}{6}i}=2e^{\frac{\pi}{2}i}=2i$.

b. $h\left(O;-\frac{3}{2}\right)$: $z'=-\frac{3}{2}z$, on a : $b'=z_{B'}=-\frac{3}{2}z_B=-\frac{3}{2}(\sqrt{3}-i)=-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$.

Exercice 6 :

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
$4z^2-12z+153=0$.

2. On considère les points A, B, C, P d'affixes respectives : $z_A=\frac{3}{2}+6i$, $z_B=\frac{3}{2}-6i$, $z_C=-\frac{1}{4}i-3$, $z_P=3+2i$ et le vecteur $\vec{w}$ d'affixe : $z_{\vec{w}}=-1+\frac{3}{2}i$.

3. Faire la figure.
On prendra 1 cm pour unité graphique.

a) Déterminer l'affixe z_Q du point Q, image du point B par par la translation t de vecteur $\vec{w}$.

b) Déterminer l'affixe z_R du point R, image du point P par l'homothétie h de centre C et de rapport $-\frac{1}{3}$.

c) Déterminer l'affixe z_S du point S, image du point P par la rotation r de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

d) Placer les points P, Q, R et S.

4.

a) Démontrer que le quadrilatère $PQRS$ est un parallélogramme.

b) Calculer $\frac{z_R-z_Q}{z_P-z_Q}$ et en déduire la nature précise du parallélogramme $PQRS$.

c) Démontrer que les points P, Q, R et S appartiennent à un meme cercle, noté $\mathcal{C}$. On calculera l'affixe du centre Ω et le rayon ρ de $\mathcal{C}$.

d) La droite (AP) est- elle tangente à $\mathcal{C}$?

Correction :

1. $4z^2-12z+153=0$, $\Delta=12^2-4.4.153=-2304=(48i)^2$ donc $z_1=\frac{12-48i}{8}=\frac{3}{2}-6i$ et $z_2=\frac{12+48i}{8}=\frac{3}{2}+6i$ d'où $S_{\mathbb{C}}=\left\{\frac{3}{2}-6i\,;\,\frac{3}{2}+6i\right\}$

2. $z_A=\frac{3}{2}+6i$, $z_B=\frac{3}{2}-6i$, $z_C=-\frac{1}{4}i-3$, $z_P=3+2i$ et le vecteur $\vec{w}$ d'affixe : $z_{\vec{w}}=-1+\frac{3}{2}i$.

3. **Faire la figure**. On prendra 1 cm pour unité graphique.

a. $t_{\vec{w}}$: $z'=z-1+\frac{3}{2}i$, on déduit que $z_Q=z_B-1+\frac{3}{2}i=\frac{1}{2}-\frac{7}{2}i$.

b. $h\left(C;-\frac{1}{3}\right)$: $z'=-\frac{1}{3}z+\left(1+\frac{1}{3}\right)z_C$ donc $z_R=-\frac{1}{3}z_P+\frac{4}{3}z_C=\frac{1}{3}(-z_P+4z_C)=-5-i$.

c. $r\left(A;-\frac{\pi}{2}\right)$: $z'=e^{-\frac{\pi i}{2}}z+\left(1-e^{-\frac{\pi i}{2}}\right)z_A$ donc $z_S=-iz_P+i\left(\frac{3}{2}+6i\right)+\frac{3}{2}+6i=-\frac{5}{2}+\frac{9}{2}i$.

d. **Placer les points P, Q, R et S.**

4.

a) $\overrightarrow{PQ}\Leftrightarrow z_{\overrightarrow{PQ}}=z_Q-z_P=-\frac{5}{2}-\frac{11}{2}i$ et $\overrightarrow{SR}\Leftrightarrow z_{\overrightarrow{SR}}=z_R-z_S=-\frac{5}{2}-\frac{11}{2}i$, on remarque $z_{\overrightarrow{PQ}}=z_{\overrightarrow{SR}}$ d'où $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}$, $PQRS$ est un parallélogramme.

b) $\frac{z_R-z_Q}{z_P-z_Q}=\frac{-5-i-\frac{1}{2}+\frac{7}{2}i}{\frac{5}{2}+\frac{11}{2}i}=-i\Leftrightarrow\overrightarrow{QR}\perp\overrightarrow{QP}$ et $QR=QP$. Donc $PQRS$ est un carré.

c) Les sommets (P, Q, R et S) d'un carré sont toujours sur un même cercle… de centre Ω tel que $z_\Omega=\frac{z_R+z_P}{2}=-1$ et le rayon $\rho=\frac{1}{2}PR=\sqrt{17}$.

d) **A-t-on $\overrightarrow{PA}$ orthogonale au rayon $\overrightarrow{P\Omega}$?**
$z_{\overrightarrow{PA}}=-\frac{3}{2}+4i$; $z_{\overrightarrow{P\Omega}}=-4-2i$? On calcule le produit scalaire : $\binom{-\frac{3}{2}}{4}\binom{-4}{-2}=6-8=-2\neq0$, donc la droite (AP) est- elle tangente à $\mathcal{C}$.

Exercice 7 :

1. Soit P(z) = $z^3-3z^2+9z-27$.

a) Vérifier que $P(3)=0$.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ $P(z)=0$.

b) Quelle est la nature du triangle formé par les points images des solutions de cette équation ?

2. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a=3$, $b=-3i$ et $c=3i$ et $d=2-\frac{5}{2}i$.

a) **Déterminer l'affixe du point E, image de D par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.**

b) **Déterminer l'affixe du point I, symétrique de B par rapport à D puis celle du point J, symétrique de C par rapport à E.**

c) **Déterminer l'affixe du point F, milieu du segment [IJ].**

d) **Préciser, en justifiant, la nature du quadrilatère ODFE.**

e) **On désigne par z_A, z_I et z_J les affixes des points A, I et J. On pose $Z = \frac{z_J - z_A}{z_I - z_A}$. Calculer Z.**

En interprétant géométriquement le module et un argument de Z, déterminer la nature du triangle AIJ.

<u>**Correction :**</u>

1. **P(z) = $z^3 - 3z^2 + 9z - 27$.**

a) $P(3) = 3^3 - 3 \times 3^2 + 9 \times 3 - 27 = 0$,
$P(z) = (z-3)(z^2 + az + b) = (z-3)(z^2 + 9) = 0$, les solutions sont $z_0 = 3$, $z_1 = -3i$ et $z_2 = 3i$.

b) Soit les points A, B, et C d'affixes respectives $a = 3$, $b = -3i$ et $c = 3i$: $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i$ et $AB = |z_B - z_A| = 3\sqrt{2}$, $AC = |z_C - z_A| = 3\sqrt{2}$, donc ABC est un triangle rectangle et isocèle en A.

2. $A(3)$, $B(-3i)$ et $C(3i)$ et $D\left(2 - \frac{5}{2}i\right)$.

a) $r\left(O; \frac{\pi}{2}\right)$: $z' = iz$; $z_E = iz_D = i\left(2 - \frac{5}{2}i\right) = \frac{5}{2} + 2i$.

b) $I = S_D(B) \Leftrightarrow \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{DB} \Leftrightarrow z_I = 2z_D - z_B = 2\left(2 - \frac{5}{2}i\right) + 3i = 4 - 2i$ et $J = S_E(C) \Leftrightarrow \overrightarrow{JE} = \overrightarrow{EC} \Leftrightarrow z_J = 2z_E - z_C = 2\left(\frac{5}{2} + 2i\right) - 3i = 5 + i$.

c) $z_F = \frac{z_I + z_J}{2} = \frac{9 - i}{2}$.

d) $OD = |z_D - z_O| = \frac{\sqrt{41}}{2}$, $DF = |z_F - z_D| = \frac{\sqrt{41}}{2}$ et $FE = |z_E - z_F| = \frac{\sqrt{41}}{2}$, alors ODFE est un carré.

f) $Z = \frac{z_J - z_A}{z_I - z_A} = \frac{5 + i - 3}{4 - 2i - 3} = i$; $|Z| = 1$ et $arg(Z) = \frac{\pi}{2}$, donc
$\left(\widehat{\overrightarrow{AI}; \overrightarrow{AJ}}\right) = \frac{\pi}{2}$, d'où AIJ est un triangle rectangle en A.

<u>**Exercice 8 :**</u> **On considère les deux rectangles OABC et DEFG où les points A, B, C, D, E, F, G ont pour affixes respectives $z_A = -2$, $z_B = -2 + i$, $z_C = i$, $z_D = 1$, $z_E = 1 + 3i$, $z_F = \frac{5}{2} + 3i$, $z_G = \frac{5}{2}$. On considère la similitude directe S transformant O en D et A en E.**

1. **Justifier que l'écriture complexe de la similitude S est : $z' = -\frac{3}{2}iz + 1$.**
2. **Déterminer l'angle et le rapport de la similitude S.**
3. **Quelle est l'image du rectangle OABC par S ?**

<u>**Correction :**</u> **S est de la forme $z' = az + b$**

1. $\begin{cases} D = S(O) \\ E = S(A) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = a \times 0 + b \\ 1 + 3i = a \times (-2) + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -\frac{3}{2}i \end{cases}$, d'où S est : $z' = -\frac{3}{2}iz + 1$.

2. $a = -\frac{3}{2}i = \frac{3}{2}e^{-\frac{\pi}{2}i}$, donc $\boldsymbol{S\left[k = -\frac{3}{2} \ ; \ \alpha = -\frac{\pi}{2}\right]}$.

3. On peut remarquer que S les images des points : $z_D = -\frac{3}{2}iz_O + 1 = 1$, $z_E = -\frac{3}{2}iz_A + 1 = 1 + 3i$, $z_F = -\frac{3}{2}iz_B + 1 = \frac{5}{2} + 3i$ et $z_G = -\frac{3}{2}iz_C + 1 = \frac{5}{2}$ alors **l'image du rectangle OABC** par la similitude S est le rectangle DEFG.

<u>**Exercice 9 :**</u> **Soit un polynôme défini par**

P(z) = $z^3 - 10iz^2 + 4(1 + i4)z - 40(4 + 3i)$.

1. **Vérifier que ce polynôme admet une solution imaginaire pur si $P(z) = 0$.**
2. **Résoudre dans $\mathbb{C}$ $P(z) = 0$.**
3. **On considère les points M_0, M_1 et M_2 d'affixes respectives $z_0 = 10i$, $z_1 = 4 - 2i$ et $z_2 = -4 + 2i$.**

a) **Déterminer l'affixe de l'isobarycentre du triangle $M_0M_1M_2$.**

b) **Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe s qui laisse M_0 invariant et telle que $M_2 = S(M_1)$.**

<u>**Correction :**</u>

P(z) = $z^3 - 10iz^2 + 4(1 + i4)z - 40(4 + 3i)$

1. Soit bi cette solution, donc $P(bi) = 0$ alors $P(bi) = (bi)^3 - 10(bi)^2 + 4(1 + 4i)(bi) - 40(4 + 3i) = 0$.
Après tout calcul et par identification, on obtient que $b = 10$, d'où par vérification $P(10i) = 0$.

2. **Résolution dans $\mathbb{C}$ de $P(z) = 0$:**
$P(z) = (z - 10i)[z^2 + (1 + 2i)^2] = 0 \Leftrightarrow z^2 + (1 + 2i)^2 = 0$ ou $z - 10i$. Pour $z^2 + (1 + 2i)^2 = 0$, $z_1 = 4 - 2i$ et $z_2 = -4 + 2i$ ou $z_0 = 10i$.

3. **$M_0(z_0)$, $M_1(z_1)$ et $M_2(z_0)$:**

a) Soit ce point A qui est défini par $\overrightarrow{AM_0}+\overrightarrow{AM_1}+\overrightarrow{AM_2}=\vec{0}$. L'affixe u du point A est donc solution de l'équation $z_0+z_1+z_2-3u=0$ ou $u=\frac{10}{3}i$

b) Puisque M_0 est point invariant et que $M_2=s(M_1)$ alors $\overrightarrow{M_0M_2}=s\left(\overrightarrow{M_0M_1}\right)$. Il s'agit de rechercher l'expression trigonométrique ou exponentielle de $\frac{z_2-z_0}{z_1-z_0}$.

Donc $\frac{z_2-z_0}{z_1-z_0}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$. Par conséquent, la similitude directe s qui laisse M_0 invariant et qui transforme M_1 en M_2, a pour rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et pour détermination de son angle $-\frac{\pi}{4}$.

Exercice 10 :

1.

a) **Trouver les racines carrées du nombre complexe $5-12i$.**

b) **Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :**

$(\mathbf{z}+2i)\left[\mathbf{z}^2-(1+i4)\mathbf{z}-5+5i\right]=0.$

2. **On considère les points M_0, M_1 et M_2 d'affixes respectives $2i$, $2-i$ et $-1-3i$.**

Soit S la similitude plane directe laissant le point M_1 invariant et transformant M_0 en M_2.

a) **Trouver la relation liant l'affixe z d'un point M et l'affixe z′ de son image M' par S.**

b) **Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe S.**

c) **Déterminer l'affixe de l'isobarycentre G du triangle $M_0M_1M_2$.**

Correction :

1.

a) **racines carrées du $5-12i$.**

Posons $z=x+iy$ tel que $z^2=5-12i$ puis on résout

$$\begin{cases}x^2+y^2=\sqrt{5^2+12^2}=13\\x^2-y^2=5\\2xy=-12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=13\\x^2-y^2=5\\xy=-6\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2+y^2=13\\x^2-y^2=5\\xy=-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2=18\\2y^2=8\\xy=-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\mp3\\y=\mp2\\xy=-6\end{cases}\text{ alors}$$

les racines carrées du nombre complexe $5-12i$ sont $-3+2i$ et $3-2i$.

b) **Résoudre dans $\mathbb{C}$:**

$(\mathbf{z}+2i)\left[\mathbf{z}^2-(1+i4)\mathbf{z}-5+5i\right]=0.$

$z+2i=0\Leftrightarrow z=-2i$ ou

$$z^2-(1+i4)z-5+5i=0$$

$\Delta=(1+i4)^2-4(-5+5i)=5-2i$ alors les racines carrées du $\Delta=5-12i$ sont $-3+2i$ et $3-2i$.

$z'=\frac{1+4i-(3-2i)}{2}=\frac{1+4i-3+2i}{2}=\frac{-2+6i}{2}=-1+3i$

$z''=\frac{1+4i+(3-2i)}{2}=\frac{1+4i+3-2i}{2}=\frac{4+2i}{2}=2+i$

$S_{\mathbb{C}}=\{-2i;\ -1+3i;2+i\}$

2. **$M_0(2i)$, $M_1(2-i)$ et $M_2(-1-3i)$.**

$S(M_1)=M_1$ et $S(M_0)=M_2$.

a) **Trouver la relation liant l'affixe z d'un point M et l'affixe z′ de son image M' par S.**

$S(M_1)=M_1\Leftrightarrow z_{M_1}=az_{M_1}+b$ et

$S(M_0)=M_2\Leftrightarrow z_{M_2}=az_{M_0}+b$

$$\begin{cases}z_{M_1}=az_{M_1}+b\\z_{M_2}=az_{M_0}+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{z_{M_1}-z_{M_2}}{z_{M_1}-z_{M_0}}\\b=z_{M_1}-az_{M_1}\end{cases}$$

$a=\frac{z_{M_1}-z_{M_2}}{z_{M_1}-z_{M_0}}=\frac{2-i+1+3i}{2-i-2i}=\frac{3+2i}{2-3i}\times\frac{2+3i}{2+3i}=\frac{6+9i+4i-6}{13}=i$

$b=z_{M_1}-az_{M_1}=2-i-i(2-i)=1-3i$

S : $z'=iz+1-3i$

b) **éléments caractéristiques de S.**

$a=i\Leftrightarrow|a|=1\Leftrightarrow arg(a)=\frac{\pi}{2}$ et $z_{M_1}=2-i$ donc S est la rotation de centre z_{M_1}, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et rapport 1.

c) **l'affixe de l'isobarycentre du triangle $M_0M_1M_2$:** $z_G=\frac{1}{3}\left(z_{M_0}+z_{M_1}+z_{M_2}\right)=\frac{1}{3}(2i+2-$ *i−1−3i=13−23i*

Exercice 11 : **Soit A, B, C et D les points du plan complexe d'affixes respectives : $z_A=-1-5i$, $z_B=4-3i$; $z_C=3+3i$ et $z_D=-2+i$.**

1. **Placer les points A, B, C, et D.**

2. **Déterminer la nature du quadrilatère ABCD.**

3. **Déterminer l'affixe du point C', symétrique du point par rapport à D.**

4. **Déterminer l'affixe du point A', vérifiant $\overrightarrow{DA'}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}$.**

5. **Quelle est la nature du quadrilatère A'BC'D ?**

Correction :

$A(-1-5i)$, $B(4-3i)$; $C(3+3i)$;$D(-2+i)$.

1. **Placer les points A, B, C, et D.**

2. **Nature du quadrilatère ABCD :**

$z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A=5+2i$ et $z_{\overrightarrow{DC}}=z_C-z_D=5+2i$, donc $z_{\overrightarrow{AB}}=z_{\overrightarrow{DC}}$, ABCD est un parallélogramme.

3. $\overrightarrow{DC'}=\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow z_{\overrightarrow{DC'}}=z_{\overrightarrow{CD}}\Leftrightarrow z_{C'}-z_D=z_D-z_C\Leftrightarrow z_{C'}=-7-i$.

4. $\overrightarrow{DA'} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{DA'}} = z_{\overrightarrow{DB}} + z_{\overrightarrow{DC}} \Leftrightarrow z_{A'} - z_D = z_B - z_D + z_C - z_D \Leftrightarrow z_{A'} = z_B + z_C - z_D = 9 - i$.

5. Nature du quadrilatère A'BC'D :

$z_{\overrightarrow{A'B}} = z_B - z_{A'} = -5 - 2i$ et $z_{\overrightarrow{DC'}} = z_{C'} - z_D = -5 - 2i$, donc $z_{\overrightarrow{A'B}} = z_{\overrightarrow{DC'}}$, A'BC'D est un parallélogramme.

<u>Exercice 12 :</u> **L'unité graphique est 2cm. On désigne par *i* le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. On réalisera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.**

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $\frac{z-4}{z} = i$. Écrire la solution sous forme algébrique.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 - 2z + 4 = 0$. Écrire les solutions sous forme exponentielle.

3. Soient A, B, A' et D les points du plan complexe d'affixes respectives : *a* = 2, b = 4, *a*' = 2i et d = 2 + 2i. Quelle est la nature du triangle ODB ? Justifier.

4. Soient E et F les points d'affixes respectives $e = 1 - i\sqrt{3}$ et $f = 1 + i\sqrt{3}$. Quelle est la nature du quadrilatère OEAF ? Justifier.

5. Soit C le cercle de centre A et de rayon 2. Soit C' le cercle de centre A' et de rayon 2.Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) On désigne par E' l'image par la rotation r du point E. Calculer l'affixe e' du point E'.

b) Démontrer que le point E' est un point du cercle C'.

c) Vérifier que : $e - d = (\sqrt{3} + 2)(e' - d)$. En déduire que les points E, E' et D sont alignés.

6. Soit D' l'image du point D par la rotation r. Démontrer que le triangle EE'D' est rectangle.

<u>Correction :</u> $i = e^{\frac{\pi}{2}i}$.

1. $\frac{z-4}{z} = i \Leftrightarrow z = 2 + 2i$, donc $S_{\mathbb{C}} = \{2 + 2i\}$.

2. $z^2 - 2z + 4 = (z-1)^2 = -3 = \left(i\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow z_1 = 1 - i\sqrt{3} = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$ ou $z_2 = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$.

3. En interprétant l'égalité de la question 1 obtenue avec l'affixe de D (modules et arguments égaux) : $\frac{z-4}{z} = \frac{z_D - z_B}{z_D} = \frac{z_D - z_B}{z_D - z_O} = i = e^{\frac{\pi}{2}i}$ et $\left|\frac{z_D - z_B}{z_D - z_O}\right| = |i| = 1$. Autrement dit le triangle OBD est isocèle, rectangle en D.

4. $E\left(1 - i\sqrt{3}\right)$ et $F\left(1 + i\sqrt{3}\right)$. On remarque que z_E et z_F sont les solutions de l'équation de la question 2. $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{FA} = e \Leftrightarrow$ OEAF est un parallélogramme. De plus on sait que $|z_E| = |z_F|$, d'où OE = OF. Donc OEAF est un losange.

5. $r\left(O; \frac{\pi}{2}\right) : z' = e^{\frac{\pi}{2}i}z = iz$.

a) $e' = ie = i\left(1 - i\sqrt{3}\right) = \sqrt{3} + i$.

b) Démontrons que le point E' est un point du cercle C' : $A'E' = |e' - a'| = \left|\sqrt{3} + i - 2i\right| = 2$, donc E' appartient bien au cercle C'.

c) $e - d = 1 - i\sqrt{3} - 2 - 2i = -1 - i\left(\sqrt{3} + 2\right)$ et $\left(\sqrt{3} + 2\right)(e' - d) = \left(\sqrt{3} + 2\right)\left(\sqrt{3} + i - 2 - 2i\right) = \left(\sqrt{3} + 2\right)\left(\sqrt{3} - 2 - i\right) = 1 - i\left(\sqrt{3} + 2\right)$. Donc $e - d = \left(\sqrt{3} + 2\right)(e' - d)$. Cette égalité s'écrit vectoriellement : $\overrightarrow{DE} = \left(\sqrt{3} + 2\right)\overrightarrow{DE'}$, donc $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DE'}$ sont colinéaires ou encore E appartient à la droite (DE') ou encore E, E' et D sont alignés.

6. Dans la rotation, la droite (ED) ou encore d'après la question précédente la droite (EE') a pour image la droite perpendiculaire (E'D') : donc le triangle EE'D' est rectangle en E'.

<u>Exercice 13 :</u> **On considère les points A et B d'affixes respectives $a = -2\sqrt{3} - 2i$ et $b = -2\sqrt{3} + 2i$.**

1. Calculer les distances OA, OB et AB. En déduire la nature du triangle OAB.

2. On désigne par C l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Déterminer l'affixe *c* du point C.

3. On désigne par D l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport 2. Déterminer l'affixe *d* du point D.

4. Placer les points A, B, C, D sur une figure (unité graphique : 1 cm).

5. Préciser la nature du triangle BCD en la justifiant.

6. Soit E le symétrique de D par rapport à I, milieu de [BC]. Montrer que le point E est l'image de C dans la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

<u>Correction :</u> $A\left(-2\sqrt{3} - 2i\right)$ et $B\left(-2\sqrt{3} + 2i\right)$.

1. OA= $\left|z_{\overrightarrow{OA}}\right| = |z_A - z_O| = \left|-2\sqrt{3} - 2i\right| = 4$

OB= $\left|z_{\overrightarrow{OB}}\right| = |z_B - z_O| = \left|-2\sqrt{3} + 2i\right| = 4$ et

AB= $\left|z_{\overrightarrow{AB}}\right| = |z_B - z_A| = \left|-2\sqrt{3} + 2i + 2\sqrt{3} + 2i\right| = 4$. OA= OB = AB = 4, OAB est un triangle équilatéral.

2. $z_C - z_O = e^{\frac{\pi}{3}i}(z_A - z_O) \Leftrightarrow z_C = e^{\frac{\pi}{3}i}z_A = c = -4i$.

3. $z_D - z_O = 2(z_A - z_O) \Leftrightarrow z_D = 2z_A = d = -4\sqrt{3} - 4i$.

4. Placer les points A, B, C, D sur une figure (unité graphique : 1 cm).

5. Le triangle BCD est équilatéral ; en effet : DC = BD = BC= $4\sqrt{3}$.

6. I milieu de [BC] : $z_I = \frac{z_C+z_B}{2} = -\sqrt{3} - i$. Le point E est l'image de D par l'homothétie de centre I et de rapport -1, d'où son affixe e vérifie $e + \sqrt{3} + i = -1\left(d + \sqrt{3} + i\right) \Leftrightarrow e = 2\sqrt{3} + 2i$. L'image de C dans la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$ a une affixe e' vérifiant $e' - b = e^{\frac{\pi}{3}i}(e - b) \Leftrightarrow e' = 2\sqrt{3} + 2i = e$. Donc E est bien l'image de C dans la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

<u>**Exercice 14 :**</u> **On considère la similitude S d'écriture complexe $z' = \left(1 + i\sqrt{3}\right)z + 2\sqrt{3}$.**

1. Déterminer les éléments caractéristiques de S.
2. Déterminer l'image A' du point A d'affixe 1 + i par S.
3. Déterminer l'écriture complexe de la similitude réciproque de S.

<u>**Correction :**</u> $z' = \left(1 + i\sqrt{3}\right)z + 2\sqrt{3}$.

1. **les éléments caractéristiques de S :** $a = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$ et $z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{2\sqrt{3}}{1-1-i\sqrt{3}} = 2i$, donc $\boldsymbol{S}\left[\boldsymbol{k = 2} ;\ \boldsymbol{\alpha = \frac{\pi}{3}} ;\ \Omega(\boldsymbol{2i})\right]$.

2. $z_{A'} = \left(1 + i\sqrt{3}\right)z_A + 2\sqrt{3} = 1 + i\sqrt{3} + i\left(1 + i\sqrt{3}\right)$.

3. **la similitude réciproque de S :** $z = \left(1 + i\sqrt{3}\right)z' + 2\sqrt{3} \Leftrightarrow z' = \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{4}\right)z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$.

<u>**Exercice 15 :**</u> **On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $\boldsymbol{i}$; – 1; $\boldsymbol{5 + i}$ et $\boldsymbol{1 + i}$.**

1. Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe S telle que S(A) = C et S(B) = D.
2. Déterminer les éléments caractéristiques de S.
3.
a) Soit E le point d'affixe – 1 + i et F = S(E). Placer les points A, B, C, D, E et F. En déduire la nature du triangle ABE.
b) En déduire la nature du triangle CDF.

<u>**Correction :**</u> $A(i)$, $B(-1)$; $C(5 + i)$ et $D(1 + i)$.

1. **S(A) = C et S(B) = D :** $\begin{cases} z_C = az_A + b \\ z_D = az_B + b \end{cases} \Leftrightarrow a = 2 - 2i$ et $b = 3 - i$: $z' = (2 - 2i)z + 3 - i$.

2. **les éléments caractéristiques de S :** $a = 2 - 2i = 2\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$ et $z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{3-i}{1-2+2i} = -1 - i$, donc $\boldsymbol{S}\left[\boldsymbol{k} = 2\sqrt{2} ;\ \boldsymbol{\alpha = -\frac{\pi}{4}} ;\ \Omega(\boldsymbol{-1 - i})\right]$.

3.
a) $z_F = (2 - 2i)z_E + 3 - i = 3 + 3i$

Le triangle ABE est rectangle isocèle en E.

b) Le triangle CDF est l'image du triangle ABE par la similitude S, donc CDF est semblable à ABE, donc rectangle isocèle en F.

<u>**Exercice 16 :**</u> **D'unité graphique étant 4 cm. On considère le point A d'affixe $\boldsymbol{a = 1}$ et le point B est l'image du point A par la rotation de centre de O et d'angle $\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$.**

1. Calculer l'affixe $\boldsymbol{b}$ du point B sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.
2. Soit H le milieu du segment [AB]. Calculer l'affixe $\boldsymbol{h}$ du point H sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.
3. Justifier que $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OH}\right) = \frac{\pi}{12}\quad [2\pi]$.
4. En déduire les valeurs exactes $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

<u>**Correction :**</u> $A(1)$ et $r\left(O; \frac{\pi}{6}\right)$; $z' = e^{\frac{\pi}{6}}z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z$.

1. $b = e^{\frac{\pi}{6}i}a = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

2. $h = \frac{a+b}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}{2} = \frac{1}{4}i + \frac{2+\sqrt{3}}{4}$ et $|h| = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$, donc $h = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\left[\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right]$.

3. Comme la rotation conserve les distances, le triangle OAB est isocèle, alors la droite (OH) est médiane et aussi bissectrice, donc $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OH}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{12}\quad [2\pi]$.

4. $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OH}\right) = arg\left(\frac{h-0}{1-0}\right) = \frac{\pi}{12}\quad [2\pi]$,
$\begin{cases} h = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\left[\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right] \\ \quad h = \frac{1}{4}i + \frac{2+\sqrt{3}}{4} \end{cases}$, on en déduit que $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et de $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

<u>**Exercice 17 :**</u> **Soit S la similitude directe d'´ecriture complexe : $\boldsymbol{z' = \left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)z + i - 1}$.**

1. Déterminer les éléments caractéristiques de S.
2. Déterminer le point A l'antécédent de O par S.
3. Déterminer l'ensemble des points d'affixe z tels que :$\left|\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)z + i - 1\right| = 2$

<u>**Correction :**</u> **S : $\boldsymbol{z' = \left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)z + i - 1}$.**

1. **Les éléments caractéristiques de S :** $a = \sqrt{2} - i\sqrt{2} = \sqrt{2}(1 - i) = 2e^{-\frac{\pi}{4}i}$ et $z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{i-1}{1-\sqrt{2}+i\sqrt{2}} = \frac{-1+2\sqrt{2}+i}{5-2\sqrt{2}}$.
S ($k = 2$; $\alpha = -\frac{\pi}{4}$; $z_\Omega = \frac{-1+2\sqrt{2}+i}{5-2\sqrt{2}}$).

2. **L'antécédent de O par S :**$S(A) = O$, donc $z' = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)z_A + i - 1 = 0 \Leftrightarrow z_A = \frac{1-i}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}$..

3. **L'ensemble des points d'affixe z tels que $\left|\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)z + i - 1\right| = 2$** : $|z'| = 2 \Leftrightarrow OM' = 2$, or OM' = 2AM (car S a pour rapport 2) on obtient donc: AM = 1 . M est sur le cercle de centre A de rayon 1.

<u>Exercice 18 :</u> Soit ABC un triangle isocèle rectangle en A de sens direct. On note D le symétrique de A par rapport à C.

1. Déterminer le rapport de la similitude directe qui transforme D en C et C en B.

2. Soit Ω le centre de S .Que peut on dire du triangle ΩCB ? En déduire une construction de Ω.

<u>**Correction :**</u> ABC un triangle isocèle rectangle en A de sens direct. $D = S_C(A)$.

1. Le rapport de la similitude directe qui transforme D en C et C en B : $\frac{BC}{DC} = \frac{BC}{AC} = \sqrt{2}$.

2. L'angle de S est :$\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{BC}\right) = \left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right) = \frac{\pi}{4}\,[2\pi]$, le triangle ΩCB a donc les propriétés suivantes : $\Omega B = \sqrt{2}\Omega C$ et $\left(\overrightarrow{\Omega C};\overrightarrow{\Omega B}\right) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$. ΩCB est donc isocèle rectangle en C (de sens direct). (ΩDAB est un rectangle)

<u>Exercice 19 :</u> D'unité graphique : 2 cm. Soit A, B, C et D les points du plan complexe d'affixes respectives : $z_A = 1 + i$, $z_B = -3 + 3i$; $z_C = 2 + 2i$ et $z_D = -4 + 4i$. E et F les milieux respectifs de $[AC]$ et $[BD]$.

1. Placer les points A, B, C, D, E et F.

2. Démontrer qu'il existe une rotation unique, R qui transforme A en B et C en D. déterminer son centre, I, et son angle.

3. Démontrer qu'il existe une rotation unique, R' qui transforme A en D et C en B. déterminer son centre, J, et son angle.

4. Que peut-on dire du quadrilatère IEJF ?

5. Etudier R'oR et RoR'.

<u>**Correction :**</u> $A(1+i)$, $B(-3+3i)$; $C(2+2i)$ et $D(-4+4i)$. $z_E = \frac{z_A+z_C}{2} = \frac{1+i+2+2i}{2} = \frac{3+3i}{2}$ et $z_F = \frac{z_B+z_D}{2} = \frac{-3+3i-4+4i}{2} = \frac{-7+7i}{2}$.

1. Placer les points A, B, C, D, E et F.

2. $a = \frac{z_B-z_D}{z_A-z_C} = \frac{-3+3i+4-4i}{1+i-2-2i} = i$ et $b = -2+2i$, donc une **rotation unique, R** qui transforme A en B et C en D est $z' = iz - 2 + 2i$ et son centre $z_I = \frac{-2+2i}{1-i} = -2$ et son angle $\alpha = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

3. $a = \frac{z_D-z_B}{z_A-z_C} = -\frac{z_B-z_D}{z_A-z_C} = -i$ et $b = -5+5i$, donc une **rotation unique, R'** qui transforme A en D et C en B est $z' = -iz - 5 + 5i$ et son centre $z_J = \frac{-5+5i}{1-i} = -5$ et son angle $\alpha = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

4. Nature du quadrilatère IEJF :

$\left|z_{\overrightarrow{IE}}\right| = |z_E - z_I| = \left|\frac{3+3i}{2} + 2\right| = \left|\frac{7}{2} + \frac{3}{2}i\right| = \sqrt{\frac{29}{2}}$

$\left|z_{\overrightarrow{JE}}\right| = |z_E - z_J| = \left|\frac{3+3i}{2} + 5\right| = \left|\frac{7}{2} + \frac{3}{2}i\right| = \sqrt{\frac{89}{2}}$,

$\left|z_{\overrightarrow{JF}}\right| = |z_F - z_J| = \left|\frac{-7+7i}{2} + 5\right| = \left|\frac{3}{2} + \frac{7}{2}i\right| = \sqrt{\frac{29}{2}}$, donc IEJF est un rectangle.

5. Etudions R'oR et RoR' :

R'oR : $z' = -i(iz - 2 + 2i) - 5 + 5i = z - 3 + 7i$, c'est une translation de vecteur $\vec{u} = -3 + 7i$

RoR' : $z' = -i(iz - 5 + 5i) - 2 + 2i = z - 7 - 3i$, c'est une translation de vecteur $\vec{v} = -7 - 3i$ on remarque que $R'oR \neq$ RoR'.

<u>Exercice 20 :</u> A tout point M du plan complexe, d'affixe z, et $M'(z)$ et $M''(z)$, on fait correspondre :

- **$M' = S(M)$ telle que $z' = (1+i)z - 2i$**
- **$M'' = S'(M)$ telle que $z'' = \left(\frac{1-i}{2}\right)z + i + 1$.**

1. Déterminer les éléments caractéristiques de S.

2. Déterminer les éléments caractéristiques de S'.

3. Déterminer la nature de $S'oS$.

4. Soit T = SoSoSoS.

Quelles sont les images par T de :

a) la droite (D) d'équation : $x - 4y - 2 = 0$?

b) du cercle (C) centre I$(0,1)$ et de rayon $\sqrt{2}$?

<u>**Correction :**</u>

$$\boldsymbol{M' = S(M)\ /\ z' = (1+i)z - 2i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}z - 2i}$$

$$\boldsymbol{M'' = S'(M)\ /\ z'' = \left(\frac{1-i}{2}\right)z + i + 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}z + 1 + i}$$

1. Les éléments caractéristiques de S :

$a = 1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ et $z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{-2i}{1-1-i} = 2$, donc $\boldsymbol{S}\left[\boldsymbol{k = \sqrt{2}}\ ;\ \boldsymbol{\alpha = \frac{\pi}{4}}\ ;\ \Omega(\boldsymbol{2})\right]$.

2. Les éléments caractéristiques de S' :

$a = \frac{1-i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$ et $z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{1+i}{1-\frac{1-i}{2}} = 2$, donc $\boldsymbol{S'}\left[\boldsymbol{k = \sqrt{2}}\ ;\ \boldsymbol{\alpha = -\frac{\pi}{4}}\ ;\ \Omega(\boldsymbol{2})\right]$.

3. Nature de S'oS : $S'oS(z) = S'[S(z)]$

$z' = \left(\frac{1-i}{2}\right)z_{S(z)} + i + 1 = \left(\frac{1-i}{2}\right)[(1+i)z - 2i] + 1 + i = z$, donc **S'oS est symétrie centrale d'origine du repère.**

4. T = SoSoSoS. A partir de S on déduit

$\mathbf{T}\left[\boldsymbol{k = \left(\sqrt{2}\right)^4 = 4}\ ;\ \boldsymbol{\alpha = 4 \times \frac{\pi}{4} = \pi};\ \Omega(\boldsymbol{2})\right]$,

$\boldsymbol{b} = z_\Omega(1 - a) = 2\left(1 - 4e^{\pi i}\right) = 10$,

Donc T : $z' = -4z + 10$, posons $\begin{cases} z' = x' + iy' \\ z = x + iy \end{cases}$ d'où

T : $\begin{cases} x' = -4x + 10 \\ y' = -4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} - \frac{1}{4}x' \\ y = -\frac{1}{4}y' \end{cases}$.

Les images par T de :

a) **L'image de (D) : $x-2y-2=0$** est la droite (D'): $\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{4}x'\right)-4\left(-\frac{1}{4}y'\right)-2=0 \Leftrightarrow y'=\frac{1}{4}x'-\frac{1}{2}$ ou donc (D') : $-x+4y+2=0$.

b) **L'image du cercle (C) : $[I(0,1);\ r=\sqrt{2}\ ]$** est le cercle (C') : $[I'(10,-4);\ r=4\sqrt{2}\ ]$ car $z_{I'}=-4z_I+10=10-4i$.

<u>Exercice 21 :</u> On désigne par S l'application qui à tout point M de coordonnées $(x;\ y)$ du plan associe le point M ' de coordonnées $(x';\ y')$ tel que :

$$\begin{cases} x'=-x-y+2 \\ y'=x-y-1 \end{cases}.$$

1. **Calculer l'affixe z' de M' en fonction de l'affixe z de M.**

2.

a) **Démontrer que S est une similitude plane directe.**

b) **Préciser son angle, son rapport et son centre I.**

3. **Soit g l'application qui à tout point M du plan associe l'isobarycentre G des points M, M' et M'' = S(M').**

a) **Calculer en fonction de z les affixes des points M'' et G.**

b) **Démontrer que g est une similitude plane directe. Quel est son centre ?**

4. **Déterminer l'affixe du point M_0 tel que $g(M_0)$ (M_0) = O (origine du repère).**

5. **Placer les points M_0 , M_0' = S(M_0), M_0'' = S(M_0'), I.**

<u>Correction :</u> S: $\begin{cases} x'=-x-y+2 \\ y'=x-y-1 \end{cases}$.

1. S : $z'=x'+iy'=-x-y+2+i(x-y-1)=$ $z'=(-1+i)z+2-i$.

2.

a) L'écriture précédente est celle d'une similitude plane directe. Donc S est une similitude plane directe

b) **les éléments caractéristiques de S :**

$a=-1+i=\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$ et $z_I=\frac{b}{1-a}=\frac{2-i}{1+1-i}=1$, donc $S\left[k=\sqrt{2}\ ;\ \alpha=\frac{3\pi}{4}\ ;\ \mathrm{I}(1)\right]$.

3. **Soit z'' l'affixe de M'' et z_G l'affixe de G.**

a) $z''=(-1+i)z'+2-i=(-1+i)[(-1+iz+2-i+2-i=-2iz+1+2i$. Et $z_G=\frac{z+z'+z''}{3}=\frac{z+(-1+i)z+2-i-2iz+1+2i}{3}=\frac{-iz+3+i}{3}$.

b) L'écriture complexe $z_G=\frac{-iz+3+i}{3}$ est celle d'une similitude plane directe, donc g est une similitude plane directe. Son centre a une affixe vérifiant $z_\Omega=\frac{b}{1-a}=\frac{1+\frac{1}{3}i}{1+i}=1$. Donc le centre de g est le point I centre de S.

4. Pour déterminer l'affixe du point M_0 tel que $g(M_0)=O$, on résout l'équation $\frac{-iz+3+i}{3}=0 \Leftrightarrow z=1-3i$.

c) $\mathbf{M_0(1-3i)}$ **,** $\mathbf{M_0'(4+3i)}$**,** $\mathbf{M_0''(-5)}$**, I.**

<u>Exercice 22:</u> on considère l'application S qui à tout point M de coordonnées (x,y) fait correspondre M' de coordonnées (x',y') telles que :

$$\begin{cases} x'=x+y\sqrt{3}-2\sqrt{3} \\ y'=-x\sqrt{3}+y+\sqrt{3} \end{cases}.$$

1. **La transformation S est-elle bijective et a- t-elle des points invariants ?**
2. **Calculer x'' et y'' en fonction de x et y, puis x''' et y''' en fonction de x et y.**
3. **Démontrer que S est une similitude plane directe et déterminer ses éléments caractéristiques.**
4. **Déterminer la nature de SoS et celle de SoSoS.**
5. **Quelle est l'image par S de la droite $(O\vec{u})$?**
6. **Quelle est l'image par S de la droite $(O\vec{v})$?**
7. **Quelle est l'image par S de la droite (d) d'équation : $x-y+2=0$?**
8. **Quelle est l'image par S du cercle de centre I$(-2,1)$ et de rayon 2 ?**

<u>Correction :</u> S: $\begin{cases} x'=x+y\sqrt{3}-2\sqrt{3} \\ y'=-x\sqrt{3}+y+\sqrt{3} \end{cases}$.

1. dét$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}=1+3=4\neq 0$, alors la transformation S est bijective et a pour point invariant $\begin{cases} x'=x \\ y'=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=x+y\sqrt{3}-2\sqrt{3} \\ y=-x\sqrt{3}+y+\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} x''=x'+y'\sqrt{3}-2\sqrt{3} \\ y''=-x'\sqrt{3}+y'+\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x''=x'+y'\sqrt{3}-2\sqrt{3} \\ y''=-x'\sqrt{3}+y'+\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x''=-2x+2y\sqrt{3}+3-4\sqrt{3} \\ y''=-2x\sqrt{3}-2y+6+2\sqrt{3} \end{cases}$. Et

$\begin{cases} x''=-2x+2y\sqrt{3}+3-4\sqrt{3} \\ y''=-2x\sqrt{3}-2y+6+2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x'''=-2x'+2y'\sqrt{3}+3-4\sqrt{3} \\ y'''=-2x'\sqrt{3}-2y'+6+2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'''=-8x+9 \\ y'''=-8y+18 \end{cases}$.

3. S : $z'=x'+iy'=x+y\sqrt{3}-2\sqrt{3}+i\left(-x\sqrt{3}+y+\sqrt{3}\right)=\left(1-i\sqrt{3}\right)z+\sqrt{3}(i-2)$.

Donc S $z' = (1 - i\sqrt{3})z + \sqrt{3}(i-2)$

Les éléments caractéristiques de S :

$a = 1 - i\sqrt{3} = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$ et

$z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{\sqrt{3}(i-2)}{1-1+i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(i-2)}{i\sqrt{3}} = 1 + 2i$,

Donc $\mathbf{S}\left[\boldsymbol{k = 2}\ ;\ \boldsymbol{\alpha = -\frac{\pi}{3}}\ ;\ \Omega(\mathbf{1 + 2i})\right]$.

4. $\boldsymbol{SoS}\left[\boldsymbol{k = 2^2 = 4};\ \boldsymbol{\alpha = -\frac{2\pi}{3}}\ ;\ \Omega(\mathbf{1+2i})\right]$, donc **SoS** est une **similitude plane directe** et $\boldsymbol{SoSoS}\ [\boldsymbol{k = 2^3 = 8};\ \boldsymbol{\alpha = -\pi}\ ;\ \Omega(\mathbf{1+2i})]$, donc **SoSoS** est une **similitude plane directe.**

5. **L'image par S de la droite $(O\vec{u})$ est $\left(O\vec{u'}\right)$:**

$\vec{u}\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 1 - 2\sqrt{3} \\ y' = -\sqrt{3} + \sqrt{3} \end{cases}$

6. **l'image par S de la droite $(O\vec{v})$ est $\left(O\vec{v'}\right)$:**

$\begin{cases} x' = \sqrt{3} - 2\sqrt{3} = -\sqrt{3} \\ y' = 1 + \sqrt{3} \end{cases}$ car $\vec{v}\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

7. **l'image par S de la droite (d) d'équation : $\boldsymbol{x - y + 2 = 0}$:**

Soient les points $A(0; 2)$ et $B(-1; 2)$ appartenant à (d) leurs images par S est $A'(0; 2+\sqrt{3})$ et $B'\begin{pmatrix} -1 \\ 2\sqrt{3}-1 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{A'M}\begin{bmatrix} x-0 \\ y-2-\sqrt{3} \end{bmatrix}$ et $\overrightarrow{A'B'}\begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3}-3 \end{bmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{A'M}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ soient colinéaires. On calcule leurs déterminants

$dét\left(\overrightarrow{A'M};\ \overrightarrow{A'B'}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & -1 \\ y-2-\sqrt{3} & \sqrt{3}-3 \end{vmatrix} = 0$

(d) $(\sqrt{3} - 3)x + y - 2 - \sqrt{3} = 0$.

8. **l'image par S du cercle $[\boldsymbol{I}(-2; 1); \boldsymbol{r = 2}\ ]$** est le cercle $[\boldsymbol{I'}(-2-\sqrt{3}; 1+3\sqrt{3}); \boldsymbol{r = 4}\ ]$, , car $z_{I'} = (1 - i\sqrt{3})z_I + \sqrt{3}(i-2) = -2 - \sqrt{3} + i + 3i\sqrt{3}$.

<u>**Exercice 23 :**</u> **On note S la transformation suivante :**

$\begin{cases} \boldsymbol{x' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y} \\ \boldsymbol{y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y} \end{cases}$**. La même transformation S fait correspondre à $M'(x', y')$ le point $M''(x'', y'')$, puis à M'' le point $M'''(x''', y''')$.**

1. **Calculer x'' et y'' en fonction de x et y, puis x''' et y''' en fonction de x et y.**

Identifier la transformation $T = SoSoS$.

2. **La transformation S a- t- elle des points invariants ?**
3. **Vérifier que $\|\overrightarrow{OM}\| = \|\overrightarrow{OM'}\|$.**
4. **Calculer $\sin\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}\right)$ et $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}\right)$.**
5. **En désignant par z et z' les affixes respectives de M et de M', déterminer z' en fonction de z. En déduire la nature et les géométriques de S.**
6. **Identifier la transformation $T = SoSoS$.**

<u>**Correction :**</u> S $\begin{cases} \boldsymbol{x' = -\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}y} \\ \boldsymbol{y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{y}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{2x' = -x - \sqrt{3}y} \\ \boldsymbol{2y' = \sqrt{3}x - y} \end{cases}$

1. $\begin{cases} 2x'' = -x' - \sqrt{3}y' \\ 2y'' = \sqrt{3}x' - y' \end{cases}$ ou $\begin{cases} 4x'' = -2x' - 2\sqrt{3}y' \\ 4y'' = 2\sqrt{3}x' - 2y' \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2x'' = -x + \sqrt{3}y \\ 2y'' = -\sqrt{3}x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = -\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y'' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{y}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} 2x''' = -x' + \sqrt{3}y' \\ 2y''' = -\sqrt{3}x' - y' \end{cases}$ ou $\begin{cases} 4x''' = -2x' + 2\sqrt{3}y' \\ 4y''' = -2\sqrt{3}x' - 2y' \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 4x''' = 4x \\ 4y''' = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x''' = x \\ y''' = y \end{cases}$. **Identifions la transformation $\boldsymbol{T = SoSoS = Id_P}$**(involutive).

2. $\begin{cases} x = -\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}y \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3}x \end{cases}$, on remarque que S a un point invariant qui est l'origine du repère O.

3. $\|\overrightarrow{OM}\| = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\left\|\overrightarrow{OM'}\right\| = |z'| = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} = \sqrt{\left(-\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{y}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$, donc $|z| = |z'|$ d'où $\|\overrightarrow{OM}\| = \|\overrightarrow{OM'}\|$.

4. $mes\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}\right) = arg\left(\frac{z_{M'} - z_O}{z_M - z_O}\right) = arg\left(\frac{z_{M'}}{z_M}\right) =$

$mes\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}\right) = arg\left(\frac{-x - \sqrt{3}y + i(x\sqrt{3} - y)}{2(x+iy)}\right)$

$mes\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}\right) = arg\left[\frac{-x - iy + i\sqrt{3}(x+iy)}{2(x+iy)}\right] =$

$arg\left[-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right] = \frac{2\pi}{3}\ \ [2\pi]$

$\sin\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}\right) = -\frac{1}{2}$ et $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

5. $\boldsymbol{S} : z' = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z = e^{\frac{2\pi}{3}i}z$. S est une rotation caractérisée par : $a = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ et $z_O = \frac{b}{1-a} = 0$,

donc $\boldsymbol{S}\left[\boldsymbol{k} = 1\ ;\ \boldsymbol{\alpha = \frac{2\pi}{3}}\ ;\ \mathbf{O(0)}\right]$.

6. $T = SoSoS\ [k = 1\ ;\ \alpha' = 2\pi\ ;\ O(0)]$.

<u>**Exercice 24 :**</u> **On désigne par m un nombre complexe non nul. Soit la transformation S définie par : $z' = mz + 2 - 3i$.**

1. **Donner la nature de la transformation S.**
2. **On considère que le centre est $\Omega(1 + i)$.**

a) **Déterminer le nombre complexe m pour que S ait le centre $\Omega(1 + i)$.**

b) **Quel est alors le rapport de cette similitude directe ?**

c) **On appelle θ l'angle de cette similitude. Calculer $\tan\theta$ et donner le signe $\sin\theta$. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de θ en radians.**

d) Quelle est l'image par cette similitude du cercle de centre O et de rayon 4 ?
3. Donner la nature de S pour $m = 2i$.
4. On pose $m = ni$. Déterminer le nombre complexe n :
a) pour que S ait le centre $\Omega'(2i)$;
b) pour que S soit une translation dont on précisera l'affixe de son vecteur $\vec{x}$;
c) pour que S soit une rotation. Préciser Préciser dans chaque cas l'affixe de leur centre;
d) pour que S soit une homothétie. Préciser dans chaque cas l'affixe de leur centre ;
e) pour que S soit une similitude plane directe de rapport 2.

Correction : $m \in \mathbb{C}^* \,/\, z' = mz + 2 - 3i$.

1. **S** est de la forme $z' = az + b$, donc S est une similitude plane directe avec $a = m$ et $b = 2 - 3i$.
2. $\Omega(1+i)$
a) **S ait le centre $\Omega(1+i)$:**
$b = 2 - 3i = z_\Omega(1-m)$ ou $z_\Omega(1-m) = (1+i)(1-m) = 2 - 3i \Leftrightarrow m = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i$.
b) $k = |a| = |m| = \left|\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i\right| = \frac{\sqrt{34}}{2}$.
c) $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{5}{3}$ et $\sin\theta = \frac{5}{\sqrt{34}}$. Une valeur approchée à 10^{-2} près de $\theta = 1{,}49.10^{-2}$ en radians.
d) **l'image du cercle $(O; r = 4)$ par S est le cercle** $\left[A(2-3i); r = 2\sqrt{34}\right]$ car $z_A = \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i\right)z_O + 2 - 3i = 2 - 3i$.
3. $m = 2i = 2e^{\frac{\pi}{2}i}$ on déduit $z' = 2e^{\frac{\pi}{2}i}z + 2 - 3i$, $z_{\Omega'} = \frac{2-3i}{1-2i} = \frac{8+i}{5}$, S est une similitude plane directe caractérisé par $\boldsymbol{S}\left[\boldsymbol{k} = 2\,;\ \boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}}\,;\ \Omega'\left(\frac{\boldsymbol{8+i}}{\boldsymbol{5}}\right)\right]$.
4. **On pose $m = ni$. Déterminer n :**

$$z' = niz + 2 - 3i$$

a) **S ait le centre $\Omega'(2i)$;**
$b = 2 - 3i = z_{\Omega'}(1-ni)$ ou $z_{\Omega'}(1-ni) = (2i)(1-ni) = 2 - 3i \Leftrightarrow n = 2 - 5i$.
b) **S soit une translation dont on précisera l'affixe de son vecteur $\vec{x}$:** $ni = 1 \Leftrightarrow n = \frac{1}{i} = -i$ et $\vec{x}(2-3i)$
c) **S soit une rotation :** $|ni| = 1 \Leftrightarrow n = 1$ ou $n = -1$ et son centre est d'affixe :
- **Pour** $n = 1$ **alors** $z_\Omega = \frac{2-3i}{1-i} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}i$;
- **Pour** $n = -1$ **alors** $z_\Omega = \frac{2-3i}{1+i} = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$.

d) **S soit une homothétie :** comme $b = 2 - 3i \neq 0$ alors $ni = 1 \Leftrightarrow n = -i$ n'existe. Donc pour que S soit une homothétie **il faut que** $n = -ik$ avec $k \in \mathbb{R} - \{0; 1\}$ et l'ensemble du centre est d'affixe : **Pour** $n = -ik$ **alors** $z_\Omega = \frac{2-3i}{1+ik} = \frac{2-3i}{1+ik} \times \frac{1-ik}{1-ik} = \frac{2-3k}{1+k^2} - \frac{2k-3}{1+k^2}i$ avec $k \in \mathbb{R} - \{0; 1\}$.
e) **S soit une similitude plane directe :** $ni = 2 \Leftrightarrow n = \frac{2}{i} = -2i$ et son centre est d'affixe :
Pour $n = -2i$ **alors** $z_\Omega = \frac{2-3i}{1+2i} = -\frac{4}{5} - \frac{7}{5}i$.

Exercice 25 :

1.
a) Trouver les racines carrées du nombre complexe $-8 + 6i$.
b) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :
$(z-1)\left[z^2 - (1-i)z + 2(1-i)\right] = 0$.
c) On pose $m = x + iy$. Déterminer un nombre complexe m tel que les trois nombres $1 - m$; $-2i - m$ et $1 + i - m$ aient même module.
2. On considère les points M_0, M_1 et M_2 d'affixes respectives 1, $-2i$ et $1 + i$.
a) Déterminer l'affixe du barycentre G des points M_0, M_1 et M_2 affectés des coefficients respectifs -2, 2 et 1.
b) Discuter l'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que $-2MM_0^2 + 2MM_1^2 + MM_2^2 = k$ où k est un nombre réel.
c) Soit S la similitude plane directe laissant le point M_1 invariant et transformant M_0 en M_2. Trouver la relation liant l'affixe z d'un point M et l'affixe z' de son image M' par S.
d) Quelle est l'image par S du cercle (C) de centre O et de rayon 2 ?

Correction :

1.
a) **racines carrées du $-8 + 6i$.**
Posons $z = x + iy$ tel que $z^2 = -8 + 6i$ puis on résout

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \\ x^2 - y^2 = -8 \\ 2xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 - y^2 = -8 \\ xy = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 - y^2 = -8 \\ xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 2 \\ 2y^2 = 18 \\ xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \mp 1 \\ y = \mp 3 \\ xy = 3 \end{cases} \text{ alors}$$

les racines carrées du nombre complexe $-8 + 6i$ sont $-1 - 3i$ et $1 + 3i$.
b) **Résoudre dans $\mathbb{C}$:**

$(\boldsymbol{z}-\mathbf{1})[\boldsymbol{z}^{\mathbf{2}}-(\mathbf{1}-\boldsymbol{i})\boldsymbol{z}+\mathbf{2}(\mathbf{1}-\boldsymbol{i})]=\mathbf{0}.$

$z-1=0 \Leftrightarrow z=1$ ou $z^2-(1-i)z+2(1-i)=0$

$\Delta=(1-i)^2-4(1-i)2=-8+6i$ alors les racines carrées du $\Delta=-8+6i$ sont $-1-3i$ et $1+3i$.

$z'=\frac{1-i-(1+3i)}{2}=\frac{1-i-1-3i}{2}=\frac{-4i}{2}=-2i$

$z''=\frac{1-i+(1+3i)}{2}=\frac{1-i+1+3i}{2}=\frac{2+2i}{2}=1+i$

$S_{\mathbb{C}}=\{-2i;\ 1;1+i\}$.

c) $\boldsymbol{m=x+iy}$.

$|1-m|=|-2i-m|=|1+i-m|$

$|1-m|=|1-x-iy|=\sqrt{(1-x)^2+y^2}$

$|-2i-m|=|-x-i(2+y)|=\sqrt{x^2+(2+y)^2}$

$|1+i-m|=|1-x+i(1-y)|=\sqrt{(1-x)^2+(1+y)^2}$

$\sqrt{(1-x)^2+y^2}=\sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2} \Leftrightarrow (1-y)^2=y^2 \Leftrightarrow 2y=1 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}$

Si $y=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+\left(2+\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{(1-x)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$

$4x^2+25=4(1-x)^2+1 \Leftrightarrow -8x=20 \Leftrightarrow x=-\frac{5}{2}$

Donc $m=-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}i$.

2. $\mathbf{M_0(1)}$, $\mathbf{M_1(-2\boldsymbol{i})}$ **et** $\mathbf{M_2(1+\boldsymbol{i})}$.

a) l'affixe du barycentre G des points $\mathbf{M_0}$, $\mathbf{M_1}$ et $\mathbf{M_2}$ affectés des coefficients respectifs -2, 2 et 1.

$z_G=\frac{-2z_{M_0}+2z_{M_1}+z_{M_2}}{-2+2+1}=-2z_{M_0}+2z_{M_1}+z_{M_2}$

$z_G=-2(1)+2(-2i)+(1+i)=-1-3i$

b) l'ensemble des points M(z) du plan tels que $-2\mathbf{MM_0}^2+2\mathbf{MM_1}^2+\mathbf{MM_2}^2=\mathbf{k}$ où k est un nombre réel. Posons $\boldsymbol{z=x+iy}$

$-2MM_0{}^2=-2[(1-x)^2+y^2]=-2(1-x)^2-2y^2$

$2MM_1{}^2=2[x^2+(2+y)^2]=2x^2+2(2+y)^2$

$MM_2{}^2=(1-x)^2+(1+y)^2$ en ajoutant membre

$x^2+y^2+2x+10y+8=k$ ou

$(x+1)^2+(y+5)^2=18-k$

- si $18-k<0$ alors cet ensemble est vide ;
- si $18-k=0$ alors cet ensemble est le point G ;
- si $18-k>0$ alors cet ensemble est le cercle de centre G et de rayon $r=\sqrt{18-k}$.

c) $\boldsymbol{S}(\mathbf{M_1})=\mathbf{M_1}$ **et** $\boldsymbol{S}(\mathbf{M_0})=\mathbf{M_2}$ **:**

$S(M_1)=M_1 \Leftrightarrow z_{M_1}=az_{M_1}+b$ et

$S(M_0)=M_2 \Leftrightarrow z_{M_2}=az_{M_0}+b$

$\begin{cases} z_{M_1}=az_{M_1}+b \\ z_{M_2}=az_{M_0}+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{z_{M_1}-z_{M_2}}{z_{M_1}-z_{M_0}} \\ b=z_{M_1}-az_{M_1} \end{cases}$

$a=\frac{-2i-1-i}{-2i-1}=\frac{-1-3i}{-1-2i}\times\frac{-1+2i}{-1+2i}=\frac{1-2i+3i+6}{5}=\frac{7}{5}+\frac{1}{5}i$

$b=z_{M_1}-az_{M_1}=-2i-\left(\frac{7}{5}+\frac{1}{5}i\right)(-2i)=\frac{4}{5}i-\frac{5}{5}$

$S: z'=\left(\frac{7}{5}+\frac{1}{5}i\right)z+\frac{4}{5}i-\frac{5}{5}$

d) L'image du cercle (C) : $[\mathbf{O}(\mathbf{0},\mathbf{0});\ \boldsymbol{r}=\mathbf{2}]$ est le cercle (C') : $\left[O'\left(\frac{4}{5}i-\frac{5}{5}\right);\ r'=2|a|=\frac{2\sqrt{74}}{25}\right]$, car $z_{O'}=\left(\frac{7}{5}+\frac{1}{5}i\right)z_O+\frac{4}{5}i-\frac{5}{5}=\frac{4}{5}i-\frac{5}{5}$.

<u>Exercice 26 :</u>

1. Trouver les racines carrées du nombre complexe $\mathbf{3+4i}$.

2. Soit l'équation définie par

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{z})=\boldsymbol{z}^{\mathbf{3}}-\mathbf{4iz^2}-(\mathbf{6+i})\mathbf{z}+\mathbf{3i}-\mathbf{1}$$

a) Vérifier que cette l'équation admet une solution imaginaire pure $\mathbf{z_0}$ si $\mathbf{P(z)=0}$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ $\mathbf{P(z)=0}$ où on considère $\mathbf{R_e(z_1)<R_e(z_2)}$.

3. On considère les points $\mathbf{M_0}$, $\mathbf{M_1}$, $\mathbf{M_2}$ et $\mathbf{M_3}$ d'affixes respectives $\mathbf{z_0}$, $\mathbf{z_1}$, $\mathbf{z_2}$ et $\boldsymbol{m}$ tel que $\boldsymbol{m}\in\mathbb{C}$. Soit S la similitude plane directe transformant $\mathbf{M_0}$ en $\mathbf{M_1}$ et $\mathbf{M_2}$ en $\mathbf{M_3}$.

a) Trouver la relation liant l'affixe z d'un point M et l'affixe z′ de son image M' par S.

b) Déterminer le nombre complexe $\boldsymbol{m}$ pour que S ait le centre $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{i})$.

c) Déterminer les nombres complexes $\boldsymbol{m}$ pour que S soit une rotation. Préciser dans chaque cas l'affixe de leur centre.

d) Déterminer le nombre complexe $\boldsymbol{m}$ pour que S soit une translation dont on précisera l'affixe de son vecteur $\vec{\boldsymbol{x}}$.

<u>Correction :</u>

1. racines carrées du nombre complexe $\mathbf{3+4i}$.

Posons $z=x+iy$ tel que $z^2=3+4i$ puis on résout

$\begin{cases} x^2+y^2=\sqrt{3^2+4^2}=5 \\ x^2-y^2=3 \\ 2xy=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2-y^2=3 \\ xy=2 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2-y^2=3 \\ xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2=8 \\ 2y^2=2 \\ xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\mp 2 \\ y=\mp 1 \\ xy=2 \end{cases}$ alors les racines carrées du nombre complexe $3+4i$ sont $-2-i$ et $2+i$.

2. $\mathbf{P}(\boldsymbol{z})=\boldsymbol{z}^{\mathbf{3}}-\mathbf{4iz^2}-(\mathbf{6+i})\mathbf{z}+\mathbf{3i}-\mathbf{1}$

a) Soit $\mathbf{z_0=bi}$ cette solution, donc $P(bi)=0$ alors

$P(bi)=(bi)^3-4i(bi)^2-(6+i)(bi)+3i-1=0.$

$P(bi)=b-1+i(-b^3+4b^2-6b+3)=0$

$\begin{cases} b-1=0 \\ -b^3+4b^2-6b+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ \mathbf{z_0}=\boldsymbol{i} \end{cases}$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ $P(z)=0$ où on considère $R_e(z_1)<R_e(z_2)$.

$P(z) = (z-i)(z^2+az+b)$

$P(z) = z^3+(a-i)z^2+(b-ai)z-ib$

$P(z) = z^3-4iz^2-(6+i)z+3i-1$ par identification on a : $a=-3i$ et $b=-3-i$.

$\mathbf{z^2-3iz-3-i=0}$,

$\Delta=-9+4(3+i)=-9+12+4i=3+4i$ dont les racines carrées sont $-2-i$ et $2+i$.

$z'=\frac{3i-2-i}{2}=-1+i=\mathbf{z_1}$ et $\mathbf{z_2}=\frac{3i+2+i}{2}=1+2i$

Donc $S_{\mathbb{C}}=\{i;\ -1+i;1+2i\}$

3. $M_0(i)$, $M_1(-1+i)$, $M_2(1+2i)$ et $M_3(m)$ tel que $m\in\mathbb{C}$. $S(M_0)=M_1$ et $S(M_2)=M_3$

a) $S(M_0)=M_1 \Leftrightarrow z_{M_1}=az_{M_0}+b$

$S(M_2)=M_3 \Leftrightarrow z_{M_3}=az_{M_2}+b$

$$\begin{cases} z_{M_1}=az_{M_0}+b \\ z_{M_3}=az_{M_2}+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{z_{M_3}-z_{M_1}}{z_{M_2}-z_{M_0}} \\ b=z_{M_1}-az_{M_0} \end{cases}$$

$a=\frac{m+1-i}{1+2i-i}=\frac{m+1-i}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}=\frac{m-mi-2i}{2}=\frac{m}{2}-\frac{m+2}{2}i$

$b=z_{M_1}-az_{M_0}=-1+i-i\left(\frac{m}{2}-\frac{m+2}{2}i\right)$

$b=\frac{m}{2}+\frac{2-m}{2}i$

$S : z'=\left(\frac{m}{2}-\frac{m+2}{2}i\right)z+\frac{m}{2}+\frac{2-m}{2}i$

b) S ait le centre $\Omega(i)$: $b=z_\Omega(1-a)$

$b=\frac{m}{2}+\frac{2-m}{2}i=i\left[1-\left(\frac{m}{2}-\frac{m+2}{2}i\right)\right]\Leftrightarrow m=-1.$

c) S soit une rotation :

$k=|a|=\left|\frac{m}{2}-\frac{m+2}{2}i\right|=1\Leftrightarrow m^2+(m+2)^2=4$ ou

$m^2+2m=0\Leftrightarrow m(m+2)=0\Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=-2 \end{cases}$

Préciser son centre. $b=z_\Omega(1-a)\Leftrightarrow z_\Omega=\frac{b}{1-a}$

- **Pour $m=0$:** $a=-i$ et $b=-i$

donc $z_\Omega=\frac{-i}{1+i}=\frac{-i}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}=-\frac{1}{2}(1+i)$

- **Pour $m=-1$:** $a=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ et $b=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$

donc $z_\Omega=\frac{\frac{1}{2}(-1+3i)}{1+\frac{1}{2}(1+i)}=\frac{-1+3i}{2+1+i}=\frac{-1+3i}{3+i}\times\frac{3-i}{3-i}=\frac{10i}{10}=i$

d) S soit une translation :

$a=\frac{m}{2}-\frac{m+2}{2}i=1\Leftrightarrow m(1-i)=2+2i$

$m=\frac{2+2i}{1-i}=\frac{2+2i}{1-i}\times\frac{1+i}{1+i}=\frac{2+2i+2i-2}{2}=2i$

Affixe de son vecteur $\vec{x}$ est $b=\frac{2i}{2}+\frac{2-2i}{2}i=1+2i$

Exercice 27 :

1. Trouver les racines carrées du nombre complexe $3+4i$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation définie par $z^2-(4+3i)z+1+5i=0$ où on considère $R_e(z_1)<R_e(z_2)$.

2. Soit l'équation définie par

$$P(z)=z^3-(5+3i)z^2+(5+8i)z-1-5i$$

a) Vérifier que cette l'équation admet une solution réelle z_0 si $P(z)=0$.

b) Montrer que

$P(z)=(z-z_0)[z^2-(4+3i)z+1+5i]$.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ $P(z)=0$.

3. On considère les points M_0, M_1 et M_2 d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2.

Soit S la similitude plane directe laissant le point M_0 invariant et transformant M_1 en M_2.

a) Donner l'écriture complexe d'une similitude plane directe tel que $\left\|\overrightarrow{\Omega M'}\right\|=ke^{\theta i}\left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\|$. Montrer que $k=\left|\frac{z'-z_\Omega}{z-z_\Omega}\right|$ et l'angle est $\theta=\arg\left(\frac{z'-z_\Omega}{z-z_\Omega}\right)[2\pi]$.

b) Trouver le rapport k et l'angle θ de S.

c) En déduire l'écriture complexe de S.

4. Pour m un nombre complexe non nul, on définit la transformation par : $z'=-2iz+m$. Trouver le rapport k' et l'angle θ' de SoT.

Correction :

1. De l'exercice précédent les racines carrées du nombre complexe $3+4i$ sont $-2-i$ et $2+i$.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ $z^2-(4+3i)z+1+5i=0$.

$\Delta=(4+3i)^2-4(1+5i)=16+24i-9-4-20i=3+4i$ où les racines carrées sont $-2-i$ et $2+i$

$z'=\frac{4+3i-2-i}{2}=1+i=\mathbf{z_1}$ et $\mathbf{z_2}=\frac{4+3i+2+i}{2}=3+2i$

Donc $S_{\mathbb{C}}=\{1+i;3+2i\}$.

2. $\mathbf{P(z)=z^3-(5+3i)z^2+(5+8i)z-1-5i}$

a) Soit $\mathbf{z_0=a}$ cette solution, donc $P(a)=0$ alors

$P(a)=a^3-(5+3i)a^2+(5+8i)a-1-5i=0$

$$\begin{cases} a^3-5a^2+5a-1=0 \\ -3a^2+8a-5=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a^3-5a^2+5a-1=0 \\ 3a^2-8a+5=0 \end{cases}$$

Pour $3a^2-8a+5=0$, $\Delta=64-60=4$ alors

$a'=\frac{8-2}{6}=1$ et $a'=\frac{8+2}{6}=\frac{5}{3}$. On vérifie les valeurs de a dans l'équation $a^3-5a^2+5a-1=0$

- Pour $a=\frac{5}{3}$ alors $\left(\frac{5}{3}\right)^3-5\left(\frac{5}{3}\right)^2+5.\frac{5}{3}-1=125-125+25-5=20\neq0$ ce qui prouve que $a=\frac{5}{3}$ n'est pas solution de $P(z)$.

- Pour $a = 1$ alors $(1)^3 - 5(1)^2 + 5.1 - 1 = 1 - 5 + 5 - 1 = 0$ (vraie) ce qui prouve que $a = 1 = \mathbf{z_0}$ est solution de $P(z)$.

b) $\mathbf{P(z) = (z - z_0)[z^2 - (4 + 3i)z + 1 + 5i]}$

$P(z) = (z-1)[z^2 - (4+3i)z + 1 + 5i] = z^3 - (4+3i)z^2 + (1+5i)z - z^2 + (4+3i)z - 1 - 5i = z^3 + (-4 - 3i - 1)z^2 + (1 + 5i + 4 + 3i)z - 1 - 5i = z^3 - (5+3i)z^2 + (5+8i)z - 1 - 5i$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ $P(z) = 0$ où $R_e(z_1) < R_e(z_2)$.

$z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 3 + 2i$ donc $S_{\mathbb{C}} = \{1;\ 1+i; 3+2i\}$

3. $\mathbf{M_0(1), M_1(1+i), M_2(3+2i)}$.

$\boldsymbol{S(M_0) = M_0}$ **et** $\boldsymbol{S(M_1) = M_2}$.

a) $\left\|\overrightarrow{\Omega M'}\right\| = \mathbf{ke^{\theta i}}\left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\| \Leftrightarrow z' - z_\Omega = ke^{\theta i}(z - z_\Omega) \Leftrightarrow z' = ke^{\theta i}z + (1 - ke^{\theta i})z_\Omega$

$z' - z_\Omega = ke^{\theta i}(z - z_\Omega) \Leftrightarrow |z' - z_\Omega| = |ke^{\theta i}(z - z_\Omega)|$

$|z' - z_\Omega| = |ke^{\theta i}|.|z - z_\Omega|$ or $|e^{\theta i}| = 1$ et $|k| = k$

$|z' - z_\Omega| = k|z - z_\Omega| \Leftrightarrow k = \frac{|z'-z_\Omega|}{|z-z_\Omega|} = \left|\frac{z'-z_\Omega}{z-z_\Omega}\right|$

$\left\|\overrightarrow{\Omega M'}\right\| = \mathbf{ke^{\theta i}}\left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\| \Leftrightarrow z' - z_\Omega = ke^{\theta i}(z - z_\Omega) \Leftrightarrow$
$\arg(z' - z_\Omega) = \arg[ke^{\theta i}(z - z_\Omega)] = \arg(z - z_\Omega) + \arg(ke^{\theta i}) \Leftrightarrow \arg(z' - z_\Omega) - \arg(z - z_\Omega) = \arg(e^{\theta i})$

$\arg(e^{\theta i}) = \theta = \arg\left(\frac{z'-z_\Omega}{z-z_\Omega}\right)\ [2\pi]$.

b) Trouver le rapport k et l'angle θ de S.

$z_\Omega = z_{M_0} = z_0 = 1$; $z' = z_{M_2} = z_2 = 3 + 2i$ et $z = z_{M_1} = z_1 = 1 + i$ alors $k = \left|\frac{z'-z_\Omega}{z-z_\Omega}\right| = \left|\frac{z_2-z_0}{z_1-z_0}\right| = \left|\frac{2+2i}{i}\right| = |2 - 2i| = 2\sqrt{2}$ or $\frac{z_2-z_0}{z_1-z_0} = 2 - 2i = a$

Donc $\theta = \arg\left(\frac{z_2-z_0}{z_1-z_0}\right) = \arg(2-2i) = -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

c) Déterminer l'écriture complexe de S.

$b = (1 - ke^{\theta i})z_\Omega = \left(1 - 2\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}\right) = 1 + 2i$

$S : z' = (2-2i)z + 1 + 2i$

4. $\mathbf{T}\ \boldsymbol{z' = -2iz + m}$.

Trouver le rapport k' et l'angle θ′ de SoT.

$SoT(z) = S[T(z)]$ $z' = (2-2i)z_{T(z)} + 1 + 2i$ ou

$z' = (2-2i)[\boldsymbol{-2iz + m}] + 1 + 2i$ ou

$z' = -2i(2-2i)z + 1 + 2i + m(2-2i)$

$k' = |-2i(2-2i)| = |-2i|.|2-2i| = 4\sqrt{2}$

$\theta' = \arg[-2i(2-2i)] = \arg(2-2i) + \arg(-2i)$

$\theta' = \arg(2-2i) + \arg(-1) + \arg(i) = -\frac{\pi}{4} + \pi + \frac{\pi}{2}$

$\theta' = -\frac{\pi}{4} + \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}(-1+4+2) = \frac{5\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$

<u>Exercice 28 :</u> Soit $\boldsymbol{m} \in \mathbb{C} - \{1\}$.

1. Soit l'équation (E) définie par
$\mathbf{2(1+i)z^2 + 2(m+i)z + mi(1-i) = 0}$.
Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$.

2. On considère les points M_0 et M_1 d'affixes respectives $\frac{m}{2}(-1+i)$ et $\frac{-1-i}{2}$.
Soit le point M_2 milieu du segment $[M_0M_1]$.
Soit S la similitude plane directe laissant le point M_0 invariant et transformant M_1 en M_2.

a) Trouver la relation liant l'affixe z d'un point M et l'affixe z′ de son image M' par S.

b) Déterminer le nombre complexe $\boldsymbol{m}$ pour que S soit une rotation d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.

<u>Exercice 27 :</u> Soit $\boldsymbol{m} \in \mathbb{C} - \{1\}$

1. (E) $\mathbf{2(1+i)z^2 + 2(m+i)z + mi(1-i) = 0}$

$\Delta' = (m+i)^2 - 2im(1+i)(1-i)$

$\Delta' = (m+i)^2 - 4im = m^2 + 2im + i^2 - 4im$

$\Delta' = (m+i)^2 - 4im = m^2 - 2im + i^2 = (m-i)^2$

$z_0 = \frac{-(m+i)-(m-i)}{2(1+i)} = \frac{m}{2}(-1+i)$ et

$z_1 = \frac{-(m+i)+(m-i)}{2(1+i)} = \frac{1}{2}(-1-i)$

Donc $S_{\mathbb{C}} = \left\{\frac{m}{2}(-1+i);\ \frac{1}{2}(-1-i)\right\}$

2. $\mathbf{M_0\left[\frac{m}{2}(-1+i)\right]}$ **;** $\mathbf{M_1\left[\frac{-1-i}{2}\right]}$ **et $\mathbf{M_2}$ milieu du**

$\mathbf{[M_0M_1]} \Leftrightarrow z_2 = \frac{\frac{m}{2}(-1+i)+\frac{1}{2}(-1-i)}{2} = \frac{-(m+1)+i(m-1)}{4}$.

$\boldsymbol{S(M_0) = M_0}$ **et** $\boldsymbol{S(M_1) = M_2}$.

a) $a = \frac{z_2-z_0}{z_1-z_0} = \frac{\frac{-(m+1)+i(m-1)}{4} - \frac{m}{2}(-1+i)}{\frac{-1-i}{2} - \frac{m}{2}(-1+i)} =$

$a = \frac{-m-1+2m+i(m-1-2m)}{-2+2m+i(-2+2m)} = \frac{m-1-i(m+1)}{2[m-1+i(m-1)]}$

$a = \frac{m-1-i(m+1)}{2(m-1)(1+i)} \times \frac{1-i}{1-i} = -\frac{1+mi}{2(m-1)}$

$b = z_{M_0} - az_{M_0} = \frac{m}{2}(-1+i)\left[1 + \frac{1+mi}{2(m-1)}\right]$

$b = \frac{m(1+mi)(2m-1+mi)}{4(m-1)}$

b) S soit une rotation d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$:

$a = -\frac{1+mi}{2(m-1)} = e^{\frac{\pi}{2}i} = i \Leftrightarrow -1 - mi = 2im - 2i$

$3im = 2i - 1 \Leftrightarrow m = \frac{2i-1}{3i} \times \frac{-i}{-i} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}i$

<u>Exercice 29 :</u>

1. Trouver les racines carrées du nombre complexe $-6i$.

2. Soit l'équation définie par
$\mathbf{Q(z) = z^3 + 3z^2 + 3z + 3 - 2i}$.

a) Vérifier que cette l'équation admet une solution imaginaire pure z_0 si $Q(z) = 0$.

b) Montrer que

$$\mathbf{Q(z) = (z - z_0)[z^2 + (3 + i)z + 2 + 3i].}$$

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ $z^2 + (3 + i)z + 2 + 3i = 0$ où $R_e(z_1) < R_e(z_2)$.

3. Soit l'équation définie par

$$\mathbf{P(z) = z^4 + 4z^3 + 6z^2 + (6 - 2i)z + 3 - 2i}$$

a) Vérifier que cette l'équation admet une solution réelle z_3 si $P(z) = 0$.

b) Montrer que $P(z) = (z - z_3)Q(z)$.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ $P(z) = 0$.

4. On considère les points M_0, M_1, M_2 et M_3 d'affixes respectives z_0, z_1, z_2 et z_3.

a) Montrer que le triangle $M_0M_1M_2$ est un triangle équilatéral dont le centre de gravité est M_3.

b) Calculer $mes\left(\widehat{\overrightarrow{M_3M_1}, \overrightarrow{M_3M_2}}\right)$.

c) Montrer que la transformation S laissant le point M_3 invariant et transformant M_1 en M_2 est une rotation dont on déterminera ces éléments caractéristique. En déduire son écriture complexe.

On rappelle que $1 - e^{i\alpha} = -2ie^{i\frac{\alpha}{2}} \times \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

<u>Correction :</u>

1. racines carrées du nombre complexe $-6i$.

Posons $z = x + iy$ tel que $z^2 = -6i$ puis on résout

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{6^2} = 6 \\ x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 6 \\ x^2 - y^2 = 0 \\ xy = -3 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 6 \\ 2y^2 = 6 \\ xy = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \mp\sqrt{3} \\ y = \mp\sqrt{3} \\ xy = -3 \end{cases}$ alors les racines carrées du nombre complexe $-6i$ sont $-\sqrt{3} + i\sqrt{3}$ et $\sqrt{3} - i\sqrt{3}$

2. $Q(z) = z^3 + 3z^2 + 3z + 3 - 2i$.

a) Soit $\mathbf{z_0 = bi}$ cette solution, donc $Q(bi) = 0$ alors

$Q(bi) = (bi)^3 + 3(bi)^2 + 3(bi) + 3 - 2i = 0.$

$P(bi) = -3b^2 + 3 + i(-b^3 + 3b - 2) = 0$

$$\begin{cases} -3b^2 + 3 = 0 \\ -b^3 + 3b - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ \mathbf{z_0 = i} \end{cases}$$

b) $Q(z) = (z - i)[z^2 + (3 + i)z + 2 + 3i]$

$Q(z) = z^3 + (3 + i)z^2 + (2 + 3i)z - iz^2 - i(3 + i)z - 2i + 3 = z^3 + (3 + i - i)z^2 + (2 + 3i + 1 - 3i)z + 3 - 2i = z^3 + 3z^2 + 3z + 3 - 2i = Q(z).$

c) $z^2 + (3 + i)z + 2 + 3i = 0$.

$\Delta = (3 + i)^2 + 4(2 + 3i) = -6i$ dont les racines carrées sont $-\sqrt{3} + i\sqrt{3}$ et $\sqrt{3} - i\sqrt{3}$.

$z' = \frac{-3-\sqrt{3}-i(1-\sqrt{3})}{2} = \mathbf{z_1}$ et $\mathbf{z_2} = \frac{-3+\sqrt{3}-i(1+\sqrt{3})}{2}$

Donc $S_{\mathbb{C}} = \left\{\frac{-3-\sqrt{3}-i(1-\sqrt{3})}{2}; \frac{-3+\sqrt{3}-i(1+\sqrt{3})}{2}\right\}$

3. $P(z) = z^4 + 4z^3 + 6z^2 + (6 - 2i)z + 3 - 2i$

a. Soit $\mathbf{z_3 = a}$ cette solution, donc $P(a) = 0$ alors

$P(a) = a^4 + 4a^3 + 6a^2 + (6 - 2i)a + 3 - 2i = 0$

$$\begin{cases} a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 6a + 3 = 0 \\ -2a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ \mathbf{z_3 = -1} \end{cases}.$$

b. Montrer que $P(z) = (z - z_3)Q(z)$.

$P(z) = (z + 1)(z^3 + 3z^2 + 3z + 3 - 2i) = z^4 + 3z^3 + 3z^2 + (3 - 2i)z + z^3 + 3z^2 + 3z + 3 - 2i = z^4 + (3 + 1)z^3 + (3 + 3)z^2 + (3 - 2i + 3)z + 3 - 2i = z^4 + 4z^3 + 6z^2 + (6 - 2i)z + 3 - 2i = P(z)$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ $P(z) = 0$.

$P(z) = (z - z_0)(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = 0$ donc

$S_{\mathbb{C}} = \left\{-1; i; \frac{-3-\sqrt{3}-i(1-\sqrt{3})}{2}; \frac{-3+\sqrt{3}-i(1+\sqrt{3})}{2}\right\}$

4. $M_0(i)$, $M_1\left[\frac{-3-\sqrt{3}-i(1-\sqrt{3})}{2}\right]$, $M_2\left[\frac{-3+\sqrt{3}-i(1+\sqrt{3})}{2}\right]$ et $M_3(-1)$.

a) $(M_0M_1)^2 = (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2$

$(M_0M_1)^2 = \left(0 + \frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(1 + \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{24}{4} = 6$

$(M_0M_2)^2 = \left(0 + \frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(1 + \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{24}{4} = 6$

$(M_1M_2)^2 = \left(\frac{-3-\sqrt{3}}{2} + \frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 6$

On remarque que $(M_0M_1)^2 = (M_0M_2)^2 = (M_1M_2)^2$ donc le triangle $M_0M_1M_2$ est un triangle équilatéral.

Le centre de gravité est M_3 a pour affixe :

$z_{M_3} = z_3 = \frac{z_0+z_1+z_2}{3} = \frac{1}{3}\left[i + \frac{-3-\sqrt{3}-i(1-\sqrt{3})}{2} +\right.$

−3+3−i1+32=2i−3−3−i1−3−3+3−i1+36=−1

Evidemment le centre de gravité est $M_3(-1)$.

b) Calculer $mes\left(\widehat{\overrightarrow{M_3M_1}, \overrightarrow{M_3M_2}}\right) = arg\left(\frac{z_2-z_3}{z_1-z_3}\right)$.

$\frac{z_2-z_3}{z_1-z_3} = \frac{-3+\sqrt{3}-i(1+\sqrt{3})+2}{-3-\sqrt{3}-i(1-\sqrt{3})+2} = \frac{-1-i\sqrt{3}+\sqrt{3}-i}{-1+i\sqrt{3}-\sqrt{3}-i} = \frac{1+i\sqrt{3}-\sqrt{3}+i}{1-i\sqrt{3}+\sqrt{3}+i}$

$\frac{z_2-z_3}{z_1-z_3} = \frac{\frac{1+i\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}-i}{2}}{\frac{1-i\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}+i}{2}} = \frac{e^{\frac{\pi}{3}i} - e^{-\frac{\pi}{6}i}}{e^{-\frac{\pi}{3}i} + e^{\frac{\pi}{6}i}}$

$arg\left(\frac{z_2-z_3}{z_1-z_3}\right) = arg\left(\frac{e^{\frac{\pi}{3}i} - e^{-\frac{\pi}{6}i}}{e^{-\frac{\pi}{3}i} + e^{\frac{\pi}{6}i}}\right) = arg\left(e^{\frac{\pi}{3}i} - e^{-\frac{\pi}{6}i}\right) - arg\left(e^{-\frac{\pi}{3}i} + e^{\frac{\pi}{6}i}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

Donc $mes\left(\widehat{\overrightarrow{M_3M_1}, \overrightarrow{M_3M_2}}\right) = \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

c) $k = \left|\frac{z_2-z_3}{z_1-z_3}\right| = \left|\frac{-1+\sqrt{3}-i(1+\sqrt{3})}{-1-\sqrt{3}-i(1-\sqrt{3})}\right| = \frac{|1-\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})|}{|1+\sqrt{3}+i(1-\sqrt{3})|}$

$k=\sqrt{\frac{(1-\sqrt{3})^2+(1+\sqrt{3})^2}{(1+\sqrt{3})^2+(1-\sqrt{3})^2}}=\sqrt{\frac{8}{8}}=1$ ce qui prouve que S est une rotation de rapport 1, d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et de centre M_3 d'affixe -1. **Écriture complexe de S.**

$b=z_3\left(1-e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)=2ie^{i\frac{\frac{2\pi}{3}}{2}}\times\sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3}}{2}\right)=i\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{3}i}$

$\boldsymbol{S}\ \ z'=e^{\frac{2\pi}{3}i}z+i\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{3}i}=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)z+i\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{3}i}$.

<u>Exercice 30 :</u> On désigne par $\boldsymbol{m}$ un nombre complexe non nul. Soit la transformation S définie par : $\boldsymbol{z'=(1-2i)z+m}$.

1. **Donner la nature de la transformation S.**
2.
a) **Déterminer le nombre complexe $\boldsymbol{m}$ pour que S ait le centre $\boldsymbol{\Omega(1+i)}$.**
b) **Quel est alors le rapport de cette similitude directe ?**
c) **On appelle $\boldsymbol{\theta}$ l'angle de cette similitude. Calculer $\tan\boldsymbol{\theta}$ et donner le signe $\boldsymbol{\sin\theta}$. Donner une valeur approchée à $\boldsymbol{10^{-2}}$ près de $\boldsymbol{\theta}$ en radians.**
d) **Quelle est l'image par cette similitude du cercle de centre $\boldsymbol{O}$ et de rayon 4 ?**
3. **La transformation $\boldsymbol{S}$ a- t- elle des points invariants pour $\boldsymbol{m=2i}$?**

<u>Correction :</u> $\boldsymbol{m\in\mathbb{C}^*}$/ S : $\boldsymbol{z'=(1-2i)z+m}$.

1. **S** est de la forme $z'=az+b$, donc S est une similitude plane directe avec $a=1-2i$ et $b=m$.
2.
a) **S ait le centre $\boldsymbol{\Omega(1+i)}$**:
$b=m=z_\Omega(1-1+2i)=2i(1+i)=-2+2i$.
b) $k=|a|=|1-2i|=\sqrt{5}$.
c) $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-2$ et $\sin\theta=-\frac{2}{\sqrt{5}}$. Une valeur approchée à 10^{-2} près de $\theta=-8{,}94.10^{-1}$ en radians.
d) **l'image du cercle $\boldsymbol{(O;r=4)}$ par S est le cercle** $\left[A(-2+2i);r=4\sqrt{5}\right]$
car $z_A=(1-2i)z_O-2+2i=2-3i$.
3. $\boldsymbol{m=2i}=z_\Omega(1-1+2i)\Leftrightarrow z_\Omega=\frac{2i}{2i}=1$ donc son point est invariant.

<u>Exercice 31 :</u> On désigne par $\boldsymbol{m}$ un nombre complexe. Soient les transformations S et T définies respectivement par : $\boldsymbol{z'=-i\sqrt{3}z+2i}$ et $\boldsymbol{z'=(m-i)z-i}$.

1. **Déterminer le nombre complexe $\boldsymbol{m}$ pour que T soit une translation dont on précisera son vecteur $\vec{\boldsymbol{x}}$.**
2. **Déterminer les nombres complexes $\boldsymbol{m}$ pour que T soient une rotation. Préciser son centre.**
3. **Déterminer le nombre complexe $\boldsymbol{m}$ pour que T soit une rotation d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$. Donner son centre.**
4. **Déterminer les nombres complexes $\boldsymbol{m}$ pour que T soit une homothétie de rapport -2. Donner son centre.**
5. **Déterminer le nombre complexe $\boldsymbol{m}$ pour que ToS soit une similitude plane directe de rapport $\sqrt{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.**
6. **Déterminer le nombre complexe $\boldsymbol{m}$ pour que SoT admette un point A invariant d'affixe 2.**
7. **Soit la transformation F définie par : $\boldsymbol{z'=z+2+i(2m-1)}$. Déterminer le nombre complexe $\boldsymbol{m}$ pour que F soit une translation de vecteur $\vec{\boldsymbol{y}}$ d'affixe $\boldsymbol{1+i}$.**

<u>Correction :</u> $\boldsymbol{m\in\mathbb{C}}$/ S : $\boldsymbol{z'=-i\sqrt{3}z+2i}$ et T : $\boldsymbol{z'=(m-i)z-i}$.

1. **T soit une translation :** $m-i=1\Leftrightarrow m=1+i$ et son vecteur $\vec{x}$ est d'affixe $-i$.
2. **T soit une rotation :**
$|m-i|=1\Leftrightarrow m^2+1=1\Leftrightarrow m=0$. On peut aussi remarque que si $m=2i$ alors $|2i-i|=|i|=1$.
Donc **T soit une rotation si** $m=0$ ou $m=2i$.
Son centre Ω a pour affixe $z_\Omega=\frac{-i}{1-i}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$.
3. **T soit une rotation d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$:**
$m-i=e^{\frac{\pi}{2}i}=i\Leftrightarrow m=2i$ et son centre Ω a pour affixe $z_\Omega=\frac{-i}{1-i}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$.
4. **T soit une homothétie de $\boldsymbol{k=-2}$:**
- $m-i=-2\Leftrightarrow m=-2+i$ et son centre Ω a pour affixe $z_\Omega=\frac{-i}{1+2}=-\frac{1}{3}i$.
- $|m-i|=|-2|\Leftrightarrow m=2+i$ et son centre Ω a pour affixe $z_\Omega=\frac{-i}{1+2}=-\frac{1}{3}i$.
5. **ToS soit une similitude plane directe de $\left[\boldsymbol{k=\sqrt{3};\ \frac{\pi}{2}}\right]$: $\boldsymbol{z'=(m-i)z_{S(z)}-i}$**
$\mathrm{ToS}(z)=\mathrm{T}[\mathrm{S}(z)]:z'=(m-i)\left[-i\sqrt{3}z+2i\right]-i$

$z' = -i\sqrt{3}(m-i)z + 2 + i(2m-1)$, ainsi $-i\sqrt{3}(m-i) = \sqrt{3}e^{\frac{\pi}{2}i} = i\sqrt{3} \Leftrightarrow m = -1+i$.

6. **SoT admette un point invariant A(2) :**
SoT(z) = S[T(z)] : $z' = -i\sqrt{3}z_{T(z)} + 2i$ ou
$z' = -i\sqrt{3}[(m-i)z - i] + 2i$ ou
$z' = -i\sqrt{3}(m-i)z - \sqrt{3} + 2i$, **SoT admette un point invariant A(2) :** $z_A = \frac{b}{1-a}$
$z_A = \frac{-\sqrt{3}+2i}{1+i\sqrt{3}(m-i)} \Leftrightarrow 2 = \frac{-\sqrt{3}+2i}{1+i\sqrt{3}(m-i)}$
$\Leftrightarrow m = \frac{-\sqrt{3}-2+2i}{2i\sqrt{3}} \times \frac{-i\sqrt{3}}{-i\sqrt{3}} + i = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{3+2\sqrt{3}}{6}i$.

7. **F soit une translation de vecteur $\vec{y}$ $(1+i)$:**
$2 + i(2m-1) = 1 + i \Leftrightarrow m = 1 + \frac{1}{2}i$.

<u>Exercice 32 :</u> On désigne par m et n deux nombres complexe non nul. Soit la transformation S définie par : $z' = miz - n^2 + i$.

1. **Déterminer le nombre complexe m pour que S soit une rotation d'angle de mesure $\frac{5\pi}{6}$.**
2. **Déterminer les nombre complexes n et m pour que S soit une translation de vecteur $\vec{x}$ d'affixe $1+i$.**
3. **Déterminer le nombre complexe m pour que S soit une similitude plane directe de rapport 2 et de mesure d'angle $\frac{2\pi}{3}$.**
4. **Donner la nature de S pour $m = -i$.**

<u>Correction :</u> $(m;n) \in \mathbb{C}^*.\mathbb{C}^*/$ S : $z' = miz - n^2 + i$.

1. **S soit une rotation d'angle $\frac{5\pi}{6}$:**
$mi = e^{\frac{5\pi}{6}i} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \Leftrightarrow m = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
2. **S soit une translation de vecteur $\vec{x}$ $(1+i)$:**
$-n^2 + i = 1 + i \Leftrightarrow n^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow n = i \; ou \; n = -i$.
$mi = 1 \Leftrightarrow m = -i$.
3. **S soit une similitude directe de $\left[k = 2; \frac{2\pi}{3}\right]$:**
$mi = 2e^{\frac{2\pi}{3}i} \Leftrightarrow m = 2e^{\frac{2\pi}{3}i} \times e^{-\frac{\pi}{2}i} = 2e^{\frac{\pi}{6}i} = \sqrt{3} + i$.
4. $m = -i$, S : $z' = z - n^2 + i$, S est une translation de vecteur $\vec{x}$ d'affixe $-n^2 + i$.

<u>Exercice 33 :</u> On désigne par m un nombre réel. On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 4 - i$, $z_B = 1 + 2i$ et $z_C = -2 + mi$.

1. **Démontrer qu'il existe une similitude plane directe S qui transforme A en B et B en C.**
2. **Déterminer le nombre réel m pour que S soit une translation. Donner le vecteur de cette translation.**
3. **Déterminer les nombres complexes m pour lesquels S est une rotation.**
4. **Déterminer le nombre complexe m pour que S soit une similitude plane directe de rapport $\frac{1}{6}$ d'angle 2π.**
5. **Déterminer les nombres complexes m pour lesquels S est une homothétie de rapport $\frac{1}{6}$.**

<u>Correction :</u> $m \in IR$: $z_A = 4 - i$, $z_B = 1 + 2i$ et $z_C = -2 + mi$.

1. $\begin{cases} z_B = az_A + b \\ z_C = z_B + b \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{z_B - z_C}{z_A - z_B} = \frac{1+m+i(5-m)}{6}$ et
$b = z_B - az_A = \frac{-3-3m+i(5m-7)}{6}$, donc S est définie par $z' = \frac{1+m+i(5-m)}{6}z + \frac{-3-3m+i(5m-7)}{6}$.
2. **S soit une translation :**
$\frac{1+m+i(5-m)}{6} = 1 \Leftrightarrow m = 5$ et
$\frac{-3-3m+i(5m-7)}{6} = -3 + 3i$ du vecteur $\vec{x}(-3+3i)$.
3. **S est une rotation :** $\left|\frac{1+m+i(5-m)}{6}\right| = 1 \Leftrightarrow$
$\sqrt{(1+m)^2 + (5-m)^2} = 6 \Leftrightarrow m^2 - 4m - 5 = 0 \Leftrightarrow$
$\Delta = 36 \Leftrightarrow m = -1$ ou $m = 5$.
4. **S soit une similitude directe de $\left[k = \frac{1}{6}; \; 2\pi\right]$:**
$\frac{1+m+i(5-m)}{6} = \frac{1}{6} \times e^{2\pi i} \Leftrightarrow m = \frac{5-5i}{2}$.
5. **S soit une homothétie de $k = \frac{1}{6}$:**
$\frac{1+m+i(5-m)}{6} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow m = \frac{5-5i}{2}$.

<u>Exercice 34 :</u> Soit A, B, C trois points du plan complexe d'affixes respectives a, b, c.

1. **Déterminer les nombres complexes α et β pour que l'application $f(z) = \alpha z + \beta$ soit associée à la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.**
2. **Quelle relation doit-il exister entre a, b, c pour que C soit le transformé de B dans cette rotation ?**
3. **Quelle relation doit-il exister entre a, b, c pour que B soit le transformé de C dans cette rotation ?**

Correction : $\boldsymbol{f(z) = \alpha z + \beta}$

1. $\alpha = e^{\frac{\pi}{3}i} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $\beta = (1-\alpha)a = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)a = ae^{-\frac{\pi}{3}i}$.
2. $z_C = \alpha z_B + \beta \Leftrightarrow c = be^{\frac{\pi}{3}i} + ae^{-\frac{\pi}{3}i}$.
3. $z_B = \alpha z_C + \beta \Leftrightarrow b = ce^{\frac{\pi}{3}i} + ae^{-\frac{\pi}{3}i}$.

Exercice 35 : **On désigne par $\boldsymbol{m}$ un nombre complexe donné. On considère $\boldsymbol{z' = m^2 z + m - 1}$.**

1. **Déterminer les nombres complexes $\boldsymbol{m}$ pour lesquels S est une translation. Donner le vecteur de cette translation pour chacune des valeurs trouvées.**
2. **Déterminer les nombres complexes $\boldsymbol{m}$ pour lesquels S est une rotation d'angle de mesure $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$. Donner le centre de cette rotation pour chacune des valeurs trouvées.**
3. **Déterminer les nombres complexes $\boldsymbol{m}$ pour lesquels S est une homothétie de rapport $\boldsymbol{-2}$. Donner l'affixe du centre de cette homothétie pour chacune des valeurs trouvées.**
4. **On suppose $\boldsymbol{m = 1 - i}$. Donner dans ce cas la nature et les éléments géométriques de S.**

Correction : $\boldsymbol{m \in \mathbb{C}}$ **/** $\boldsymbol{z' = m^2 z + m - 1}$.

1. S soit translation $m^2 = 1 \Leftrightarrow m = 1$ ou $m = -1$. **Pour $\boldsymbol{m = 1}$**, $z' = z$, donc son est vecteur $\vec{x} = \vec{0}$. **Pour $\boldsymbol{m = -1}$**, $z' = z - 2$, donc son vecteur est $\vec{x} = -2\vec{u}$.

2. S soit une rotation d'angle $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$: $m^2 = e^{\frac{\pi}{2}i} = i \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ m = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \end{cases}$. **Pour $\boldsymbol{m = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i}$**, son centre a pour affixe $z_\Omega = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i - 1}{1-i} = \frac{-1 + i(\sqrt{2}-1)}{2}$. **Pour $\boldsymbol{m = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i}$**, son centre est $z_\Omega = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i - 1}{1-i} = \frac{-1 - i(\sqrt{2}+1)}{2}$.

3. S soit une homothétie de $\boldsymbol{k = -2}$: $m^2 = -2 = \left(i\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow m = i\sqrt{2}$ ou $m = -i\sqrt{2}$. **Pour $\boldsymbol{m = i\sqrt{2}}$**, son centre est $z_\Omega = \frac{i\sqrt{2}-1}{1+2} = \frac{-1+i\sqrt{2}}{3}$. **Pour $\boldsymbol{m = -i\sqrt{2}}$**, son centre a pour affixe $z_\Omega = \frac{-i\sqrt{2}-1}{1+2} = \frac{-1-i\sqrt{2}}{3}$.

4. $\boldsymbol{m = 1 - i = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}}$, $z' = \left(\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)^2 z - i = 2e^{-\frac{\pi}{2}i}z - i$ et $z_\Omega = \frac{-i}{1+2i} = \frac{-2-i}{5}$. S est une similitude plane directe caractérisée par : $\left[\boldsymbol{k = 2};\ \boldsymbol{\alpha = -\frac{\pi}{2}};\ \Omega\left(\frac{-2-i}{5}\right)\right]$.

Exercice 36 : **On désigne par $\boldsymbol{m}$ un nombre complexe non nul. Soit $\boldsymbol{z' = m^3 z + m(m+1)}$.**

1. **Donner la nature de la transformation S.**
2. **Déterminer les nombres complexes $\boldsymbol{m}$ pour lesquels S est une translation. Donner le vecteur de cette translation pour chacune des valeurs trouvées.**
3. **Déterminer les nombres complexes $\boldsymbol{m}$ pour lesquels S est une rotation d'angle de mesure $\boldsymbol{\pi}$. Donner le centre de cette rotation pour chacune des valeurs trouvées.**
4. **Déterminer les nombres complexes $\boldsymbol{m}$ pour lesquels S est une homothétie de rapport 8. Donner le centre de cette homothétie pour chacune des valeurs trouvées.**
5. **On suppose $\boldsymbol{m = 2i}$. Donner dans ce cas la nature et les éléments géométriques de S.**

Correction : $\boldsymbol{m \in \mathbb{C}^*}$ **/ S :** $\boldsymbol{z' = m^3 z + m(m+1)}$.

1. S est de la forme $\boldsymbol{z' = az + b}$, donc S est une **similitude plane directe**.
2. **S soit translation** $m^3 = 1 \Leftrightarrow (m-1)(m^2 + m + 1) = 0 \Leftrightarrow m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ ou $m^2 + m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ ou $m = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. **Pour $\boldsymbol{m = 1}$**, $z' = z + 2$, donc son vecteur est $\vec{x} = 2\vec{u}$. **Pour $\boldsymbol{m = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}}$**, $z' = z - 1$, donc son vecteur est $\vec{x} = -\vec{u}$. **Pour $\boldsymbol{m = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}$**, $z' = z - 1$, donc son vecteur est $\vec{x} = -\vec{u}$.
3. **S soit une rotation d'angle $\boldsymbol{\pi}$:** $m^3 = e^{\frac{\pi}{3}i} \Leftrightarrow m_k = \left[1; \frac{\pi + 2k\pi}{3}\right]$, avec $k \in \{0; 1; 2\}$, les valeurs de m sont : $m_0 = \left[1; \frac{\pi}{3}\right] = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $m_1 = [1; \pi] = -1$ et $m_2 = \left[1; -\frac{\pi}{3}\right] = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. **Pour $\boldsymbol{m = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$**, son centre a pour affixe $z_\Omega = \frac{3-\sqrt{3}+4i\sqrt{3}}{8}$. **Pour $\boldsymbol{m = -1}$**, son centre a pour affixe $z_\Omega = 0$. . **Pour $\boldsymbol{m = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$**, son centre a pour affixe $z_\Omega = \frac{3-\sqrt{3}-4i\sqrt{3}}{8}$.
4. **S soit une homothétie de $\boldsymbol{k = 8}$:** $m^3 = 8 = (2)^3 \Leftrightarrow (m-2)(m^2 + 2m + 4) = 0 \Leftrightarrow m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$ ou $m^2 + 2m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = -1 - i\sqrt{3}$ ou $m = -1 + i\sqrt{3}$.. **Pour $\boldsymbol{m = 2}$**, son centre a pour affixe $z_\Omega = \frac{6}{1-8} = -\frac{6}{7}$. **Pour $\boldsymbol{m = -1 - i\sqrt{3}}$**, son centre a pour affixe $z_\Omega = \frac{-\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{1-8} = -\frac{-\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{7}$. **Pour**

$m=-1+i\sqrt{3}$, son centre a pour affixe $z_\Omega = \frac{-\sqrt{3}-i\sqrt{3}}{1-8} = \frac{\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{7}$.

5. $\boldsymbol{m=2i}$, $z' = -8iz-4+2i = 8e^{-\frac{\pi}{2}i}z-4+2i$ et $z_\Omega = \frac{-4+2i}{1+8i} = \frac{12+34i}{65}$. S est une similitude plane directe caractérisée par : $\left[\boldsymbol{k=8};\ \boldsymbol{\alpha=-\frac{\pi}{2}};\ \Omega\left(\frac{12+34i}{65}\right)\right]$.

<u>Exercice 37 :</u> m étant un nombre réel donné. On note : $z'=(z+1+i)(mz-i)$.

1. On donne $m=0$. Démontrer que M' est l'image de M dans la rotation dont on soit

a) Déterminer les points M tels que $z'=0$.

b) Calculer $x'=Re(z')$ et $y'=Im(z')$ en fonction de x, y et m.

2. On se borne désormais au cas $m=1$. M' est l'image de M dans une transformation T.

a) Quelle est une équation de l'ensemble H_1 des points M tels que z' soit imaginaire pur ?

b) Quelle est une équation de l'ensemble H_2 des points M tels que z' soit réel ?

<u>Correction :</u> $m\in IR$ S : $z'=(z+1+i)(mz-i)$.

1. $\boldsymbol{m=0}$, $z'=-iz+1-i=e^{-\frac{\pi}{2}i}z+1-i$ et $z_\Omega = \frac{1-i}{1+i} = -i$. S est une similitude plane directe caractérisée par : $\left[\boldsymbol{k=1};\ \boldsymbol{\alpha=-\frac{\pi}{2}};\ \Omega(-i)\right]$.

2. $\boldsymbol{m\neq 0}$.

a) $(z+1+i)(mz-i)=0 \Leftrightarrow z=-1-i$ ou $z=\frac{1}{m}i$.

b) $z'=(z+1+i)(mz-i)=mz^2+mz+miz-iz-i+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x'=mx^2-my^2+mx-my+y+1 \\ y'=2mxy+my+mx-x-1 \end{cases}$.

3. $\boldsymbol{m=1}$, $\begin{cases} x'=x^2-y^2+x+1 \\ y'=2xy+y-1 \end{cases}$.

a) $H_1 : z'\in iIR \Leftrightarrow Re(z')=x^2-y^2+x+1=0 \Leftrightarrow y=\mp\sqrt{x^2+x+1}$.

b) $H_2 : z'\in IR \Leftrightarrow Im(z')=2xy+y-1=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2x+1}$.

<u>Exercice 38 :</u> On désigne par m un nombre réel non nul. On considère $z'=\frac{\sqrt{2}}{2}(m+i)z+\frac{\sqrt{2}}{2}(m^2-1)$.

1. Donner la nature de la transformation S.

2. On pose z= *x* + *iy* et z' = *x*' + *iy*' (*x*, *y*, *x*' et *y*' réels). Calculer *x*' et *y*' en fonction de *x* et *y*.

3. Démonter que, quel que soit le réel *m*, l'image O' de O par S appartient à une droite dont on donnera une équation cartésienne.

4. Est-il possible de déterminer *m* pour que l'application S soit :

a) une translation ?

b) une rotation de centre O ?

Dans le cas d'une réponse positive, préciser la ou les valeurs de *m* et donner les éléments géométriques de la transformation S correspondante.

<u>Correction :</u> $m\in IR^*$ /

$$z'=\frac{\sqrt{2}}{2}(m+i)z+\frac{\sqrt{2}}{2}(m^2-1).$$

1. S est de la forme $\boldsymbol{z'=az+b}$, donc S est une **similitude plane directe**.

2. $z'=\frac{\sqrt{2}}{2}(m+i)(x+iy)+\frac{\sqrt{2}}{2}(m^2-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x'=\frac{\sqrt{2}}{2}mx-\frac{\sqrt{2}}{2}y+\frac{\sqrt{2}}{2}m^2-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y'=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}my \end{cases}$.

3. **l'image O' de O (0 ;0) par S appartient à une droite**: $\begin{cases} x'=\frac{\sqrt{2}}{2}m^2-\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ y'=0 \end{cases}$

équation cartésienne $x=\frac{\sqrt{2}}{2}m^2-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. **Est-il possible de déterminer *m* pour que l'application**

a) **S soit translation** $\frac{\sqrt{2}}{2}(m+i)=1 \Leftrightarrow m=\sqrt{2}-i$ et son vecteur est $\vec{x}=-2\vec{v}$.

b) **S soit une rotation de centre O :** $\frac{\sqrt{2}}{2}(m^2-1)=0 \Leftrightarrow m^2-1=0$ ou bien $\left|\frac{\sqrt{2}}{2}(m+i)\right|=1 \Leftrightarrow m^2=1 \Leftrightarrow m=-1$ ou $m=1$. **Pour $m=-1$**, $z'=e^{\frac{3\pi}{4}i}z$, donc $r\left[\boldsymbol{k=1};\ \boldsymbol{\alpha=\frac{3\pi}{4}};\ \boldsymbol{O(0)}\right]$.

Pour $m=1$, $z'=e^{\frac{\pi}{4}i}z$, donc $r\left[\boldsymbol{k=1};\ \boldsymbol{\alpha=\frac{\pi}{4}};\ \boldsymbol{O(0)}\right]$.

<u>Exercice 39 :</u>

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3+8=0$.

***2.* On considère les points *A*, *B*, *C*, d'affixes respectives : $z_A=-2$, $z_B=1-\sqrt{3}i$, $z_C=1+\sqrt{3}i$, le point *D* milieu de [*OB*] et la rotation R de centre *O* et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.**

a) Montrer que R(*A*)=*B*, R(*B*)=*C* et R(*C*)=*A*. En déduire que le triangle *ABC* est équilatéral. Placer *A*, *B* et *C* dans le plan.

b) On considère le point *L* défini par $\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{OD}$. Déterminer son affixe z_L. Déterminer un argument de $\frac{z_L}{z_D}$. En déduire que le vecteur $\overrightarrow{OL}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{OD}$ et au vecteur $\overrightarrow{AL}$.

c) Montrer que L est sur le cercle de diamètre [AO]. Placer L sur la figure.

Correction :

1. **Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3+8=0$:**
$z^3+8=z^3-(-2)^3=(z+2)(z^2-2z+2^2)=0$, $z^2+2z+2^2=0$, $\Delta=-2=\left(i\sqrt{3}\right)^2$, donc $S_{\mathbb{C}}=\{-2; 1-\sqrt{3}i;\ 1+\sqrt{3}i\}$.

2. $z_A=-2=2e^{\pi i}$, $z_B=1-\sqrt{3}i=2e^{-\frac{\pi}{3}i}$, $z_C=1+\sqrt{3}i=2e^{\frac{\pi}{3}i}$, $z_D=\frac{z_O+z_B}{2}=e^{-\frac{\pi}{3}i}$ et $R\left(O;\frac{2\pi}{3}\right): z'=e^{\frac{2\pi}{3}i}z$.

a) $R(A)=B\Leftrightarrow z_B=e^{\frac{2\pi}{3}i}z_A=e^{\frac{2\pi}{3}i}\times 2e^{\pi i}=2e^{-\frac{\pi}{3}i}$; $R(B)=C\Leftrightarrow z_C=e^{\frac{2\pi}{3}i}z_B=e^{\frac{2\pi}{3}i}\times 2e^{-\frac{\pi}{3}i}=2e^{\frac{\pi}{3}i}$ et $R(C)=A\Leftrightarrow z_A=e^{\frac{2\pi}{3}i}z_C=e^{\frac{2\pi}{3}i}\times 2e^{\frac{\pi}{3}i}=2e^{\pi i}$. **Placer A, B et C dans le plan.**

b) $\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{OD}\Leftrightarrow z_L=z_A+z_D-z_O=2e^{\pi i}+e^{-\frac{\pi}{3}i}=-2+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; $\frac{z_L}{z_D}=\frac{-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}=-\sqrt{3}i$ et $arg\left(\frac{z_L}{z_D}\right)=-\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow (OL)\perp(OD)\perp(AL)$.

c) (OL) est orthogonale a (OD) et (OD) est parallèle a (AL) donc (OL) est orthogonale a (AL), conclusion L est sur le cercle de diamètre [AO]. **Placer L sur la figure.**

Exercice 40 :

1. **Déterminer l'image A' du point A d'affixe $e^{-\frac{\pi}{3}i}$ par la rotation r de centre Ω(-1) et d'angle $\frac{\pi}{3}$.**
2. **Soit t la transformation qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z'=z-i\sqrt{3}$.**

a) **Caractériser la transformation t.**

b) **Déterminer la forme complexe de *tor*. En déduire ses éléments géométriques.**

3. **Que peut-on dire explicitement de la nature de *tor* ?**

Correction :

1. r (centre Ω(-1) et d'angle $\frac{\pi}{3}$) : $z'-z_\Omega=e^{\frac{\pi}{3}i}(z-z_\Omega)\Leftrightarrow z'=e^{\frac{\pi}{3}i}z+z_\Omega\left(1-e^{\frac{\pi}{3}i}\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}$. L'image $z_{A'}=r(z_A): z_{A'}=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_A+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)e^{-\frac{\pi}{3}i}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}=1+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. $t: z'=z-i\sqrt{3}$.

a) **Caractériser la transformation t :** t est la translation du vecteur $\vec{V}$ d'affixe $-i\sqrt{3}$, puisque $a=1$ ($z'=az+b$)

b) Déterminer la forme complexe de *tor* :
tor : $tor(z)=t[r(z)]=t\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}\right]=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(z-i\sqrt{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, donc *tor* : $z'=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=e^{\frac{\pi}{3}i}z-e^{\frac{\pi}{3}i}$. Ces **éléments géométriques :** *tor* : $\left[1;\frac{\pi}{3};\Omega\left(e^{-\frac{\pi}{3}i}\right)\right]$

3. *tor* : est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

__Exercice 41 :__ **Trois points A, B et C sont alignés dans cet ordre et AB = 6, BC = 4. (C) est le cercle de diamètre [AC] et (d) est la médiatrice de [BC] qui coupe (C) en M et M' tels que $\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MC}}\right)=\frac{\pi}{2}$. La droite (M ' B) coupe (MA) en N. La droite(d) coupe (AB) en H. On note S la similitude directe de centre N telle que S(M) = B.**

1. **Faire la figure.**
2. **Déterminer le rapport et l'angle de la similitude S.**
3. **Quelle est l'image de (d) par S ?**
4. **Quelle est l'image de (M'N) par s ?**
5. **En déduire que S(M') = A.**
6. **Quelle est l'image de H par S ?**
7. **En déduire que la droite (NH) est tangente au cercle de diamètre [AB].**

Correction :

1. **Faire la figure.**
2. Le triangle ACM est inscrit dans un cercle et le côté [AC] et un diamètre du cercle, donc ce triangle est rectangle en M. Le point H est le milieu de [BC]. Les triangles OHM et OHM' sont isométriques puisque [OH] est commun aux deux triangles, OM = OM' = rayon du cercle (C) et $\widehat{OHM}=\widehat{OHM}'=\frac{\pi}{2}$. Donc HM = HM' , H est aussi le milieu de [MM'] et le quadrilatère BMCM' est un parallélogramme. De plus, BM = CM puisque M st sur la médiatrice de [BC], donc BMCM' est un losange. Comme (CM) et (BM') = (BN) sont parallèles, alors $\widehat{MNB}=\frac{\pi}{2}$. L'angle de la similitude S est $\frac{\pi}{2}$. Le rapport de la similitude S est égal à $\frac{NB}{MN}$: On a AC = AB + BC = 10. Soit O le centre du cercle de diamètre [AC]. Alors AO = 5 et OH = OC – CH = 3. Dans le triangle OHM rectangle en H, on applique le théorème de Pythagore : HM = 4. Dans le triangle BHM rectangle en H, on applique le théorème de Pythagore : $BM^2=BH^2+HM^2$ = 22 + 42 = 20, et
BM = BM' = CM = CM' = $2\sqrt{5}$.
On applique le théorème de Thalès dans le triangle ACM, avec B sur [AC], N sur [AM] et (BN) // (CM) : $\frac{AB}{AC}=\frac{AN}{AM}=\frac{NB}{MN}$; d'où $NB=\frac{AB\times MC}{AC}=\frac{6\times 2\sqrt{5}}{10}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$ et $AN=\frac{AB\times AM}{AC}=\frac{6\times 4\sqrt{5}}{10}=\frac{12\sqrt{5}}{5}$. Dans le triangle AMC

rectangle en M, on applique le théorème de Pythagore : $AM^2 = AC^2 – MC^2 = 100 – 20 = 80$, soit $AM = 4\sqrt{5}$.
Donc $MN = AM – AN = 4\sqrt{5} - \frac{12\sqrt{5}}{5} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$.
Le rapport de s est égal à $\frac{NB}{MN} = \frac{6\sqrt{5}}{5} \times \frac{5}{8\sqrt{5}} = \frac{3}{4}$.

3. L'image de (d) par S est une droite passant par B image de M et perpendiculaire à (d), soit la droite (AB).

4. Le point N étant le centre de la similitude S, l'image de (M'N) par S est une droite perpendiculaire à (M'N) passant par N, soit la droite (AM).

5. L'image de M' est à l'intersection des images des droites (M'N) et (d), donc à l'intersection de (AB) et (AM).Donc S(M') = A.

6. Le point H est le milieu de [MM']. Comme S(M) = B et S(M') = A, alors l'image de H par s est le milieu K de [AB].

7. Le milieu K de [AB] est le centre du cercle de diamètre [AB]. Le triangle ANB est rectangle en N, donc N est sur ce cercle. Comme (NH) est perpendiculaire à [NK], rayon du cercle, alors la droite (NH) est tangente au cercle de diamètre [AB].

<u>Exercice 42 :</u> On considère la transformation f du plan qui à tout point M d'affixe z fait correspondre M' d'affixe z telles que : $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)z$.

1. Montrer que la transformation f est une rotation dont on déterminera l'angle et le centre.

2. On définit la suite de points (M_n) de la façon suivante : (M_0) est le point d'affixe $z_0 = 1$ et, pour tout nombre entier naturel n, $M_{n+1} = f(M_n)$.
On note z_n l'affixe du point M_n.

a) Justifier que, pour tout nombre entier naturel n, $z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(\frac{3n\pi}{4}\right)}$.

b) Construire les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4.

c) Montrer que pour tout nombre entier naturel n, les points M_n et M_{n+8} sont confondus.

3. Prouver que les triangles $M_0M_1M_2$ et $M_7M_0M_1$ ont la même aire.
Préciser la valeur exacte de cette aire.

<u>Correction :</u> $a = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i = e^{i\frac{3\pi}{4}}$

1. On a $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)z = e^{i\frac{3\pi}{4}} z$ alors f est donc la rotation de centre O et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.

2. $M_{n+1} = f(M_n)$

a) Justifions que, pour $n \in$ IN, $z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(\frac{3n\pi}{4}\right)}$: par récurrence

- <u>Initialisation :</u> $z_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 e^{i(0)} = 1$, la formule est vraie au rang 0
- <u>Hérédité :</u> Supposons qu'il existe $n \in$ IN tel que $z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(\frac{3n\pi}{4}\right)}$. Alors $z_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} e^{i\left(\frac{3\pi(n+1)}{4}\right)}$ La formule est vraie au rang n+1.

<u>Conclusion :</u> on a démontré par récurrence que quel que soit $n \in$ IN, $z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(\frac{3n\pi}{4}\right)}$.

b) les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 :

c) M_n a pour affixe z_n qui a pour argument $\frac{3n\pi}{4}$; M_{n+8} a pour affixe z_{n+8} qui a pour argument $\frac{3(n+8)\pi}{4} = \frac{3n\pi}{4} + 6\pi = \frac{3n\pi}{4}$. Donc $arg(z_n) = arg(z_{n+8})$ $[2\pi]$.
Comme z_n et z_{n+8} ont le même module et un même argument, les points M_n et M_{n+8} sont confondus.

3. Par la rotation f, le triangle $M_7M_0M_1$ a pour image le triangle $M_8M_1M_2$, soit d'après la question précédente (puisque $M_8 = M_0$) le triangle $M_0M_1M_2$.
Comme la rotation est une isométrie, elle conserve les longueurs, donc les aires : les triangles $M_0M_1M_2$ et $M_7M_0M_1$ ont la même aire.
Le point M_1 a pour coordonnées $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. On a donc $M_1M_7 = \sqrt{2}$ et la hauteur du triangle $M_7M_0M_1$ issue de M_0 a pour longueur $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$. L'aire de ce triangle est donc égale à : $\frac{\sqrt{2}\times\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

<u>Exercice 43 :</u> (unité graphique : 2 cm), on considère les points *A*, *B* et *C* d'affixes respectives *a* = 2, *b* = 1 - i et *c* = 1 + i.

1. Calculer $\frac{c-a}{b-a}$. En déduire que le triangle *ABC* est rectangle isocèle. Proposer les méthodes de résolutions.

2. On appelle *r* la rotation de centre *A* telle que *r*(*B*) = *C*.

a) Déterminer l'angle de *r* et calculer l'affixe *d* du point *D* = *r*(*C*).

b) Soit Γ le cercle de diamètre [*BC*].
Déterminer et construire l'image Γ' du cercle Γ par la rotation *r*.

3. Soit *M* un point de Γ d'affixe *z*, distinct de *C* et *M'* d'affixe *z'* son image par *r*.

a) Montrer qu'il existe un réel θ appartenant à $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$; tel que $z = 1 + e^{i\theta}$.

b) Exprimer *z'* en fonction de θ.

c) Montrer que $\frac{z'-c}{z'-c}$ est un réel. En déduire que les points *C*, *M* et *M'* sont alignés.

Correction :

1. **Calculons $\frac{c-a}{b-a}$:** $\frac{c-a}{b-a}=\frac{-1+i}{-1-i}=-i$. **Déduisons que le triangle *ABC* est rectangle isocèle :**

1ère méthode : On en déduit : $c - a = -i(b - a)$

Il apparaît alors que $C = r(B)$ où r est la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Le triangle *ABC* est donc bien rectangle isocèle en *A*.

2ème méthode : l'écriture complexe d'une rotation : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=(\overrightarrow{AB},\vec{u})+(\vec{u},\overrightarrow{AC})=arg(b-a)-arg(c-a)$. $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)=arg(-i)=-\frac{\pi}{2}[2\pi]$. On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux. (On pouvait aussi utiliser le résultat de cours suivant : si *A*, *B* et *C* sont trois points distincts du plan, alors : $\frac{c-a}{b-a}$ est imaginaire pur $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.) Par ailleurs : $|c - a| = |b - a| = \sqrt{2}$. En conséquence : $AC = AB$. Le triangle *ABC* est donc bien rectangle isocèle en *A*.

3ième méthode : $\frac{c-a}{b-a}=\frac{-1+i}{-1-i}=-i$ donc $|c-a|=|-i|\times|b-a|$ donc AC = AB, le triangle ABC est isocèle en A. $arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)=arg(-i)=-\frac{\pi}{2}[2\pi]$, donc $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=-\frac{\pi}{2}[2\pi]$, donc le triangle ABC est rectangle isocèle en A.

2. rotation r est : $z'-a=-i(z-a)=e^{-i\frac{\pi}{2}}(z-a)$.

a) **Déterminons l'angle de *r* :** On a vu $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=-\frac{\pi}{2}[2\pi]$, donc $\theta=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=-\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Calculons l'affixe *d* du point *D = r(C)* :

1er méthode : L'affixe d du point $D = r(C)$ est donc : $d = -i(-1 + i) + 2 = 3 + i$.

2ème méthode : r a pour écriture complexe $z' - a = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z-a)$ donc $d - a = -i(c - a)$ donc $d = -i(-1 + i) + 2 = 3 + i$.

b) **Déterminons et construisons l'image Γ′ du cercle Γ par la rotation *r* :** Γ est le cercle de diamètre [*BC*]. Son image Γ′, par *r*, est donc le cercle de diamètre $[r(B)r(C)] = [CD]$.

3.

α) **Montrons qu'il existe un réel $\theta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2};2\pi\right]/z=1+e^{i\theta}$:** Le centre du cercle Γ est le point Ω d'affixe 1. (Milieu de [*BC*]). Le rayon de Γ est 1. Comme $M\in\Gamma$, on a : $\Omega M = 1$C'est-à-dire : $|z-1| =1$. Notons θ un argument de $z-1$. ($\theta\in[0,2\pi[$). Ainsi : $z-1=e^{i\theta}$

Et comme $M \neq C$, on a $z \neq 1 + i$, donc $z - 1 \neq i$, donc $\theta\neq\frac{\pi}{2}(2\pi)$.

Bilan : il existe $\theta\in[0,2\pi[$, $\theta\neq\frac{\pi}{2}$, tel que $z=1+e^{i\theta}$.

b) **Exprimons *z′* en fonction de θ :**
Comme $M' = r(M)$, on a : $z' - a = -i(z - a)$;

$$z' - 2 = -i(e^{i\theta} - 1);$$
$$z' = 2 + i - i\,e^{i\theta}.$$

c) **Montrons que $\frac{z'-c}{z'-c}$ est un réel :** D'après ce qui précède, on déduit : $\frac{z'-c}{z'-c}=\frac{1-e^{i\theta}}{-i+e^{i\theta}}$. Or, un nombre complexe z est réel si et seulement si il est égal à son conjugué. D'après les règles de calculs avec les conjugués, on a : $\overline{\left(\frac{z'-c}{z'-c}\right)}=\overline{\left(\frac{1-e^{i\theta}}{-i+e^{i\theta}}\right)}=\frac{e^{i\theta}+i}{ie^{i\theta}+i}=\frac{z'-c}{z'-c}=\frac{1-e^{i\theta}}{-i+e^{i\theta}}$. Ce qui prouve $\frac{z'-c}{z'-c}$ est un réel.

Déduisons que les points *C*, *M* et *M′* sont alignés : On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CM}$ sont colinéaires. D'où l'alignement des points *C*, *M* et *M′*.

Exercice 44 :

1. **Soit I et A d'affixes respectives i et $z_A=2i+\sqrt{3}$.**

a) **Montrer que le point A appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre le point I et de rayon 2. Sur une figure (unité graphique 1 cm), qu'on complètera au fur et à mesure de l'exercice, placer le point I, tracer le cercle $\mathcal{C}$, puis construire le point A.**

b) **Soit la rotation *r* de centre le point I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.**

Démontrer que le point B image du point A par la rotation *r* a pour affixe $z_B=-1+(i+\sqrt{3})$.

Justifier que le point B appartient au cercle $\mathcal{C}$.

c) **Calculer l'affixe du point C symétrique du point A par rapport au point I.**

d) **Quelle est la nature du triangle ABC? Justifier.**

2. **Soit les points E et F tels que : $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BI}$. Que peut-on conjecturer pour les droites (BF) et (CE) ? Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.**

Correction :

1. $z_I=i$ **et** $z_A=2i+\sqrt{3}$

a) **Montrons que le point A appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre le point I et de rayon 2 :** On a I(0 ; 1) et $A(\sqrt{3};2)$; donc $AI^2=4\Leftrightarrow AI=2$. Le point A

appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre le point I et de rayon 2
Pour construire le point A, il suffit de tracer l'horizontale contenant le point (0 ; 2) qui coupe le cercle $\mathcal{C}$ de centre I, de rayon 2. A est le point d'abscisse positive.

b) Par définition un point M d'affixe z a pour image M' d'affixe z' tel que $z' - z_{\mathrm{I}} = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_{\mathrm{I}})$ soit $z - i = i(z - i) \Leftrightarrow z = iz + 1 + i$. Donc $z_B = i(\sqrt{3} + 2i) + 1 + i = -1 + (i + \sqrt{3})$. La rotation est une isométrie, donc IA = IB = 2.

Justifions que le point B appartient au cercle $\mathcal{C}$:
La rotation est une isométrie, donc IA = IB = 2, d'après la question 1. a. Le point B appartient donc au cercle $\mathcal{C}$.

c) **Calculons l'affixe du point C :** Par définition du milieu $x_I = \frac{x_A + x_C}{2}$ soit $0 = \frac{\sqrt{3} + x_C}{2} \Leftrightarrow x_C = -\sqrt{3}$. De même $y_I = \frac{y_A + y_C}{2}$ soit $1 = \frac{2 + y_C}{2} \Leftrightarrow y_C = 0$. Conclusion $z_C = -\sqrt{3}$. Remarque : on aurait pu dire que C est l'image de B par la rotation r.

d) Par définition de la rotation (BI) est perpendiculaire à (IA).D'autre part [AC] est un diamètre de $\mathcal{C}$. Dans le triangle ABC, inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$ dont un de ses côtés est un diamètre est donc rectangle en B et (BI) étant à la fois hauteur et médiane, le triangle ABC est isocèle en B. Le triangle ABC est rectangle isocèle en B.

2. **Démonstration :** De $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \overrightarrow{\mathrm{IB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{FA}} = \overrightarrow{\mathrm{IB}}$, on déduit que $\overrightarrow{\mathrm{FA}} = \overrightarrow{\mathrm{AE}}$, c'est-à-dire que A est le milieu de [EF]. D'autre part BI = IA = 2 = EA = AF : donc le triangle EIF est inscrit dans le cercle de diamètre [EF] : il est donc rectangle en I. De plus (BI) ⊥ (AC) et $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \overrightarrow{\mathrm{IB}}$ entraîne que (AE) et (IB) sont parallèles, donc (AC) est perpendiculaire à (AE). Dans le triangle EIF la droite (IA) est à la fois hauteur et médiane : ce triangle est donc rectangle isocèle en I.
Par la rotation r : - B a pour image C, - F a pour image E. Par définition de r rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, la droite (BF) a pour image la droite perpendiculaire (CE).

__Exercice 45 :__ **On considère les points A_0 et A_1 d'affixes respectives 4 et 2 + 2i.**

1. **Montrer que A_1 est l'image de A_0 dans une similitude directe S de centre O dont on précisera les éléments caractéristiques.**
2. **Donner l'écriture complexe de S.**
3. **Soit A_2 = S(A_1). Déterminer l'affixe de A_2 .**
4. **Montrer que par récurrence, pour tout entier naturel n, que $z_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n z_0$.**

__Correction :__ A_0 et A_1 d'affixes respectives 4 et 2 + 2i.

1. L'écriture complexe d'une similitude directe S de centre O est de la forme z' = az. Comme A_1 = S(A_0), alors 2 + 2i = 4a, soit $a = \frac{1+i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi}{4} i}$. Donc A_1 est l'image de A_0 dans une similitude directe S de centre O, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

2. $S: z' = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi}{4} i} z = \left(\frac{1+i}{2}\right) z.$

3. $z_2 = \left(\frac{1+i}{2}\right)(2 + 2i) = 2i.$

4. **Montrer que $z_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n z_0$:**

__Initiation :__ $n = 0 \Leftrightarrow z_0 = \left(\frac{1+i}{2}\right)^0 z_0 = 4$ (vraie).

__Hérédité :__ supposons que $\forall\, n \in IN,\ z_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n z_0$ est vraie, montrons alors que $\forall\, n \in IN$, $z_{n+1} = \left(\frac{1+i}{2}\right)^{n+1} z_0$:$z_{n+1} = \left(\frac{1+i}{2}\right)^{n+1} z_0 = 4\left(\frac{1+i}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{1+i}{2}\right) z_n = \left(\frac{1+i}{2}\right) \times 4 \times \left(\frac{1+i}{2}\right)^n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^{n+1} z_0$ (vraie).

__Conclusion :__ $\forall\, n \in IN,\ z_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n z_0$.

__Exercice 46 :__

1. **Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 - 8 = 0$.**
2. **On considère les points A, B, C, d'affixes respectives : $z_A = 2$, $z_B = -1 + \sqrt{3}i$, $z_C = -1 - \sqrt{3}i$. On appelle *r* la rotation de centre *A* et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et *r'* la rotation de centre *A* et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.**
On pose *B*' = *r* '(*B*) et *C*' = *r*(*C*) et on note *b'* et *c'* les affixes respectives de *B'* et *C'*.
a) **Faire la figure.**
On prendra 1 cm pour unité graphique.
b) **Montrer que *b* ' = $2 + \sqrt{3} + 3i$.**
c) **Montrer que *b'* et *c'* ont des nombres conjugués.**
3.
a) **On appelle *M*, *N*, *P* et *Q* les milieux respectifs des segments [*CB*], [*BB'*], [*B'C'*] et [*C'C*]. On note *m*, *n*, *p*et *q* leurs affixes.**
b) **Montrer que l'affixe *n* du point *N* est égale à $\frac{1+\sqrt{3}}{2}(1 + i\sqrt{3})$. En déduire que les points *O*, *N* et *C* sont alignes.**
c) **Montrer que *n* + 1 = *i*(*q* + 1). Que peut-on en déduire pour le triangle *MNQ* ?**
Montrer que le quadrilatère *MNPQ* est un carré.

__Correction :__

1. **Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :**
$z^3 - 8 = z^3 - 2^3 = (z - 2)(z^2 + 2z + 2^2) = 0,$
$z^2 + 2z + 2^2 = 0,\ \Delta = -2 = \left(i\sqrt{3}\right)^2,$
donc $S_{\mathbb{C}} = \{2; -1 + \sqrt{3}i;\ -1 - \sqrt{3}i\}$.

2.

a) **Faire la figure.**

b) $b' - a = e^{-\frac{\pi}{2}i}(b - a) \Leftrightarrow b' = 2 + \sqrt{3} + 3i$.

c) $c' - a = e^{\frac{\pi}{2}i}(c - a) \Leftrightarrow c' = 2 + \sqrt{3} - 3i$, donc *b'* et *c'* sont des nombres conjugués.

3.

a) $n = \frac{b+b'}{2} = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{3}i + 2 + \sqrt{3} + 3i\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right)$. $n = \frac{1+\sqrt{3}}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}c \Leftrightarrow \overrightarrow{ON} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OC}$. Les vecteurs sont colinéaires, les points *O*, *N* et *C* sont alignés.

b) M a pour affixe $\frac{b+c}{2} = -1$, *q* est le milieu de [*CC*'] et a pour affixe le conjugue de *n* (puisque *c* et *c*' sont les conjugués respectifs de *b* et *b*'), soit $q = \frac{1+\sqrt{3}}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right)$. $n + 1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right) + 1 = \frac{3+\sqrt{3}}{2} + \frac{3+\sqrt{3}}{2}i$ et $i(q + 1) = i\left[\frac{1+\sqrt{3}}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right) + 1\right] = \frac{3+\sqrt{3}}{2} + \frac{3+\sqrt{3}}{2}i$, donc $n + 1 = i(q + 1)$. Le triangle *MNQ* est un triangle rectangle isocèle car le vecteur $\overrightarrow{MQ}$ a pour image le vecteur $\overrightarrow{MN}$ par la rotation *r*.

c) Comme *Q* est le symétrique de *N* par rapport a (*Ox*) et que *M* et *P* sont sur (*Ox*), les triangles *MNP* et *MQP* sont isométriques donc *MNPQ* est un carré.

__Exercice 47 :__ **On considère les points A, B, C d'affixes respectives *a* = 4 , *b* = – 4 *i* et *c* = – 4.**

1. **Vérifier que *a – b* = – *i(c –b)*.**

2. **Que peut-on en déduire sur la nature du triangle ABC ?**

3. **A tout point M du plan d'affixe *z*, on associe le point M' d'affixe *z'* telle que $z' = e^{\frac{\pi}{3}i}z$; quelle est la nature de cette transformation du plan associée ?**

4. **Calculer les affixes *a'*, *b'*, *c'* des points A', B' et C' images de A, B, C par cette transformation.**

5. **Les points P, Q et R sont les milieux des segments [A'B], [B'C], [C'A] et ont pour affixes *p*, *q*, *r*. Calculer *p*, *q*, *r*.**

6. **Montrer que $r - p = e^{\frac{\pi}{3}i}(q - p)$.**

7. **En déduire la nature du triangle PQR.**

__Correction :__ $\boldsymbol{A(4)}$, $\boldsymbol{B(-4i)}$; $\boldsymbol{C(-4)}$.

1. $a - b = 4 + 4i = 4(1 + i)$ et $-i(c - b) = 4 + 4i$.

2. $c - b = e^{-\frac{\pi}{2}i}(a - b)$, ainsi, le point C est l'image de A dans la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Donc, le triangle ABC est rectangle et isocèle en B.

3. $z' = e^{\frac{\pi}{3}i}z$: la transformation du plan associée est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

4. $a' = e^{\frac{\pi}{3}i}a = 2 + i\sqrt{3}$; $b' = e^{\frac{\pi}{3}i}b = 2\sqrt{2} - 2i$ et $c' = e^{\frac{\pi}{3}i}c = -2 - 2i\sqrt{3}$.

5. $p = \frac{a'+b}{2} = 1 + i\left(\sqrt{3} - 2\right)$; $q = \frac{b'+c}{2} = \sqrt{3} - 2 - i$ et $r = \frac{c'+a}{2} = 1 - i\sqrt{3}$.

6. $r - p = 1 - i\sqrt{3} - 1 - i\left(\sqrt{3} - 2\right) = 2i\left(1 - \sqrt{3}\right)$ et $e^{\frac{\pi}{3}i}(q - p) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left[\sqrt{3} - 2 - i - 1 - i\left(\sqrt{3} - 2\right)\right] = 2i\left(1 - \sqrt{3}\right)$, donc $r - p = e^{\frac{\pi}{3}i}(q - p)$.

7. D'après la question précédente, le point R est l'image de Q dans la rotation de centre P et d'angle $\frac{\pi}{3}$; donc PR = PQ et $\left(\widehat{\overrightarrow{PQ};\overrightarrow{PR}}\right) = \frac{\pi}{3}$); donc le triangle PQR est équilatéral.

__Exercice 48 :__

1. **Montrer que $\boldsymbol{e^{\frac{2\pi}{3}i} - e^{\frac{\pi}{3}i} = -1}$.**

2. **On considère un triangle ABC quelconque de sens direct. Les points B' et C' sont les images de B et C dans la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ rad. Les points P, Q et R sont les milieux des segments respectifs [AB], [B'C] et [C'A].**

a) **Faire une figure.**

b) **En utilisant les nombres complexes et un repère orthonormé du plan d'origine A, montrer que le triangle PQR est équilatéral.**

__Correction :__

1. $e^{\frac{2\pi}{3}i} - e^{\frac{\pi}{3}i} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = -1$.

2. $r\left(A;\frac{\pi}{3}\right): z' = e^{\frac{\pi}{3}i}z$ et $a' = e^{\frac{\pi}{3}i}a = 0$; $b' = e^{\frac{\pi}{3}i}b$ et $c' = e^{\frac{\pi}{3}i}c$. Les points P, Q et R étant les milieux respectifs des segments [AB], [B'C] et [C'A], on peut écrire : $p = \frac{b}{2}$; $q = \frac{b'+c}{2} = \frac{e^{\frac{\pi}{3}i}b+c}{2}$ et $r = \frac{c'}{2} = e^{\frac{\pi}{3}i}\frac{c}{2}$.

a) **Faire une figure.**

b) $p - r = \frac{b}{2} - e^{\frac{\pi}{3}i}\frac{c}{2} = \frac{b - e^{\frac{\pi}{3}i}c}{2}$ et $q - r = \frac{e^{\frac{\pi}{3}i}b+c}{2} - e^{\frac{\pi}{3}i}\frac{c}{2} = e^{\frac{\pi}{3}i}(p - r)$. Donc RQ = $|q - r|$ RQ = $|q - r| = \left|e^{\frac{\pi}{3}i}(p - r)\right| = |p - r|$ = RP et $\left(\widehat{\overrightarrow{RP};\overrightarrow{RQ}}\right) = arg\left(\frac{q-r}{p-r}\right) = arg\left(e^{\frac{\pi}{3}i}\right) = \frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$; le triangle PQR a deux côtés de même longueur et un angle de 60°, donc PQR est équilatéral.

Exercice 49 : **On prendra 2 cm pour unité graphique. Soit A le point d'affixe *i* et B le point d'affixe 2.**

1.

a) Déterminer l'affixe du point B_1 image de B par l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.

b) Déterminer l'affixe du point B' image de B_1 par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

c) Placer les points A, B, B_1 et B'.

2. On appelle f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que z' = (1 + i)z + 1.

a) Montrer que B a pour image B' par *f*.

b) Montrer que A est le seul point invariant par *f*.

c) Établir que, pour tout z distinct de *i*, $\frac{z'-z}{i-z} = -i$.

d) Interpréter ce résultat en termes de distances, puis en termes d'angles.

e) En déduire une méthode de construction de M'à partir de M distinct de A.

3.

a) Déterminer l'ensemble E des points M du plan dont l'affixe z vérifie $|z-2| = \sqrt{2}$

b) Démontrer que z' – 3 – 2i = (1 + i)(z – 2).

c) En déduire que, si le point M appartient à E , alors son image M' par f appartient à un cercle F dont on précisera le centre et le rayon.

Tracer E et F.

Correction : $A(i)$ et $B(2)$.

1.

a) $h(A;\sqrt{2})$: $z_{B_1} - z_A = \sqrt{2}(z_B - z_A) \Leftrightarrow z_{B_1} = 2\sqrt{2} + i(1-\sqrt{2})$.

b) $r\left(A;\frac{\pi}{4}\right)$: $z_{B'} - z_A = e^{\frac{\pi}{4}i}(z_{B_1} - z_A) \Leftrightarrow z_{B'} = 3 + 2i$.

c) Placer les points A, B, B_1 et B'.

2. f : z' = (1 + i)z + 1.

a) $z' = (1+i)z_B + 1 = 3 + 2i = z_{B'}$ donc B a pour image B' par *f*.

b) Point invariant $z' = z \Leftrightarrow z = (1+i)z + 1 \Leftrightarrow z = i$, donc A est le seul point invariant par *f*.

c) $\frac{z'-z}{i-z} = \frac{(1+i)z+1-z}{i-z} = \frac{iz+1}{i-z} = \frac{-i(-z+i)}{i-z} = -i.$

d) Interpréter ce résultat en termes de distances, puis en termes d'angles : $\left|\frac{z'-z}{i-z}\right| = \frac{MM'}{MA} = |-i| = 1 \Leftrightarrow MM' = MA$ et $arg\left(\frac{z'-z}{i-z}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MM'}}\right) = arg(-i) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

e) Pour construire le point M', on trace le cercle de centre M et de rayon MA, puis on trace la perpendiculaire à (MA) passant par M; cette droite coupe le cercle en M'.

3.

a) L'ensemble E des points M du plan dont l'affixe z vérifie $|z-2| = \sqrt{2}$ est le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{2}$.

b) $z' - 3 - 2i = (1+i)z + 1 - 3 - 2i = (1+i)(z-2)$.

c) $Si\ M \in E \Leftrightarrow |z' - 3 - 2i| = |z' - z_{B'}| = |(1+i)(z-2)| = |1+i| \times |z-2| = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$. Ainsi l'image M' de M par f appartient au cercle F de centre B' et de rayon 2.

Exercice 50 : **On considère le triangle direct ABC rectangle en A et H le pied de la hauteur issue de A.**

1. Faire une figure et la compléter au fur et à mesure.

2. On note I et J les centres des cercles inscrits des triangles AHB et AHC.

a. Démontrer qu'il existe une similitude directe S qui transforme AHB en AHC.

b. Préciser les éléments caractéristiques de S.

c. Démontrer que S(I) = J.

d. Quelle est la nature du triangle HIJ ? Justifier.

3. Montrer que les droites (BI) et (AJ) sont perpendiculaires.

4. Déterminer le centre et l'angle de la similitude S' qui transforme HIJ en AHB.

5. Déterminer l'angle entre les droites (IJ) et (AB).

6. Soit K le centre du cercle inscrit du triangle ABC. Montrer que les points B, I et K sont alignés.

Correction : On considère le triangle direct ABC rectangle en A et H le pied de la hauteur issue de A.

1. Faire une figure et la compléter au fur et à mesure

2. On note I et J les centres des cercles inscrits des triangles AHB et AHC.

a) Démontrons qu'il existe une similitude directe S qui transforme AHB en AHC : Les triangles AHB et AHC ont un côté commun [AH], les angles $\widehat{AHB}$ et $\widehat{AHC}$ de même mesure ; les angles $\widehat{HAB}$ et $\widehat{ACH}$ sont complémentaires du même angle $\widehat{CAH}$, donc ils sont de même mesure. Donc les troisièmes angles $\widehat{HBA}$ et $\widehat{CAH}$

sont de même mesure. Donc les triangles AHB et AHC sont semblables. De plus, les angles orientés $(\widehat{\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HA}})$ sont égaux. Ainsi, il existe une similitude directe S qui transforme AHB en AHC.

b) Le centre de S est le point H; l'image de A est le point C et l'image de B est le point A. Comme $(\widehat{\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HC}}) = \frac{\pi}{2}$, alors l'angle de S est $\frac{\pi}{2}$. Le rapport de S est égal à $\frac{HC}{HA} = \frac{HA}{HB}$.

c) Une similitude directe conserve les angles, donc l'image d'une bissectrice est une bissectrice, donc l'image du point d'intersection de deux bissectrices est le point d'intersection des bissectrices images. Ainsi, S(I) = J.

d) Si S(I) = J, alors $\frac{HJ}{HI} = \frac{HA}{HB}$ et $(\widehat{\overrightarrow{HJ}, \overrightarrow{HI}}) = \frac{\pi}{2}$Donc le triangle HIJ est rectangle en H.

3. On sait que S(B) = A et que S(I) = J, donc l'image de la droite (BI) par s est la droite (AJ). Donc les droites (BI) et (AJ) sont perpendiculaires.

4. La droite (HJ) est la bissectrice de l'angle $\widehat{AHC}$ qui est un angle droit, donc $\widehat{AHJ} = \frac{\pi}{4}$. De même, $\widehat{BHI} = \frac{\pi}{4}$. Donc le centre de la similitude S' qui transforme HIJ en AHB est H et l'angle égal $\frac{\pi}{4}$.

5. L'image de la droite (IJ) par S' est la droite (AB), donc l'angle entre les droites (IJ) et (AB) est égal à l'angle de la similitude S', soit $\frac{\pi}{4}$.

6. Si K est le centre du cercle inscrit du triangle ABC, alors K est sur la bissectrice de $\widehat{HBA}$, ainsi que le point I, centre du cercle inscrit de AHB. Donc les points B, I et K sont alignés.

<u>**Exercice 51 :**</u>

1. Montrer qu'une similitude plane qui laisse invariants trois points non alignés du plan est l'identité du plan.

2. On considère un carré ABCD direct de centre O.

a) Préciser l'angle et le rapport de la similitude S de centre A qui transforme B en O.

b) Quelle est l'image de C par S ?

c) Quelle est l'image de la droite (BC) par S ?

d) Quelle est l'image du milieu I de [BC] par S ?

e) Donner l'écriture complexe de S dans le repère orthonormé direct $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

<u>**Correction :**</u>

1. Soient A, B, C ces trois points non alignés invariants par S. Soit M un point quelconque du plan. Si S(M) = M, alors S est l'identité du plan. Sinon, soit M' = S(M) distinct de M. Comme S(A) = A et S(B) = B, alors le rapport k de s vérifie AB = kAB, donc k = 1. Ainsi AM' = AM, BM' = BM et CM' = CM. Donc les trois points A, B, C sont sur la médiatrice de [MM'], donc ils sont alignés, ce qui est absurde. Donc S = Id (l'identité du plan). 2.

2. un carré ABCD direct de centre O.

a) ABCD est un carré direct de centre O, donc$(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AO}}) = \frac{\pi}{4}$. Et $AO = \frac{1}{2}AC = \frac{\sqrt{2}}{2}AB$. Donc l'angle de la similitude s est $\frac{\pi}{4}$ et le rapport est $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) L'image de C par S est le point D, car $(\widehat{\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}}) = \frac{\pi}{4}$. Et $AD = \frac{\sqrt{2}}{2}AC$.

c) Les images des points B et C par S sont les points O et D, donc l'image de la droite (BC) par S est la droite (OD).

d) L'image du milieu I de [BC] par S est le milieu du segment [OD].

e) Dans le repère orthonormé direct $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, les affixes de A, B, C, D et O sont respectivement 0, 1, 1 + i, i et $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$. L'écriture complexe de s dans le repère orthonormé direct $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est de la forme $z' = az + b$. Comme A est le centre de la similitude, $b = 0$ et $a = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}i} = \frac{1+i}{2}$; donc $z' = \left(\frac{1+i}{2}\right)z$.

<u>**Exercice 52 :**</u> **Soit A, B, C et D les points du plan complexe d'affixes respectives : $z_A = -\sqrt{3} - i$, $z_B = 1 - i\sqrt{3}$; $z_C = \sqrt{3} + i$ et $z_D = -1 + i\sqrt{3}$.**

1. Placer les points A, B, C, et D.

2. Donner le module et un argument pour, chacun des quatre nombres complexes z_A, z_B, z_C et z_D.

3. Déterminer la nature du quadrilatère ABCD.

4. On considère la rotation *r* de centre *B* et d'angle $-\frac{\pi}{3}$. Soient E et F les points du plan définis par : *E* = *r* (*A*) et *F* = *r* (*C*).

a) Donner l'écriture complexe de *r*.

b) Déterminer l'affixe du point *E*.

c) Placer les points E et F.

<u>**Correction :**</u> $A(-\sqrt{3} - i)$, $B(1 - i\sqrt{3})$; $C(\sqrt{3} + i)$ et $D(-1 + i\sqrt{3})$.

1. Placer les points A, B, C, et D.

2. $z_A = -\sqrt{3} - i = 2e^{-\frac{5\pi}{6}i}$, $z_B = 1 - i\sqrt{3} = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$, $z_C = \sqrt{3} + i = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$ et $z_D = -1 + i\sqrt{3} = 2e^{\frac{2\pi}{3}i}$.

3. Le quadrilatère *ABCD* est un rectangle (c'est un parallélogramme car ses diagonales se coupent en leur milieu et les deux diagonales sont de même longueur). C'est même un carré car les diagonales sont à angle droit (calculer l'angle).

4. $r\left(B; -\frac{\pi}{3}\right)$. Soient *E* et *F* les points du plan définis par : *E* = *r* (*A*) et *F* = *r* (*C*).

a) $r\left(B;-\frac{\pi}{3}\right): z'-z_B=e^{-\frac{\pi}{3}i}(z-z_B) \Leftrightarrow z'=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z+1.$

b) $z_E=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z_A+1=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-\sqrt{3}-i+1=2-3+i.$

c) $z_F=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z_C+1=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\sqrt{3}+i)+1=2+\sqrt{3}-i.$

<u>**Exercice 53 :**</u> **Unité graphique : 0,5 cm. On note *j* le nombre complexe $e^{\frac{2\pi}{3}i}$. On considère les points *A*, *B* et *C* d'affixes respectives *a* = 8, *b* = 6*j* et *c* = 8j^2. Soit *A'* l'image de *B* par la rotation de centre *C* et d'angle $\frac{\pi}{3}$, *B'* l'image de *C* par la rotation de centre *A* et d'angle $\frac{\pi}{3}$, *C'* l'image de *A* par la rotation de centre *B* et d'angle $\frac{\pi}{3}$.**

1. **Placer les points *A*, *B*, *C*, *A'*, *B'* et *C'*.**
2. **On appelle *a'*, *b'* et *c'* les affixes respectives des points *A'*, *B'* et *C'*.**

b) Calculer *a'*. On vérifiera que *a'* est un nombre réel.

c) Montrer que $b'=16e^{\frac{\pi}{3}i}$. En déduire que O est un point de la droite (*BB'*).

d) On admet que $c'=7+7i\sqrt{3}$. Montrer que les droites (*AA'*), (*BB'*) et (*CC'*) sont concourantes en O.

3. On se propose désormais de montrer que la distance MA+MB+MC est minimale lorsque M = O.

b) Calculer la distance OA + OB + OC.

c) Montrer que j^3 = 1 et que 1+ *j* + j^2 = 0.

d) On considère un point *M* quelconque d'affixe *z* du plan complexe. On rappelle que *a* = 8, *b* = 6*j* et *c* = 8j^2. Déduire des questions précédentes les égalités suivantes : $|(a-z)+(b-z)j^2+(c-z)j|=|a+bj^2+cj|=22.$

e) On admet que, quels que soient les nombres complexes *z*, $|z+z'+z''|\le|z|+|z'|+|z''|$. Montrer que MA+MB+MC est minimale lorsque M = O.

<u>**Correction :**</u> $j=e^{\frac{2\pi}{3}i}$.

1. **Placer les points *A*, *B*, *C*, *A'*, *B'* et *C'*.**
2.

a) $a'-c=6e^{\frac{\pi}{3}i}(b-c) \Leftrightarrow a'=-14.$

b) $b'-a=6e^{\frac{\pi}{3}i}(c-a) \Leftrightarrow b'=8+8e^{\frac{\pi}{3}i}\left(e^{-\frac{2\pi}{3}i}-1\right)=16e^{\frac{\pi}{3}i}$. **Déduction de O est un point de la droite (*BB'*) :** $\left(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OB'}}\right)=arg\left(\frac{b'}{b}\right)=-\frac{\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}=-\pi$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OB'}$ sont colinéaires et O est un point de la droite (*BB'*).

c) *A* et *A'* sont sur (*Ox*) ; *B*, *O* et *B'* sont alignes, il suffit de montrer que *C*, *O* et *C'* sont alignes : $c'=7+7i\sqrt{3}=14\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=14e^{\frac{\pi}{3}i}$ d'où $\left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OC'}}\right)=arg\left(\frac{c'}{c}\right)=\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}=\pi$, les droites (*AA'*), (*BB'*) et (*CC'*) sont concourantes en O.

3.

a) $OA+OB+OC=|a|+|b|+|c|=8+6+8=22.$

b) $j^3=\left(e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)^3=e^{2\pi i}=1$ et $1+j+j^2=1-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=0.$

c) $|(a-z)+(b-z)j^2+(c-z)j|=|a+bj^2+cj-z-zj-zj^2|=|a+bj^2+cj-z(1+j+j^2)|=|a+bj^2+cj|=22.$

d) Montrons que MA+MB+MC est minimale lorsque M = O : $|z+z'+z''|\le|z|+|z'|+|z''|$ avec $(a-z)$, $(b-z)j^2$ et $(c-z)j$
$|(a-z)+(b-z)j^2+(c-z)j|\le|(a-z)|+|(b-z)j^2|+|(c-z)j|$ or $|j|=1$ et $|a-z|+|b-z|+|c-z|=AM+BM+CM$, comme $|(a-z)+(b-z)j^2+(c-z)j|=|a+bj^2+cj|=22$, cette valeur est le minimum de *MA*+*MB*+*MC* et il est obtenu lorsque *z* = 0, soit lorsque *M* est en *O*.

Probabilités

Louange à Allah et que la prière et le salut soient sur le serviteur et Messager d'Allah, Muhammad, le meilleur que l'humanité est porté (malheur à ceux qui l'ont insultés et mentis sur lui.), sa famille et ses Compagnons.
Gloire à Dieu, mon Maitre Qui m'a tout donné et continue à me donner. Je n'ai de savoir de ce qu'Allah (soub hana wat tala), Le Tout Miséricordieux m'avait offert.
Seigneur pardonne nos péchés, fais-nous miséricorde, accepte nos bonnes œuvres et bénit nos actions. Ta parole est véridique.
Louange à Allah, Qui de Sa Grace, j'avais pu proposer cette œuvre Qui sans Lui, je ne serais pas à ce niveau. « Gloire et pureté à Toi, ô Allah, et à Toi la louange. Que ton Nom soit béni et Ta Majesté soit élevée, et il n'y a pas d'autre divinité [digne d'adoration] en dehors de Toi »

ALLAH MERCI

Auteur Moussa Abdoulaye Diallo

SMS 90 10 89 59

Probabilités

Dans la vie courante, il existe de nombreuses expériences dont le résultat n'est pas connu avec certitude. C'est l'objet de la théorie des probabilités que de fournir des modèles mathématiques permettant l'étude d'expériences dont le résultat n'est pas connu ou ne peut pas être prévu avec une totale certitude.
Selon le Petit Larousse, une probabilité est la *« mesure des chances de réalisation d'un événement aléatoire »*.
De façon générale, la théorie des probabilités modélise des situations concrètes et permet de calculer les probabilités d'événement.
En aval des probabilités, il y a les statistiques. Ils se chargent de confronter les modèles probabilistes à la réalité observée pour les valider ou les invalider.
Dans ce cours, conforme au programme nigérien en série D, nous verrons les outils probabilistes de base pour calculer des probabilités d'événements.
Nous définirons les lois classiques et nous étudierons leurs utilisations.

1. Vocabulaire ;

a) Rappel sur le dénombrement :

I. Factorielle d'un entier naturel :

Soit n un entier naturel.
Si n est non nul, on appelle « factorielle n » ou « factorielle de n », l'entier, noté $n!$, égal au produit de tous les entiers non nuls inférieurs ou égaux à n :

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$$

Remarque : *c'est aussi le nombre de listes sans répétition de n éléments d'un ensemble à n éléments (Une telle liste est appelée « permutation »).*

II. Notion de p-liste ou de p-uplet :

Si Ω est un ensemble fini de cardinal $n \in \mathrm{IN}^*$ et p un élément de IN^* vérifiant $1 \leq p \leq n$, on appelle p-liste ou p-uplet d'éléments de Ω une liste ordonnée d'éléments de Ω, distincts ou non. Le nombre de p-listes d'un ensemble à n éléments est n^p.

Listes avec répétition

A partir d'un ensemble à n éléments, on peut construire n^p listes avec répétition.

III. Arrangement :

Un arrangement est une collection de p objets pris successivement parmi n en tenant compte de l'ordre d'apparition. Il est dit simple si on ne peut prendre chaque objet qu'une fois au plus.
Si Ω est un ensemble fini de cardinal $n \in \mathrm{IN}^*$ et p un élément de IN^* vérifiant $1 \leq p \leq n$, on appelle arrangement de p éléments de Ω une p-liste d'éléments de Ω, deux à deux distincts. Le nombre d'arrangement de p d'éléments choisis parmi n éléments est $\mathrm{A}_n^p = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)$.

Listes sans répétition

A partir d'un ensemble à n éléments, on peut construire A_n^p listes sans répétition.

IV. Permutation :

Tout classement ordonné de n éléments distincts est une permutation de ces n éléments.
On désigne par Ω un ensemble n éléments. Une permutation des éléments de Ω est un arrangement de n éléments de Ω. Il y en a donc $\mathrm{A}_n^n = n\,!$

V. Combinaison :

Une combinaison est une collection de p objets pris simultanément parmi n, donc sans tenir compte de l'ordre d'apparition. Elle est dite simple si on ne peut prendre chaque objet qu'une fois au plus.
Si Ω est un ensemble fini de cardinal $n \in \mathrm{IN}^*$ et p un élément de IN^* vérifiant $1 \leq p \leq n$, on appelle « combinaison de p éléments de E » toute partie de E comportant p éléments.
Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble Ω à n éléments vaut : $\mathrm{C}_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

b) Vocabulaires probabilistes :

Probabilité : Lors d'une expérience, on cherche à mesurer par un réel la chance d'obtenir telle ou telle propriété caractérisant un événement. Lorsque l'expérience est répétée un grand nombre de fois, ce réel peut être la fréquence de l'événement qui est la probabilité recherché.
Univers : c'est un ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire, souvent noté Ω.
Exemple : *Pour le jet d'un dé* Ω ={1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6}
Epreuve : c'est une expérience. Exemple : lancer un dé, tirage d'une carte,…
Hasard : c'est une situation dont l'issue est imprévisible.
Expérience aléatoire : c'est une épreuve dont chaque résultat est lié au hasard.
Issu / évènement : c'est le résultat possible d'une expérience aléatoire. C'est aussi un sous ensemble de l'univers ou une partie de Ω.
Exemple : *Pour le jet d'un dé, soit A l'événement " obtenir un chiffre divisible par 3 " alors A=*{3; 6}.
Issu élémentaire / évènement élémentaire : c'est une issue à un seul élément. ***Exemple :*** *Pour le jet d'un dé,* {3} *et* {6} sont des événements élémentaires.
Evénement incompatible : Deux événements sont incompatibles si ils n'ont aucun résultat en commun, ce qui correspond à $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$:

$\mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B)$.
Exemple: *Pour le jet d'un dé,* A={2 ;4 ;6} et B ={1,3,5} sont incompatibles

Evénement contraire : C'est l'´evenement constitué des résultats n'appartenant pas à A.
$\mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(\bar{A}) = \mathrm{card}(\Omega)$. ***Exemple :*** *Pour le jet d'un dé, si A*={2 ;4 ;6} alors $\bar{A}$={1,3,5}
Terme « au moins une… » : C'est l'événement contraire de "au moins une …" est "aucune …".
Donc $p(\text{"au moins une ..."}) = 1 - p(\text{"aucune ..."})$.
Comparaison des vocabulaires ensemblistes et probabiliste :
La théorie moderne des probabilités utilise le langage des ensembles pour modéliser une expérience aléatoire.

Formules	Langage ensembliste	Langage probabiliste
Ω	Ensemble	Univers
$a \in \Omega$	Elément	Eventualité
$A \subset \Omega$	Sous-ensemble ou partie	Evénement
$\{a\}$	Singleton	Evénement élémentaire
Ω	Partie pleine	Evénement certain
$\emptyset$	Partie vide	Evénement impossible
$C = A \cup B$	Union de A et B	Evénement « A ou B »
$D = A \cap B$	Intersection de A et B	Evénement « A et B »
A et $\bar{A}$	Ensembles complémentaires	Evénements contraires
$A \cap B = \emptyset$	Ensembles disjoints	Evénements incompatibles

Il faut retenir que :
- ☒ une réunion ∪ s'interprète comme un « ou »,
- ☒ une intersection ∩ s'interprète comme un « et »,

5. Probabilité d'un événement :

Soit un univers Ω.
- La probabilité $p(A)$ d'un événement A de l'univers est la somme des probabilités des éventualités qui composent A;
- la probabilité de l'événement Ω certain est égale à 1 : $p(\Omega) = 1$;
- pour tout événement A, $0 \leq p(A) \leq 1$.

a) Cas général :

- Soit $A = \{A_1;\ A_2;\ A_3; ...;\ A_n\}$, on déduit que : $p(A) = p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) + \cdots + p(A_n)$.
- $p(\emptyset) = 0$; $p(\Omega) = 1$ et $p(A) + p(\bar{A}) = 1$.
- $p(A \cap B) + p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
- Si les événements A et B sont incompatibles alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

b) Equiprobabilité :

On dit qu'il y a équiprobabilité lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité.
On le mémorise souvent en disant que c'est le nombre de cas favorables divisé par le nombre de cas possibles.
$$p(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)}.$$

c) Tirage de boules ou jetons : $p \leq n$

Soit une urne contient n boules et on en tire p boules. Les boules sont par exemples numérotés ou bien de couleurs différentes.

☒ ***Tirage successif sans remise :***
Dans un tirage successif sans remise, on tire p boules de l'urne l'une, l'une après l'autre. Le nombre de résultats possibles est donné par A_n^p.

☒ ***Tirage successif avec remise :***
Dans un tirage successif avec remise, on tire une boule, on note son numéro (ou couleur), on la remet dans l'urne et on répète le même tirage à p fois. Le nombre de résultats possibles est donné par n^p.

☒ ***Tirage simultané :***
Dans un tirage simultané, on tire en une fois p boules de l'urne. Le nombre de résultats possibles est donné par C_n^p.

d) Formule des probabilités totales :

Les événements $B_1, B_2, \ldots, B_n$ forment une partition de Ω. Alors, pour tout événement A :
$$p(A) = p(A \cap B_1) + p(A \cap B_2) + \ldots + p(A \cap B_2),$$
$$p(A) = p_{B_1}(A) \times p(B_1) + p_{B_2}(A) \times p(B_2) + \ldots + p_{B_3}(A) \times p(B_3).$$

e) Indépendance :

Dire que deux événements A et B sont indépendants signifie que : p(A∩B) = p(A)×p(B).
La notion d'indépendance est une notion probabiliste, alors que la notion d'incompatibilité est une notion ensembliste.
À l'avenir, il ne faudra pas confondre (A et B indépendants) et (A et B incompatibles).

Remarques
☒ Il faut faire attention a ne pas confondre « être indépendants » et « être disjoints ».
En particulier deux événements A et B disjoints ne peuvent pas être indépendants quand ils sont de probabilités non nulles.
C'est clair intuitivement : avoir une information sur A, c'est en avoir une sur B (si A se réalise alors par disjonction B ne peut pas se réaliser).
☒ Il faut faire attention encore : l'indépendance de deux événements A et B n'est pas intrinsèque mais dépend de l'espace de probabilité (;F; P) utilise (c'est a dire du choix du modèle)

f) Conditionnement :

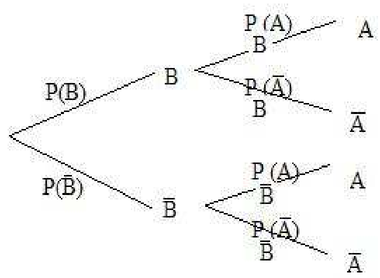
Le conditionnement a pour objet de répondre a la question suivante : comment se modifie la

probabilité d'un événement lorsque l'on connait déjà une information supplémentaire ?
Une probabilité est conditionnelle si elle est calculée « à condition » qu'un événement survienne.
Soient A et B sont deux événements avec $p(A) \neq 0$.
La probabilité de l'événement B sachant A, notée $p(B/A) = p_A(B)$, est définie par :
$p(B/A) = p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$.
On a alors les équivalences pour A et B de probabilités non nulles :

- $p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A) = p_B(A) \times p(B)$
- $p_A(B) + p_A(\overline{B}) = 1$.

L'arbre pondéré est un outil de calcul de probabilité conditionnelle. Ainsi il utile de le dresser afin de répondre à toutes les questions posées :

Arbre pondéré :



Définition :
Le schéma ci-dessus est appelé arbre pondéré ou arbre à probabilités. Il comporte 4 chemins : $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$. Un nœud est un point d'où partent plusieurs branches.
Propriété :
Dans un arbre pondéré ou arbre à probabilités comme ci-dessus, on doit définir que :

- La somme des probabilités portées sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.
Exemple $p_B(A) + p_B(\overline{A}) = 1$;
- la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités portées par ses branches.
Exemple $p(A \cap B) = p(B) \times p_B(A)$;
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui le compose.
Exemple $p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B})$.

3. Espace probabilisé fini :

Soit Ω un univers fini d'éventualités et p une probabilité définie sur $\mathscr{P}(\Omega)$.
On appelle ''*Probabilité* '' définie sur $\mathscr{P}(\Omega)$ toute application de $\mathscr{P}(\Omega)$ dans l'intervalle $[0; 1]$vérifiant les deux propriétés suivantes :

- $p(\Omega) = 1$;
- $\forall A \in \mathscr{P}(\Omega)$; $\forall B \in \mathscr{P}(\Omega)$;

$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

On appelle ''*espace probabilisé*''
le triplet $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p)$.

4. Variable aléatoire :

a) Définition :

Une variable aléatoire X définie sur Ω est une fonction qui à chaque élément de Ω fait correspondre un nombre réel.

- Soit X prend les valeurs $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ avec les probabilités p_1, p_2, p_3,…, p_n définies par : $p_i = p(X = x_i)$.
- L'ensemble des couples $(x_i; p_1)$ est appelé loi de probabilité de X. On la présente en général sous forme d'un tableau :

X	x_1	…	…	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	…	…	p_n

b) Espérance mathématique de X :

On appelle espérance mathématique de X le nombre réel noté $E(X)$ tel que :

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p(X = x_i).$$

c) Variance de X :

On appelle variance de X le nombre réel noté $V(X)$ tel que : $V(X) = [x_1 - E(X)]^2p_1 + [x_2 - E(X)]^2p_2 + \dots + [x_n - E(X)]^2p_n = \sum_{i=1}^{n}[x_i - E(X)]^2 p(X = x_i) = E(X^2) - [E(X)]^2$.
$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

d) Ecart-type de X :

On appelle variance de X le nombre réel noté $\sigma(X)$ tel que : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

5. Loi de probabilité :

Définir une loi de probabilité signifie donner la probabilité de chaque élément élémentaire, d'une expérience aléatoire donnée.
Lorsqu'une probabilité est associée à chaque événement possible, cette mesure est appelée loi de probabilité. On vérifie que : $\sum_{i=1}^{n} p(X = x_i) = 1$.

a) Loi de Bernoulli :

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui ne comporte que deux issues appelées succès (noté S) et échec (noté $\overline{S}$), de probabilités respectives p et 1 – p.
On appelle « loi de probabilité de Bernoulli » (ou « loi de Bernoulli ») la loi de probabilité associée à une expérience de Bernoulli. A l'issue « succès » on associe la valeur 1 de probabilité p et à l'issue « échec » on associe la valeur 0 de probabilité $q=1-p$.
On dit alors que la loi de Bernoulli est une « loi de Bernoulli de paramètre p ».
$p(X = 0) = 1 - p = q$ et $p(X = 1) = p$
$E(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p)$
$\sigma(X) = \sqrt{p(1 - p)}$.

b) **Loi binomiale :**

⌧⌧ **Un schéma de Bernoulli est la répétition d'épreuves de Bernoulli identiques dans des conditions d'indépendance.**

⌧⌧ **Un schéma de Bernoulli est constitué de n épreuves indépendantes. X est la variable aléatoire qui, à chaque liste de n résultats, associe le nombre de succès.**

⌧⌧ **La loi de probabilité de la variable aléatoire X est appelée loi binomiale de paramètre n et p. Cette loi est notée B (n ; p).**

$p(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$ **avec** $n \geq k$

$E(X) = np$ **et** $V(X) = np(1 - p)$.

$\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$.

6. **Fonction de répartition :**

La fonction de répartition F est la fonction de IR vers $[0; 1]$ **qui à tout** x **associe la probabilité que X soit inférieur ou égal à** x **:** $F(x) = p(X \leq x)$.

Méthodes de calcul :

Comment reconnaitre un cas d'équiprobabilité ?

Dans l'énoncé, on reconnait les termes :

⌧ **éléments élémentaires ayant la même probabilité soit d'être choisis ou soit d'apparition**

⌧ **tirage au hasard**

⌧ **dé parfait ou équilibré ou non truqué ou non pipé**

Comment calculer une probabilité p(A) ?

⌧ **soit on la retrouve dans l'énoncé.**

⌧ **soit on applique la formule d'équiprobabilité qui correspond à** $p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$ **en dénombrant tous les cas favorables à** A.

⌧ **On applique la formule des probabilités totales**

Comment montrer que deux (2) A et B des événements sont indépendants ?:

⌧ **on vérifie la formule** $p(A \cap B) = p(B) \times p(A)$.

Comment dresser un arbre pondéré (en probabilité conditionnelle) ?

⌧ **On lit l'énoncé et on fait un recueil des données : en général on vous donne des certaines probabilités dans l'énoncé p(A), p(B) …**$p_A(B)$ **… puis on dresse l'arbre pondéré** $\Longrightarrow$ **voir son cours, précédent**

Comment calculer une probabilité $p_B(A)$ ***?***

⌧ **On regarde si elle n'est pas donnée dans l'énoncé.**

⌧ **On applique la formule** $p_B(A) = \frac{p_B(A \cap B)}{P(B)}$.

Comment calculer une probabilité $p(A \cap B)$ ***?***

⌧ **soit on la retrouve dans l'énoncé.**

⌧ **Si on a un arbre, on applique la formule** $p(A \cap B) = p(B) \times p_B(A)$

⌧ **Si A et B sont indépendants, on applique la formule** $p(A \cap B) = p(B) \times p(A)$.

Comment déterminer la loi d'une variable aléatoire ?

⌧ **On tente de reconnaître une loi classique : loi de Bernoulli, loi binomiale…**

⌧ **Sinon, on cherche les valeurs k que peuvent prendre la variable aléatoire et on donne tous les probabilités sous formes de P(X = k).**

Comment reconnaît-on une loi binomiale ?

On repère des mots clés dans l'énoncé, par exemple :

⌧ **« X la variable aléatoire qui compte le nombre de … »**

⌧ **« on répète de manière identique et indépendante l'expérience… »**

Exercices sur la probabilité

<u>Exercice 1 :</u> Une enquête effectuée auprès de 10 personnes à Maiikégué portant sur les jeux de parties indique que :

- **51 jouent pour la partie A**
- **31 jouent pour la partie B**
- **18 jouent pour les parties A et B.**

Moussa choisit au hasard une personne.
Calculer la probabilité des événements suivants :
A : « la personne joue pour la partie A » ;
B : « la personne joue pour la partie B » ;
C : « la personne joue pour la partie A et B » ;
D : « la personne joue pour la partie A ou B » ;
E : « la personne joue uniquement la partie A » ;
F : « la personne joue uniquement la partie B » ;
G : « la personne joue uniquement la partie A et B »
H : « la personne joue ni pour A ou B ».

<u>Correction :</u> $\mathrm{Card}(\Omega) = 100$

A : « la personne joue pour la partie A » ;
$\mathrm{Card}(A) = 51$, alors $p(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{51}{100} = 0{,}51$
B : « la personne joue pour la partie B »
$\mathrm{Card}(B) = 31$, alors $p(B) = \frac{\mathrm{Card}(B)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{31}{100} = 0{,}31$
C : « la personne joue pour la partie A et B »
$\mathrm{Card}(C) = 18$, alors $p(C) = \frac{\mathrm{Card}(C)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{18}{100} = 0{,}18$
D : « la personne joue pour la partie A ou B ».
$\mathrm{Card}(D) = \mathrm{Card}(\Omega) - \mathrm{Card}(C) = 100 - 18 = 82$,
alors $p(D) = \frac{\mathrm{Card}(D)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{82}{100} = 0{,}82$.
E : « la personne joue uniquement la partie A »
$\mathrm{card}(E) = \mathrm{Card}(A) - \mathrm{Card}(C) = 33$,
alors $p(E) = \frac{\mathrm{Card}(E)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{33}{100} = 0{,}33$
F : « la personne joue uniquement la partie B »
$\mathrm{card}(F) = \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(C) = 13$,
alors $p(F) = \frac{\mathrm{Card}(F)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{13}{100} = 0{,}13$
G : « la personne joue uniquement la partie A et B »
$\mathrm{Card}(G) = \mathrm{Card}(C) = 18$, alors $p(G) = 0{,}18$
H : « la personne joue ni pour A ou B » :
$p(H) = \frac{\mathrm{Card}(H)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{100-33-18-13}{100} = 0{,}36.$

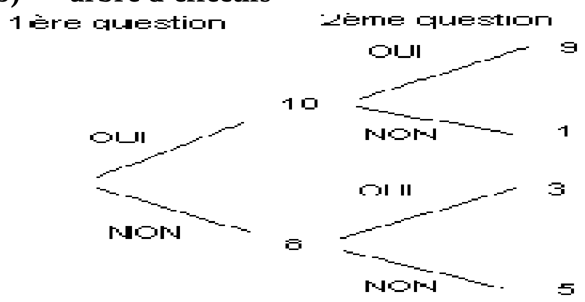
<u>Exercice 2 :</u> Au Niger, le Président M. Tanga réorganise un référendum le 04 aout 2010 afin de recueillir les avis de son peuple qui était jusque là divisé par rapport un projet de « refondation » communément appelé « Tazartché ». Se trouvant à l'extérieur du pays, l'opposant, Mr Mahamadou Issoufou a retrouvé dix-huit (18) personnes vivant à l'étranger. Il leur a demandé de répondre soit par « oui » soit par « non » à chacune des questions suivantes :
<u>1^er question</u> **« Tanga a-t-il travaillé pendant les 10 ans passés de mandant officiel ? »**
<u>2^e question</u> **«Tanga doit-il continué pour 3 ans ? ».**
Sans aucune pression, les résultats ont montré que :

- **10 personnes ont répondu « oui » à la première question.**
- **6 personnes ont répondu « non » à la deuxième question.**
- **5 personnes ont répondu « non » aux deux questions.**

Moussa considère les événements suivants :
O_1 « oui à la 1^ere question posée »
O_2 « oui à la 2^e question posée »
N_1 « non à la 1^ere question posée »
N_2 « non à la 2^e question posée »
1. Représentez ces données
a) dans un tableau à double entrée que vous compléterez.
b) Par un arbre d'effectifs que vous compléterez.
2. Définissez et calculez la probabilité de ces événements élémentaires définis dans ce tableau.
<u>Correction :</u>
1. Tradition de l'exercice en utilisant les outils de dénombrement :
a) tableau à double entrée

1ere question / 2ème question	O_1	N_1	Total
O_2	9	3	12
N_2	1	**5**	**6**
Total	**10**	8	**18**

b) arbre d'effectifs



2. Vocabulaires probabilistes :
<u>Probabilité des événements suivants :</u>
O_1 « oui à la 1^ere question posée » $p(O_1) = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$
O_2 « oui à la 2^e question posée » $p(O_2) = \frac{12}{18} = \frac{2}{9}$
N_1 « non à la 1^ere question posée » $p(N_1) = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$
N_2 « non à la 2^e question posée » $p(N_2) = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$.
De ce fait, on déduit :

- Probabilité que Tanga continue sachant qu'il a bien travaillé précédemment est $p_{O_1}(O_2) = \frac{9}{10} = 0{,}9$.
- Probabilité que Tanga a travaillé sachant qu'il a fait sa refondation est $p_{O_2}(O_1) = \frac{9}{12} = 0{,}75$.

$\mathbf{O_1 \cap O_2}$ **:** « Oui Tanga a travaillé pendant les 10 ans passés et doit continuer sa refondation »

$p(O_1 \cap O_2) = p(O_1) \times p_{O_1}(O_2) = \frac{5}{9} \times \frac{9}{10} = 0{,}5$.

$\mathbf{N_1 \cap N_2}$ **:** « Non Tanga a travaillé pendant les 10 ans passés et doit continuer sa refondation »

$p(N_1 \cap N_2) = \frac{5}{18} = 0{,}277$.

<u>Exercice 3 :</u> Au Niger à l'assemblée nationale, une commission réunit 14 députés dont 10 hommes afin de présenter une feuille de route à la baisse de niveau des élèves. Parmi les hommes, il ya 5 hommes qui parlent la langue haoussa et 6 autres parlent la langue haoussa et zarma.

1. Un journaliste de la place en interroge un (1).

a) Donner l'effectif par catégorie.

b) Calculer la probabilité pour qu'il obtienne une personne zarma ou un homme.

6. Un autre journaliste de la place en interroge trois (3) par mouvance politique.

Calculer la probabilité pour qu'il obtienne 3 femmes parlant zarma si les interrogations sont réalisées :

a) avec répétition ;

b) sans répétition.

<u>Correction :</u> considérons les événements :

H « avoir interrogé un homme » ;

F « avoir interrogé une femme » ;

Ha « avoir interrogé une personne parlant haoussa »

Z « avoir interrogé une personne parlant zarma ».

1. Un journaliste de la place en interroge un (1).

a) Donnons l'effectif par catégorie

Les quatre données de l'énoncé permettent de remplir le tableau des effectifs : $\mathbf{card(\Omega) = 14}$

	H	**F**	**Total**
Ha	4	1	**5**
Z	**6**	3	9
Total	**10**	4	**14**

b) à partir de $\mathbf{card(Z \cup H) + card(Z \cap H) = card(Z) + card(H)}$, on en déduit

$\mathbf{p(Z \cup H) + p(Z \cap H) = p(Z) + p(H) \Leftrightarrow}$

$\mathbf{p(Z \cup H) = p(Z) + p(H) - p(Z \cap H) = \frac{9+5-6}{14} = \frac{4}{7}}$

2. On sait que $\mathbf{p(Z \cap F) = \frac{3}{14}}$.

a) avec répétition :

$\mathbf{p = [p(Z \cap F)]^3 = \left(\frac{3}{14}\right)^3 = 0{,}009839.}$

b) sans répétition :

$\mathbf{p = [p(Z \cap F)]^3 = \left(\frac{3}{14}\right)^3 = 98{,}4.10^{-4}.}$

<u>Exercice 4 :</u> Lors de la préparation d'un concours, un élève de kéché n'a étudié que 50 des 100 leçons. On a mis 100 papiers contenant chacune une question dans une urne, ces questions portant sur des leçons différentes.

A : « ne connaissant aucun de ces sujets » ;

B : « connaissant deux sujets » ;

C : « connaissant un et un seul de ces sujets » ;

D : « connaissant au moins un de ces sujets ».

1. Le candidat tire successif sans remise au hasard 2 papiers. Déterminer la probabilité de ces événements.

2. Le candidat tire simultanément au hasard 2 papiers. Déterminer la probabilité de ces événements.

<u>Correction :</u> $p(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$

1. Cas d'équiprobabilité, le nombre de tirages possibles est $\mathbf{Card(\Omega) = A_{100}^2 = 9900}$**.**

A : « ne connaissant aucun de ces sujets »

$Card(A) = A_{50}^2 = 2450$, alors $p(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = 0{,}247$

B : « connaissant deux sujets »

$Card(B) = A_{50}^2 = 2450$, alors $p(B) = \frac{Card(B)}{Card(\Omega)} = 0{,}247$.

C : « connaissant un et un seul de ces sujets »

$Card(C) = A_{100}^2 - A_{50}^1 A_{50}^1 = 7400$, $p(C) = 0{,}747$

D : « connaissant au moins un de ces sujets »

$Card(D) = A_{100}^2 - A_{50}^2 = 7450$, $p(D) = 0{,}752$.

2. Cas d'équiprobabilité, le nombre de tirages possibles est $\mathbf{Card(\Omega) = C_{100}^2 = 4950}$**.**

A : « ne connaissant aucun de ces sujets »

$Card(A) = C_{50}^2 = 1225$, alors $p(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{49}{198}$.

B : « connaissant deux sujets » $Card(B) = C_{50}^2 = 1225$, alors $p(B) = \frac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \frac{49}{198}$.

C : « connaissant un et un seul de ces sujets »

$Card(C) = C_{100}^2 - C_{50}^1 C_{50}^1 = 2450$,

alors $p(C) = \frac{Card(C)}{Card(\Omega)} = \frac{2450}{4950} = \frac{50}{99}$.

D : « connaissant au moins un de ces sujets »

$Card(D) = C_{100}^2 - C_{50}^2 = 3725$,

alors $p(D) = \frac{Card(D)}{Card(\Omega)} = \frac{3725}{4950} = \frac{149}{198}$.

<u>Exercice 5 :</u> Une assemblée de quinze (15) hommes et cinq (5) femmes élit un comité composé d'un

président, d'un vice-président, d'un secrétaire et d'un trésorier.

Calculer la probabilité des événements suivants :
A : « de former un comité de même sexe »
B : « de former un comité de sexe différent »
C : « un comité composé d'une présidente et d'un vice-président qui est un homme »
D : « avoir au moins une femme dans le comité ».
Correction : $\mathrm{Card}(\Omega) = A_{20}^{4} = 116280$
Probabilité des événements suivants :
A : « de former un comité de même sexe »
$\mathrm{Card}(A) = A_5^4 A_{15}^0 + A_{15}^4 A_5^0 = 32880$,
alors $p(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = 0{,}2827$.
B : « de former un comité de sexe différent »
$\mathrm{Card}(B) = 116280 - A_5^4 A_{15}^0 + A_{15}^4 A_5^0 = 83400$,
alors $p(B) = \frac{\mathrm{Card}(B)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = 0{,}7172$.
C : « un comité composé d'une présidente et d'un vice-président qui est un homme »
$\mathrm{Card}(C) = A_5^1 A_{15}^1 A_{18}^2 = 22950$,
alors $p(C) = \frac{\mathrm{Card}(C)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = 0{,}1973$.
D : « avoir au moins une femme dans le comité »
$\mathrm{Card}(A) = 116280 - A_5^0 A_{15}^4 = 83520$,
alors $p(D) = \frac{\mathrm{Card}(D)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = 0{,}7182$.

Exercice 6 : **Soit l'univers $\boldsymbol{\Omega = \{a,b,c\}}$. On suppose que l'on a défini une probabilité sur Ω telle que : $\boldsymbol{p(\{a,b\}) = \gamma}$; $\boldsymbol{p(\{b,c\}) = \alpha}$ et $\boldsymbol{p(\{a,c\}) = \beta}$. Montrer que l'on a $\boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma = 2}$.**

Correction : $\Omega = \{a,b,c\}$. On sait que $p(\Omega) = p(\{a\}) + p(\{b\}) + p(\{c\}) = 1$, alors comme $p(\{a,b\}) = p(\{a\}) + p(\{b\}) = \gamma$; $p(\{b,c\}) = p(\{b\}) + p(\{c\}) = \alpha$ et $p(\{a,c\}) = p(\{a\}) + p(\{c\}) = \beta$, on peut ajouter $p(\{a,b\}) + p(\{b,c\}) + p(\{a,c\}) = [p(\{a\}) + p(\{b\})] + [p(\{b\}) + p(\{c\})] + [p(\{a\}) + p(\{c\})] = \alpha+\beta+\gamma$ or $p(\{a,b\}) + p(\{b,c\}) + p(\{a,c\}) = 2[p(\{a\}) + p(\{b\}) + pc=\alpha+\beta+\gamma$ et $pa+pb+pc=1$, alors on en déduit que $\alpha+\beta+\gamma = 2$.

Exercice 7 : **Soit l'univers $\boldsymbol{\Omega = \{a,b,c,d\}}$. On suppose que l'on a défini une probabilité sur Ω telle que : $\boldsymbol{p(\{a,b,c\}) = \frac{4}{7}}$; $\boldsymbol{p(\{a,c\}) = \frac{1}{2}}$ et $\boldsymbol{p(\{b,c\}) = \frac{1}{3}}$. Déterminer $\boldsymbol{p(\{a\})}$; $\boldsymbol{p(\{b\})}$; $\boldsymbol{p(\{c\})}$ et $\boldsymbol{p(\{d\})}$.**

Correction : $\Omega = \{a,b,c,d\}$. On sait que $p(\Omega) = p(\{a\}) + p(\{b\}) + p(\{c\}) + p(\{d\}) = 1$, alors $p(\{a,b,c\}) = p(\{a\}) + p(\{b\}) + p(\{c\}) = \frac{4}{7}$. Si on remplace ces valeurs dans $p(\Omega)$, on aura $\frac{4}{7} + p(\{d\}) = 1 \Leftrightarrow p(\{d\}) = \frac{3}{7}$. $\begin{cases} p(\{a,c\}) = p(\{a\}) + p(\{c\}) = \frac{1}{2} \\ p(\{b,c\}) = p(\{b\}) + p(\{c\}) = \frac{1}{3} \end{cases}$ en additionnant, on aura $p(\{c\}) = \frac{5}{6} - \frac{4}{7} = \frac{11}{42}$ et on en déduit $\begin{cases} p(\{a\}) = \frac{1}{2} - p(\{c\}) = \frac{1}{2} - \frac{11}{42} = \frac{10}{42} = \frac{5}{21} \\ p(\{b\}) = \frac{1}{3} - p(\{c\}) = \frac{1}{3} - \frac{11}{42} = \frac{9}{126} = \frac{1}{14} \end{cases}$

Exercice 8 : **Soit l'univers $\boldsymbol{\Omega = \{a,b,c,d\}}$. On suppose que l'on a défini une probabilité sur Ω telle que : $\boldsymbol{p(\{a,b\}) = \frac{1}{4}}$; $\boldsymbol{p(\{b,c\}) = \frac{1}{3}}$ et $\boldsymbol{p(\{b\}) = \frac{1}{12}}$. Déterminer $\boldsymbol{p(\{a\})}$; $\boldsymbol{p(\{c\})}$ et $\boldsymbol{p(\{d\})}$.**

Correction : $\Omega = \{a,b,c,d\}$. On sait que $p(\Omega) = p(\{a\}) + p(\{b\}) + p(\{c\}) + p(\{d\}) = 1$, alors $p(\{a,b\}) = p(\{a\}) + p(\{b\}) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow p(\{a\}) = \frac{1}{4} - p(\{b\}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$; $p(\{b,c\}) = p(\{b\}) + p(\{c\}) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow p(\{c\}) = \frac{1}{3} - p(\{b\}) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$. Si on remplace ces valeurs dans $p(\Omega)$, on aura $\frac{5}{12} + p(\{d\}) = 1 \Leftrightarrow p(\{d\}) = \frac{7}{12}$.

Exercice 9 : **Diallo dispose d'un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Il note $\boldsymbol{p_i}$ la probabilité de l'évènement « le résultat du lancer est $\boldsymbol{i}$ ».**

1. Sachant que $\boldsymbol{p_2 = p_1}$; $\boldsymbol{p_3 = 3p_1}$; $\boldsymbol{p_4 = 2p_1}$; $\boldsymbol{p_5 = 2p_1}$ et $\boldsymbol{p_6 = 2p_3}$.
a) Calculer $\boldsymbol{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5}$ et $\boldsymbol{p_6}$.
b) Calculer la probabilité des événements :
A « obtenir un numéro pair » ;
B « obtenir un nombre premier » ;
C « obtenir les diviseurs de 6 ».
2. Diallo lance deux fois de suite ce dé en supposant qu'il est non pipé. Calculer la probabilité des événements suivants :
D « obtenir deux chiffres identiques » ;
E « obtenir le 1er chiffre est 6 » ;
F « obtenir une somme inférieure ou égale à 4 ».

Correction : d'un dé : $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ et p_i la probabilité de l'évènement « le résultat du lancer est i ».

1. Ici le dé est mal équilibré :
a) $p(\Omega) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = p_1 + p_1 + 3p_1 + 2p_1 + 2p_1 + 6p_1 = 15p_1 = 1 \Leftrightarrow p_1 =$

$\frac{1}{15}$ d'où on aura : $p_2 = \frac{1}{15}$; $p_3 = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$; $p_4 = \frac{2}{15}$; $p_5 = \frac{2}{15}$ et $p_6 = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.

b) A « obtenir un numéro pair »

$p(\text{A}) = p_2 + p_4 + p_6 = \frac{1+2+6}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$

B « obtenir un nombre premier »

$p(\text{B}) = p_1 + p_3 + p_5 = \frac{1+3+2}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.

C « obtenir les diviseurs de 6 »

$p(\text{C}) = p_1 + p_2 + p_3 + p_6 = \frac{1+1+3+6}{15} = \frac{11}{15}$.

2. **ici** $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = \frac{1}{6}$, or le lance 2 fois, on a $Card(\Omega) = 36$. Pour résoudre ce genre d'exercice, il est bon de dresser un tableau à double entré.

D « obtenir deux chiffres identiques »

$p(\text{D}) = p(\{1,1\}) + p(\{2,2\}) + p(\{3,3\}) + p(\{4,4\}) + p(\{6,6\}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

E « obtenir le 1er chiffre est 6 »

$p(\text{E}) = p(\{6,1\}) + p(\{6,2\}) + p(\{6,3\}) + p(\{6,4\}) + p(\{6,5\}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

F « obtenir une somme inférieure ou égale à 4 »

$p(\text{F}) = p(\{1,1\}) + p(\{1,2\}) + p(\{1,3\}) + p(\{2,1\}) + p(\{2,2\}) + p(\{3,1\}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

<u>**Exercice 10 :**</u> **Moussa dispose d'un dé cubique dont les faces sont numérotées respectivement : 6 ; 6 ; 6 ; 5 ; 4 ; 3. Il suppose que, lors d'un lancer, la probabilité d'apparition de chaque face est kx, avec x le numéro de la face et k étant un nombre réel.**

a) Déterminer k.

b) En déduire la probabilité de chaque du dé.

<u>**Correction :**</u>

a) Déterminons k : $p_k = kx$:

$p(\Omega) = p_6 + p_6 + p_6 + p_5 + p_4 + p_3 = 1 \Leftrightarrow$

$3 \times 3k + 5k + 4k + 3k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{21}$.

b) probabilité de chaque du dé :

$p_6 = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$; $p_5 = \frac{5}{21}$; $p_4 = \frac{4}{21}$ et $p_3 = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$.

<u>**Exercice 11 :**</u> **Au Niger, une conférence réunit 12 députés. Tous parlent haoussa, 5 parlent foulfouldé, 6 parlent zarma et 3 foulfouldé et zarma.**

On choisit au hasard et simultanément 3 députés.

1. **Calculer la probabilité des événements :**

A : « obtenir 3 députés parlant au moins haoussa » ;

B : avoir 3 députés parlant uniquement haoussa » ;

2. **Soit X la variable aléatoire qui à chaque groupe de 3 députés associe le nombre de députés parlant foulfouldé et zarma.**

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer la probabilité pour qu'il ait au moins 2 députés parlant foulfouldé et zarma.

c) Calculer l'espérance mathématique de X.

<u>**Correction :**</u> Choisir au hasard et simultanément 3 députés, ce qui donne $\mathbf{card(\Omega) = C_{12}^3 = 220.}$

1. **P**
robabilité des événements :

A : « obtenir 3 députés parlant au moins haoussa »

$\mathbf{6 + 5 - 3 = 8}$ **députés parlant au moins haoussa.**

$\text{card(A)} = \text{C}_8^3 = 56 \Leftrightarrow \text{p(A)} = \frac{56}{220} = 0{,}25454.$

B : avoir 3 députés parlant uniquement haoussa » ;

$\mathbf{12 - 8 = 4}$ **députés parlant uniquement haoussa.**

$\text{card(B)} = \text{C}_4^3 = 4 \Leftrightarrow \text{p(B)} = \frac{4}{220} = 0{,}01818.$

2. **X $\Longrightarrow$ 3 députés associe le nombre de députés parlant foulfouldé et zarma**

a) loi de probabilité de X

$\mathbf{X = \{0; 1; 2; 3\}.}$

$\text{p}(\text{X} = 0) = \frac{\text{C}_3^0 \times \text{C}_9^3}{\text{C}_{12}^3} = \frac{84}{220} = 0{,}381818$;

$\text{p}(\text{X} = 1) = \frac{\text{C}_3^1 \times \text{C}_9^2}{\text{C}_{12}^3} = \frac{108}{220} = 0{,}49090$;

$\text{p}(\text{X} = 2) = \frac{\text{C}_3^2 \times \text{C}_9^2}{\text{C}_{12}^3} = \frac{27}{220} = 0{,}12272$;

$\text{p}(\text{X} = 3) = \frac{\text{C}_3^3 \times \text{C}_9^0}{\text{C}_{12}^3} = \frac{1}{220} = 0{,}004545$.

b) Probabilité pour qu'il ait au moins 2 députés parlant foulfouldé et zarma $\text{p}(\text{X} \geq 2) = \frac{28}{220} = 0{,}127$

c) Espérance mathématique de X :

$\text{E(X)} = \frac{1}{220}(108 \times 1 + 27 \times 2 + 3) = \frac{165}{220} = 0{,}75.$

VI. <u>Lancer de pièce de monnaie :</u>

Une pièce de monnaie possède deux faces : pile, notée « P » et face, notée « F ».

<u>**Exercice 12 :**</u> ***Lancer d'une (1) pièce de monnaie***

Moussa joue à pile (P) ou face (F) avec une (1) pièce de monnaie mal équilibrée qui tombe sur face trois fois sur sept.

1. **Il lance une fois de suite cette pièce. Calculer la probabilité de tous les éléments élémentaires.**
2. **Il lance 10 fois de suite cette pièce, calculer la probabilité des événements suivants :**

A « obtenir des résultats uniques » ;

B « obtenir au moins une fois face » ;

C « obtenir au moins deux fois faces » ;

D « obtenir au plus une fois pile » ;

E « obtenir au plus deux fois piles » ;

F « obtenir cinq (5) fois piles » ;

G « obtenir au moins cinq (5) fois piles » ;

H « obtenir autant de fois pile que de fois face ».

3. **Il part chez son cousin et ils définissent un jeu**

- **Si elle retombe sur pile, il gagne 2 points ;**
- **Si elle retombe sur face, il perd 3 points.**

Soit X la variable aléatoire égale au gain (éventuel - lement négatif) à l'issue de ce jeu.
Quelles sont les valeurs prises par X ?
Etablir la loi de probabilité de X.
a) à l'issue d'une partie.
b) à l'issue de 10 parties.

<u>Correction :</u> Pièce de monnaie mal équilibrée qui tombe sur face trois fois sur sept.

1. $\mathbf{p(F)} = \frac{3}{7}$ et $\mathbf{p(P) = 1 - p(F)} = \frac{4}{7}$.

2. ***<u>Lancer de 10 fois cette pièce de monnaie</u>***

Probabilité des événements suivants :
Nous somme dans un cas de **loi binomiale** de paramètre $[n = 10;\ \mathrm{p(F)}\ \text{ou}\ \mathrm{p(P)}]$ dont la probabilité est en générale $\mathrm{p(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}$ avec $\mathrm{n \geq k}$.

A « obtenir des résultats uniques »
Si on a 10 fois **« F »** $\mathrm{p(A)} = \mathrm{C_{10}^{10}}\left(\frac{3}{7}\right)^{10}\left(\frac{4}{7}\right)^{10-10} = \frac{3^{10}}{7^{10}}$
Si on a 10 fois **« P »** $\mathrm{p(A)} = \mathrm{C_{10}^{10}}\left(\frac{4}{7}\right)^{10}\left(\frac{3}{7}\right)^{10-10} = \frac{4^{10}}{7^{10}}$.

B « obtenir au moins une fois face »
C'est l'événement « $1 - "aucune\ face"$ ».
$$\mathrm{p(B) = p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0)} =$$
$$= 1 - \mathrm{C_{10}^{0}}\left(\frac{3}{7}\right)^{0}\left(\frac{4}{7}\right)^{10} = 1 - \frac{4^{10}}{7^{10}} = \frac{7^{10} - 4^{10}}{7^{10}} = 0{,}9962.$$

C « obtenir au moins deux fois faces »
$\mathrm{p(C) = p(X \geq 2) = 1 - p(X \leq 1) = 1 - [p(X = 0) +}$ pX=1=1−C1003704710−C101371479=1−410710 −30×49710=0,9683.

D « obtenir au plus une fois pile »
$\mathrm{p(D) = p(X = 0) + p(X = 1)} = \mathrm{C_{10}^{0}}\left(\frac{4}{7}\right)^{0}\left(\frac{3}{7}\right)^{10} + \mathrm{C_{10}^{1}}\left(\frac{4}{7}\right)^{1}\left(\frac{3}{7}\right)^{9} = \frac{3^{10}}{7^{10}} + \frac{40\times 3^{9}}{7^{10}} = 0{,}00299.$

E « obtenir au plus deux fois piles »
$\mathrm{p(E) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) = p(D) + p(X = 2)} = 0{,}00299 + \mathrm{C_{10}^{2}}\left(\frac{4}{7}\right)^{2}\left(\frac{3}{7}\right)^{8} = 0{,}0176.$

F « obtenir cinq (5) fois piles »
$\mathrm{p(F) = p(X = 5)} = \mathrm{C_{10}^{5}}\left(\frac{4}{7}\right)^{5}\left(\frac{3}{7}\right)^{5} = 0{,}11099.$

G « obtenir au moins cinq (5) fois piles »
$\mathrm{p(G) = p(X \geq 5) = 1 - p(X \leq 4) = 1 - [p(X = 0) +}$ pX=1+pX=2+pX=3+pX=4+pX=5=1−pE− $\mathrm{p(X = 3) - p(X = 4) - p(F)} = 0{,}78413.$

H « obtenir autant de fois pile que de fois face »
$\mathrm{p(H) = p(X = 5)} = \mathrm{C_{10}^{5}}\left(\frac{4}{7}\right)^{5}\left(\frac{3}{7}\right)^{5} = 0{,}11099.$

3. **X la variable aléatoire égale au gain**

a) <u>à l'issue d'une partie :</u> $\mathbf{X = \{-3; 2\}}$.
Loi de probabilité de X
$\mathrm{p(X = -3)} = \frac{3}{7}$ et $\mathrm{p(X = 2)} = \frac{4}{7}$.

b) <u>à l'issue de 10 parties :</u> $\mathbf{X = \{-30; 20\}}$.
Loi de probabilité de X
$\mathrm{p(X = -30)} = \left(\frac{3}{7}\right)^{10} = \frac{3^{10}}{7^{10}} = 0{,}0002090.$
$\mathrm{p(X = 20)} = \left(\frac{4}{7}\right)^{10} = \frac{4^{10}}{7^{10}} = 0{,}003712.$

<u>Exercice 13 :</u> ***Lancer d'une (1) pièce de monnaie***
Diallo lance une (1) pièce de monnaie discernable et non truquée.

1. **Il lance deux fois une pièce et on considère les événements.**

$\mathbf{A_1}$ **: « Obtenir deux fois le même résultat » ;**
$\mathbf{A_2}$ **: « Avoir une face au premier lancer » ;**
$\mathbf{A_3}$ **: « Avoir au moins une face ».**

a) Etablir l'ensemble Ω des éventualités pour ce jeu. Donner un espace probabilisé fini associé à cette situation.
b) Calculer les probabilités de $\mathbf{A_1, A_2, A_3}$, $\mathbf{A_1 \cap A_2}$ et $\mathbf{A_1 \cap A_3}$.
c) Montrer que les événements $\mathbf{A_1}$ et $\mathbf{A_2}$ sont indépendants ?

2. **Il lance $\boldsymbol{n}$ fois de suite cette pièce.**

a) Il suppose que $\boldsymbol{n = 4}$, calculer la probabilité des événements suivants :
A « obtenir au moins une fois face » ;
B « obtenir au moins deux fois faces » ;
C « obtenir au plus une fois pile » ;
D « obtenir au plus deux fois piles » ;
E « obtenir autant de fois pile que de fois face ».
b) Déterminer la plus petite valeur de $\boldsymbol{n}$ pour que la probabilité d'obtenir au moins une fois face soit supérieure à 0,98 à l'issue de $\boldsymbol{n}$ lancers ?

<u>Correction :</u> ***Lancer d'une (1) pièce de monnaie***

1. ***<u>lance deux fois une pièce</u>***

a) L'ensemble Ω des éventualités est $\mathbf{\Omega} = \{(\mathbf{P}); (\mathbf{F})\}^{\mathbf{2}} = \{(\boldsymbol{ff});\ (\boldsymbol{fp});\ (\boldsymbol{pf});\ (\boldsymbol{pp})\}$. Et le nombre de résultats obtenus est $\mathbf{card(\Omega) = 2^2 = 4}$. Comme la pièce de monnaie est discernable et non truquée **alors nous somme dans un cas d'équiprobabilité où** chaque face a la même probabilité d'apparition : $\mathbf{\frac{1}{4}}$.
Donc l'espace probabilisé est $\left(\mathbf{\Omega}, \mathscr{P}(\Omega), \frac{1}{4}\right)$

b) Probabilité des événements :
$\mathbf{A_1}$ **: « Obtenir deux fois le même résultat »,** $\mathrm{A_1} = \{(ff)(pp)\} \Longrightarrow \mathrm{card(A_1) = 2}$, et $\mathbf{p}(\mathrm{A}) = \frac{\mathbf{card(A_1)}}{\mathbf{card(\Omega)}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$
$\mathbf{A_2}$ **: « Avoir une face au premier lancer »** $\mathrm{A_2} = \{(ff)(fp)\} \Longrightarrow \mathrm{card(A_2) = 2}$, et $\mathbf{p}(\mathrm{A_2}) = \frac{\mathbf{card(A_2)}}{\mathbf{card(\Omega)}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$
$\mathbf{A_3}$ **: « Avoir au moins une face »**
$\mathrm{A_3} = \{(ff)(fp)(pf)\} \Longrightarrow \mathrm{card(A_3) = 3}$, donc $\mathbf{p}(\mathrm{A_3}) = \frac{\mathbf{card(A_2)}}{\mathbf{card(\Omega)}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$
$\mathbf{A_1 \cap A_2} = \{\boldsymbol{ff}\} \Longrightarrow \mathrm{card}(\mathbf{A_1 \cap A_2}) = 1$, donc $\mathbf{p(A_1 \cap A_2)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$ **;** $\mathbf{A_1 \cap A_3} = \{\boldsymbol{ff}\} \Longrightarrow$ $\mathrm{card}(\mathbf{A_1 \cap A_3}) = 1$, donc $\mathbf{p(A_1 \cap A_3)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$ **;**

c) On doit vérifier que $\mathbf{p(A_1 \cap A_2) = p(A_1) \times p(A_2)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ (vraie) alors les événements $\mathbf{A_1}$ et $\mathbf{A_2}$ sont indépendants.

2. ***Lancer n fois de suite cette pièce***

a) Probabilité des événements suivants : $n = 4$

Nous somme dans un cas de **loi binomiale** de paramètre $\left(n = 4;\ p = \frac{1}{2}\right)$ dont la probabilité est en générale $p(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$ avec $n \geq k$.

A « obtenir au moins une fois face »

C'est l'événement « $1 - "aucune\ face"$ ».

$$p(A) = p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) =$$

$= 1 - C_4^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 1 - \frac{1}{2^4} = \frac{15}{16} = 0{,}9375.$

B « obtenir au moins deux fois faces »

$p(B) = p(X \geq 2) = 1 - p(X \leq 1) = 1 - [p(X = 0) +$
pX=1=pA−C41121123=*0,6875.*

C « obtenir au plus une fois pile »

$p(C) = p(X = 0) + p(X = 1) = C_4^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 +$
$C_4^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{16} + \frac{4}{16} = \frac{5}{16} = 0{,}3125.$

D « obtenir au plus deux fois piles »

$p(D) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) = p(C) +$
$p(X = 2) = 0{,}3125 + C_4^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0{,}6875.$

E « obtenir autant de fois pile que de fois face »

$p(E) = p(X = 2) = C_4^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{16} = 0{,}375$..

b) Valeur prise par n si $p(X \geq 1) > 0{,}98$:

$p(X \geq 1) > 0{,}98 \Leftrightarrow 1 - C_n^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^n > 0{,}98 \Leftrightarrow$
$-\left(\frac{1}{2}\right)^n > -0{,}02 \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} < 0{,}02 \Leftrightarrow 2^n > \frac{1}{0{,}02} \Leftrightarrow$
$n \ln 2 > \ln\left(\frac{1}{0{,}02}\right) \Leftrightarrow\ n > 5{,}6438$, d'où $\boldsymbol{n = 5}$.

Exercice 14 : ***Lancer de deux (2) pièces***

Moussa lance deux (2) pièces de monnaies discernables et non truquées.

1. Etablir l'ensemble Ω des éventualités pour ce jeu. Donner un espace probabilisé fini associé à cette situation.

2. Calculer la probabilité des événements :

A « obtenir un résultat » ;

B « obtenir des résultats uniques » ;

C « obtenir au moins une face » ;

D « obtenir au moins deux faces » ;

E « obtenir au plus une pile » ;

F « obtenir au plus deux piles » ;

3. Il appelle X la variable aléatoire qui correspond au nombre de piles obtenues.

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

b) Etablir la loi de probabilité de X.

c) Expliquer la probabilité $p(X \geq 1)$.

d) Montrer que $E(X) = 1$. Que peut-on en conclure ?

e) Calculer la variance de X, notée V(X). En déduire l'écart type de X, notée $\sigma(X)$.

f) Donner la distribution de la fonction de répartition de X.

4. Moussa doit payer m francs pour un jeu :

- **S'il obtient 2 piles, il gagne 30 F ;**
- **S'il obtient une seule pile, il gagne 15 F ;**
- **Dans les autres cas, il perd 4 F.**

Il appelle Y la variable aléatoire égale au gain exprimé en fonction de m.

a) Quelles sont les valeurs prises par Y ?

b) Etablir la loi de probabilité de Y.

c) Montrer que $E(Y) = \frac{56-4m}{4}$.

d) Combien doit-il miser pour que son jeu soit équitable ?

Correction : ***Lancer de deux (2) pièces***

1. L'ensemble Ω des éventualités est $\boldsymbol{\Omega} = \{(\mathbf{PP}); (\mathbf{PF}); (\mathbf{FF})(\mathbf{FP})\}$. Et le nombre de résultats obtenus est $\mathbf{card(\Omega) = 2^2 = 4}$. Comme les pièces de monnaie sont discernables et non truquée**s alors nous somme dans un cas d'équiprobabilité où** chaque couple (p1 ; p2) obtenu lors du lancer a la même probabilité d'apparition $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{card(\Omega)}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$.

2. Probabilité des événements suivants :

A « obtenir un résultat » soit $A = \{(PP)\} \Longrightarrow$
$card(A) = 2^0 = 1$, donc $\mathbf{p(A)} = \frac{\mathbf{card(A)}}{\mathbf{card(\Omega)}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$.

B « obtenir des résultats uniques »

soit $B = \{(PP); (FF)\} \Longrightarrow\ card(B) = 2$,
donc $\mathbf{p(B)} = \frac{\mathbf{card(B)}}{\mathbf{card(\Omega)}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{4}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$.

C « obtenir au moins une face » c'est l'évènement $\mathbf{1 - "aucune\ face"}$**.** Soit $C = \{(FF); (FP); (PF)\}$
$\Longrightarrow\ card(C) = 3$, donc $\mathbf{p(C)} = \frac{\mathbf{card(C)}}{\mathbf{card(\Omega)}} = \mathbf{1} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$.

D « obtenir au moins deux faces » Soit $D = \{(FF)\}$
$\Longrightarrow\ card(D) = 1$, donc $\mathbf{p(D)} = \frac{\mathbf{card(D)}}{\mathbf{card(\Omega)}} = \mathbf{1} - \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$.

E « obtenir au plus une pile » 1 ou 0 (aucune)

$E = \{(FF); (PF)\} \Longrightarrow\ card(E) = 2$,
donc $\mathbf{p(E)} = \frac{\mathbf{card(E)}}{\mathbf{card(\Omega)}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{4}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$.

F « obtenir au plus deux piles » 0 ou1 ou 2

Soit $F = \{(FF); (FP); (PP)\} \Longrightarrow\ card(F) = 3$,
donc $\mathbf{p(F)} = \frac{\mathbf{card(F)}}{\mathbf{card(\Omega)}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$.

3. X ⟹ au nombre de piles obtenues.

a) $\mathbf{X = \{0; 1; 2\}}$

b) Loi de probabilité de X

$p(X = 0) = p\{(FF)\} = \frac{1}{4}$;

$p(X = 1) = p\{(PF); (FP)\} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$;

$p(X = 2) = p\{(PP)\} = \frac{1}{4}$.

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

c) Probabilité $\mathbf{p(X \geq 1)}$ est la probabilité d'obtenir au moins une pile : $\mathbf{p(X \geq 1)} = p(X = 1) +$
$p(X = 2) = 1 - p(X = 0) = \frac{3}{4}$.

d) $\mathbf{E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(X = x_i)}$.

$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i p(X = x_i) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1$ donc le jeu est favorable.

e) $\mathbf{V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2}$:

$\mathbf{V(X)} = 0^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{4} - 1^2 = \frac{1}{2} = 0{,}5$

$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{(X)} = \sqrt{\mathbf{V(X)}} \Longrightarrow \sigma(X) = \sqrt{0{,}5} = 0{,}707.$

f) Fonction de répartition de X

$\forall x \in \,]-\infty; 0[, \, F(x) = p(X < x) = 0$;

$\forall x \in \, [0; 1[, \, F(x) = p(X < x) = \frac{1}{4}$;

$\forall x \in \, [1; 2[, \, F(x) = p(X < x) = \frac{3}{4}$;

$\forall x \in \, [2; +\infty[, \, F(x) = 1.$

4. Y la variable aléatoire égale au gain exprimé en fonction de m.

a) valeurs prises par Y :

$\mathbf{X(\Omega) = \{(-4 - m); \, (15 - m); \, (30 - m)\}}$.

b) loi de probabilité de X :

$p(Y = -4 - m) = p\{(FF)\} = \frac{1}{4}$;

$p(Y = 15 - m) = p\{(PF); (FP)\} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$;

$p(Y = 30 - m) = p\{(PP)\} = \frac{1}{4}$.

y_i	$-4 - m$	$15 - m$	$30 - m$
$p(Y = y_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

c) l'espérance mathématique de Y :

$E(Y) = \frac{1}{4}(-4 - m + 30 - 2m + 30 - m) = \frac{56-4m}{4}$.

d) Valeur de $\boldsymbol{m}$ pour que son jeu soit équitable ?

$E(Y) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{56}{4} = 14$ F.

<u>Exercice 15 :</u> *Lancer de trois (3) pièces*

Moussa lance trois (3) pièces de monnaies discernables et non truquées.

1. Etablir l'ensemble Ω des éventualités pour ce jeu. En déduire le nombre de résultats obtenus.

2. Calculer la probabilité des événements :

A « obtenir un résultat » ;

B « obtenir des résultats uniques » ;

C « obtenir au moins une pile » ;

D « obtenir au moins deux piles » ;

E « obtenir au plus deux faces » ;

F « obtenir au plus trois faces » ;

3. Soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre de faces obtenues.

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

b) Etablir la loi de probabilité de X.

c) Calculer l'espérance mathématique : E(X).

d) Montrer que $\boldsymbol{\sigma(X) = 1,31}$.

e) Donner la distribution de la fonction de répartition de X.

4. On jette 10 fois de suite ces pièces. Calculer la probabilité d'obtenir au moins trois piles.

<u>Correction :</u> *Lancer de trois (3) pièces*

1. L'ensemble Ω des éventualités est $\mathbf{\Omega} = \{\mathbf{(PPP)}; \mathbf{(PPF)}; \mathbf{(PFP)}\mathbf{(FPP)}; \mathbf{(FFF)}; \mathbf{(FFP)}; \mathbf{(FPF)}; \mathbf{(PFF)}\}$

Et le nombre de résultats obtenus est $\mathbf{card(\Omega) = 8}$.

2. Probabilité des événements suivants :

A « obtenir un résultat » soit $A = \{(PPP)\} \Longrightarrow$ $card(A) = 1$, donc $\mathbf{p(A)} = \frac{\mathbf{card(A)}}{\mathbf{card(\Omega)}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}$.

B « obtenir des résultats uniques » soit $B = \{(PPP); (FFF)\} \Longrightarrow$ $card(B) = 2$, donc $\mathbf{p(B)} = \frac{\mathbf{card(B)}}{\mathbf{card(\Omega)}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{8}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$.

C « obtenir au moins une pile » c'est l'évènement $\mathbf{1 -}$ "*aucune pile*".

$C = \{(PPP); (PPF); (PFP)(FPP); (FFP); (FPF)(PFF)\}$

$\Longrightarrow$ $card(C) = 7$, donc $\mathbf{p(C)} = \frac{\mathbf{card(C)}}{\mathbf{card(\Omega)}} = \mathbf{1} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{8}}$.

D « obtenir au moins deux piles »

$D = \{(PPP); (PPF); (PFP); (FPP)\} \Longrightarrow$ $card(D) = 4$,

$\mathbf{p(D)} = \frac{\mathbf{card(D)}}{\mathbf{card(\Omega)}} = \mathbf{1} - \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{8}} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{8}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$.

E « obtenir au plus deux faces » 0 ou 1 ou 2

$E = \{(PPP); (PPF); (PFP)(FPP); (FFP); (FPF)(PFF)\}$

$\Longrightarrow$ $card(E) = 7$, donc $\mathbf{p(E)} = \frac{\mathbf{card(E)}}{\mathbf{card(\Omega)}} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{8}}$.

F « obtenir au plus trois faces » 0 ou1 ou 2 ou 3

$F = \left\{\begin{matrix}(PPP); (PPF); (PFP)(FPP); \\ (FFP); (FPF); (PFF); (FFF)\end{matrix}\right\} \Longrightarrow$ $card(F) = 8$,

donc $\mathbf{p(F)} = \frac{\mathbf{card(F)}}{\mathbf{card(\Omega)}} = \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{8}} = \mathbf{1}$.

3. X $\Longrightarrow$ au nombre de faces obtenues.

a) $\mathbf{X = \{0; 1; 2; 3\}}$

b) la loi de probabilité de X.

$p(X = 0) = p\{(PPP)\} = \frac{1}{8}$;

$p(X = 1) = p\{(PPF); (PFP)(FPP)\} = \frac{3}{8}$;

$p(X = 2) = p\{(FFP); (FPF)(PFF)\} = \frac{3}{8}$;

$p(X = 3) = p\{(FFF)\} = \frac{1}{8}$.

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

c) $\mathbf{E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(X = x_i)}$.

$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i p(X = x_i) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{9}{8} = 1{,}125$

d) $\mathbf{V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2} = 0^2 \times \frac{1}{8} + 1^2 \times \frac{3}{8} + 2^2 \times \frac{3}{8} + 3^2 \times \frac{1}{8} - \left(\frac{9}{8}\right)^2 = 1{,}73$.

$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{(X)} = \sqrt{\mathbf{V(X)}} \Longrightarrow \sigma(X) = \sqrt{1{,}73} = 1{,}31.$

e) Fonction de répartition de X

$\forall x \in \,]-\infty; 0[, \, F(x) = p(X < x) = 0$;

$\forall x \in \, [0; 1[, \, F(x) = p(X < x) = \frac{1}{8}$;

$\forall x \in \, [1; 2[, \, F(x) = p(X < x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{4}$;

$\forall x \in \, [2; 3[, \, F(x) = p(X < x) = \frac{7}{8}$;

$\forall x \in \, [3; +\infty[, \, F(x) = 1.$

4. Probabilité d'obtenir au moins trois piles :

$\boldsymbol{p}$ **« Obtenir au moins trois piles »** $\boldsymbol{p} = p\{(PPP)\} = \frac{1}{8}$

Loi binomiale de paramètre $\left(n = 10; \, p = \frac{1}{8}\right)$

$\mathbf{P = 1 - C_{10}^{3}\left(\frac{1}{8}\right)^{3}\left(\frac{1}{8}\right)^{7} = \frac{8^{10}-120}{8^{10}} = 0,9999.}$

Exercice 16 : ***Lancer de n pièces de suite***

A. Moussa lance n pièces de monnaies discernables et non truquées.

1. Déterminer le nombre de résultats obtenus.

2. Calculer la probabilité des événements :

A « obtenir un résultat » ;

B « obtenir des résultats uniques » ;

C « obtenir au moins une pile » ;

D « obtenir au plus une face ».

3. Soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre de piles obtenues.

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

b) Calculer la probabilité $p(X = 0)$.

B. Moussa lance 2*n* fois une pièce de monnaie équilibrée, où *n* est un entier naturel non nul.

1. A-t-on plus de chance d'obtenir 4 piles en lançant 8 fois la pièce que d'obtenir 6 piles en lançant 12 fois la pièce ?

2. On note P(*n*) la probabilité d'obtenir *n* piles en lançant 2*n* fois la pièce.

a) Exprimer P(*n*) en fonction de *n*.

b) Montrer que, pour $n \in IN^*$, $\frac{p(n+1)}{p(n)} = \frac{2n+1}{2(n+1)}$.

3. Il désigne par X le nombre de piles en lançant 2*n* fois la pièce.

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et préciser son espérance mathématique.

Correction : ***Lancer de n pièces (plusieurs pièces)***

A. ***lance n pièces de monnaies***

1. Nombre de résultats obtenus $\mathbf{card(\Omega) = 2^{n}}$.

2. Probabilité des événements suivants :

A « obtenir un résultat » soit $A = \{(\text{n pièces})\}$

$\Rightarrow \text{card}(A) = 1$, donc $\mathbf{p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{1}{2^{n}}}$.

B « obtenir des résultats uniques »

soit $B = \{(\text{n pièces de pile});\ (\text{n pièces de face})\}$

$\Rightarrow \text{card}(B) = 2$, donc $\mathbf{p(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{2}{2^{n}} = 2^{1-n}}$.

C « obtenir au moins une pile » c'est l'évènement contraire de l'évènement $\bar{C}$ « obtenir exactement une pile ». donc $\mathbf{p(C) = 1 - p(\bar{C}) = 1 - \frac{1}{2^{n}} = \frac{2^{n}-1}{2^{n}}}$.

D « obtenir au plus une face » 0 ou 1

$D = \{(\text{n pièces de pile});\ (\text{n pièces de face})\} \Rightarrow$ $\text{card}(D) = 2$, donc $\mathbf{p(D) = \frac{card(D)}{card(\Omega)} = \frac{2}{2^{n}} = 2^{1-n}}$.

3. X $\Rightarrow$ au nombre de piles obtenues.

a) $\mathbf{X = \{0; 1; 2; 3; \dots; n\}}$

b) Probabilité $\mathbf{p(X = 0)}$:

$p(X = 0) = p(\text{aucune pile}) = 1 - \frac{1}{2^{n}} = \frac{2^{n}-1}{2^{n}}$.

B. lance 2n fois une pièce de monnaie équilibrée, où n est un entier naturel non nul.

1. Il s'agit d'un schéma de Bernouilli avec 2*n* lancers et une probabilité de succès pour chaque lancer de $\frac{1}{2}$. La probabilité d'obtenir 4 piles en lançant 8 fois la pièce est $\mathbf{p(k = 4) = C_{8}^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{4} = \frac{70}{2^{8}} = \frac{35}{128} = \frac{280}{1024}}$ et la probabilité d'obtenir 6 piles en lançant 12 fois la pièce est $\mathbf{p(k = 6) = C_{12}^{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{6} = \frac{924}{2^{12}} = \frac{231}{1024}}$

$\mathbf{p(k = 6)} < p(\mathbf{k = 4})$ donc on a plus de chance d'obtenir 4 piles en lançant 8 fois la pièce que d'obtenir 6 piles en lançant 12 fois la pièce .

2. P(*n*) la probabilité d'obtenir *n* piles en lançant 2*n* fois la pièce.

a) Exprimons P(*n*) en fonction de *n* :

$P(n) = p(k = n) = C_{2n}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} = \frac{(2n)!}{n!\times n!\times 2^{2n}}$.

b) Montrons que, pour $n \in IN^*$, $\frac{p(n+1)}{p(n)} = \frac{2n+1}{2(n+1)}$:

$P(n+1) == C_{2n+2}^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!\times(n+1)!\times 2^{2(n+1)}} = \frac{(2n+2)(2n+1)\times(2n)!}{4(n+1)^{2}\times n!\times n!\times 2^{2n}}$.

$\frac{\mathbf{p(n+1)}}{\mathbf{p(n)}} = \frac{2(n+1)(2n+1)\times(2n)!n!\times n!\times 2^{2n}}{4(n+1)^{2}\times n!\times n!\times 2^{2n}(2n)!} = \frac{\mathbf{2n+1}}{\mathbf{2(n+1)}}$.

3. X le nombre de piles en lançant 2*n* fois la pièce

$X = k = \{0; 1; 2; 3; \dots; n\}$.

Loi de probabilité de la variable aléatoire X :

$p(X = k) = C_{2n}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}$.

Espérance mathématique : $E(X) = np$

Exercice 17 :

1. Diallo jette quatre (4) fois de suite une pièce. Il définit X la variable aléatoire qui correspond au nombre de faces obtenues.

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

b) Etablir la loi de probabilité de X.

c) Calculer l'espérance mathématique : E(X).

d) Calculer la variance de X, notée V(X). En déduire l'écart type de X, notée σ(X).

e) Donner la distribution de la fonction de répartition de X.

2. Diallo jette quatre (4) fois de suite deux (2) pièces. Soit Y la variable aléatoire qui correspond au nombre d'obtenir au moins une face.

a) Quelles sont les valeurs prises par Y ?

b) Etablir la loi de probabilité de Y.

c) Calculer l'espérance mathématique : E(Y).

d) Calculer la variance de Y, notée V(Y). En déduire l'écart type de Y, notée σ(Yy).

e) Donner la distribution de la fonction de répartition de Y.

Correction :

1. Nous somme dans un cas de **loi binomiale** de paramètre $\left(n = 4;\ p = \frac{1}{2}\right)$ dont la probabilité est en générale $p(X = x_i) = C_{n}^{k}p^{k}(1-p)^{n-k}$ avec $n \geq k$.

a) $\mathbf{X = k = \{0; 1; 2; 3; 4\}}$

b) Loi de probabilité de X.

$p(X = 0) = C_{4}^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{4-0} = \frac{1}{2^{4}} = \frac{1}{16}$;

$p(X = 1) = C_{4}^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{4-1} = \frac{4}{2^{4}} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$;

$p(X=2)=C_4^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\right)^{4-2}=\frac{6}{2^4}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$;
$p(X=3)=C_4^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1-\frac{1}{2}\right)^{4-3}=\frac{4}{2^4}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$;
$p(X=4)=C_4^4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(1-\frac{1}{2}\right)^{4-4}=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$.

x_i	0	1	2	3	4
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

c) Espérance mathématique :
$E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i p(X=x_i)=np$ (**Loi binomiale**).
$E(X)=4\times\frac{1}{2}=2$.

d) Variance de X : $\mathbf{V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=np(1-p)}$ et $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X})=\sqrt{\mathbf{np(1-p)}}$ (**loi binomiale**).
$V(X)=4\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=4\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=1$. $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X})=1$.

e) Distribution de la fonction de répartition de X
$\forall x\in\ ]-\infty;0[,\ F(x)=p(X<x)=0$;
$\forall x\in\ [0;1[,\ F(x)=p(X<x)=\frac{1}{16}$;
$\forall x\in\ [1;2[,\ F(x)=p(X<x)=\frac{5}{16}$;
$\forall x\in\ [2;3[,\ F(x)=p(X<x)=\frac{11}{16}$;
$\forall x\in\ [3;4[,\ F(x)=p(X<x)=\frac{15}{16}$;
$\forall x\in\ [4;+\infty[,\ F(x)=1$.

2. **A « obtenir au moins une face »** c'est l'événement $1-$ "$aucune\ face$". Soit $A=\{(FF);(FP);(PF)\}\Longrightarrow\ \mathrm{card}(A)=3$,
$\mathbf{p(A)=\frac{card(A)}{card(\Omega)}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}}$**, d'où** $\mathbf{p=p(A)=\frac{3}{4}}$.
Nous somme dans un cas de **loi binomiale** de paramètre $\left(n=4;p=\frac{3}{4}\right)$ dont la probabilité est en générale $p(Y=y_i)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ avec $n\geq k$.

a) $\mathbf{Y=\{0;1;2;3;4\}}$

b) Loi de probabilité de Y
$p(Y=0)=C_4^0\left(\frac{3}{4}\right)^0\left(1-\frac{3}{4}\right)^{4-0}=\frac{1}{4^4}=\frac{1}{256}$;
$p(Y=1)=C_4^1\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(1-\frac{3}{4}\right)^{4-1}=\frac{12}{4^4}=\frac{12}{256}$;
$p(Y=2)=C_4^2\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(1-\frac{3}{4}\right)^{4-2}=\frac{54}{4^4}=\frac{54}{256}$;
$p(Y=3)=C_4^3\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(1-\frac{3}{4}\right)^{4-3}=\frac{108}{4^4}=\frac{108}{256}$;
$p(Y=4)=C_4^4\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(1-\frac{3}{4}\right)^{4-4}=\frac{81}{4^4}=\frac{81}{256}$.

y_i	0	1	2	3	4
$p(Y=y_i)$	$\frac{1}{256}$	$\frac{12}{256}$	$\frac{54}{256}$	$\frac{108}{256}$	$\frac{81}{256}$

c) Espérance mathématique :
$E(Y)=\sum_{i=1}^{n}y_i p(Y=y_i)=np$ (**Loi binomiale**).
$E(Y)=4\times\frac{3}{4}=3$.

d) Variance de X : $\mathbf{V(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=np(1-p)}$ et $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{Y})=\sqrt{\mathbf{np(1-p)}}$ (**loi binomiale**).
$V(Y)=4\times\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}$. $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{Y})=0{,}86$.

e) Distribution de la fonction de répartition deY
$\forall y\in\ ]-\infty;0[,\ F(y)=p(Y<y)=0$;
$\forall y\in\ [0;1[,\ F(y)=p(Y<y)=\frac{1}{256}$;
$\forall y\in\ [1;2[,\ F(y)=p(Y<y)=\frac{13}{256}$;
$\forall y\in\ [2;3[,\ F(y)=p(Y<y)=\frac{67}{256}$;
$\forall y\in\ [3;4[,\ F(y)=p(Y<y)=\frac{175}{256}$;
$\forall y\in\ [4;+\infty[,\ F(y)=1$.

<u>Exercice 18 :</u> ***pièce de monnaie discernable et truquée***

Un (1) pièce de monnaie porte deux (2) côtés de faces numérotés par 1 et 2. Moussa lance 3 fois de suite cette pièce de monnaie truquée en formant le triplet $(1^{er}$ jet ; 2^{er} jet; 3^{er} jet$)=(x,y,z)$.
Il considère l'application p de $\mathscr{P}(\Omega)$ sur IR_+ qui est définie sur les événements élémentaires par $p(x,y,z)=a(x+y+z)+b$ avec $(a,b)\in IR^2$.

1. **Etablir l'ensemble Ω des éventualités.**
2. **Calculer les probabilités des éléments élémentaires de Ω.**
3. **En déduire que $p(\Omega)=36a+8b=1$.**
4. **Il considère les ensembles $A=\{(x,y,z)\in\Omega$ tel que x=1 et B=x, y, z∈Ω tel que x=2 et z=2. Trouver a et b pour que $p(A)=p(B)$.**
5. **Dans cette question, $(a,b)\in IR^2$ satisfait les conditions de la question 3, il appelle X la variable aléatoire pour tout élément (x,y,z) de Ω par :**

- **Si $x+y+z=3$ alors $X(x,y,z)=-2$;**
- **Si $x+y+z=4$ alors $X(x,y,z)=-1$;**
- **Si $x+y+z=5$ alors $X(x,y,z)=0$;**
- **Si $x+y+z=6$ alors $X(x,y,z)=4$.**

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
b) Etablir la loi de probabilité de X.
c) Calculer l'espérance mathématique : E(X).
d) Trouver a et b pour que le jeu soit équitable.

<u>Correction :</u>

1. **l'ensemble Ω des éventualités :**

Nombre de résultats obtenus $\mathbf{card(\Omega)=2^3=8}$.
L'ensemble **Ω** est défini par
$$\mathbf{\Omega=\begin{Bmatrix}(1;1;1);(1;1;2);\ (1;2;1);(2;1;1);\\(2;2;2);(2;2;1);(2;1;2);(1;2;2).\end{Bmatrix}}.$$

2. **Probabilités des éléments élémentaires de Ω :**

$\mathbf{p(x,y,z)=a(x+y+z)+b}$.
$p(1,1,1)=a(1+1+1)+b=3a+b$;
$p(1,1,2)=a(1+1+2)+b=4a+b$;
$p(1,2,1)=a(1+2+1)+b=4a+b$;
$p(2,1,1)=a(2+1+1)+b=4a+b$;
$p(2,2,2)=a(2+2+2)+b=6a+b$;
$p(2,2,1)=a(2+2+1)+b=5a+b$;
$p(2,1,2)=a(2+1+2)+b=5a+b$;

$p(1,2,2) = a(1+2+2) + b = 5a + b$.

3. Montrons que $p(\Omega) = 36a + 8b = 1$:

En ajoutant membre à membre ci-dessus, on aura :

$\mathbf{p(\Omega)} = 3a + 3 \times 4a + 6a + 3 \times 5a + 8b = 36a + b$.

or $\mathbf{p(\Omega)} = 1$ donc $\mathbf{p(\Omega) = 36a + 8b = 1}$.

4. $A = \{(x,y,z) \in \Omega \text{ tel que } x = 1\} = \{(\mathbf{1};\mathbf{1};\mathbf{1});(\mathbf{1};\mathbf{1};\mathbf{2});\ (\mathbf{1};\mathbf{2};\mathbf{1});(\mathbf{1};\mathbf{2};\mathbf{2})\} \Longrightarrow \text{card}(A) = 4 \Leftrightarrow p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{4}{36a+b}$ et $B = \{(x,y,z) \in$ Ω tel que x=2 et z=2=*2;2;2;2;1;2*⇔pB=cardBcardΩ=*2*36a+b.

D'une part $p(A) = p(1,1,1) + p(1,1,2) + p(1,2,2) = 16a + 4b$ et $p(B) = p(2,2,2) + p(2,1,2) = 11a + 2b$.

Trouvons a et b pour que $p(A) = p(B)$:

$p(A) = p(B) \Leftrightarrow 16a + 4b = 11a + 2b$.

$\mathbf{p(\Omega) = 36a + 8b = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 5a + 2b = 0 \\ 36a + 8b = 1 \end{cases}}$;

$\mathbf{a = \frac{1}{16}}$ **et** $\mathbf{b = -\frac{5}{32}}$.

5.

a) valeurs prises par X : $X(\Omega) = \{-2;-1;0;1\}$

b) loi de probabilité de X :

$p(X = -2) = p(1,1,1) = 3a + b$;

$p(X = -1) = p(1,1,2) + p(1,2,1) + p(2,1,1) = 12a + 3b$;

$p(X = 0) = p(2,2,1) + p(2,1,2) + p(1,2,2) = 15a + 3b$;

$p(X = 4) = p(2,2,2) = 6a + b$.

x_i	-2	-1	0	4
$p(X = x_i)$	$3a + b$	$12a + 3b$	$15a + 3b$	$6a + b$

c) l'espérance mathématique :

$E(X) = [-2(3a + b) - (12a + 3b) + 4(3a + b)]$

$E(X) = 6a - 1$.

d) Trouvons a et b pour que le jeu soit équitable

$E(X) = 6a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{6}$;

$\sum_{i=1}^{4} p(X = x_i) = 36a + 8b = 1 \Leftrightarrow b = -\frac{5}{8}$.

<u>Exercice 19 :</u> **Le porte monnaie de Moussa contient :**

- **1 pièce de 100 F ;**
- **1 pièce de 200 F ;**
- **1 pièce de 250 F ;**
- **1 pièce de 500 F.**

Chaque pièce a la même probabilité d'être choisie. Abdour-rahman prend simultanément deux (2) pièces du porte monnaie.

Il désigne par X la variable aléatoire qui correspond au gain qu'a totalisé Abdour-rahman.

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

b) Etablir la loi de probabilité de X.

c) Montrer que $\mathbf{E(X) = 525}$.

<u>**Correction :**</u>

X la variable aléatoire qui correspond au gain :

Il y a 4 pièces dans le porte monnaie. Il y a $\text{card}(\Omega) = C_4^2 = 6$ possibilité de tirer simultanément 2 pièces.

a) valeurs prises par X :

$X = \{300; 350; 450;\ 600; 700; 750\}$.

b) loi de probabilité de X :

$p(X = 300) = \frac{C_1^1 \times C_1^1 \times C_1^0 \times C_1^0}{C_4^2} = \frac{1}{6} = 0{,}1666$;

$p(X = 350) = \frac{C_1^1 \times C_1^1 \times C_1^0 \times C_1^0}{C_4^2} = \frac{1}{6} = 0{,}1666$;

$p(X = 450) = \frac{C_1^1 \times C_1^1 \times C_1^0 \times C_1^0}{C_4^2} = \frac{1}{6} = 0{,}1666$;

$p(X = 600) = \frac{C_1^1 \times C_1^1 \times C_1^0 \times C_1^0}{C_4^2} = \frac{1}{6} = 0{,}1666$;

$p(X = 700) = \frac{C_1^1 \times C_1^1 \times C_1^0 \times C_1^0}{C_4^2} = \frac{1}{6} = 0{,}1666$;

$p(X = 750) = \frac{C_1^1 \times C_1^1 \times C_1^0 \times C_1^0}{C_4^2} = \frac{1}{6} = 0{,}1666$.

c) Calculer l'espérance mathématique de X

$E(X) = \frac{1}{6}(300 + 350 + 450 + 600 + 700 + 750)$

$E(X) = 525$.

VII. <u>Lancer de dé :</u>

<u>**Exercice 20 :**</u> ***dé cubique***

Moussa lance un dé parfait où les faces du dé sont numérotées de 1 à 6.

1. Calculer la probabilité des événements suivants d'obtenir :

A « le chiffre marqué est 2 » ;

B « le chiffre marqué est au plus 2 » ;

C « le chiffre marqué est au plus 3 » ;

D « obtenir un nombre pair » ;

E « obtenir un nombre divisible par 3 » ;

F « obtenir un nombre premier » ;

G « obtenir 3 ou 5 » ;

H « obtenir un nombre pair et divisible par 3 » ;

I « un nombre divisible par 3 et obtenir 3 ou 5 » ;

J « un nombre divisible par 3 ou obtenir 3 ou 5 » ;

2. Moussa définit X comme étant la variable aléatoire correspondant à la somme des cinq chiffres observables sur les faces du dé.

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

b) Etablir la loi de probabilité de X.

c) Calculer l'espérance mathématique : E(X).

d) Calculer la variance de X, notée V(X). En déduire l'écart type de X, notée σ(X).

e) Donner la distribution de la fonction de répartition de X.

3. Un jeu consiste à miser y francs, puis à lancer deux fois un dé cubique équilibré.

- **Si le joueur obtient un 5, il gagne 15 F, et**
- **s'il obtient deux 6, il gagne 25 F.**

Moussa définit Y la variable aléatoire égale au gain algébrique. Etablir la loi de probabilité de Y.

<u>**Correction :**</u> L'univers **Ω** est l'ensemble des résultats possibles après le lancer du dé, $\{1;2;3;4;5;6\} \Longrightarrow$ $\mathbf{card(\Omega) = 6}$.

Dé parfait ⟹ cas d'équiprobabilité où chaque élément élémentaire a **1/6** d'être observé.

1. la probabilité des événements suivants :

A « le chiffre marqué est 2 »

$A = \{2\} \Longrightarrow \mathrm{card}(A) = 1 \Leftrightarrow p(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{1}{6}.$

B « le chiffre marqué est au plus 2 » $B = \{1; 2\}$

$\mathrm{card}(B) = 2 \Leftrightarrow p(B) = \frac{\mathrm{card}(B)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$

C « le chiffre marqué est au plus 3 » $C = \{1; 2; 3\}$

$\mathrm{card}(C) = 3 \Leftrightarrow p(C) = \frac{\mathrm{card}(C)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$

D « obtenir un nombre pair » $D = \{2; 4; 6\}$

$\mathrm{card}(D) = 3 \Leftrightarrow p(D) = \frac{\mathrm{card}(D)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$

E « obtenir un nombre divisible par 3 » $E = \{3; 6\}$

$\mathrm{card}(E) = 2 \Leftrightarrow p(E) = \frac{\mathrm{card}(E)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$

F « obtenir un nombre premier » $F = \{2; 3; 5\}$

$\mathrm{card}(F) = 3 \Leftrightarrow p(F) = \frac{\mathrm{card}(F)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$

G « obtenir 3 ou 5 » $G = \{3; 5\}$

$\mathrm{card}(G) = 2 \Leftrightarrow p(G) = \frac{\mathrm{card}(G)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$

H « obtenir un nombre pair et divisible par 3 »

$H = D \cap E = \{2; 4; 6\} \cap \{3; 6\} = \{6\}$

$\mathrm{card}(H) = 1 \Leftrightarrow p(H) = \frac{\mathrm{card}(H)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{1}{6}.$

I « obtenir un nombre divisible par 3 et obtenir 3 ou 5 » $I = E \cap G = \{3; 6\} \cap \{3; 5\} = \{3\}$

$\mathrm{card}(I) = 1 \Leftrightarrow p(I) = \frac{\mathrm{card}(I)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{1}{6}.$

J « obtenir un nombre divisible par 3 ou obtenir 3 ou 5 » $J = E \cup G = \{3; 6\} \cup \{3; 5\} = \{3; 5; 6\}$

$\mathrm{card}(J) = 3 \Leftrightarrow p(J) = \frac{\mathrm{card}(J)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$

2. X$\Leftrightarrow$ somme des cinq chiffres observables sur les faces du dé. $\Longrightarrow \mathbf{card(\Omega) = 6}$

Face cachée	Face visible	Face cachée	Face visible	Face cachée	Face visible
1	2	2	3	3	4
	3		4		5
	4		5		6
	5		6		1
	6		1		2
Somme	20		19		18
Face cachée	**Face visible**	**Face cachée**	**Face visible**	**Face cachée**	**Face visible**
4	5	5	6	6	1
	6		1		2
	1		2		3
	2		3		4
	3		4		5
Somme	17		16		15

a) $\mathbf{X = \{15; 16; 17; 18; 19; 20\}}$

b) loi de probabilité de X.

$p(X = 15) = p(X = 16) = p(X = 17) = p(X = 18) = p(X = 19) = p(X = 20) = \frac{1}{6}$;

c) espérance mathématique : $E(X) = 1.$

d) Distribution de la fonction de répartition de X.

$\forall\, x \in\ ]-\infty; 15[,\ F(x) = p(X < x) = 0$;

$\forall\, x \in\ [15; 16[,\ F(x) = p(X < x) = \frac{1}{6}$;

$\forall\, x \in\ [16; 17[,\ F(x) = p(X < x) = \frac{2}{6}$;

$\forall\, x \in\ [17; 18[,\ F(x) = p(X < x) = \frac{3}{6}$;

$\forall\, x \in\ [18; 19[,\ F(x) = p(X < x) = \frac{4}{6}$;

$\forall\, x \in\ [19; 20[,\ F(x) = p(X < x) = \frac{5}{6}$;

$\forall\, x \in\ [20; +\infty[,\ F(x) = 1.$

3. Y la variable aléatoire égale au gain algébrique. Etablir la loi de probabilité de Y

$$\mathbf{Y = \{(0 - y); (15 - y); (25 - y)\}}$$

b \ a	1	2	3	4	5	6
1	**1; 1**	**1; 3**	**1; 3**	**1; 4**	**1; 5**	**1; 6**
2	**2; 1**	**2; 2**	**2; 3**	**2; 4**	**2; 5**	**2; 6**
3	**3; 1**	**3; 2**	**3; 3**	**3; 4**	**3; 5**	**3; 6**
4	**4; 1**	**4; 2**	**4; 3**	**4; 4**	**4; 5**	**4; 6**
5	**5; 1**	**5; 2**	**5; 3**	**5; 4**	**5; 5**	**5; 6**
6	**6; 1**	**6; 2**	**6; 3**	**6; 4**	**6; 5**	**6; 6**

$p(Y = -y) = p(\text{sauf } 5 \text{ ou } 6) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$;

$p(Y = 15 - y) = p(\text{ un } 5 \text{ ou un } 6) = \frac{15}{36}$;

$p(Y = 25 - y) = p(\text{ deux } 6) = \frac{1}{36}.$

Exercice 21 : ***dé cubique***

Lecture du chiffre inscrit sur la face supérieure des dés où les nombres étaient pris dans un ordre quelconque. Chaque dé possède les faces qui sont numérotées de 1 à 6.

1. Moussa jette ensemble au hasard deux (2) dés non pipés.

a) Quelle est la probabilité p_1 d'obtenir les nombres (4, 5) ?

b) Quelle est la probabilité p_2 d'obtenir une somme égale à 5 ?

c) Moussa définit X comme étant la variable aléatoire correspondant à la somme des points obtenus sur les dés.

- **Etablir la loi de probabilité de X.**
- **Calculer la probabilité $p(X \leq 5)$.**

2. Abdoulaye jette ensemble au hasard trois (3) dés non pipés.

Calculer la probabilité des événements suivants :

A « obtenir les nombres (4, 5, 2) » ;

B « obtenir une somme égale à 5 ».

3. Diallo jette ensemble au hasard quatre (4) dés non pipés.

Calculer la probabilité des événements suivants :

C « obtenir aucun des dés le chiffre 6 » ;

D « avoir au moins un des dés qui a le chiffre 6 ».

Correction :

1. Lancer au hasard deux (2) dés non pipés :

L'univers Ω est l'ensemble des résultats possibles après le lancer des dés. Ici, Ω correspond au produit cartésien $\{\{1;2;3;4;5;6\}\times\{1;2;3;4;5;6\}$.
Son cardinal $\mathbf{card}(\Omega)=\mathbf{6^2=36}$.

a) probabilité p_1 d'obtenir les nombres 4, 5 :
« pris dans un ordre quelconque » **c'est le nombre de permutation des 2 nombres 4, 5 :**
$\boldsymbol{p_1=p\{(4,5);\ (5,4)\}}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{36}}=\mathbf{0,0555}$.

b) probabilité p_2 d'obtenir une somme égale à 5 :
« pris dans un ordre quelconque » **c'est le nombre de permutation des 2 chiffres dont la somme est 5 :**
$\boldsymbol{p_2=p\{(1,4);\ (4,1);(2,3);\ (3,2)\}}=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{36}}=\mathbf{0,1111}$.

c) X $\Longrightarrow$ somme des points obtenus sur les dés.

- **loi de probabilité de X :** pour déterminer les valeurs prises par X, il convient de dresser un tableau à double entré **(dé1 ; dé2)** et d'addition les chiffres situant en intersection entre une colonne et une ligne du tableau. Puis on dénombre le nombre de cas favorable.

$\mathbf{card}(\Omega)=\mathbf{6^2=36.}$
Ainsi X $=\{\mathbf{2};\mathbf{3};\mathbf{4};\mathbf{5};\mathbf{6};\mathbf{7};\mathbf{8};\mathbf{9};\mathbf{10};\mathbf{11};\mathbf{12}\}$
$\mathrm{p(X=2)}=\frac{1}{36}=0{,}0277$; $\mathrm{p(X=3)}=\frac{2}{36}=0{,}055$;
$\mathrm{p(X=4)}=\frac{3}{36}=0{,}0833$; $\mathrm{p(X=5)}=\frac{4}{36}=0{,}111$;
$\mathrm{p(X=6)}=\frac{5}{36}=0{,}1388$; $\mathrm{p(X=7)}=\frac{6}{36}=0{,}375$;
$\mathrm{p(X=8)}=\frac{5}{36}=0{,}1388$; $\mathrm{p(X=9)}=\frac{4}{36}=0{,}111$;
$\mathrm{p(X=10)}=\frac{3}{36}=0{,}0833$; $\mathrm{p(X=11)}=\frac{2}{36}=0{,}055$;
$\mathrm{p(X=12)}=\frac{1}{36}=0{,}0277$.

- $\mathbf{p(X\le 5)}=\frac{1+2+3+4}{36}=027777$.

2. <u>Lancer au hasard trois (3) dés non pipés :</u>
L'univers Ω est l'ensemble des résultats possibles après le lancer des dés. Ici, Ω correspond au produit cartésien $\{\{1;2;3;4;5;6\}\times\{1;2;3;4;5;6\}\times\{1;2;3;4;5;6\}$.
Son cardinal $\mathbf{card}(\Omega)=\mathbf{6^3=216.}$
Probabilité des événements :
A « obtenir les nombres (4, 5, 2) »
« pris dans un ordre quelconque » **c'est le nombre de permutation des 3 nombres 4, 5, 2** $\Longrightarrow$ A $=$
$\{(4,5,2);(4,2,5);(5,2,4);\ (5,4,2);\ (2,5,4);(2,4,5)\}$
$\Longrightarrow$ card(A) $=6$, donc $\mathbf{p(A)}=\frac{\mathbf{card(A)}}{\mathbf{card(\Omega)}}=\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{216}}=\mathbf{0,027}$
B « obtenir une somme égale à 5 » $\Longrightarrow$ B $=$
$\{(1,1,3);(1,3,1);(3,1,1);\ (2,2,1);\ (2,1,2);\ (1,2,2)\}$
$\Longrightarrow$ card(B) $=6$, donc $\mathbf{p(B)}=\frac{\mathbf{card(B)}}{\mathbf{card(\Omega)}}=\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{216}}=\mathbf{0,027}$

3. <u>Lancer au hasard quatre (4) dés non pipés :</u>
L'univers Ω est l'ensemble des résultats possibles après le lancer des dés. Ici, Ω correspond au produit cartésien $\{\{1;2;3;4;5;6\}^4$.
Son cardinal $\mathbf{card}(\Omega)=\mathbf{6^4=1296.}$
Probabilité des événements suivants :
C « obtenir aucun des dés le chiffre 6 » $\Longrightarrow$
card(C) $=5^4$, donc $\mathbf{p(C)}=\frac{\mathbf{card(C)}}{\mathbf{card(\Omega)}}=\frac{\mathbf{5^4}}{\mathbf{6^4}}=\mathbf{0,4822}$
D « avoir au moins un des dés qui a le chiffre 6 »
$\Longrightarrow$ card(D) $=\mathbf{6^4-5^4}$, donc $\mathbf{p(D)}=\frac{\mathbf{card(D)}}{\mathbf{card(\Omega)}}=\frac{\mathbf{6^4-5^4}}{\mathbf{6^4}}=\mathbf{1}-\frac{\mathbf{5^4}}{\mathbf{6^4}}=\mathbf{0,5177.}$

<u>Exercice 22 :</u> *dé cubique*
Lecture du chiffre successivement les deux chiffres inscrits sur sa face supérieure Chaque dé possède les faces qui sont numérotées de 1 à 6.

1. Moussa définit un dé tel que la probabilité d'obtenir un nombre de points soit proportionnel à ce nombre. On note p_k la probabilité de l'événement « le résultat obtenu est k ».
1. Calculer p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 et p_6.
2. Moussa jette deux (2) fois de suite ce dé.
a) Calculer les probabilités des événements élémentaires.
b) Calculer la probabilité des événements :
A « obtenir deux (2) chiffres pairs » ;
B « obtenir au moins un multiple de 3 » ;
C « obtenir une somme supérieure ou égale à 10 ».
c) Moussa définit X comme étant la variable aléatoire correspondant à la somme des points obtenus.

- **Etablir la loi de probabilité de X.**
- **Calculer la probabilité $\mathbf{p(X\ge 10)}$.**

2. Abdoulaye lance 2 fois un (1) dé non pipé.
Calculer la probabilité des événements :
D « obtenir deux chiffres identiques » ;
E « obtenir deux chiffres impairs » ;
F « obtenir une somme égale à 9 » ;
G « obtenir un chiffre pair et un multiple de 3 » ;
H « obtenir un chiffre pair et diviseur de 3 » ;
I « obtenir un chiffre 1 ou un chiffre 2 ».

<u>Correction :</u> *dé cubique*
<u>I. dé pipé</u>
1. Calcul de $\boldsymbol{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5}$ et $\boldsymbol{p_6}$.
D'une part $\frac{p_k}{k}=\frac{p_1}{1}=\frac{p_2}{2}=\frac{p_3}{3}=\frac{p_4}{4}=\frac{p_5}{5}=\frac{p_6}{6}$ et d'autre part $p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=1$.
$\frac{p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6}{1+2+3+4+5+6}=\frac{1}{21}$, donc $\boldsymbol{p_1}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{21}}$, $\boldsymbol{p_2}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{21}}$, $\boldsymbol{p_3}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{21}}$, $\boldsymbol{p_4}=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{21}}$, $\boldsymbol{p_5}=\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{21}}$ **et** $\boldsymbol{p_6}=\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{21}}$.

2. Nous aurons un couple de 2 jets **(jet1 ; jet2)** où chaque jet prend les valeurs $\{1;2;3;4;5;6\}\Longrightarrow$
$\mathbf{card}(\Omega)=(\mathbf{21})^{\mathbf{2}}=\mathbf{441.}$

a) Probabilités des événements élémentaires :
$\mathbf{p(jet1\ ;\ jet2)=p(jet1\ )\times p(jet2).}$
$*p(1;1)=p_1p_1=\frac{1}{441}$; $p(1;2)=p_1p_2=\frac{2}{441}$;
$p(1;3)=p_1p_1=\frac{3}{441}$; $p(1;4)=p_1p_1=\frac{4}{441}$;
$p(1;5)=p_1p_5=\frac{5}{441}$; $p(1;6)=p_1p_6=\frac{6}{441}$;
$*p(2;1)=p_1p_2=\frac{2}{441}$; $p(2;2)=p_2p_2=\frac{4}{441}$;
$p(2;3)=p_2p_3=\frac{6}{441}$; $p(2;4)=p_2p_4=\frac{8}{441}$;
$p(2;5)=p_2p_5=\frac{10}{441}$; $p(2;6)=p_2p_6=\frac{12}{441}$;
$*p(3;1)=p_3p_1=\frac{3}{441}$; $p(3;2)=p_3p_2=\frac{6}{441}$;

$p(3;3) = p_3p_3 = \frac{9}{441}$; $p(3;4) = p_3p_4 = \frac{12}{441}$;
$p(3;5) = p_3p_5 = \frac{15}{441}$; $p(3;6) = p_3p_6 = \frac{18}{441}$;
*$p(4;1) = p_4p_1 = \frac{4}{441}$; $p(4;2) = p_4p_2 = \frac{8}{441}$;
$p(4;3) = p_4p_3 = \frac{12}{441}$; $p(4;4) = p_4p_4 = \frac{16}{441}$;
$p(4;5) = p_4p_5 = \frac{20}{441}$; $p(4;6) = p_4p_6 = \frac{24}{441}$;
*$p(5;1) = p_5p_1 = \frac{5}{441}$; $p(5;2) = p_5p_2 = \frac{10}{441}$;
$p(5;3) = p_5p_3 = \frac{15}{441}$; $p(5;4) = p_5p_4 = \frac{20}{441}$;
$p(5;5) = p_5p_5 = \frac{25}{441}$; $p(5;6) = p_5p_6 = \frac{30}{441}$;
*$p(6;1) = p_6p_1 = \frac{6}{441}$; $p(6;2) = p_6p_2 = \frac{12}{441}$;
$p(6;3) = p_6p_3 = \frac{18}{441}$; $p(6;4) = p_6p_4 = \frac{24}{441}$;
$p(6;5) = p_6p_5 = \frac{30}{441}$; $p(6;6) = p_6p_6 = \frac{36}{441}$;

b) Probabilité des événements :

A « obtenir deux (2) chiffres pairs »
$\mathbf{p(A)} = p(2;2) + p(2;4) + p(2;6) + p(4;2) + p(4;4) + p(4;6) + p(6;2) + p(6;4) + p(6;6) = \frac{4+8+12+8+16+24+12+24+36}{441} = \frac{144}{441} = 0{,}3265.$

B « obtenir au moins un multiple de 3 »
$\mathbf{p(B)} = p(1;3) + p(1;6) + p(2;3) + p(2;6) + p(3;3) + p(3;6) + p(4;3) + p(4;6) + p(5;3) + p(5;6) + p(6;3) + p(6;6) = \frac{3+6+6+12+9+18+12+24+15+30+18+36}{441} = \frac{189}{441} = 0{,}4285.$

C « obtenir une somme supérieure ou égale à 10 »
$\mathbf{p(C)} = p(5;5) + p(5;6) + p(6;4) + p(6;5) + p(6;6) = \frac{25+30+24+30+36}{441} = \frac{145}{441} = 0{,}3287.$

c) X : somme des points obtenus.

- **loi de probabilité de X :** pour déterminer les valeurs prises par X, il est commode de dresser un tableau à double entré **(dé1 ; dé2)** et d'addition les chiffres situant en intersection entre une colonne et une ligne du tableau. Puis on dénombre le nombre de cas favorable : $\mathbf{card(\Omega) = (21)^2 = 441.}$

Ainsi X $= \{\mathbf{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12}\}$

$\mathrm{p(X = 2)} = \frac{1}{441}$; $\mathrm{p(X = 3)} = \frac{4}{441}$;
$\mathrm{p(X = 4)} = \frac{10}{441}$; $\mathrm{p(X = 5)} = \frac{20}{441}$;
$\mathrm{p(X = 6)} = \frac{35}{441}$; $\mathrm{p(X = 7)} = \frac{56}{441}$;
$\mathrm{p(X = 8)} = \frac{70}{441}$; $\mathrm{p(X = 9)} = \frac{76}{441}$;
$\mathrm{p(X = 10)} = \frac{73}{441}$; $\mathrm{p(X = 11)} = \frac{60}{441}$;
$\mathrm{p(X = 12)} = \frac{36}{441}$.

- $\mathbf{p(X \geq 10)} = \frac{73+60+36}{441} = \frac{169}{441} = 0{,}3832.$

II. Nous somme dans un cas d'équiprobabilité où chaque couple de 2 jets **(jet1 ; jet2)** a une probabilité de $\frac{1}{36}$. **probabilité des événements :**

D « obtenir deux chiffres identiques »
$\mathbf{p(D)} = p(1;1) + p(2;2) + p(3;3) + p(4;4) + p(5;5) + p(6;6) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 0{,}1666.$

E « obtenir deux chiffres impairs »
$\mathbf{p(E)} = p(1;1) + p(3;3) + p(5;5) = \frac{3}{36} = 0{,}0833.$

F « obtenir une somme égale à 9 » $\mathbf{p(F)} = p(3;6) + p(4;5) + p(5;4) + p(6;3) = \frac{4}{36} = 0{,}111.$

G « obtenir un chiffre pair et un multiple de 3 »
$\mathbf{p(G)} = p(2;3) + p(2;6) + p(3;2) + p(3;6) = \frac{4}{36} = 0{,}111.$

H « obtenir un chiffre pair et diviseur de 3 » $\mathbf{p(H)} = p(2;1) + p(2;3) + p(4;1) + p(4;3) + p(6;1) + p(6;3) = \frac{6}{36} = 0{,}1666.$

I « obtenir un chiffre 1 ou un chiffre 2 »
$\mathbf{p(I)} = p(1;2) + p(2;1) = \frac{2}{36} = 0{,}0555.$

<u>Exercice 23 :</u> Moussa lance deux dés cubiques non pipés D1 et D2 simultanément. Les faces du D1 étaient marquées par : $0; 0; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}$ et celles du D2 étaient marquées par : $0; 0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}$.

Il appelle α et β les nombres qui apparaissent sur les faces supérieures.

2. Moussa définit X la variable aléatoire réelle qui à chaque lancer associe le réel $\alpha + \beta$.

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

b) Etablir la loi de probabilité de X.

c) Calculer l'espérance mathématique : E(X).

d) Donner la distribution de la fonction de répartition de X.

3. Moussa définit par ailleurs Y la variable aléatoire réelle qui à chaque lancer associe le réel $\sin(\alpha + \beta)$.

a) Quelles sont les valeurs prises par Y ?

b) Etablir la loi de probabilité de Y.

c) Calculer l'espérance mathématique : E(Y).

d) Calculer la variance de Y, notée V(Y). En déduire l'écart type de Y, notée $\sigma(Y)$.

e) Donner la distribution de la fonction de répartition de Y.

<u>Correction :</u> Nous somme dans cas d'équiprobabilité car les dés cubiques sont non pipés D1 et D2., produit cartésien $\Leftrightarrow$ $\mathbf{card(\Omega) = 6^2 = 36}$**, donc il y a 36 façons de coupler un nombre α avec un nombre β.**

1. X la variable aléatoire réelle qui à chaque lancer associe le réel $\alpha + \beta$

X	**0**	**0**	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$
0	**0**	**0**	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$
0	**0**	**0**	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$

$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$

a) Ainsi $\mathbf{X}=\left\{\mathbf{0};-\frac{\pi}{3};-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{6}\right\}$**.**

b) loi de probabilité de X

$p(X=0)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$; $p\left(X=-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$;

$p\left(X=-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$; $p\left(X=\frac{\pi}{6}\right)=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$;

$p\left(X=\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$; $p\left(X=\frac{\pi}{2}\right)=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$;

$p\left(X=\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$.

c) Espérance mathématique :

$E(X)=\frac{1}{9}\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{6}+\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{2}+\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{2\pi}{9}$.

d) Distribution de la fonction de répartition de X.

$\forall x\in\ ]-\infty;0[$, $F(x)=p(X<x)=0$;

$\forall x\in\left[0;-\frac{\pi}{3}\right[$, $F(x)=p(X<x)=\frac{1}{9}$;

$\forall x\in\left[-\frac{\pi}{3};-\frac{\pi}{6}\right[$, $F(x)=p(X<x)=\frac{2}{9}$

$\forall x\in\left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right[$, $F(x)=p(X<x)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$;

$\forall x\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right[$, $F(x)=p(X<x)=\frac{5}{9}$;

$\forall x\in\left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right[$, $F(x)=p(X<x)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$;

$\forall x\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{6}\right[$, $F(x)=p(X<x)=\frac{8}{9}$;

$\forall x\in\left[\frac{5\pi}{6};+\infty\right[$, $F(x)=1$.

2. Y la variable aléatoire réelle qui à chaque lancer associe le réel $\sin(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\sin(\mathbf{X})$

Y	0	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$
0	0	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
0	0	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

a) Ainsi $\mathbf{Y}=\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};\mathbf{0};\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};\mathbf{1}\right\}$**.**

b) loi de probabilité de Y

$p\left(Y=-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$; $p\left(Y=-\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$;

$p(Y=0)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$; $p\left(Y=\frac{1}{2}\right)=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$;

$p\left(Y=\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$; $p(Y=1)=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$.

c) espérance mathématique :

$E(Y)=\frac{1}{9}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+2\right)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

d) variance de Y : $\mathbf{V(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2}$ et $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{Y})=\sqrt{V(Y)}$. $E(Y^2)=\frac{1}{9}\left[\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+2^2\right]=\frac{8}{9}$.

Alors $V(Y)=\left(\frac{8}{9}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{63}{81}$. $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{Y})=0{,}8819$.

e) Distribution de la fonction de répartition de Y

$\forall y\in\left]-\infty;-\frac{\sqrt{3}}{2}\right[$, $F(y)=p(Y<y)=0$;

$\forall y\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right[$, $F(y)=p(Y<\boldsymbol{y})=\frac{1}{9}$;

$\forall y\in\left[-\frac{1}{2};0\right[$, $F(y)=p(Y<y)=\frac{2}{9}$

$\forall y\in\left[0;\frac{1}{2}\right[$, $F(y)=p(Y<\boldsymbol{y})=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$;

$\forall y\in\left[\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right[$, $F(x)=p(Y<\boldsymbol{y})=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$;

$\forall y\in\left[\frac{\sqrt{3}}{2};1\right[$, $F(y)=p(Y<\boldsymbol{y})=\frac{7}{9}$;

$\forall y\in[1;+\infty[$, $F(y)=1$.

<u>Exercice 24 :</u> Moussa lance deux dés cubiques non pipés D1 et D2 simultanément dont les faces de chaque dé sont numérotées de 0 ; 1 ; à 5. Il appelle $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ les nombres qui apparaissent respectivement sur les faces supérieures du D1 et D2.

1. Soit l'équation de second degré définit par :

(E) $\boldsymbol{z^2+az+b=0}$ **avec** $\boldsymbol{z\in\mathbb{C}}$.

Calculer la probabilité des événements suivant :

A « (E) admet deux raines réelles confondues » ;

B « (E) admet deux raines réelles distinctes » ;

C « (E) admet deux raines complexes conjuguées ».

2. Moussa considère l'application $\boldsymbol{f}$ de l'ensemble P des points du plan dans lui-même qui, à tout point $\boldsymbol{M}$ d'affixe $\boldsymbol{z}$, associe le point $\boldsymbol{M'}$ d'affixe $\boldsymbol{z'=(a+ib)z+ib}$.

Calculer la probabilité des événements suivant :

D « $\boldsymbol{f}$ admet une translation » ;

E « $\boldsymbol{f}$ admet une translation du vecteur $\vec{v}(1+i)$ » ;

F « $\boldsymbol{f}$ admet une rotation » ;

G « $\boldsymbol{f}$ admet une homothétie de rapport 2 » ;

H « $\boldsymbol{f}$ est l'homothétie de centre $A(1+2i)$ et de rapport 2 » ;

I « $\boldsymbol{f}$ est une similitude de centre $B(3)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ ».

4. Moussa définit X la variable aléatoire réelle qui à chaque lancer associe le réel $\sqrt{a^2+b^2}$.

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

b) Etablir la loi de probabilité de X.

<u>Correction :</u> (D1 ; D2)= (a; b) $\Leftrightarrow$ card$(\Omega)=36$, donc il y a 36 façons de coupler un nombre a avec un nombre b.

2 \ 1	0	1	2	3	4	5
0	0; 0	0; 1	0; 2	0; 3	0; 4	0; 5
1	1; 0	1; 1	1; 2	1; 3	1; 4	1; 5
2	2; 0	2; 1	2; 2	2; 3	2; 4	2; 5
3	3; 0	3; 1	3; 2	3; 3	3; 4	3; 5

4	**4; 0**	**4; 1**	**4; 2**	**4; 3**	**4; 4**	**4; 5**
5	**5; 0**	**5; 1**	**5; 2**	**5; 3**	**5; 4**	**5; 5**

1. (E) $z^2 + az + b = 0$ **avec** $z \in \mathbb{C}$.

$$\Delta = a^2 - 4b$$

Calculer la probabilité des événements suivant :

A « (E) admet deux raines réelles confondues »

$\Delta = 0 \Leftrightarrow a^2 = 4b \Leftrightarrow \text{A} = \{(0;0);\ (2;1);\ (4;4)\}$ d'où $\mathbf{card(A) = 3 \Leftrightarrow p(A)} = \frac{\mathbf{card(A)}}{\mathbf{card(\Omega)}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{36}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}$.

B « (E) admet deux raines réelles distinctes »

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow a^2 > 4b \Leftrightarrow$$

$$\text{B} = \left\{\begin{matrix} (1;0);\ (2;0);\ (3;0);\ (3;1) \\ ;(3;2);\ (4;0);(4;1);\ (4;2);\ (4;3);\ (5;0) \\ (5;1);\ (5;2);\ (5;3);\ (5;4);\ (5;5) \end{matrix}\right\}.$$

d'où $\mathbf{card(B) = 16 \Leftrightarrow p(B)} = \frac{\mathbf{card(B)}}{\mathbf{card(\Omega)}} = \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{36}} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{12}}$.

C « (E) admet deux raines complexes conjuguées »

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow a^2 < 4b \Leftrightarrow$$

$$\text{C} = \left\{\begin{matrix} (0;1);\ (0;2);\ (0;3);\ (0;4);\ (0;5);\ (1;1) \\ ;(1;2);\ (1;3);(1;4);\ (1;5);\ (2;2);\ (2;3) \\ (2;4);\ (2;5);\ (3;3);\ (3;4);\ (3;5);\ (4;5) \end{matrix}\right\}.$$

d'où $\mathbf{card(C) = 18 \Leftrightarrow p(C)} = \frac{\mathbf{card(C)}}{\mathbf{card(\Omega)}} = \frac{\mathbf{18}}{\mathbf{36}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$.

2. $\boldsymbol{f : z' = (a + ib)z + ib}$.

Calculer la probabilité des événements suivant :

D « $\boldsymbol{f}$ **admet une translation »** $\boldsymbol{a + ib = 1}$ les valeurs possibles $\boldsymbol{a = 1}$ **et** $\boldsymbol{b = 0}$: ainsi on a $\text{D} = \{(1;0)\}$ d'où $\mathbf{card(D) = 1 \Leftrightarrow p(D)} = \frac{\mathbf{card(D)}}{\mathbf{card(\Omega)}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{36}}$.

E « $\boldsymbol{f}$ **admet une translation du vecteur** $\boldsymbol{\vec{v}(1 + i)}$ **»** $\boldsymbol{a + ib = 1}$ les valeurs possibles $\boldsymbol{a = 1}$ **et** $\boldsymbol{b = 0}$ **ou** $\boldsymbol{b = 1}$: ainsi on a $\text{E} = \{(1;0);\ (1;1)\}$ d'où $\mathbf{card(E) = 2 \Leftrightarrow p(E)} = \frac{\mathbf{card(E)}}{\mathbf{card(\Omega)}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{36}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{18}}$.

F « $\boldsymbol{f}$ **admet une rotation »** $\boldsymbol{|a + ib| = 1}$ les valeurs possibles $\begin{cases}\boldsymbol{a = 1}\\ \boldsymbol{b = 0}\end{cases}$ **et** $\begin{cases}\boldsymbol{a = 0}\\ \boldsymbol{b = 1}\end{cases}$: ainsi on a $\text{F} = \{(1;0);\ (0;1)\}$ d'où $\mathbf{card(F) = 2 \Leftrightarrow p(F)} = \frac{\mathbf{card(F)}}{\mathbf{card(\Omega)}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{36}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{18}}$.

G « $\boldsymbol{f}$ **admet une homothétie de rapport 2 »** $\boldsymbol{a + ib = 2}$ les valeurs possibles $\boldsymbol{a = 2}$ **et** $\boldsymbol{b = 0}$: ainsi on a $\text{G} = \{(2;0)\}$

d'où $\mathbf{card(G) = 1 \Leftrightarrow p(G)} = \frac{\mathbf{card(G)}}{\mathbf{card(\Omega)}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{36}}$.

H « $\boldsymbol{f}$ **est l'homothétie de centre** $\boldsymbol{A(1 + 2i)}$ **et de rapport 2 »** $\boldsymbol{a + ib = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \end{cases}}$ **et** l$\boldsymbol{z_A} = \frac{\boldsymbol{ib}}{\boldsymbol{1-a-ib}} = \boldsymbol{1 + 2i \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 + 2b \\ a = 1 - 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}}$ ainsi on a $\text{H} = \{(2;0);\ (1;0)\}$

d'où $\mathbf{card(H) = 2 \Leftrightarrow p(H)} = \frac{\mathbf{card(H)}}{\mathbf{card(\Omega)}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{36}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{18}}$.

I « $\boldsymbol{f}$ **est une similitude de centre** $\boldsymbol{B(3)}$ **et d'angle** $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$ **»**

$a + ib = re^{\frac{\pi}{2}i} = 2ir \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2r \end{cases}$, r est le rapport de cette similitude dont $r = \{1;2;3;4;5\}$.

Et $z_B = \frac{ib}{1-a-ib} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$: ainsi on a

$\text{I} = \{(0;2);\ (0;4);(1;0)\}$

d'où $\mathbf{card(I) = 3 \Leftrightarrow p(I)} = \frac{\mathbf{card(I)}}{\mathbf{card(\Omega)}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{36}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}$.

3. X la variable aléatoire correspond $\boldsymbol{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

2 \ 1	0	1	2	3	4	5
0	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	**1**	$\boldsymbol{\sqrt{2}}$	$\boldsymbol{\sqrt{5}}$	$\boldsymbol{\sqrt{10}}$	$\boldsymbol{\sqrt{17}}$	$\boldsymbol{\sqrt{26}}$
2	**2**	$\boldsymbol{\sqrt{5}}$	$\boldsymbol{2\sqrt{2}}$	$\boldsymbol{\sqrt{13}}$	$\boldsymbol{2\sqrt{5}}$	$\boldsymbol{\sqrt{29}}$
3	**3**	$\boldsymbol{\sqrt{10}}$	$\boldsymbol{\sqrt{13}}$	$\boldsymbol{3\sqrt{2}}$	**5**	$\boldsymbol{\sqrt{34}}$
4	**4**	$\boldsymbol{\sqrt{17}}$	$\boldsymbol{2\sqrt{5}}$	**5**	$\boldsymbol{4\sqrt{2}}$	$\boldsymbol{\sqrt{41}}$
5	**5**	$\boldsymbol{\sqrt{26}}$	$\boldsymbol{\sqrt{29}}$	$\boldsymbol{\sqrt{34}}$	$\boldsymbol{\sqrt{41}}$	$\boldsymbol{5\sqrt{2}}$

a) $\mathbf{X} = \left\{\begin{matrix} \boldsymbol{0;1;\sqrt{2};2;\sqrt{5};\ 2\sqrt{2};3;\sqrt{10};\sqrt{13};\ 4;} \\ \boldsymbol{\sqrt{17};\ 3\sqrt{2};5;\sqrt{26};\sqrt{29};4\sqrt{2};} \\ \boldsymbol{\sqrt{34};\ \sqrt{41};5\sqrt{2};} \end{matrix}\right\}$.

b) loi de probabilité de X

$\text{p}(\text{X} = 0) = \frac{1}{36}$; $\text{p}(\text{X} = 1) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$;

$\text{p}(\text{X} = \boldsymbol{\sqrt{2}}) = \frac{1}{36}$; $\text{p}(\text{X} = 2) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$;

$\text{p}(\text{X} = \boldsymbol{\sqrt{5}}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$; $\text{p}(\text{X} = 2\boldsymbol{\sqrt{2}}) = \frac{1}{36}$;

$\text{p}(\text{X} = \mathbf{3}) = \frac{2}{36}$; $\text{p}(\text{X} = \boldsymbol{\sqrt{10}}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$;

$\text{p}(\text{X} = \boldsymbol{\sqrt{13}}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$; $\text{p}(\text{X} = 4) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$;

$\text{p}(\text{X} = \boldsymbol{\sqrt{17}}) = \frac{2}{36}$; $\text{p}(\text{X} = 3\boldsymbol{\sqrt{2}}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$;

$\text{p}(\text{X} = \mathbf{5}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$; $\text{p}(\text{X} = \boldsymbol{\sqrt{26}}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$;

$\text{p}(\text{X} = \boldsymbol{\sqrt{29}};) = \frac{2}{36}$; $\text{p}(\text{X} = 4\boldsymbol{\sqrt{2}}) = \frac{1}{36}$;

$\text{p}(\text{X} = \boldsymbol{\sqrt{34}};) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$; $\text{p}(\text{X} = \boldsymbol{\sqrt{41}};) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$;

$\text{p}(\text{X} = 5\boldsymbol{\sqrt{2}};) = \frac{3}{36}$.

<u>Exercice 25 :</u>

A. Moussa considère le système d'inconnues $\mathbf{(x, y)}$ **dans** $\mathbf{IR^2}$ **(S)** $\begin{cases} \mathbf{x - 2y = 3} \\ \mathbf{ax - by = c} \end{cases}$ **où a, b, c sont trois paramètres pouvant prendre** $\{\mathbf{1;2;3;4;5;6}\}$**. Pour déterminer a, b, c, il lance trois fois de suite un dé cubique supposé parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et observe sa face supérieure. Le 1[er] tirage donne a, le 2[e] tirage donne b, la 3[e] donne c.**

1. Donner un espace probabilisé fini associé à cette situation.

2. Calculer la probabilité des événements suivant

A « (S) admet une infinité de solutions » ;

B « (S) n'admet aucune solution » ;

C « (S) admet une solution unique » ;

D « (S) admet la solution unique (3,0) ».

B. Un jeu consiste à miser un franc, puis à lancer deux fois un dé cubique équilibré.

- **S'il obtient un 6, il gagne 5 F,**
- **et s'il obtient deux 6, il gagne 10 F.**

Il appelle X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. **Montrer que les valeurs prises par X sont – 1, 4 et 9.**
2. **Déterminer la loi de probabilité de X.**
3. **Calculer l'espérance mathématique de X.**

Correction :

A. (x, y) **dans** IR^2 **(S)** $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ ax - by = c \end{cases}$.

4. **Espace probabilisé fini associé à cette situation**

L'univers est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}^3$ et chaque événement élémentaire a pour probabilité $\frac{1}{card(\Omega)} = \frac{1}{6^3}$.

5. **Calculer la probabilité des événements suivant**

On a un triplet définit par $(a; b; c) \in IR^3$.

Pour résoudre (S), on doit appliquer la *méthode de déterminant* en calculant $x = \frac{D_x}{D}$ et $y = \frac{D_y}{D}$. **On peut aussi dresser les tableaux à double entré de D, D_x et D_y.**

$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ a & -b \end{vmatrix} = 2a - b$; $D_x = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ c & -b \end{vmatrix} = 2c - 3b$ et $D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ a & c \end{vmatrix} = c - 3a$. $card(\Omega) = 216$

A « (S) admet une infinité de solutions »

$\begin{cases} D = 0 \\ D_x = 0 \\ D_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = b \\ 2c = 3b \\ c = 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2}b \\ b = \frac{2}{3}c \\ c = 3a \end{cases}$

$A = \{(1; 2; 3); (2; 4; 6)\}$

d'où $card(A) = 2 \Leftrightarrow p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{2}{216} = \frac{1}{108}$.

B « (S) n'admet aucune solution »

$\begin{cases} D = 0 \\ D_y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = b \\ c \neq 3a \end{cases}$

$B = \begin{Bmatrix} (1; 2; 1); (1; 2; 2); (1; 2; 4); (1; 2; 5); \\ (1; 2; 6); (2; 4; 1); (2; 4; 2); (2; 4; 3); \\ (2; 4; 4); (2; 4; 5); (3; 6; 1); (3; 6; 2); \\ (3; 6; 3); (3; 6; 4); (3; 6; 1); (3; 6; 6); \end{Bmatrix}$

d'où $card(B) = 16 \Leftrightarrow p(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{16}{216} = \frac{2}{27}$.

C « (S) admet une solution unique » $D \neq 0 \Leftrightarrow 2a \neq b$. D'où $card(C) = card(\Omega) - [card(A) + card(B)]$

$card(C) = 198 \Leftrightarrow p(C) = \frac{card(C)}{card(\Omega)} = \frac{198}{216} = \frac{11}{12}$.

D « (S) admet la solution unique (3,0) »

$x = \frac{D_x}{D} = 3 \Leftrightarrow D_x = 3D$ **et** $y = \frac{D_y}{D} = 0 \Leftrightarrow D_Y = 0$

$\begin{cases} D \neq 0 \\ D_x = 3D \\ D_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a \neq b \\ c = 3a \\ c = 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq \frac{1}{2}b \\ c = 3a \end{cases}$.

$D = \begin{cases} (1; 1; 3); (1; 3; 3); (1; 4; 3); (1; 5; 3); (1; 6; 3) \\ (2; 2; 6); (2; 2; 6); (2; 3; 6); (2; 5; 6); (2; 6; 6) \end{cases}$

d'où $card(D) = 10 \Leftrightarrow p(D) = \frac{card(D)}{card(\Omega)} = \frac{10}{216} = \frac{5}{108}$.

B.

1. Le joueur peut gagner 0, 5 ou 10 F. Comme il mise 1 F, les valeurs prises par X sont – 1, 4 et 9.

2. la loi de probabilité de X :

$p(X = -1) = p\begin{pmatrix} \text{obtenir } 1, 2, 3, 4 \text{ ou } 5 \\ \text{aux deux lancers} \end{pmatrix} = \frac{5 \times 5}{6 \times 6} = \frac{25}{36}$.

$p(X = 4) = p\begin{pmatrix} \text{obtenir } 1, 2, 3, 4 \text{ ou } 5 \text{ à un} \\ \text{lancer et } 6 \text{ à l'autre} \end{pmatrix} = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{10}{36}$.

$p(X = 9) = p\begin{pmatrix} \text{obtenir } 6 \text{ aux} \\ \text{deux lancers} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

3. espérance mathématique de X :

$E(X) = \frac{1}{36}(-25 + 40 + 9) = \frac{2}{3} = 0{,}6666$.

Exercice 26 : Moussa lance deux dés dont les faces sont numérotées de 2 à 7. On suppose que les dés sont non truqués et donc que pour chaque dé, toutes les faces ont la même probabilité d'apparition. Moussa définit les règles suivantes :

- **Si les deux dés donnent le même numéro alors le joueur gagne 5 points.**
- **Si les deux dès donnent deux numéros de parités différentes (l'un est pair et l'autre impair) alors il gagne 3 points.**
- **Dans les autres cas il gagne 2 points.**

a. Moussa joue une partie et note X la variable aléatoire correspond au nombre de points obtenus.

a) Déterminez la loi de probabilité de X puis calculez l'espérance de X.

b) Donner la distribution la fonction de répartition de X.

2. Moussa effectue 5 parties de suites. Les résultats des parties sont indépendants les uns des autres. Il appelle alors Y la variable aléatoire égale au nombre de fois que le joueur perd 2 points.

a) Etablir la loi de probabilité de Y.

b) Quelle est la probabilité que le joueur perde au moins une fois 2 points ?

c) Combien de fois Moussa peut espérer perdre 2 points ? Déterminer $V(Y)$ et $\sigma(Y)$.

3. Moussa joue *n* parties de suite.

a) Quelle est la probabilité qu'il perde au moins une fois 2 points ?

b) A partir de quelle valeur de *n* sa probabilité de perdre au moins une fois 2 points est strictement supérieure à 0,9999 ?

Correction : $card(\Omega) = 6^2 = 36$.

- **Gain de 5 points, les couples sont :**

$(7; 7); (1; 1); (2; 2); (3; 3); (4; 4); (5; 5)$

- **Gain de 3 points, les couples sont :**

$(1; 2); (1; 4); (1; 6); (2; 3); (2; 5); (2; 7);$
$(3; 2); (3; 4); (3; 6); (4; 3)(4; 5); (4; 7);$
$(5; 2); (5; 4); (5; 6); (7; 3); (7; 5); (7; 6)$.

- **Perte de 2 points, les couples sont :**

$36 - 6 - 18 = 12$ couples.

1. *Pour une partie :* X $\Leftrightarrow$ nombre de points obtenus. $X = \{-2; 3; 5\}$

a) Loi de probabilité de X puis calculez l'espérance de X : $p(X = -2) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} = 0{,}3333$;

$p(X = +3) = \frac{18}{36} = 0{,}5$; $p(X = +5) = \frac{6}{36} = 0{,}1666$.

$E(X) = \frac{1}{36}[(-2)^2 \times 12 + 3^2 \times 18 + 5^2 \times 6] = 10.$

b) Distribution la fonction de répartition de X

$\forall x \in \,]-\infty; -2[,\ F(x) = p(X < -2) = 0$;

$\forall x \in [-2; 3[,\ F(x) = p(X < 3) = \frac{1}{3} = 0{,}3333$;

$\forall x \in [3; 5[,\ F(x) = p(X < 5) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6} = 0{,}8333$;

$\forall x \in [5; +\infty[,\ F(x) = 1.$

2. *__Pour 5 parties :__* Y ⟺ nombre de fois que le joueur perd 2 points

Y suit une loi binomiale de paramètre $\left(\mathbf{n = 5; p = \frac{1}{3}}\right)$

a) loi de probabilité de Y

$p(Y = 0) = C_5^0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^{5-0} = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{243}$;

$p(Y = 1) = C_5^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^{5-1} = \frac{5\times 2^4}{3^5} = \frac{80}{243}$;

$p(Y = 2) = C_5^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{5-2} = \frac{10\times 2^3}{3^5} = \frac{80}{243}$;

$p(Y = 3) = C_5^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^{5-3} = \frac{10\times 2^2}{3^5} = \frac{40}{243}$;

$p(Y = 4) = C_5^4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^{5-4} = \frac{5\times 2}{3^5} = \frac{10}{243}$;

$p(Y = 5) = C_5^5 \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^{5-5} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243}.$

b) Probabilité que le joueur perd au moins une fois 2 points : $p(Y > 1) = 1 - p(Y = 0)$

$p(Y > 1) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^5 = 1 - \frac{32}{243} = 0{,}8683.$

c) Nombre de fois Moussa peut espérer perdre 2 points : Le nombre de fois que Moussa peut espérer perdre points en 5 parties est l'espérance de la variable aléatoire Y.

$E(Y) = \sum_{i=1}^{n} y_i p(Y = y_i) = np$ (**Loi binomiale**).

$E(Y) = 5 \times \frac{1}{3} = 1{,}666.$

Variance de X : $\mathbf{V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = np(1-p)}$ et $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{(Y)} = \sqrt{\mathbf{np(1-p)}}$ (**loi binomiale**).

$V(Y) = 5 \times \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{10}{9} = 1{,}111.$

$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{(Y)} = \sqrt{5 \times \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right)} = 1{,}054.$

3. Moussa joue *n* parties de suite.

a) Probabilité qu'il perde au moins une fois 2 points : $p(Z \geq 1) = 1 - p(Z = 0) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n.$

b) $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n > 0{,}9999 \Leftrightarrow -\left(\frac{2}{3}\right)^n > 0{,}9999 - 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n < -0{,}9999 + 1 \Leftrightarrow e^{n \ln\left(\frac{2}{3}\right)} < -0{,}9999 + 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n \ln\left(\frac{2}{3}\right) < \ln(-0{,}9999 + 1) \Leftrightarrow n < \frac{\ln(-0{,}9999+1)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \Leftrightarrow n > 22{,}71 \Leftrightarrow n > 23.$

__Exercice 27 :__ **Diallo lance simultanément un dé dont les faces sont numérotées de 0 à 5 et une pièce de monnaie comprenant une face (F) et une pile (P). A chaque lancer, il associe le nombre de complexe** $\boldsymbol{z = R\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}n\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}n\right)\right]}$ **et considère la situation suivante :**

- $\boldsymbol{n}$ **est l'entier naturel prenant les numérotées de 0 à 5 du dé, inscrit sur sa face supérieure ;**
- $\mathbf{R = 1}$**, s'il obtient une face (F) ;**
- $\mathbf{R = 2}$**, s'il obtient une pile (P) ;**
- **les points A_n issus de la face (F) et B_n issus de la pile (P), dont l'affixe z a pour ordonnée y.**

a) Donner les différentes valeurs de z.

b) Déterminer l'ensemble des points obtenus. En déduire la probabilité de chaque point.

c) Quelle est la probabilité pour que l'ordonnée y soit égale à 0 ou 1 ?

d) Diallo lance dé cubique bien équilibrée. Quelle est la probabilité d'obtenir 10 fois 0 en 15 lancers ?

__Correction :__ $\boldsymbol{z = R\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}n\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}n\right)\right]}$

- **__Obtenir une face (F)__**

$\mathbf{A_n}\left(\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}n\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}n\right)\right]\right)$ **ou** $\mathbf{A_n}\left(e^{\frac{\pi}{6}ni}\right)$

- **__Obtenir une pile (P)__**

$\mathbf{B_n}\left(2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}n\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}n\right)\right]\right)$ **ou** $\mathbf{B_n}\left(2e^{\frac{\pi}{6}ni}\right)$

a) Donner les différentes valeurs de z :

	0	1	2	3	4	5
F	**1**	$e^{\frac{\pi}{6}i}$	$e^{\frac{\pi}{3}i}$	i	$e^{\frac{2\pi}{3}i}$	$e^{\frac{5\pi}{6}i}$
P	**2**	$2e^{\frac{\pi}{6}i}$	$2e^{\frac{\pi}{3}i}$	$2i$	$2e^{\frac{2\pi}{3}i}$	$2e^{\frac{5\pi}{6}i}$

b) Déterminer l'ensemble des points obtenus.

$A_0(1; 0)$; $A_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$; $A_2\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $A_3(0;\ 1)$;
$A_4\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $A_5\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

$B_0(2; 0)$; $B_1(\sqrt{3};\ 1)$; $B_2(1;\ \sqrt{3})$; $B_3(0;\ 2)$;
$B_4(-1;\ \sqrt{3})$; $B_5(-\sqrt{3};\ 1)$.

il y 12 points, ce qui fait : $\mathrm{card}(\Omega) = 12$, donc chaque point inscris a une probabilité $\mathbf{\frac{1}{12}}$ d'être obtenu.

c) $p(y = 0 \text{ ou } 1) = p(y = 0) + p(y = 1) = \frac{5}{12}.$

d) Elle suit une loi binomiale, car l'expérience consiste en la réalisation de 15 épreuves élémentaires n'ayant que deux issues possibles, chaque épreuve étant indépendante. Le paramètre *n* de cette loi vaut 15, tandis que *p* est égal à la probabilité d'obtenir une face du dé lors d'un lancer, c'est à dire $\frac{1}{6}$. *X* suit donc la loi binomiale B(15; $\frac{1}{6}$), et la probabilité d'obtenir 10 fois en 0 en 15 lancers est égale à :

$p(X = 10) = C_{15}^{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{10}\left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{5\times 5^5}{6^{15}} = 1{,}9958.10^{-5}.$

__Exercice 28 :__ **Dans un repère orthonormé$(\mathbf{O};\ \vec{\mathbf{i}};\ \vec{\mathbf{j}})$, Moussa place les points $\mathbf{A(0; 1)}$; $\mathbf{B(1; 0)}$ et $\mathbf{C(-1; 0)}$ affectés de leurs coefficients respectifs $\mathbf{1; a; b}$. le couple $\mathbf{(a; b)}$ est obtenu de la manière suivante :**

- **a est le résultat du 1er jet d'un dé dont les faces portent les nombres – 3; -2; -1; 1; 2; 3;**
- **b est le résultat du 2e jet du même dé.**

Chaque couple a la même probabilité d'apparition.

a) Discuter l'existence du barycentre G de ce système de points suivant les valeurs de a et b. quelles sont alors les coordonnées de G ?

b) Quelle est la probabilité pour que le système de points pondérés admette un barycentre G dont l'ordonnée est égale à 1 ?

c) Question analogue en imposant au barycentre G d'avoir une abscisse nulle.

d) Question analogue en imposant au barycentre G d'appartenir à l'une ou l'autre des bissectrices des axes du repère.

<u>Correction :</u>

a) Discuter l'existence du barycentre G :

$1+\mathrm{a}+\mathrm{b}\neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{a}+\mathrm{b}\neq -1$, d'où G existe.

Coordonnées de G $\begin{cases} x_{\mathrm{G}}=\frac{\mathrm{a}-\mathrm{b}}{1+\mathrm{a}+\mathrm{b}} \\ y_{\mathrm{G}}=\frac{1}{1+\mathrm{a}+\mathrm{b}} \end{cases}$

b) probabilité pour que le système de points pondérés admette un barycentre G dont l'ordonnée est égale à 1 : il y a 36 couples $(\mathbf{a};\mathbf{b})$ obtenus en jetant successivement 2 fois de suite le même dé. Chaque couple a une probabilité de $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{36}}$.

$y_{\mathrm{G}}=\frac{1}{1+\mathrm{a}+\mathrm{b}}=1 \Leftrightarrow \mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{0}$, ce qu'on peut aisément trouver dans un tableau à double entré.

b \ a	-3	-2	-1	1	2	3
-3	-6	-5	-4	-2	-1	0
-2	-5	-4	-3	-1	0	1
-1	-4	-3	-2	0	1	2
1	-2	-1	0	2	3	4
2	-1	0	1	3	4	5
3	0	1	2	4	5	6

$\mathbf{p(a+b=0)=\frac{6}{36}=0,1666.}$

c) Question analogue en imposant au barycentre G d'avoir une abscisse nulle :

$x_{\mathrm{G}}=\frac{\mathrm{a}-\mathrm{b}}{1+\mathrm{a}+\mathrm{b}}=0 \Leftrightarrow \mathrm{a}-\mathrm{b}=0 \Leftrightarrow \mathrm{a}=\mathrm{b}$. $(\mathbf{-3};\mathbf{-3})$; $(\mathbf{-2};\mathbf{-2})$; $(\mathbf{-1};\mathbf{-1})$; $(\mathbf{1};\mathbf{1})$; $(\mathbf{2};\mathbf{2})$; $(\mathbf{3};\mathbf{3})$.

$\mathbf{p(a=b)=\frac{6}{36}=0,1666.}$

d) Question analogue en imposant au barycentre G d'appartenir à l'une ou l'autre des bissectrices des axes du repère :

- <u>à la 1ère bissectrice</u>, on a :

$x_{\mathrm{G}}=y_{\mathrm{G}}=\frac{\mathrm{a}-\mathrm{b}}{1+\mathrm{a}+\mathrm{b}}=\frac{1}{1+\mathrm{a}+\mathrm{b}} \Leftrightarrow \mathrm{a}-\mathrm{b}=1$ et ces couples sont : $(\mathbf{-2};\mathbf{-3})$; $(\mathbf{-1};\mathbf{-2})$; $(\mathbf{2};\mathbf{1})$; $(\mathbf{3};\mathbf{2})$;

- <u>à la 2ère bissectrice</u>, on a :

$x_{\mathrm{G}}+y_{\mathrm{G}}=0 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{a}-\mathrm{b}}{1+\mathrm{a}+\mathrm{b}}+\frac{1}{1+\mathrm{a}+\mathrm{b}}=0 \Leftrightarrow \mathrm{a}-\mathrm{b}=-1$ et ces couples sont : $(\mathbf{-3};\mathbf{-2})$; $(\mathbf{-2};\mathbf{-1})$; $(\mathbf{1};\mathbf{2})$; $(\mathbf{2};\mathbf{3})$.

$\mathbf{p(\text{bissectrices des axes du repère})=\frac{8}{36}=0,22.}$

<u>Exercice 29 :</u> Diallo lance 2 fois de suite un dé dont chaque face porte une des lettres T, A, L, A, T, A. La lecture de la lettre inscrite est prise sur la face supérieure du dé cubique.

Il associe la situation suivante en obtenant : $m \in$ IR

- **2 lettres identiques, il perd 70 F ;**
- **La lettre A au 1er jet suivi de la lettre T au 2e jet, il gagne $(\mathbf{10}m)$ F ;**
- **Les autres, il gagne 15 F.**

Diallo appelle X la variable aléatoire le gain algébrique dans ce jeu.

a) Calculer la probabilité des événements :

A « avoir au moins une lettre A » ;

B « avoir les lettres du mot 'TA' ».

b) Quelles sont les valeurs prises par X ?

c) Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.

d) Déterminer m pour que le jeu soit équitable.

<u>Correction :</u> il y a $\mathbf{6^2=36}$ couples $(\mathbf{a};\mathbf{b})$ obtenus en jetant successivement 2 fois de suite le même dé. Chaque couple a une probabilité de $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{36}}$.

a) probabilité des événements :

A « avoir au moins une lettre A »

$\mathrm{p(A)}=1-\mathrm{p}(\text{a⍰c⍰ne lettre A})=1-\frac{18}{36}=0{,}5.$

B « avoir les lettres du mot 'TA' »

$\mathrm{p(A)}=\frac{6}{36}=0{,}1666.$

b) les valeurs prises par X :

- **Perte de 70 F, les couples sont :**

$(\mathrm{T};\mathrm{T})$; $(\mathrm{A};\mathrm{A})$; $(\mathrm{L};\mathrm{L})$; $(\mathrm{A};\mathrm{A})$; $(\mathrm{T};\mathrm{T})$; $(\mathrm{A};\mathrm{A})$

- **Gain de $(\mathbf{10}m)$ F, les couples sont :**

6 fois $(\mathrm{A};\mathrm{T})$.

- **Gain de 15 F, les couples sont :**

$36-6-6=24$ couples.

$\mathbf{X=\{-70;\ 10}\boldsymbol{m}\mathbf{;15\}.}$

c) loi de probabilité de X

$\mathrm{p(X=-70)}=\frac{6}{36}=0{,}1666$;

$\mathrm{p}(\mathrm{X}=10m)=\frac{6}{36}=0{,}1666$;

$\mathrm{p(X=15)}=\frac{24}{36}=0{,}6666.$

Espérance mathématique : $\mathrm{E(X)} = \frac{1}{36}(-70 \times 6 + 10m \times 6 + 24 \times 15 = 60\mathrm{m} - 6036 = 53m - 1$.

d) Déterminer m pour que le jeu soit équitable.

$\mathrm{E(X)} = \frac{5}{3}(m-1) = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

<u>Exercice 30 :</u> ***dé tétraédrique non truqué***

Un (1) dé tétraédrique non pipé dont les faces de chaque dé sont numérotées de 1 à 4. Soit Ω l'univers $\{1, 2, 3, 4\}$ et p_k la probabilité de l'événement $\{k\}$ avec $k \in \Omega$.

A. Moussa lance ce dé tétraédrique non pipé, calculer les probabilités p_1 ; p_2 ; p_3 et p_4.

B. Moussa lance deux (2) fois de suite ce dé en formant le couple $(1^{\text{er}}\text{ jet} ; 2^{\text{er}}\text{ jet}) = (\mathrm{a}; \mathrm{b})$ et appelle X la variable aléatoire définit par :

- **Si $\mathrm{a} = \mathrm{b}$, alors $\mathrm{X(a; b)} = \mathrm{a} = \mathrm{b}$;**
- **Si $\mathrm{a} \neq \mathrm{b}$ avec a divisible par b ou b divisible par a, alors $\mathrm{X(a; b)} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$ (si $\mathrm{a} > b$) ou $\mathrm{X(a; b)} = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}$ (si $\mathrm{b} > a$) ;**
- **Dans tous les autres cas, $\mathrm{X(a; b)} = \mathrm{a} + \mathrm{b}$.**

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

b) Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.

c) Donner la distribution de la fonction de répartition.

<u>**Correction :**</u> il y a $\mathbf{4^2 = 16}$ couples $(\mathbf{a}; \mathbf{b})$ obtenus en jetant successivement 2 fois de suite le même dé.

Chaque couple a une probabilité de $\frac{1}{16}$.

A. $p_1 = \frac{1}{16}$; $p_2 = \frac{1}{16}$; $p_3 = \frac{1}{16}$ et $p_4 = \frac{1}{16}$.

B. lancer deux (2) fois de suite ce dé :

a) valeurs prises par X :

b \ a	1	2	3	4
1	**1**	**2**	**3**	**4**
2	**2**	**2**	**5**	**2**
3	**3**	**5**	**3**	**7**
4	**4**	**2**	**7**	**4**

$\mathbf{X(\Omega) = \{1;\ 2; 3; 4;\ 5; 7\}}$.

b) loi de probabilité de X :

$\mathrm{p(X = 1)} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$;

$\mathrm{p(X = 2)} = \frac{5}{16} = 0{,}3125$;

$\mathrm{p(X = 3)} = \frac{3}{16} = 0{,}1875$;

$\mathrm{p(X = 4)} = \frac{3}{16} = 0{,}1875$;

$\mathrm{p(X = 5)} = \frac{2}{16} = 0{,}125$;

$\mathrm{p(X = 7)} = \frac{2}{16} = 0{,}125$.

Espérance mathématique :

$\mathrm{E(X)} = \frac{1}{16}(1 + 10 + 9 + 12 + 10 + 14) = 3{,}5$.

c) Distribution de la fonction de répartition :

$\forall\, x \in\ ]-\infty; 1[$, $\mathrm{F}(x) = \mathrm{p}(\mathrm{X} < x) = 0$;

$\forall\, x \in\ [1; 2[$, $\mathrm{F}(x) = \mathrm{p}(\mathrm{X} < x) = \frac{1}{16} = 0{,}0625$;

$\forall\, x \in\ [2; 3[$, $\mathrm{F}(x) = \mathrm{p}(\mathrm{X} < x) = \frac{6}{16} = 0{,}375$;

$\forall\, x \in\ [3; 4[$, $\mathrm{F}(x) = \mathrm{p}(\mathrm{X} < x) = \frac{9}{16} = 0{,}5625$;

$\forall\, x \in\ [4; 5[$, $\mathrm{F}(x) = \mathrm{p}(\mathrm{X} < x) = \frac{12}{16} = 0{,}75$;

$\forall\, x \in\ [5; 7[$, $\mathrm{F}(x) = \mathrm{p}(\mathrm{X} < x) = \frac{14}{16} = 0{,}875$;

$\forall\, x \in\ [7; +\infty[$, $\mathrm{F}(x) = 1$.

<u>Exercice 31 :</u> ***dé cubique truqué***

Un (1) dé cubique pipé dont les faces sont numérotées de 0 à 5. Soit Ω l'univers $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ et p_k la probabilité de l'événement $\{k\}$ avec $k \in \Omega$. Ce dé est tel que :

$\mathbf{2p_0 = 3p_1 = 4p_2 = 5p_3 = 6p_4 = 7p_5}$.

A. Moussa lance ce dé, calculer les probabilités p_0 ; p_1 ; p_2 et p_3 ; p_4 et p_5.

B. Moussa appelle X la variable aléatoire définit par :

- **$\mathrm{X(0) = X(1) = 0}$;**
- **$\mathrm{X(2) = X(4) = 2}$;**
- **$\mathrm{X(3) = X(5) = 3}$.**

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

b) Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.

c) Donner la distribution de la fonction de répartition.

<u>**Correction :**</u>

A. probabilités p_0 ; p_1 ; p_2 et p_3 ; p_4 et p_5 :

$2p_0 = 3p_1 = 4p_2 = 5p_3 = 6p_4 = 7p_5$.

$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1$;

$p_0 + \frac{2}{3}p_0 + \frac{2}{4}p_0 + \frac{2}{5}p_0 + \frac{2}{6}p_0 + \frac{2}{7}p_0 = 1$;

$p_0\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{1}{3} + \frac{2}{7}\right) = 1 \Leftrightarrow p_0 = \frac{70}{223}$;

En déduit que $p_1 = \frac{70\times2}{223\times3} = \frac{140}{669}$; $p_2 = \frac{70\times2}{223\times4} = \frac{35}{223}$; $p_3 = \frac{70\times2}{223\times5} = \frac{28}{223}$; $p_4 = \frac{70\times2}{223\times6} = \frac{70}{669}$ et $p_5 = \frac{70\times2}{223\times7} = \frac{20}{223}$.

B. X la variable aléatoire définit par :

- **$\mathrm{X(0) = X(1) = 0}$;**
- **$\mathrm{X(2) = X(4) = 2}$;**
- **$\mathrm{X(3) = X(5) = 3}$.**

a) valeurs prises par X : $\mathrm{X(\Omega)} = \{\mathbf{0};\ \mathbf{2}; \mathbf{3}\}$.

b) loi de probabilité de X :

$p(X = 0) = p_0 + p_1 = \frac{210+140}{669} = \frac{350}{669} = 0,5231$;
$p(X = 2) = p_2 + p_4 = \frac{105+70}{669} = \frac{175}{669} = 0,2615$;
$p(X = 3) = p_3 + p_5 = \frac{28+20}{223} = \frac{48}{223} = 0,2152$.

Espérance mathématique :

$E(X) = \frac{1}{669}(2 \times 175 + 48 \times 3 \times 3) = \frac{782}{669} = 1,1689.$

c) Distribution de la fonction de répartition :

$\forall x \in]-\infty; 0[, F(x) = p(X < x) = 0$;
$\forall x \in [0; 2[, F(x) = p(X < x) = \frac{350}{669} = 0,5231$;
$\forall x \in [2; 3[, F(x) = p(X < x) = \frac{525}{669} = 0,7847$;
$\forall x \in [3; +\infty[, F(x) = 1.$

Exercice 32 : Un (1) dé cubique dont les faces sont numérotées de 0 à 5. Moussa jette ce dé et considère X qui à chaque lancer associe la somme des chiffres indiqués sur les 3 faces visibles. Il définit :

- $\mathbf{p(X = 11) = \frac{1}{11}}$
- $\mathbf{p(X = 15) = 2p(X = 13) = 3p(X = 11)}$;
- $\mathbf{3p(X = 14) = p(X = 10) = 4p(X = 12)}$;

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

c) Moussa appelle Y la variable aléatoire correspondant au gain définit par :

- **Si X est pair et multiple de 5 alors il gagne 15 points ;**
- **Si X est premier alors il perd 5 points ;**
- **Dans les autres cas alors il gagne 10 points ;**

Etablir la loi de probabilité deY.

Correction :

- $p(X = 15) = 2p(X = 13) = 3p(X = 11)$;
- $3p(X = 14) = p(X = 10) = 4p(X = 12)$;

a) valeurs prises par X :

$X(\Omega) = \{10;\ 11; 12; 13; 14; 15\}$.

b) loi de probabilité de X :

$p(X = 10) + p(X = 11) + p(X = 12) + p(X =$
13+pX=14+pX=15=1.

$p(X = 10) + \frac{1}{11} + \frac{1}{4}\ p(X = 10) + \frac{3}{2\times 11} + \frac{1}{3}\ p(X =$
10+311=1⟺1912pX=10=1−1122⟺1912pX=10
=1122⟺pX=10=132418=66209.

$p(X = 11) = \frac{1}{11}$; $p(X = 12) = \frac{33}{418}$;
$p(X = 13) = \frac{3}{22}$; $p(X = 14) = \frac{22}{209}$;
$p(X = 15) = \frac{3}{11}$;

c) Y la variable aléatoire définit par :

loi de probabilité deY :

$Y(\Omega) = \{-5;\ 10; 15\}$.

$p(Y = -5) = p(X = 11) + p(X = 13) = \frac{5}{22}$;

$p(Y = 10) = p(X = 12) + p(X = 14) + p(X = 15) = \frac{33}{418} + \frac{22}{209} + \frac{3}{11} = \frac{191}{418}$;

$p(Y = 15) = p(X = 10) = \frac{66}{209} = 0,31578$;

Exercice 36 : Diallo lance deux dés D_1 et D_2 parfaitement équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Il note :

- **X_1 le numéro obtenu en lançant le dé D_1,**
- **X_2 le numéro obtenu en lançant le dé D_2,**
- **S la variable aléatoire égale à la somme des deux numéros obtenus,**
- **P la variable aléatoire égale au numéro le plus grand obtenu,**
- **M la variable aléatoire égale au numéro le plus petit obtenu.**

1.

a) Calculer l'espérance de X_1 et l'espérance de X_2. Quelle relation y a-t-il entre X_1 , X_2 et S ? Quelle est l'espérance de S ?

b) Déterminer la loi de probabilité de S. On présentera les résultats sous forme de tableau. Retrouver alors directement l'espérance de S.

2.

a) Déterminer la loi de probabilité de P. Pour cela, on peut s'aider du tableau suivant en le complétant avec les valeurs que prend la variable P.

b) Vérifier que l'espérance de P est : $E(P) = \frac{161}{36}$.

3.

a) Quelle relation simple a-t-on entre M, P et S?

b) Quelle est l'espérance de M?

c) Déterminer la loi de probabilité de M. Retrouver alors le résultat précédent.

Correction : l'univers Ω est l'ensemble des résultats possibles du lancer des deux dés. Ω est donc le produit cartésien $D_1 \times D_2$. Son cardinal est alors 36.

1. les lois des variables aléatoires X_1 et X_2 sont identiques. La variable X_1 prend les valeurs Ω = 1 , 2 , 3 , 4 , 5 ou 6 avec pour chacune d'entre elles, $p(X_1 = x_i)$. Le plus simple, pour déterminer la loi de probabilité de S, est de faire un tableau.

a) l'espérance de X_1 et l'espérance de X_2 :

$E(X_1) = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3,5 = E(X_2)$.

Relation entre X_1 , X_2 et S : $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$, comme $S = X_1 + X_2$, donc $E(S) = 7$.

b) Déterminons la loi de probabilité de S :

$S(\Omega) = \{ 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 , 11 , 12\}$.

$p(S = 2) = \frac{1}{36} = 0,0277$; $p(S = 3) = \frac{2}{36} = 0,0555$;
$p(S = 4) = \frac{3}{36} = 0,0833$; $p(S = 5) = \frac{4}{36} = 0,1111$;

$p(S=6)=\frac{5}{36}=0{,}1388$; $p(S=7)=\frac{6}{36}=0{,}16666$;
$p(S=8)=\frac{5}{36}=0{,}1388$; $p(S=9)=\frac{4}{36}=0{,}1111$;
$p(S=10)=\frac{3}{36}=0{,}0833$; $p(S=11)=\frac{2}{36}=0{,}0555$
$p(S=12)=\frac{1}{36}=0{,}0277$.
$E(S)=\sum_i x_i \times p(X_1=x_i)=7$.

2.

a) Déterminons la loi de probabilité de P :
P = plus grand des deux numéros obtenus".
$P(\Omega)=\{1,2,3,4,5,6\}$.

P	1	2	3	4	5	6
$p(P=x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

b) Vérifions que $E(P)=\frac{161}{36}$:
$E(P)=\frac{1}{36}(1+4+6+15+28+45+66)=\frac{161}{36}$.

3.

a) Relation entre M, P et S : On peut remarquer que la somme des numéros obtenus lors du lancer des deux dés est égale à P + M. Donc, la relation entre S, P et M est : S = P + M. On sait que $E(S)=E(P)+E(M)$

b) L'espérance de M : $E(S)=E(P)+E(M) \Leftrightarrow$
$E(M)=E(S)-E(P)=7-\frac{161}{36}=\frac{91}{36}$

c) Déterminons la loi de probabilité de M :

M	1	2	3	4	5	6
$p(M=x_i)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

$E(M)=\frac{1}{36}(11+18+21+20+15+6)=\frac{91}{36}$.

VIII. Jeu de cartes :

Exercice 39 : Dans un jeu de 32 cartes on tire au hasard simultanément huit (8) cartes.
Calculer la probabilité des événements suivants :
A « obtenir un as, un roi, la dame de pique et deux (2) valets » ;
B « obtenir au moins un as » ;
C « obtenir deux (2) as et cinq cœurs ».

Correction : Le nombre total de cas élémentaires est le nombre de parties à 8 éléments d'un ensemble comportant 32 éléments :
$\mathbf{card(\Omega)=C_{32}^{8}}=105183.10^2$.
probabilité des événements suivants :
A « obtenir un as, un roi, la dame de pique et deux (2) valets » $\mathbf{p(A)=\frac{card(A)}{card(\Omega)}}$ **:** $card(A)=C_4^1\times C_4^1\times C_4^2\times C_{19}^3=93024$, donc $\mathbf{p(A)}=0{,}00884$.
B « obtenir au moins un as » : $\mathbf{p(B)=1-p(aucun\ as)=1-}\frac{C_4^0\times C_{28}^8}{C_{32}^8}$, donc $\mathbf{p(B)}=0{,}7045$.
C « obtenir deux (2) as et cinq cœurs ». $\mathbf{p(C)=\frac{card(C)}{card(\Omega)}}$ **:** $card(C)=C_3^1\times C_7^4\times C_{21}^2+C_3^2\times C_7^5\times C_{21}^1=22050+1323=23373$, donc $\mathbf{p(C)}=0{,}002222$.

Exercice 40 : Moussa tire trois (3) cartes au hasard dans un jeu de 32 cartes.
Il considère les événements suivants :
A « obtenir un as » ;
B « obtenir deux (2) cœurs » ;
C « obtenir l'as de pique » ;
D « obtenir des cartes noires » ;
E « obtenir des trèfles » ;
F « obtenir le roi et la dame de pique » ;
G « obtenir deux (2) roi et la dame de pique ».
Calculer la probabilité de ces événements le cas où :
1. le tirage s'effectue successif avec remise.
2. Le tirage s'effectue successif sans remise.
3. Le tirage s'effectue simultanément.

Correction :

1. _Tirage successif avec remise :_
$\Rightarrow\ \mathbf{card(\Omega)=32^3}=32768$.
A « obtenir un as » $p(1as)=\frac{4}{32}=0{,}125$
$p(A)=[p(1as)]^3=(0{,}125)^3=0{,}00195$.
B « obtenir deux (2) cœurs » $p(1coeur)=\frac{8}{32}=0{,}25$
$p(B)=(0{,}25)^2\times\frac{24}{32}=\frac{8^2\times24^1}{32768}=0{,}04687$.
C « obtenir l'as de pique »
$p(C)=\frac{1^3\times24^0}{32^3}=\frac{1^3\times24^0}{32768}=3{,}05.10^{-5}$.
D « obtenir des cartes noires »
$p(D)=\frac{card(D)}{card(\Omega)}=\frac{16^3\times24^0}{32^3}=\frac{16^3\times24^0}{32768}=0{,}125$.
E « obtenir des trèfles »
$p(E)=\frac{card(E)}{card(\Omega)}=\frac{8^3\times24^0}{32768}=0{,}0156$;
F « obtenir le roi et la dame de pique »
$p(F)=\frac{card(F)}{card(\Omega)}=\frac{4^1\times8^1\times20^1}{32768}=0{,}01953$.
G « obtenir deux (2) roi et la dame de pique »
$p(G)=\frac{card(G)}{card(\Omega)}=\frac{4^2\times1^1\times27^0}{32768}=4{,}88.10^{-4}$.

2. _Tirage successif avec remise :_
$\Rightarrow\ \mathbf{card(\Omega)=A_{32}^3}=29760$.
Nous somme d'un cas d'équiprobabilité
A « obtenir un as »
$p(A)=\frac{card(A)}{card(\Omega)}=\frac{A_4^1\times A_{28}^2}{29760}=\frac{3024}{29760}=0{,}1016$.
B « obtenir deux (2) cœurs »
$p(B)=\frac{card(B)}{card(\Omega)}=\frac{A_8^2\times A_{24}^1}{29760}=\frac{1344}{29760}=0{,}0451$.
C « obtenir l'as de pique »
$p(C)=\frac{card(C)}{card(\Omega)}=\frac{A_1^1\times A_{31}^2}{29760}=\frac{930}{29760}=0{,}03125$.
D « obtenir des cartes noires »
$p(D)=\frac{card(D)}{card(\Omega)}=\frac{A_{16}^3\times A_{16}^0}{29760}=\frac{3360}{29760}=0{,}1129$.
E « obtenir des trèfles »
$p(E)=\frac{card(E)}{card(\Omega)}=\frac{A_8^3\times A_{24}^0}{29760}=\frac{336}{29760}=0{,}01129$;
F « obtenir le roi et la dame de pique »
$p(F)=\frac{card(F)}{card(\Omega)}=\frac{A_4^1\times A_1^1\times A_{27}^1}{29760}=\frac{108}{29760}=0{,}00362$.
G « obtenir deux (2) roi et la dame de pique »

$p(G)=\frac{card(G)}{card(\Omega)}=\frac{A_4^2\times A_1^1\times A_{27}^0}{29760}=\frac{12}{29760}=4{,}032.10^{-4}$.

3. ***Tirage simultané :*** $\Longrightarrow$ $\mathbf{card(\Omega)=C_{32}^3}=4960$.
Nous somme d'un cas d'équiprobabilité

A « obtenir un as »

$p(A)=\frac{card(A)}{card(\Omega)}=\frac{C_4^1\times C_{28}^2}{4960}=\frac{1512}{4960}=0{,}3048$.

B « obtenir deux (2) cœurs »

$p(B)=\frac{card(B)}{card(\Omega)}=\frac{C_4^2\times C_{28}^1}{4960}=\frac{168}{4960}=0{,}03387$.

C « obtenir l'as de pique »

$p(C)=\frac{card(C)}{card(\Omega)}=\frac{C_1^1\times C_{31}^2}{4960}=\frac{465}{4960}=0{,}09375$.

D « obtenir des cartes noires »

$p(D)=\frac{card(D)}{card(\Omega)}=\frac{C_{16}^3\times C_{16}^0}{4960}=\frac{560}{4960}=0{,}1129$.

E « obtenir des trèfles »

$p(E)=\frac{card(E)}{card(\Omega)}=\frac{C_8^3\times C_{24}^0}{4960}=\frac{56}{4960}=0{,}01129$;

F « obtenir le roi et la dame de pique »

$p(F)=\frac{card(F)}{card(\Omega)}=\frac{C_4^1\times C_1^1\times C_{27}^1}{4960}=\frac{108}{4960}=0{,}002177$.

G « obtenir deux (2) roi et la dame de pique »

$p(G)=\frac{card(G)}{card(\Omega)}=\frac{C_4^2\times C_1^1\times C_{27}^0}{4960}=\frac{6}{4960}=1{,}209.10^{-3}$.

<u>Exercice 41 :</u> On tire simultanément au hasard cinq (5) cartes dans un jeu de 32 cartes.

1. Calculer la probabilité des événements suivants :

A « obtenir deux (2) as » ;
B « obtenir trois (3) valets » ;
C « obtenir au moins un as » ;
D « obtenir au moins deux (2) as » ;
E « obtenir au plus deux (2) as ».

2. Soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre d'obtenir au moins un as.

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
b) Etablir la loi de probabilité de X.
c) Calculer l'espérance mathématique : E(X).
d) Donner la distribution de la fonction de répartition de X.

<u>Correction :</u> Le nombre total de cas élémentaires est le nombre de parties à 5 éléments d'un ensemble comportant 32 éléments$\Longrightarrow$ $\mathbf{card(\Omega)=C_{32}^5}=201376$

1. Le nombre de cas favorables est le nombre de parties à 5 éléments d'un ensemble comportant k éléments. Nous somme d'un cas d'équiprobabilité.

A « obtenir deux (2) as » $\mathbf{p(A)=\frac{card(A)}{card(\Omega)}}$ **:**

$card(A)=C_4^2\times C_{28}^3=19656$, donc $\mathbf{p(A)}=0{,}0976$.

B « obtenir trois (3) valets » $\mathbf{p(B)=\frac{card(B)}{card(\Omega)}}$ **:**

$card(B)=C_4^3\times C_{28}^2=1512$, donc $\mathbf{p(B)}=0{,}0075$.

C « obtenir au moins un as » $\mathbf{p(C)=\frac{card(C)}{card(\Omega)}}$ **:**

$\mathbf{p(C)=1-\ p(aucun\ as)=\ p(1\ as)+\ p(2\ as)+}$
$\mathbf{p(3\ as)+p(4\ as)=1}-\frac{C_4^0\times C_{28}^5}{C_{32}^5}=$
$\frac{C_4^1\times C_{28}^4+C_4^2\times C_{28}^3+C_4^3\times C_{28}^2+C_4^4\times C_{28}^1}{C_{32}^5}=0{,}512$.

D « obtenir au moins deux (2) as » $\mathbf{p(D)=\frac{card(D)}{card(\Omega)}}$ **:**

$\mathbf{p(D)=\ p(2\ as)+\ p(3\ as)+p(4\ as)=}$
$\frac{C_4^2\times C_{28}^3+C_4^3\times C_{28}^2+C_4^4\times C_{28}^1}{C_{32}^5}=\frac{19656+1512+28}{201376}=0{,}10525$.

E « obtenir au plus deux (2) as » $\mathbf{p(E)=\frac{card(E)}{card(\Omega)}}$ **:**

$\mathbf{p(E)=\ p(aucun\ as)+\ p(1\ as)+\ p(2\ as)=}$
$\frac{C_4^0\times C_{28}^5+C_4^1\times C_{28}^4+C_4^2\times C_{28}^3}{C_{32}^5}=\frac{98280+81900+19656}{201376}=0{,}9923$.

2. X $\Longrightarrow$ nombre d'obtenir au moins un as.

a) $\mathbf{X=\{0;1;2;3;4\}}$

b) la loi de probabilité de X.

$p(X=0)=\frac{C_4^0\times C_{28}^5}{C_{32}^5}=\frac{98280}{201376}=0{,}488$;

$p(X=1)=\frac{C_4^1\times C_{28}^4}{C_{32}^5}=\frac{81900}{201376}=0{,}4067$;

$p(X=2)=\frac{C_4^2\times C_{28}^3}{C_{32}^5}=\frac{19656}{201376}=0{,}0976$;

$p(X=3)=\frac{C_4^3\times C_{28}^2}{C_{32}^5}=\frac{1512}{201376}=0{,}0075$;

$p(X=4)=\frac{C_4^4\times C_{28}^1}{C_{32}^5}=\frac{28}{201376}=0{,}000139$.

c) $\mathbf{E(X)}=0.(0{,}488)+1(0{,}4067)+2(0{,}976)+3(0{,}0075)+4(0{,}000139)=2{,}3817$.

d) fonction de répartition de X

$\forall\, x\in\ ]-\infty;0[,\ F(x)=p(X<0)=0$;
$\forall\, x\in\ [0;1[,\ F(x)=\frac{98280}{201376}=0{,}488$;
$\forall\, x\in\ [1;2[,\ F(x)=\frac{98280+81900}{201376}=0{,}8947$;
$\forall\, x\in\ [2;3[,\ F(x)=\frac{98280+81900+19656}{201376}=0{,}9923$;
$\forall\, x\in\ [3;4[,\ F(x)=\frac{98280+81900+19656+1512}{201376}=$
$0{,}9924$; $\forall\, x\in\ [4;+\infty[,\ F(x)=1$.

<u>Exercice 42 :</u> On tire deux (2) cartes au hasard dans un jeu de 32 cartes. On attribue à chaque :

- **valet la valeur 1 ;**
- **dame la valeur 2 ;**
- **roi la valeur 3 ;**
- **les autres cartes la valeur 0.**

1. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque événement fait correspondre la somme des valeurs attribuées aux cartes tirées.

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
b) Etablir la loi de probabilité de X.
c) Calculer l'espérance mathématique.
d) Donner la distribution de la fonction de répartition de X.

2. On appelle Y la variable aléatoire qui, à chaque événement fait correspondre la différence des valeurs absolues attribuées aux cartes tirées.

a) Quelles sont les valeurs prises par Y ?
b) Etablir la loi de probabilité de Y.
c) Donner la distribution de la fonction de répartition de Y.

3. On appelle Z la variable aléatoire qui, à chaque événement fait correspondre le produit des valeurs attribuées aux cartes tirées.

a) Quelles sont les valeurs prises par Z ?

b) Etablir la loi de probabilité de Z.
c) Donner la distribution de la fonction de répartition de Z.

Correction :

1. X ⟹ somme des valeurs attribuées aux cartes tirées. Par un tableau à double entré, on aura :

S	V_1	D_2	R_3	$Autres_0$
V_1	**2**	**3**	**4**	**1**
D_2	**3**	**4**	**5**	**2**
R_3	**4**	**5**	**6**	**3**
$Autres_0$	**1**	**2**	**3**	**0**

a) $\mathbf{X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}}$
b) **la loi de probabilité de X.**
$p(X = 0) = \frac{1}{16} = 0{,}0625$; $p(X = 1) = \frac{2}{16} = 0{,}125$;
$p(X = 2) = \frac{3}{16} = 0{,}1875$; $p(X = 3) = \frac{4}{16} = 0{,}25$;
$p(X = 4) = \frac{3}{16} = 0{,}1875$; $p(X = 5) = \frac{2}{16} = 0{,}125$;
$p(X = 6) = \frac{1}{16} = 0{,}0625$.
c) $\mathbf{E(X)} = 0(0{,}0625) + 1(0{,}125) + 2(0{,}1875) + 3(0{,}25) + 4(0{,}1875) + 5(0{,}125) + 6(0{,}0625) = 3.$
d) **fonction de répartition de X**
$\forall x \in \,]-\infty; 0[, F(x) = p(X < 0) = 0$;
$\forall x \in [0; 1[, F(x) = \frac{1}{16} = 0{,}0625$;
$\forall x \in [1; 2[, F(x) = \frac{3}{16} = 0{,}1875$;
$\forall x \in [2; 3[, F(x) = \frac{6}{16} = 0{,}375$;
$\forall x \in [3; 4[, F(x) = \frac{10}{16} = 0{,}625$;
$\forall x \in [4; 5[, F(x) = \frac{13}{16} = 0{,}8125$;
$\forall x \in [5; 6[, F(x) = \frac{15}{16} = 0{,}9375$;
$\forall x \in [6; +\infty[, F(x) = 1.$

2. Y ⟹ différence des valeurs absolues attribuées aux cartes tirées.

D	V_1	D_2	R_3	$Autres_0$
V_1	0	1	2	1
D_2	1	0	1	2
R_3	2	1	0	3
$Autres_0$	1	2	3	0

a) $\mathbf{X = \{0; 1; 2; 3\}}$
b) **la loi de probabilité de X.**
$p(X = 0) = \frac{4}{16} = 0{,}25$; $p(X = 1) = \frac{6}{16} = 0{,}375$;
$p(X = 2) = \frac{4}{16} = 0{,}25$; $p(X = 3) = \frac{2}{16} = 0{,}125$.
c) **fonction de répartition de X**
$\forall x \in \,]-\infty; 0[, F(x) = p(X < 0) = 0$;
$\forall x \in [0; 1[, F(x) = \frac{4}{16} = 0{,}25$;
$\forall x \in [1; 2[, F(x) = \frac{10}{16} = 0{,}625$;
$\forall x \in [2; 3[, F(x) = \frac{14}{16} = 0{,}875$;
$\forall x \in [3; +\infty[, F(x) = 1.$

3. Z ⟹ produit des valeurs attribuées aux cartes tirées.

P	V_1	D_2	R_3	$Autres_0$
V_1	**1**	**2**	**3**	**0**
D_2	**2**	**4**	**6**	**0**
R_3	**3**	**6**	**9**	**0**
$Autres_0$	**0**	**0**	**0**	**0**

a) $\mathbf{X = \{0; 1; 2; 3; 4; 6; 9\}}$
b) **loi de probabilité de X :**
$p(X = 0) = \frac{7}{16} = 0{,}4375$; $p(X = 1) = \frac{1}{16} = 0{,}625$;
$p(X = 2) = \frac{2}{16} = 0{,}125$; $p(X = 3) = \frac{2}{16} = 0{,}125$.
$p(X = 4) = \frac{1}{16} = 0{,}625$; $p(X = 6) = \frac{1}{16} = 0{,}625$;
$p(X = 9) = \frac{2}{16} = 0{,}125$.
c) **Fonction de répartition de X :**
$\forall x \in \,]-\infty; 0[, F(x) = p(X < 0) = 0$;
$\forall x \in [0; 1[, F(x) = \frac{7}{16} = 0{,}4375$;
$\forall x \in [1; 2[, F(x) = \frac{8}{16} = 0{,}5$;
$\forall x \in [2; 3[, F(x) = \frac{10}{16} = 0{,}625$;
$\forall x \in [3; 4[, F(x) = \frac{12}{16} = 0{,}75$;
$\forall x \in [4; 6[, F(x) = \frac{13}{16} = 0{,}8125$;
$\forall x \in [6; 9[, F(x) = \frac{14}{16} = 0{,}875$;
$\forall x \in [9; +\infty[, F(x) = 1.$

<u>Exercice 43 :</u> On dispose d'un jeu de 32 cartes. On en tire une carte. Si la carte est un figure (roi, dame ou valet) on s'arrête sinon, on la remet, et l'on recommence, … et ainsi de suite.

1. On appelle X la variable aléatoire qui est égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir une figure à l'issue de 4 tirages.
a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
b) Etablir la loi de probabilité de X.
c) Calculer $p(X \leq 2)$.
2. On procède cette fois –ci à n nombre de tirages. On appelle Y la variable aléatoire qui est égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir une figure à l'issue de n tirages.
a) Quelles sont les valeurs prises par Y ?
b) Calculer la probabilité d'obtenir k tirages tels que $1 \leq k \leq n$.

Correction :

1. **4 nombre de tirages**
a) **valeurs prises par X :** $X(\Omega) = \{0;\ 1; 2; 3; 4\}$.
b) **loi de probabilité de X :** Soit A_n l'événement obtenir une figure au $n^{ième}$ tirage avec $1 \leq n \leq 4$.
Donc $p(A_n) = \frac{card(A_n)}{card(\Omega)} = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$ et $p(\overline{A}_n) = \frac{20}{32} = \frac{5}{8}$.
$p(X = 0) = p(5.\overline{A}_1) = \left(\frac{5}{8}\right)^4 = 0{,}1525$
$p(X = 1) = p(A_1) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8} = 0{,}375$;
$p(X = 2) = p(\overline{A}_1) \times p(A_2) = \left(\frac{5}{8}\right)^1 \times \frac{3}{8} = \frac{15}{64}$;

$p(X=3)=p(\bar{A}_1)\times p(\bar{A}_2)\times p(A_3)=\left(\frac{5}{8}\right)^2\times\frac{3}{8}=\frac{75}{512}=0{,}1464$;

$p(X=4)=p(\bar{A}_1)\times p(\bar{A}_2)\times p(\bar{A}_3)\times p(A_4)=\left(\frac{5}{8}\right)^3\times\frac{3}{8}=\frac{375}{4096}=0{,}0915.$

c) Calculer $\mathbf{p(X\leq 3)}$.

$\mathbf{p(X\leq 2)}=p(X=0)+p(X=1)+p(X=2)$

$\mathbf{p(X\leq 2)=\frac{387}{512}=0,756.}$

2. $\boldsymbol{n}$ nombre de tirages

a) valeurs prises par Y : $Y(\Omega)=\{1;2;\ldots;n\}$.

b) probabilité d'obtenir $\boldsymbol{k}$ tirages / $\mathbf{1\leq k\leq n}$:

$p(X=k)=\left(\frac{5}{8}\right)^{k-1}\times\frac{3}{8}$.

IX. Urnes ; sacs ou boîtes :

Exercice 44 : Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher :

- **7 boules rouges toutes numérotées 1, et**
- **3 boules jaunes toutes numérotées 0.**

Diallo tire simultanément 2 boules de cette urne. Il considère les événements
A : « les deux boules sont de la même couleur » et
B : « les deux boules sont de couleurs différentes ».

1. Déterminer les probabilités P(A) et P(B).

2. Il désigne par X la variable aléatoire égale à la somme des chiffres des deux boules tirées.
Déterminer la loi de probabilité de X et préciser son espérance mathématique.

Correction : 10 urnes U $=7R+3J$

1. A « les deux boules sont de la même couleur »

$p(A)=\frac{C_7^2C_3^0+C_3^2C_7^0}{C_{10}^2}=\frac{8}{15}=0{,}5333.$

B : « les deux boules sont de couleurs différentes »

$p(B)=1-p(A)=\frac{7}{15}=0{,}4666.$

2. X la variable aléatoire égale à la somme des chiffres des deux boules : $X(\Omega)=\{0;\ 1;2\}$

Loi de probabilité de X :

$p(X=0)=p\left[\begin{matrix}\text{« obtenir deux}\\ \text{boules jaunes »}\end{matrix}\right]=\frac{C_3^2C_7^0}{C_{10}^2}=\frac{3}{45}=\frac{1}{15}$

$p(X=1)=p\left[\begin{matrix}\text{« obtenir 1 boule rouge}\\ \text{et aucune boule jaune»}\end{matrix}\right]=\frac{C_7^1C_3^1}{C_{10}^2}=\frac{21}{45}$

$p(X=2)=p\left[\begin{matrix}\text{« obtenir deux}\\ \text{boules rouges »}\end{matrix}\right]=\frac{C_7^2C_3^0}{C_{10}^2}=\frac{21}{45}=\frac{7}{15}$

Espérance mathématique :

$E(X)=\frac{1}{15}(7+14)=\frac{7}{5}=1{,}4.$

Exercice 45 : Une urne contient douze (12) boules indiscernables au toucher : quatre (4) blanches ; trois (3) rouges et (5) noires.

1. Moussa tire successivement au hasard deux boules de l'urne avec remise de chaque boule tirée.

a) Décrire l'univers Ω et calculer $\mathbf{card(\Omega)}$.

b) Calculer la probabilité des événements :
A : « obtenir des boules de la même couleur » ;
B : « obtenir des boules de couleurs différentes » ;
C : « obtenir deux (2) boules noires » ;
D : « obtenir au moins des boules noires ».
Quel est l'événement le plus probable ?

2. Abdoulaye tire successivement au hasard deux (2) boules de l'urne sans remise de chaque boule tirée.

a) Décrire l'univers Ω et calculer $\mathbf{card(\Omega)}$.

b) Calculer la probabilité des événements :
A : « obtenir des boules de la même couleur » ;
B : « obtenir des boules de couleur différentes » ;
C : « obtenir deux (2) boules noires » ;
D : « obtenir au moins des boules noires ».
Quel est l'événement le plus probable ?

3. Diallo tire simultanément au hasard deux (2) boules de l'urne.

a) Décrire l'univers Ω et calculer $\mathbf{card(\Omega)}$.

b) Calculer la probabilité des événements :
A : « obtenir des boules de la même couleur » ;
B : « obtenir des boules de couleur différentes » ;
C : « obtenir deux (2) boules noires » ;
D : « obtenir au moins des boules noires ».
Quel est l'événement le plus probable ?

Correction : équiprobabilité

1. *Tirage successif avec remise :* $\boldsymbol{n^p}$

Il y a à la fois une **notion d'ordre** (tirages successifs) **et de répétition** (avec remise). Un résultat est donc **une 2-liste avec remise** (ou doublet) d'élément de $E=\{1,2,3,..,12\}$.

a) L'univers Ω est l'ensemble des doublets correspondant à chacun des 2 tirages successifs.
A chacun des tirages, il y a 12 résultats possibles, il y a donc $\mathbf{Card(\Omega)=12^2=144}$ de tirages possibles.

b) Probabilité des événements suivants :

A : « obtenir des boules de la même couleur »

$p(A)=p(B_1\cap B_2)+p(R_1\cap R_2)+p(N_1\cap N_2)$

$p(B_1\cap B_2)=p(B_1)\times p(B_2)=\frac{4}{12}\times\frac{4}{12}=\left(\frac{4}{12}\right)^2=\frac{1}{9}$

$p(R_1\cap R_2)=p(R_1)\times p(R_2)=\frac{3}{12}\times\frac{3}{12}=\left(\frac{3}{12}\right)^2=\frac{1}{16}$

$p(N_1\cap N_2)=p(N_1)\times p(N_2)=\frac{5}{12}\times\frac{5}{12}=\left(\frac{5}{12}\right)^2$

d'où $p(A)=\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\left(\frac{5}{12}\right)^2=\frac{50}{144}=0{,}3472$. On peut aussi retrouver le même résultat en passant par les cardinaux : $\mathrm{Card}(A)=4^2\times 8^0+3^2\times 9^0+5^2\times 7^0=50$, alors $p(A)=\frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}=\frac{50}{144}=0{,}3472.$

B : « obtenir des boules de couleurs différentes »

$p(B)=\frac{\mathrm{Card}(B)}{\mathrm{Card}(\Omega)}=1-p(A)=0{,}6527.$

C : « obtenir deux (2) boules noires »

$p(B)=p(N_1\cap N_2)=p(N_1)\times p(N_2)=\frac{5}{12}\times\frac{5}{12}=\left(\frac{5}{12}\right)^2=\frac{25}{144}=0{,}1736$. On peut aussi retrouver le même résultat en passant par les cardinaux :
$\mathrm{Card}(C)=5^2\times 7^0=25$,
alors $p(C)=\frac{\mathrm{Card}(C)}{\mathrm{Card}(\Omega)}=\frac{25}{144}=0{,}1736.$

D : « obtenir au moins des boules noires »
$p(D) = \frac{Card(D)}{Card(\Omega)} = 1 - p(\text{aucune noire}) = 1 - p(\bar{C}) = 1 - p(\bar{N}_1 \cap \bar{N}_2) = 1 - p(\bar{N}_1) \times p(\bar{N}_2) = 1 - [1 - p(N_1)] \times [1 - p(N_2)] = 1 - [1 - p(N_2)]^2 = 1 - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = 0{,}65972.$

Evénement le plus probable :

$$p(D) > p(B) > p(A) > p(C)$$

L'événement le plus probable est l'événement D.

2. ***Tirage successif sans remise :*** $\mathbf{A_n^p}$

Il reste toujours la **notion d'ordre** (tirages successifs) mais les jetons tirés n'étant pas remis dans le sac, il n'y a plus de répétitions possibles. Un tirage est donc **une 2-liste sans remise ou un arrangement de trois éléments pris parmi 12**.

a) **Un élément de Ω est un doublet dans lequel tous les éléments sont différents.** Il y **12 possibilités au premier tirage**. On ne remet pas la boule dans l'urne, donc **au second tirage, il n'y a plus que 11 possibilités**. Donc $\mathbf{Card(\Omega) = A_{12}^2 = 12 \times 11 = 132.}$

Dans ce cas, la probabilité de tirer une boule noire dans le premier tirage est $p(N_1) = \frac{5}{12} = 0{,}416$. Mais la probabilité de tirer une boule noire dans le deuxième tirage dépend de la boule tirée au premier tirage : Si la première boule tirée est noire : $p_{N_1}(N_2) = \frac{4}{11} = 0{,}3636$ sinon $p_{\bar{N}_1}(N_2) = \frac{5}{11} = 0{,}4545$.

NB : **cas de probabilité conditionnelle.**

b) **Probabilité des événements suivants :**

A : « obtenir des boules de la même couleur »
$p(A) = p(B_1 \cap B_2) + p(R_1 \cap R_2) + p(N_1 \cap N_2)$
$p(B_1 \cap B_2) = p(B_1).p_{B_1}(B_2) = \frac{4}{12} \times \frac{3}{11} = 0{,}09090$
$p(R_1 \cap R_2) = p(R_1).p_{R_1}(R_2) = \frac{3}{12} \times \frac{2}{11} = 0{,}4545.$
$p(N_1 \cap N_2) = p(N_1).p_{N_1}(N_2) = \frac{5}{12} \times \frac{4}{11} = 0{,}1515$
d'où $p(A) = \frac{12+6+20}{132} = \frac{38}{132} = 0{,}2878$. On peut aussi retrouver le même résultat en passant par les cardinaux : $Card(A) = A_4^2A_8^0 + A_3^2A_9^0 + A_5^2A_7^0 = 38$,
alors $p(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{38}{132} = 0{,}2878.$

B : « obtenir des boules de couleur différentes »
$p(B) = \frac{Card(B)}{Card(\Omega)} = 1 - p(A) = 0{,}71212.$

C : « obtenir deux (2) boules noires »
$p(B) = p(N_1 \cap N_2) = p(N_1) \times p_{N_1}(N_2) = \frac{5}{12} \times \frac{4}{11} = \frac{20}{132} = 0{,}1515$. On peut aussi retrouver le même résultat en passant par les cardinaux : $Card(C) = A_5^2A_7^0 = 20$,
alors $p(C) = \frac{Card(C)}{Card(\Omega)} = \frac{20}{132} = 0{,}1515.$

D : « obtenir au moins des boules noires »
$p(D) = \frac{Card(D)}{Card(\Omega)} = 1 - p(\text{aucune noire}) = 1 - p(\bar{C}) = 1 - p(\bar{N}_1 \cap \bar{N}_2) = 1 - p(\bar{N}_1) \times p_{\bar{N}_1}(\bar{N}_2) = 1 - [1 - p(N_1)] \times [1 - p_{\bar{N}_1}(N_2)] = 1 - \left(1 - \frac{5}{12}\right)\left(1 - \frac{5}{11}\right) = 1 - \frac{7}{12} \times \frac{6}{11} = 0{,}681818.$

Evénement le plus probable :

$$p(D) > p(B) > p(A) > p(C)$$

L'événement le plus probable est l'événement D.

3. ***Tirage simultané :*** $\mathbf{C_n^p}$

a) Dans le cas d'un tirage simultané, l'ordre n'a pas d'importance. **Il n'y a plus de notion d'ordre,** seul compte l'ensemble des deux boules. Un tirage est donc **une combinaison de deux éléments pris parmi 12**. Il y a donc $\mathbf{Card(\Omega) = C_{12}^2 = 66}$ de tirages possibles.

b) **Probabilité des événements suivants :**

A : « obtenir des boules de la même couleur » ⟹
$Card(A) = C_4^2C_8^0 + C_3^2C_9^0 + C_5^2C_7^0 = 19$,
alors $p(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{19}{66} = 0{,}2878.$

B : « obtenir des boules de couleur différentes »
Comme on tire deux boules, l'événement contraire de « 2 boules de même couleur » est « 2 boules de couleurs différentes ». $p(B) = \frac{Card(B)}{Card(\Omega)} = 1 - p(A) = 0{,}7122.$

C : « obtenir deux (2) boules noires » ⟹ $Card(C) = C_5^2C_7^0 = 10$, alors $p(C) = \frac{Card(C)}{Card(\Omega)} = \frac{10}{66} = 0{,}1515.$

D : « obtenir au moins des boules noires »

$p(D) = \frac{Card(D)}{Card(\Omega)} = 1 - p(\text{aucune noire}) = 1 - p(\bar{C}) = 1 - p(\bar{N}_1 \cap \bar{N}_2) = 1 - \frac{C_5^0C_7^2}{66} = 0{,}6818181.$

Evénement le plus probable :

$$p(B) > p(D) > p(A) > p(C)$$

L'événement le plus probable est l'événement B.

Exercice 46 : **Une boîte contient 20 jetons indiscernables au toucher et repartis :**

- **5 jetons blancs marqués 0 ;**
- **7 jetons blancs marqués 5 ;**
- **6 jetons noirs marqués 7 ;**
- **2 jetons noirs marqués 7.**

Moussa tire au hasard et simultanément 2 jetons de la boîte.

1. **Quel est le nombre de tirages possibles ?**
2. **Calculer la probabilité d'obtenir :**

A « Deux jetons de la même couleur» ;
B « Deux jetons de couleurs différentes » ;
C « Deux numéros identiques » ;
D « Un nombre '75' »
E « Un nombre '50'» ;
F « tous les jetons noirs » ;
G « au moins un jeton portant un numéro différent des autres ».

Correction :

1. **Nombre de tirages possibles :** Il y a 20 jetons au total dans la boite. On en tire 2 simultanément. Le nombre de tirages possibles est le nombre de parties à 2 éléments dans un ensemble à 20 éléments. Ou le nombre de combinaisons de 2 éléments parmi 20. Il y a donc $\mathrm{Card}(\Omega) = C_{20}^{5} = 190$ tirages possibles.

2. **Probabilité d'obtenir :**

A « Deux jetons de la même couleur»
$\mathrm{Card(A)} = \mathrm{C}_{12}^{2}\mathrm{C}_{8}^{0} + \mathrm{C}_{8}^{2}\mathrm{C}_{12}^{0} = 94$, alors
$\mathrm{p(A)} = \frac{\mathrm{Card(A)}}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{94}{190} = 0{,}4947.$

B « Deux jetons de couleurs différentes »
Comme on tire deux jetons, l'événement contraire de « 2 jetons de même couleur » est « 2 jetons de couleurs différentes ». $\mathrm{p(B)} = \frac{\mathrm{Card(B)}}{\mathrm{Card}(\Omega)} = 1 - \mathrm{p(A)} = 0{,}5052$

C « Deux numéros identiques »
$\mathrm{Card(C)} = \mathrm{C}_{5}^{2}\mathrm{C}_{15}^{0} + \mathrm{C}_{6}^{2}\mathrm{C}_{14}^{0} + \mathrm{C}_{2}^{2}\mathrm{C}_{18}^{0} = 76$, alors
$\mathrm{p(C)} = \frac{\mathrm{Card(C)}}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{76}{190} = 0{,}4.$

D « Un nombre '75' »
$\mathrm{Card(D)} = \mathrm{C}_{6}^{1}\mathrm{C}_{7}^{1}\mathrm{C}_{7}^{0} + \mathrm{C}_{2}^{1}\mathrm{C}_{7}^{1}\mathrm{C}_{6}^{0} = 56$, alors
$\mathrm{p(D)} = \frac{\mathrm{Card(D)}}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{56}{190} = 0{,}2947.$

E « Un nombre '50' »
$\mathrm{Card(E)} = \mathrm{C}_{7}^{1}\mathrm{C}_{5}^{1}\mathrm{C}_{8}^{0} = 35$, alors
$\mathrm{p(E)} = \frac{\mathrm{Card(E)}}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{35}{190} = 0{,}1842.$

F « tous les jetons noirs »
$\mathrm{Card(F)} = \mathrm{C}_{8}^{2}\mathrm{C}_{12}^{0} = 28$, alors
$\mathrm{p(F)} = \frac{\mathrm{Card(F)}}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{28}{190} = 0{,}1473.$

G « au moins un jeton portant un numéro différent des autres » $\mathrm{p(G)} = \frac{\mathrm{Card(G)}}{\mathrm{Card}(\Omega)} = 1 - \mathrm{p(C)} = 0{,}6.$

Exercice 47 : **Une boîte contient 4 boules rouges, 5 boules vertes et 7 boules jaunes et on suppose que tous les tirages sont équiprobables**

A. Diallo tire simultanément 3 boules de la boîte.
1. **Quel est le nombre de tirages possibles ?**
2. **Calculer la probabilité d'obtenir :**

A « trois boules de la même couleur» ;
B « trois boules de couleurs différentes » ;
C « aucune boule rouge » ;
D « autant de boules rouges que de boules vertes » ;
E « au moins une boule rouge » ;
F « exactement une boule rouge et exactement une boule verte ».

B. Diallo tire successivement 3 boules de la boîte en remettant chaque boule tirée. Il appelle X la variable aléatoire égale au nombre de bouges rouges tirées. Déterminer la loi de probabilité de X.

C. Diallo tire une boule. Si la boule est rouge on s'arrête sinon, on la remet, et l'on recommence, … et ainsi de suite. Il appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de bouges rouges tirées à l'issues de ces trois (3) tirages effectués. Déterminer la loi de probabilité de Y.

Correction :

A. ***Tirages simultanés :*** $\mathbf{C_n^p}$

1. Il y a 16 boules au total dans la boite. On en tire 3 simultanément. Le nombre de tirages possibles est le nombre de parties à 3 éléments dans un ensemble à 16 éléments. Ou le nombre de combinaisons de 3 éléments parmi 16. Il y a donc $\mathrm{Card}(\Omega) = C_{16}^{3} = 560$ tirages possibles.

2. **Calculer la probabilité d'obtenir :**

A « Deux boules de la même couleur»
$\mathrm{Card(A)} = \mathrm{C}_{4}^{3}\mathrm{C}_{12}^{0} + \mathrm{C}_{5}^{3}\mathrm{C}_{11}^{0} + \mathrm{C}_{7}^{3}\mathrm{C}_{9}^{0} = 49$, alors
$\mathrm{p(A)} = \frac{\mathrm{Card(A)}}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{49}{560} = 0{,}0875.$

B « Deux boules de couleurs différentes »
Comme on tire trois boules, l'événement contraire de « 3 boules de même couleur » est « 3 boules de couleurs différentes ». $\mathrm{p(B)} = \frac{\mathrm{Card(B)}}{\mathrm{Card}(\Omega)} = 1 - \mathrm{p(A)} = 0{,}9125.$

C « aucune boule rouge »
$\mathrm{p(C)} = \frac{\mathrm{C}_{4}^{0}\mathrm{C}_{12}^{3}}{190} = \frac{220}{560} = 0{,}3928.$

D « autant de boules vertes que de boules jeunes »
$\mathrm{Card(D)} = \mathrm{C}_{4}^{0}\mathrm{C}_{5}^{0}\mathrm{C}_{7}^{3} + \mathrm{C}_{4}^{1}\mathrm{C}_{5}^{1}\mathrm{C}_{7}^{1} = 35 + 140 = 175$, alors $\mathrm{p(D)} = \frac{\mathrm{Card(D)}}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{175}{560} = 0{,}3125.$

E « au moins une boule rouge »
L'événement contraire de "au moins une boule rouge" est "aucune boule rouge".
$\mathrm{p(\text{"au moins une rouge"})} = 1 - \mathrm{p(\text{"aucune rouge"})}.$
$\mathrm{p(E)} = 1 - \mathrm{p(C)} = 1 - \frac{\mathrm{C}_{4}^{0}\mathrm{C}_{12}^{3}}{190} = 1 - \frac{220}{560} = 0{,}6071.$

F « exactement une boule rouge et exactement une boule verte » elle correspond :
au choix d'une boule rouge parmi les 4 rouges ;
au choix d'une verte parmi les 5 vertes ;
au choix d'une boule jaune parmi les 7 jaunes.
Le nombre de cas favorables à cet événement est donc : $C_4^1 \times C_5^1 \times C_7^1 = 140$. La probabilité de cet événement est donc : $\mathrm{p(F)} = \frac{\mathrm{Card(F)}}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{140}{560} = 0{,}25.$

B. ***Tirages successifs avec remise***

X ⟹ au nombre de bouges rouges tirées :
R « Obtenir une boule rouge lors d'un tirage »
$\mathrm{p(R)} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ et $\mathrm{p}(\overline{\mathrm{R}}) = 1 - \mathrm{p(R)} = \frac{3}{4}$

$$\mathbf{X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}}$$

$\mathrm{p(X = 0)} = p(aucune\ rouge) = \mathrm{C}_3^0[\mathrm{p}(\overline{\mathrm{R}})]^3 = \frac{27}{64}$
$\mathrm{p(X = 1)} = p(1\ rouge) = \mathrm{C}_3^1\mathrm{p(R)}[\mathrm{p}(\overline{\mathrm{R}})]^2 = \frac{27}{64};$
$\mathrm{p(X = 2)} = p(2\ rouges) = \mathrm{C}_3^2\mathrm{p}(\overline{\mathrm{R}})[\mathrm{p(R)}]^2 = \frac{9}{64};$

$p(X=3)=p(3\,rouges)=\ C_3^3[p(R)]^3=\frac{1}{64}$.

C. Y $\Longrightarrow$ au nombre de bouges rouges tirées.

$\mathbf{Y(\Omega)=\{0;1;2;3\}}$. R « Obtenir une boule rouge lors d'un tirage » $p(R)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$ et $p(\overline{R})=1-p(R)=\frac{3}{4}$.

$p(Y=0)=p(aucune\ rouge)=\left(\frac{3}{4}\right)^3$

$p(Y=1)=p(1\,rouge)=\frac{1}{4}=0{,}25$;

$p(Y=2)=p(\overline{R})\times p(R)=\left(\frac{3}{4}\right)^1\times\frac{1}{4}$;

$p(Y=3)=p(\overline{R})\times p(\overline{R})\times p(R)=\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{1}{4}$.

<u>Exercice 48 :</u> Dans un sac, on a disposé 9 jetons indiscernables au toucher, numérotés de 1 à 9.

1. On tire successivement trois jetons du sac, en remettant entre chaque tirage le jeton tiré dans le sac. On obtient ainsi un nombre de trois chiffres :
le 1er jeton indique les centaines,
le 2e les dizaines et
le 3e les unités.

a) Combien a-t-on de tirages possibles ?

b) Calculer la probabilité donnant un nombre pair. Calculer la probabilité de tirages avec un seul 2

2. On tire successivement trois jetons, sans remettre le jeton tiré dans le sac. On obtient comme au 1) un nombre de trois chiffres. Combien a-t-on de tirages possibles ? Calculer la probabilité de tirages avec un seul 2 ?

3. On tire simultanément trois jetons du sac. Combien a-t-on de tirages possibles ? Calculer la probabilité de tirages avec un seul 2 ?

<u>Correction :</u>

1. <u>Tirages successifs de trois jetons du sac avec remise :</u>

a) Nombre de tirages possibles :

Il y a à la fois une **notion d'ordre** (tirages successifs) **et de répétition** (avec remise). Un résultat est donc **une 3-liste avec remise** (ou triplet) d'élément de $E=\{1,2,3,..,9\}$. Il y a donc $9^3=729$ de tirages possibles.

b) Nombre de tirages donnant pair :

Les chiffres des centaines et des dizaines peuvent être choisis parmi 9 chiffres possibles. Pour les unités, il y a que quatre choix : $\{2,4,6\ ou\ 8\}$. On a donc $9^2\times4=324$ tirages donnant pair. $\mathbf{p(pair)=\frac{324}{729}=0,4444.}$

Nombre de tirages avec un seul 2 : si l'on veut un 2 pour les centaines, il reste 8 choix pour les dizaines et 8 choix pour les unités. Cependant le 2 peut aussi être choisi pour les dizaines ou pour les unités. On a donc $8^2\times3=192$ tirages avec un seul 2.

$\mathbf{p(un\ seul\ 2)=\frac{192}{729}=0,2633.}$

2. <u>Tirages successif de trois jetons, sans remise :</u>

<u>Nombre de tirages possibles :</u>

Il reste toujours la **notion d'ordre** (tirages successifs) mais les jetons tirés n'étant pas remis dans le sac, il n'y a plus de répétitions possibles. Un tirage est donc **une 3-liste sans remise ou un arrangement de trois éléments pris parmi 9**. Il y a donc $A_9^3=504$ de tirages possibles. $\mathbf{p(un\ seul\ 2)=\frac{A_1^1\times A_8^2}{504}=0,1111.}$

3. <u>Tirages simultanés de trois jetons du sac :</u>

<u>Nombre de tirages possibles :</u> **il n'y a plus de notion d'ordre,** seul compte l'ensemble des trois jetons. Un tirage est donc **une combinaison de trois éléments pris parmi 9**. Il y a donc $C_9^3=84$ de tirages possibles.

$\mathbf{p(un\ seul\ 2)=\frac{C_1^1\times C_8^2}{84}=0,3333.}$

<u>Exercice 49 :</u> Une urne contient dix (10) boules : six (6) blanches et quatre (4) noires. Diallo tire simultanément au hasard deux (2) boules de l'urne. Il considère les événements :

A : « obtenir au moins une boule blanche » ;

B : « obtenir au moins une boule noire ».

1. Calculer la probabilité de ces événements.

2. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

3. Diallo répète n fois l'épreuve décrite précédemment avec remise des boules tirées. Calculer la probabilité p_n de n'obtenir que des boules noires lors de n tirages.

<u>Correction :</u> $\mathbf{card(\Omega)=C_{10}^2=45.}$

1. A : « obtenir au moins une boule blanche »

$\mathbf{p(A)=1-\frac{C_6^0\times C_4^2}{C_{10}^2}}=0{,}8666$

B : « obtenir au moins une boule noire ».

$\mathbf{p(B)=\ 1-\frac{C_6^0\times C_6^2}{C_{10}^2}}=1-\frac{15}{45}=0{,}666.$

2. Pour démontrer que les événements A et B sont indépendants, on doit vérifier cette propriété :

$\mathbf{p(A\cap B)=p(A)\times p(B)}$. $\mathbf{p(A\cap B)}=\frac{C_4^1\times C_6^1}{C_{10}^2}=\frac{24}{45}=0{,}5333$ et $\mathbf{p(A)\times p(B)}=0{,}8666\times0{,}666=0{,}577$, alors on remarque que $p(A\cap B)\neq p(A)\times p(B)$, donc les événements A et B ne sont pas indépendants.

3. Probabilité p_n de n'obtenir que des boules noires lors de n tirages. Nous avons un schéma de Bernoulli : $\mathbf{p(2\ noires)}=\frac{C_4^2\times C_6^0}{C_{10}^2}=\frac{6}{45}=0{,}1333.$

Donc $p_n = C_n^n \times (0{,}1333)^n \times (1-0{,}1333)^{n-n} = (0{,}1333)^n = \left(\frac{2}{15}\right)^n$.

<u>Exercice 50 :</u> Une urne contient $2n$ boules reparties en n boules rouges et en n boules blanches. Diallo tire au hasard n boules de l'urne.

6. Calculer la probabilité des événements :

A : « obtenir des boules de même couleur » ;

B : « obtenir deux (2) boules rouges ».

2. Diallo appelle X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage le nombre de boules blanches obtenues.

a) Quelles sont les valeurs prises par X ? En déduire que la probabilité de chaque valeur de X.

b) Etablir la loi de probabilité de X pour $n = 4$.

c) Calculer l'espérance mathématique de X.

d) Donner la distribution de la fonction de répartition de X.

<u>Correction :</u> tirage au hasard de n boules de l'urne, sous entend une combinaison $\Longrightarrow$ $\mathbf{card(\Omega) = C_{2n}^{n}} = \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} = \frac{(2n)!}{n!\times n!}$.

1. A : « obtenir des boules de même couleur » $\Longrightarrow$ $\text{Card}(A) = C_n^n C_n^0 + C_n^n C_n^0 = 2C_n^n C_n^0 = 2$, alors $p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{2}{\frac{(2n)!}{n!\times n!}} = \frac{2\times n!\times n!}{(2n)!}$.

B : « obtenir deux (2) boules rouges » $\Longrightarrow$ $\text{Card}(B) = C_n^2 C_n^{n-2} = \frac{1}{4}[n(n-1)]^2$, alors

$p(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\frac{1}{4}[n(n-1)]^2}{\frac{(2n)!}{n!\times n!}} = \frac{[n(n-1)]^2\times n!\times n!}{4(2n)!}$.

2. X $\Longrightarrow$ nombre de boules blanches obtenues

a) $\mathbf{X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; \dots; n-1; n\}}$**, on peut déduire que la probabilité de chaque valeur de X :**

$\mathbf{p(X = k)} = \frac{C_n^k C_n^{n-k}}{C_{2n}^n} = \frac{(C_n^k)^2}{C_{2n}^n}$ avec $0 \le k \le n$.

b) la loi de probabilité de X, $n = 4$:

$\mathbf{X = \{0; 1; 2; 3; 4\} \Longrightarrow card(\Omega) = C_8^4 = 70}$

$p(X = 0) = \frac{(C_4^0)^2}{C_8^4} = \frac{1}{70} = 0{,}01428$;

$p(X = 1) = \frac{(C_4^1)^2}{C_8^4} = \frac{16}{70} = 0{,}2285$;

$p(X = 2) = \frac{(C_4^2)^2}{C_8^4} = \frac{36}{70} = 0{,}5142$;

$p(X = 3) = \frac{(C_4^3)^2}{C_{2n}^n} = \frac{16}{70} = 0{,}2285$;

$p(X = 4) = \frac{(C_4^4)^2}{C_8^4} = \frac{1}{70} = 0{,}01428$.

x_i	0	1	2	3	4
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{70}$	$\frac{16}{70}$	$\frac{36}{70}$	$\frac{16}{70}$	$\frac{1}{70}$

c) $\mathbf{E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(X = x_i)}$.

$E(X) = \sum_{i=1}^{5} x_i p(X = x_i) = \frac{1}{70}(0\times 1 + 1\times 16 + 2\times 36 + 3\times 16 + 4\times 1) = \frac{140}{70} = 2$.

d) fonction de répartition de X

$\forall x \in]-\infty; 0[$, $F(x) = p(X < 0) = 0$;

$\forall x \in [0; 1[$, $F(x) = \frac{1}{70} = 0{,}01428$;

$\forall x \in [1; 2[$, $F(x) = \frac{1+16}{70} = 0{,}24288$;

$\forall x \in [2; 3[$, $F(x) = \frac{1+16+36}{70} = 0{,}7571$;

$\forall x \in [3; 4[$, $F(x) = \frac{1+16+36+16}{70} = 0{,}9857$;

$\forall x \in [4; +\infty[$, $F(x) = \frac{1+16+36+16+1}{70} = 1$.

<u>Exercice 51 :</u> Une urne contient $2 + n$ boules reparties en n boules rouges et en 2 boules blanches. Diallo tire au hasard 2 boules de l'urne.

1. Calculer la probabilité des événements :

A : « obtenir des boules de couleur différente » ;

B : « obtenir des boules de même couleur » ;

C : « obtenir une boule rouge et une boule blanche » ;

D : « obtenir une boule rouge ou une boule blanche » ;

E : « obtenir au moins deux (2) boules rouges » ;

F : « obtenir au plus deux (2) boules rouges ».

2. Diallo appelle X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage le nombre de boules blanches obtenues.

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

b) Etablir la loi de probabilité de X.

c) Donner la distribution de la fonction de répartition de X.

<u>Correction :</u> tirage au hasard de 2 boules de l'urne, sous entend une combinaison. Le nombre total de cas élémentaires est le nombre de parties à n éléments d'un ensemble comportant $2 + n$ éléments $\Longrightarrow$

$\mathbf{card(\Omega) = C_{n+2}^2} = \frac{(n+2)!}{2!(n+2-2)!} = \mathbf{\frac{1}{2}n(n+1)(n+2)}$.

1. A : « obtenir des boules de couleur différente » $\Longrightarrow$ $\text{Card}(A) = 2C_2^1 C_n^1 = 4n$, alors $p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{4n}{\frac{1}{2}\times n(n+1)(n+2)} = \frac{8}{(n+1)(n+2)}$.

B : « obtenir des boules de même couleur » $\Longrightarrow$ $\text{Card}(B) = C_2^2 C_n^0 + C_2^0 C_n^2 = 1 + \frac{1}{2}n(n-1)$, alors $p(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{1+\frac{1}{2}n(n-1)}{\frac{1}{2}\times n(n+1)(n+2)} = \frac{n^2-n+2}{n(n+1)(n+2)}$.

C : « obtenir une boule rouge et une boule blanche » $\Longrightarrow$ $\text{Card}(C) = C_2^1 C_n^1 = 2n$, alors $p(C) = \frac{\text{Card}(C)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{2n}{\frac{1}{2}\times n(n+1)(n+2)} = \frac{4}{(n+1)(n+2)}$.

D : « obtenir une boule rouge ou une boule blanche » $\Longrightarrow$ $\text{Card}(D) = C_2^1 C_n^1 = 2n$, alors $p(D) = \frac{\text{Card}(D)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{2n}{\frac{1}{2}\times n(n+1)(n+2)} = \frac{4}{(n+1)(n+2)}$.

E : « obtenir au moins deux (2) boules rouges » ⟹ $\mathrm{Card(E)} = \mathbf{C_{n+2}^{2}} - \mathrm{C_n^0 C_2^2} = \frac{1}{2}\mathbf{n(n+1)(n+2)} - 2$,

alors $\mathrm{p(E)} = \frac{\mathrm{Card(E)}}{\mathrm{Card(\Omega)}} = \frac{\frac{1}{2}\mathbf{n(n+1)(n+2)}-2}{\frac{1}{2}\times\mathbf{n(n+1)(n+2)}} = \frac{\mathbf{n(n+1)(n+2)}-4}{\mathbf{(n+1)(n+2)}}$.

F : « obtenir au plus deux (2) boules rouges » ⟹ $\mathrm{Card(F)} = \mathrm{C_n^0C_2^2 + C_n^1C_2^1 + C_n^2C_2^0} = \mathbf{1+2n} + \frac{1}{2}\mathrm{n(n-1)}$, alors

$\mathrm{p(F)} = \frac{\mathrm{Card(E)}}{\mathrm{Card(\Omega)}} = \frac{\mathbf{1+2n}+\frac{1}{2}\mathrm{n(n-1)}}{\frac{1}{2}\times\mathbf{n(n+1)(n+2)}} = \frac{\mathbf{2+4n}+\mathrm{n(n-1)}}{\mathbf{(n+1)(n+2)}}$.

2. X ⟹ nombre de boules blanches obtenues

a) $\mathbf{X = \{0; 1; 2\}}$

b) la loi de probabilité de X :

$\mathrm{card(\Omega)} = \mathrm{C_{n+2}^2} = \frac{(n+2)!}{2!(n+2-2)!} = \frac{1}{2}\mathrm{n(n+1)(n+2)}$.

$\mathrm{p(X=0)} = \frac{\mathrm{C_2^0C_n^2}}{\mathrm{C_{n+2}^2}} = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{n(n-1)}}{\frac{1}{2}\mathrm{n(n+1)(n+2)}} = \frac{\mathrm{n-1}}{\mathrm{(n+1)(n+2)}}$;

$\mathrm{p(X=1)} = \frac{\mathrm{C_2^1C_n^1}}{\mathrm{C_{n+2}^2}} = \frac{2\mathrm{n}}{\frac{1}{2}\mathrm{n(n+1)(n+2)}} = \frac{4}{\mathrm{(n+1)(n+2)}}$;

$\mathrm{p(X=2)} = \frac{\mathrm{C_2^2C_n^0}}{\mathrm{C_{n+2}^2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}\mathrm{n(n+1)(n+2)}} = \frac{2}{n\mathrm{(n+1)(n+2)}}$.

c) fonction de répartition de X

$\forall\, x \in\ ]-\infty; 0[,\ \mathrm{F}(x) = \mathrm{p(X<0)} = 0$;

$\forall\, x \in\ [0; 1[,\ \mathrm{F}(x) = \frac{\mathbf{n-1}}{\mathbf{(n+1)(n+2)}}$;

$\forall\, x \in\ [1; 2[,\ \mathrm{F}(x) = \frac{\mathbf{n+3}}{\mathbf{(n+1)(n+2)}}$;

$\forall\, x \in\ [3; +\infty[,\ \mathrm{F}(x) = 1$.

<u>**Exercice 52 :**</u> **Une association organise une loterie pour laquelle le prix de participation est m *francs*. Un joueur doit tirer simultanément et au hasard deux boules dans une urne contenant 4 boules vertes et 6 boules jaunes.**

- **Si les deux boules sont de couleurs différentes, le joueur perd sa mise;**
- **si les deux boules sont jaunes, il est remboursé de sa participation;**
- **si les deux boules sont vertes, le joueur continue le jeu qui consiste à faire tourner une roue où sont inscrits des gains répartis comme suit:**
    - **Sur 1/8 de la roue, le gain est de 100 F;**
    - **sur $\frac{1}{4}$ de la roue, le gain est de 20 F;**
    - **sur le reste, le joueur est remboursé de sa participation.**

On appelle V l'évènement : « le joueur a obtenu deux boules vertes »; J l'évènement : « le joueur a obtenu deux boules jaunes»; R l'évènement : « le joueur est remboursé de sa participation ».

1. Calculer les probabilités V, J et R.

2. On appelle X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer E(X).

3. L'organisateur veut fixer la participation m à une valeur entière en FCFA. Quelle est la valeur minimale de m pour que l'organisateur puisse espérer ne pas perdre d'argent ?

<u>**Correction :**</u> Le nombre de tirages possibles de deux boules de l'urne est égal à $\mathbf{card(\Omega) = C_{10}^2 = 45.}$

1. Calculons les probabilités V, J et R :

$\mathrm{p(V)} = \frac{\mathrm{Card(V)}}{\mathrm{Card(\Omega)}} = \frac{\mathrm{C_4^2}}{45} = \frac{6}{45} = 0{,}1333$.

$\mathrm{p(J)} = \frac{\mathrm{Card(J)}}{\mathrm{Card(\Omega)}} = \frac{\mathrm{C_6^2}}{45} = \frac{15}{45} = 0{,}3333$.

p(V ∩« Il tourne la roue et est remboursé de sa participation »)= $\frac{2}{15}\times\frac{5}{8} = \frac{1}{12} = 0{,}0833$.

$\mathrm{p(R)} = \mathrm{p(J)} + 0{,}0833 = \frac{5}{12} = 0{,}4166$.

2. X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur

a) loi de probabilité de X :

$\mathrm{X} = \{-m; 0; 20-m; 100-m\}$.

$\mathrm{p}(\mathrm{X}=-m) = p(\text{« }\mathit{tirer\ deux\ boules\ de\ couleurs\ différentes}\text{ »}) = 1 - \mathrm{p(V)} - \mathrm{p(J)} = \frac{8}{15}$.

$\mathrm{p(X=0)} = \mathrm{p(R)} = \frac{5}{12}$;

$\mathrm{p}(\mathrm{X}=20-m) = p(\mathrm{V} \cap \text{« }\mathit{il\ tourne\ la\ roue\ et\ gagne}\ 20\ \mathrm{F}\text{ »}) = \frac{2}{15}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{30}$.

$\mathrm{p}(\mathrm{X}=100-m) = p(\mathrm{V} \cap \text{« }\mathit{il\ tourne\ la\ roue\ et\ gagne}\ 100\ \mathrm{F}\text{ »}) = \frac{2}{15}\times\frac{1}{8} = \frac{1}{60}$.

b) Calculons E(X)

$\mathrm{E(X)} = \frac{1}{60}(-32m + 40 - 2m + 100 - m) = \frac{28-7m}{12}$.

3. La valeur minimale de m pour que l'organisateur puisse espérer ne pas perdre d'argent doit vérifier

$\mathrm{E(X)} \le 0 \Leftrightarrow \frac{28-7m}{12} \le 0 \Leftrightarrow m \ge 4$ F. Donc la valeur minimale de m pour que l'organisateur puisse espérer ne pas perdre d'argent est égale à 4.

<u>**Exercice 53 :**</u>

A. Une urne contient six (6) boules dont une boule rouge, 2 boules blanches et 3 autres noires. Les boules sont indiscernables au toucher et Diallo en tire trois (3) boules de l'urne.

1. Il tire successivement avec remise 3 boules de l'urne et considère X la variable aléatoire égale au nombre de tirages où apparaît une boule blanche.
Etablir la loi de probabilité de X.

2. Il tire simultanément 3 boules de l'urne et considère Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées.
Etablir la loi de probabilité de Y.

B. Une urne contient six (6) boules numérotées de 1 à 6. Il considère la variable aléatoire Z qui à chaque on associe le plus petit nombre porté par les deux (2) boules qui seront tirées.
Etablir la loi de probabilité de Z.

Correction :

A. $U = 1R + 2B + 3N$, sont indiscernables au toucher et Diallo en tire trois (3) boules de l'urne.

1. Tirage successif avec remise de 3 boules de l'urne et $X \Longrightarrow$ au nombre de tirages où apparaît une boule blanche.

B « Obtenir une boule blanche lors d'un tirage »

$p(B) = \frac{1}{3}$ et $p(\overline{B}) = 1 - p(B) = \frac{2}{3}$

Loi de probabilité de X

$$\mathbf{X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}}$$

$p(X = 0) = p(aucune\ blanche) = C_3^0[p(\overline{B})]^3 = \frac{8}{27}$

$p(X = 1) = p(1\ blanche) = C_3^1 p(B)[p(\overline{B})]^2 = \frac{4}{9};$

$p(X = 2) = p(2\ blanches) = C_3^2 p(\overline{B})[p(B)]^2 = \frac{2}{9};$

$p(X = 3) = p(3\ blanches) = C_3^3[p(B)]^3 = \frac{1}{27}.$

2. Tirage simultané de 3 boules de l'urne et $Y \Longrightarrow$ au nombre de boules blanches tirées.

Loi de probabilité de Y :

$$\mathbf{Y(\Omega) = \{0; 1; 2\}}$$

$p(Y = 0) = p(aucune\ blanche) = \frac{C_2^0 C_4^3}{C_6^2} = \frac{1}{5}$

$p(Y = 1) = p(1\ blanche) = \frac{C_2^1 C_4^2}{C_6^2} = \frac{3}{5};$

$p(Y = 2) = p(2\ blanches) = \frac{C_2^2 C_4^0}{C_6^2} = \frac{1}{5};$

B. $Z \Longrightarrow$ le plus petit nombre porté par les deux (2) boules qui seront tirées.

Soit les 2 tirages $= (a; b) \Leftrightarrow card(\Omega) = 36$, donc il y a 36 façons de coupler un nombre a avec un nombre b.

Loi de probabilité de Z :

b / a	1	2	3	4	5	6
1	1; 1	1; 3	1; 3	1; 4	1; 5	1; 6
2	2; 1	2; 2	2; 3	2; 4	2; 5	2; 6
3	3; 1	3; 2	3; 3	3; 4	3; 5	3; 6
4	4; 1	4; 2	4; 3	4; 4	4; 5	4; 6
5	5; 1	5; 2	5; 3	5; 4	5; 5	5; 6
6	6; 1	6; 2	6; 3	6; 4	6; 5	6; 6

$$\mathbf{Z(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}}$$

$p(Z = 0) = p\begin{bmatrix}(11)(22)(33)\\(44)(55)(66)\end{bmatrix} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 0{,}1666\ ;$

$p(Z = 1) = p\begin{bmatrix}(21)(31)(41)(51)(61)\\(12)(13)(14)(15)(16)\end{bmatrix} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}\ ;$

$p(Z = 2) = p\begin{bmatrix}(23)(24)(25)(26)\\(32)(42)(52)(62)\end{bmatrix} = \frac{8}{36} = \frac{4}{9}\ ;$

$p(Z = 3) = p\begin{bmatrix}(34)(35)(36)\\(43)(53)(63)\end{bmatrix} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 0{,}1666\ ;$

$p(Z = 4) = p\begin{bmatrix}(45)(46)\\(54)(64)\end{bmatrix} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} = 0{,}1111\ ;$

$p(Z = 5) = p\{(56); (65)\} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} = 0{,}0555\ .$

3. Probabilité conditionnelle :

De préférence, il faut dresser un arbre pondéré pour traiter un cas de probabilité conditionnelle.

Exercice 54 :

Une université propose aux étudiants trois orientations et trois seulement : une filière A, une _ filière B et une filière C.

Chaque étudiant de l'université est inscrit dans une des trois filières et une seule.

Les effectifs de la filière A sont le double de ceux de la filière B. Les effectifs de la filière B sont le triple de ceux de la filière C.

On sait de plus que :

- **30% des étudiants de la filière A sont des filles**
- **25% des étudiants de la filière B sont des filles**
- **35% des étudiants de la filière C sont des filles**

On choisit au hasard un étudiant de cette université.

On note A l'événement « L'étudiant est inscrit dans la filière A ». De même pour B et C.

On note F l'événement « L'étudiant est une fille » ; G est l'événement : « L'étudiant est un garçon ».

1. Calculer les probabilités des événements A, B, C ; $p_A(F)$; $p_A(G)$; $p_B(F)$; $p_B(G)$; $p_C(F)$; $p_C(G)$.

2. Calculer les probabilités des événements $F \cap A$; $F \cap B$; $F \cap C$.

3. Calculer la probabilité que l'étudiant soit une fille. En déduire celle d'être un garçon.

4. Calculer la probabilité que l'étudiant soit inscrit dans la filière A sachant que c'est une fille.

5. L'étudiant, choisi au hasard, n'est pas inscrit dans la filière A. Calculer alors la probabilité que ce soit une fille.

Correction :

1. $\begin{cases}p(A) = 2p(B)\\p(B) = 3p(C)\end{cases}$; $p(A) = 2 \times 3p(B) = 6p(B)$

A, B et C forment une partition de l'univers associe a cette expérience, alors : $p(A) + p(B) + p(C) = 1$, en remplaçant on aura $p(A) = \frac{6}{10}$; $p(B) = \frac{3}{10}$; $p(C) = \frac{1}{10}$

$p_A(F) = 0{,}3$; $p_A(G) = 1 - p_A(F) = 0{,}7$;

$p_B(F) = 0{,}25$; $p_B(G) = 1 - p_B(F) = 0{,}75$;

$p_C(F) = 0{,}35$; $p_C(G) = 1 - p_C(F) = 0{,}65$.

3. $\mathbf{p(F \cap A)} = p(A) \times p_A(F) = 0{,}18$ **;**

$\mathbf{p(F \cap B)} = p(B) \times p_B(F) = 0{,}075$ **;**

$\mathbf{p(F \cap C)} = p(C) \times p_C(F) = 0{,}035.$

4. probabilité que l'étudiant soit une fille :

$p(F) = p(F \cap A) + p(F \cap B) + p(F \cap C) = 0{,}29$

celle d'être un garçon : $p(G) = 1 - p(F) = 0{,}71.$

5. $p_F(A) = \frac{p(F \cap A)}{p(F)} = \frac{0{,}18}{0{,}71} = 0{,}2535.$

6. $p(F \cap \overline{A}) = p(F \cap B) + p(F \cap C) = 0{,}11.$

$p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 0{,}4$;

$p_{\overline{A}}(F) = \frac{p(F \cap \overline{A})}{p(\overline{A})} = \frac{0{,}11}{0{,}4} = 0{,}275.$

Exercice 55 : **Trois maladies affectent une ferme avicole. Les poules atteintes sont réparties par maladies :**

- **30 % des poules sont malades du type M_1 ;**
- **50 % des poules sont malades du type M_2 ;**
- **Les autres sont malades du type M_3.**

Un test a été organisé et on obtient comme résultats :

- **15% malades du type M_1 ont des tests positifs**
- **80% malades du type M_2 ont des tests négatifs**
- **40% malades du type M_3 ont des tests positifs.**

On choisit au hasard une poule de cette ferme.
On note M_1 l'événement « avoir la maladie M_1 ». De même pour M_2 et M_3.
On note T l'événement « le test est positif » ;
$\overline{T}$ est l'événement : « le test est négatif ».

1. **Calculer les probabilités des événements M_1, M_2, M_3 ; $p_{M_1}(T)$; $p_{M_1}(\overline{T})$; $p_{M_2}(T)$; $p_{M_2}(\overline{T})$; $p_{M_3}(T)$; $p_{M_3}(\overline{T})$.**
2. **Calculer les probabilités des événements $M_1 \cap T$; $M_2 \cap T$; $M_3 \cap T$.**
3. **Calculer la probabilité que le test soit positif. En déduire celle d'avoir un test négatif.**
4. **Calculer la probabilité que la poule soit malade M_2 sachant qu'elle a un test positif.**
5. **La poule, choisie au hasard, n'est pas malade du type M_2. Calculer alors la probabilité qu'elle ait un test positif.**
6. **On choisit 10 poules, calculer la probabilité d'obtenir au moins 8 poules malades du type M_3 sachant qu'elles aient un test négatif.**

Correction :

1. **Dans l'énoncé, on en déduit :** $p(M_1) = 0{,}3$; $p(M_2) = 0{,}5$; M_1, M_2 et M_3 forment une partition de l'univers associe a cette expérience, alors : $p(M_1) + p(M_2) + p(M_3) = 1 \Leftrightarrow p(M_3) = 0{,}2$.

$p_{M_1}(T) = 0{,}15$; $p_{M_1}(\overline{T}) = 1 - p_{M_1}(T) = 0{,}85$;
$p_{M_2}(\overline{T}) = 0{,}8$; $p_{M_2}(T) = 1 - p_{M_2}(\overline{T}) = 0{,}2$;
$p_{M_3}(T) = 0{,}4$; $p_{M_2}(\overline{T}) = 1 - p_{M_3}(T) = 0{,}6$.

2. $\mathbf{p(M_1 \cap T)} = p(M_1) \times p_{M_1}(T) = 0{,}045$;
$\mathbf{p(M_2 \cap T)} = p(M_2) \times p_{M_2}(T) = 0{,}1$;
$\mathbf{p(M_3 \cap T)} = p(M_3) \times p_{M_3}(T) = 0{,}08$.

3. **probabilité que l'étudiant soit une fille :**
$$p(T) = p(M_1 \cap T) + p(M_2 \cap T) + p(M_3 \cap T) = 0{,}225$$
En déduire celle d'être un garçon :
$p(\overline{T}) = 1 - p(T) = 0{,}775$.

4. **probabilité que la poule soit malade M_2 sachant qu'elle a un test positif :** $p_T(\mathbf{M_2})$
$p_T(\mathbf{M_2}) = \frac{p(M_2 \cap T)}{p(T)} = \frac{0{,}1}{0{,}225} = 0{,}4444$.

5. $p(T \cap \overline{\mathbf{M_2}}) = p(T \cap \mathbf{M_1}) + p(F \cap \mathbf{M_3}) = 0{,}045 + 0{,}08 = 0{,}125$.
$p(\overline{\mathbf{M_2}}) = 1 - p(\mathbf{M_2}) = 0{,}5$;
$p_{\overline{M_1}}(\mathbf{T}) = \frac{p(T \cap \overline{M_2})}{p(\overline{M_2})} = \frac{0{,}125}{0{,}5} = 0{,}025$.

6. Cas de loi binomiale : $[\mathbf{n = 10}; \mathbf{p = p_{\overline{T}}(M_3)}]$ **telle que** $p(X = k) = \mathbf{C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}$ **avec** $n \geq k$.
$p(\overline{T} \cap \mathbf{M_3}) = 0{,}6 \times 0{,}2 = 0{,}12$.
$p(\overline{T}) = 1 - p(T) = 0{,}775$.
$p = p_{\overline{T}}(\mathbf{M_3}) = \frac{p(\overline{T} \cap M_3)}{p(\overline{T})} = \frac{p(\overline{T} \cap M_3)}{1 - p(T)} = \frac{0{,}12}{0{,}775} = 0{,}1548$.
$p(X \geq 8) = p(X = 8) + p(X = 9) + p(X = 10) = C_{10}^8 (0{,}1548)^8 (1 - 0{,}1548)^2 + C_{10}^9 (0{,}1548)^9 (1 - 0{,}1548)^1 + C_{10}^{10} (0{,}1548)^{10} (1 - 0{,}1548)^0 = 1{,}1.10^{-5}$

Exercice 56 : **Un mélange de graines de fleurs contient :**

- **50 graines de type A,**
- **90 graines de type B,**
- **60 graines de type C.**

Toutes les graines n'ont pas le même pouvoir de germination. On conviendra qu'une graine germe correctement si celle-ci donne naissance à une plante qui fleurit.
On considère que la probabilité qu'une graine germe correctement est égale à :
• 0,5 pour une graine de type A,
• 0,8 pour une graine de type B,
• 0,6 pour une graine de type C.
On note A l'événement « la graine est de type A». De même pour B et C.
On note G l'événement « la graine germe correctement » ; $\overline{G}$ est l'événement : « la graine ne germe pas correctement ».

1. **On sème une graine prise au hasard dans le mélange. Déterminer :**
   a) **les probabilités des événements A, B, C ; $p_A(G)$; $p_A(\overline{G})$; $p_B(G)$; $p_B(\overline{G})$; $p_C(G)$; $p_C(\overline{G})$.**
   b) **la probabilité que ce soit une graine de type A et que celle-ci germe correctement $p(G \cap A)$; $p(G \cap B)$ et $p(G \cap C)$.**
   c) **probabilité que la graine germe correctement ;**
   d) **la probabilité que la graine soit une graine de type C qui ne germe pas correctement.**
2. **On sème une graine du mélange et elle germe correctement. Quelle est la probabilité qu'elle soit de type A ?**
3. **On sème quatre graines prises au hasard dans le mélange. Quelle est la probabilité qu'au moins une de ces graines germe correctement ?**

Correction : **il y a au total 200 graines.**

1. **Dans l'énoncé, on en déduit :** A, B et C forment une partition de l'univers associe a cette expérience, alors : $p(A) + p(B) + p(C) = 1$, on aura **:**
   a) **probabilité que ce soit une graine de type A est** $p(A) = \frac{50}{200} = 0{,}25$; **probabilité que ce soit une graine de type B est** $p(B) = \frac{90}{200} = 0{,}45$; **probabilité que ce soit une graine de type C est** $p(C) = \frac{60}{200} = 0{,}3$.

$p_A(G) = 0{,}5$; $p_A(\overline{G}) = 1 - p_A(G) = 0{,}5$;
$p_B(G) = 0{,}8$; $p_B(\overline{G}) = 1 - p_B(G) = 0{,}2$;
$p_C(G) = 0{,}6$; $p_C(\overline{G}) = 1 - p_C(G) = 0{,}4$.

b) probabilité que ce soit une graine de type A et que celle-ci germe correctement est :
$\mathbf{p(G \cap A) = p(A) \times p_A(G) = 0{,}125}$ **;**
$\mathbf{p(G \cap B) = p(B) \times p_B(G) = 0{,}36}$ **;**
$\mathbf{p(G \cap C) = p(C) \times p_C(G) = 0{,}18}$**.**

c) probabilité que la graine germe correctement
$p(G) = p(G \cap A) + p(G \cap B) + p(G \cap C) = 0{,}665$

d) probabilité que la graine soit une graine de type C qui ne germe pas correctement est : $p(C \cap \overline{G})$
$p(C \cap \overline{G}) = p(C) \times p_C(\overline{G}) = 0{,}12$.

2. On sème une graine du mélange et elle germe correctement. probabilité qu'elle soit de type A est :
$p_G(\mathbf{A}) = \frac{p(\mathbf{A \cap G})}{p(G)} = \frac{0{,}125}{0{,}665} = 0{,}1879$.

3. La probabilité qu'au moins une de ces graines germe correctement est $p = 1 - (1 - 0{,}665)^4 = 1 - 0{,}3354 \simeq 0{,}9874$.

<u>Exercice 57 :</u> ***dé cubique***

1. Moussa lance deux fois un dé pipé tel que P(1)=P(3)=P(4)=1/2 et P(2)=P(6)=1/4. Quelle est la probabilité que la somme des points obtenus soit supérieure à 10 (strictement) sachant que :
2. un des résultats est 6.
3. le premier résultat est 6.

<u>Correction :</u> Il manque P(5)=1/8.

La probabilité que la somme des points obtenus soit supérieure à 10 (strictement) sachant que :
1. un des résultats est 6 :
Il faut avoir des résultats comme (x, 6) ou (6, x) avec x = 5 ou 6 ; on a donc la probabilité $2\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.
2. le premier résultat est 6 :
Là c'est simplement (6, x), soit $\frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$.

<u>Exercice 58 :</u> Une étude statistique sur de longues années a permis de faire, dans une zone géographique bien définie, les prévisions météorologiques suivantes :
• s'il fait beau un jour, il fera beau le lendemain avec la probabilité de 5/6;
• s'il fait mauvais un jour, il fera mauvais le lendemain avec la probabilité de 1/3.
(On admet qu'il fait soit beau, soit mauvais, pas les deux à la fois).
On note $\mathbf{B_j}$ l'événement « il fait beau jour ». De même $\mathbf{B_{j+1}}$ l'événement « il fait beau au jour suivant ». On note $\mathbf{\overline{B}_j}$ l'événement « il fait mauvais jour ».
De même $\mathbf{\overline{B}_{j+1}}$ l'événement « il fait mauvais au jour suivant ».
On appelle $\mathbf{p_n}$ la probabilité qu'il fasse beau le jour *n*, et $\mathbf{q_n}$ la probabilité qu'il fasse mauvais le jour *n*.
On est dimanche et il fait beau.

1. Construire un arbre de probabilités permettant de déterminer les probabilités du beau temps et du mauvais temps pour lundi, mardi et mercredi s'il fait beau le dimanche.
2. Déterminer la probabilité le temps est beau le lundi au mercredi.
3. Déterminer la probabilité le temps est mauvais le lundi et qu'il fait beau temps au mardi.
4. Déterminer la probabilité le temps est mauvais entre le mardi et le mercredi.
5. Calculer $\mathbf{p_n}$ et $\mathbf{q_n}$ en fonction de $\mathbf{p_{n-1}}$ et $\mathbf{q_{n-1}}$, puis $\mathbf{p_n}$ en fonction de $\mathbf{p_{n-1}}$.

<u>Correction :</u>
1. Dans l'énoncé, on en déduit : La probabilité qu'il fasse beau lundi est 5/6, la probabilité qu'il fasse beau mardi est 25/36 + 2/18 = 29/36 et la probabilité qu'il fasse beau mercredi est 125/216 + 10/108 + 10/108 + 2/54 = 173/216.

lundi		mardi	
$\mathbf{B_j}$	$\frac{5}{6} = 0{,}833$	$\mathbf{B_{j+1}}$	0,83
		$\mathbf{\overline{B}_{j+1}}$	0,17
$\mathbf{\overline{B}_j}$	$\frac{1}{6} = 0{,}17$	$\mathbf{B_{j+1}}$	$\frac{2}{3} = 0{,}66.$
		$\mathbf{\overline{B}_{j+1}}$	$\frac{1}{3} = 0{,}34.$

Mercredi	
$\mathbf{B_{j+2}}$	0,83
$\mathbf{\overline{B}_{j+2}}$	0,17
$\mathbf{B_{j+2}}$	$\frac{2}{3} = 0{,}66.$
$\mathbf{\overline{B}_{j+2}}$	$\frac{1}{3} = 0{,}34.$
$\mathbf{B_{j+2}}$	$\frac{2}{3} = 0{,}66.$
$\mathbf{\overline{B}_{j+2}}$	$\frac{1}{3} = 0{,}34.$

2. probabilité le temps est beau le lundi au mercredi est : $p(B_L \cap B_M \cap B_{Mer}) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0{,}5787$.

3. probabilité le temps est mauvais le lundi et qu'il fait beau temps au mardi est :
$p(\overline{B}_L \cap B_M) = p(\overline{B}_L) \times p_{\overline{B}_L}(B_M) = \left(1 - \frac{5}{6}\right)\frac{2}{3} = \frac{1}{9}$.

4. probabilité le temps est mauvais entre le mardi et le mercredi est : $p(\overline{B}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

5. Calculons $\mathbf{p_n}$ et $\mathbf{q_n}$ en fonction de $\mathbf{p_{n-1}}$ et $\mathbf{q_{n-1}}$, puis $\mathbf{p_n}$ en fonction de $\mathbf{p_{n-1}}$:
$p_n = \frac{5}{6}p_{n-1} + \frac{2}{3}q_{n-1}$ et $q_n = \frac{1}{6}p_{n-1} + \frac{1}{3}q_{n-1}$;
$p_n = \frac{5}{6}p_{n-1} + \frac{2}{3}(1 - p_{n-1}) = \frac{1}{6}p_{n-1} + \frac{2}{3}$.

Exercice 59 : **Ada de Maradi participe à une compétition. Deux de ses sauts l'inquiètent. Il ne réussit le premier saut que dans 95% des cas. Comme il est émotif, s'il ne réussit pas ce premier saut, il rate le deuxième 3 fois sur 10 ; sinon, si tout va bien au premier saut, il réussit le deuxième dans 90% des cas. On notera l'événement contraire d'un événement A. Soit :**

R_1 **l'événement : " Ada réussit le premier saut ".**
R_2 **l'événement : " Ada réussit le deuxième saut".**

1. **Calculer les probabilités des évènements :** R_1**;** R_2/R_1 **et** $R_2/\overline{R_1}$**.**
2. **Déterminer la probabilité de l'événement : " Ada réussit les deux sauts".**
3. **Calculer la probabilité de l'évènement** R_2**.**
4. **Un spectateur, arrivé en retard, voit Ada réussir le deuxième saut. Calculer la probabilité qu'il ait aussi réussi le premier saut.**
5. **Manquer le premier saut fait perdre 0,1 point, manquer le deuxième saut fait perdre 0,2 point. Le règlement prévoit que les pénalités s'ajoutent. Soit X la variable aléatoire donnant le total des pénalités obtenues par Ada lors de la compétition.**

a) **Déterminer la loi de probabilité de X.**
b) **Calculer l'espérance mathématique de X.**
c) **Quelle interprétation peut-on en faire ?**

Correction :

1. **probabilités des évènements :** R_1**;** R_2/R_1 **et** $R_2/\overline{R_1}$ **:** D'après l'énoncé, $p(R_1) = 0{,}95$. $p(R_2/R_1) = 0{,}90$. On déduit que $p(R_2/\overline{R_1}) = 1 - p(\overline{R_2}/\overline{R_1}) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$.
2. **" Ada réussit les deux sauts" :** $R_1 \cap R_2$ **:**
$$p(R_1 \cap R_2) = p(R_2/R_1) \times p(R_1) = 0{,}90 \times 0{,}95 = 0{,}855$$
3. **probabilité de l'événement** R_2 **:** D'après la loi des probabilités totales, on a :
$p(R_2) = p(R_1 \cap R_2) + p(\overline{R_1} \cap R_2)$
$p(R_2) = p(R_2/R_1) \times p(R_1) + p(R_2/\overline{R_1}) \times p(\overline{R_1})$;
$p(R_2) = 0{,}855 + 0{,}7 \times 0{,}05 = 0{,}89$
4. **probabilité qu'il ait aussi réussi le premier saut :** $p(R_1/R_2) = \frac{p(R_1 \cap R_2)}{p(R_2)} = \frac{0{,}855}{0{,}89} = 0{,}96$.
5.

a) **loi de probabilité de X :**
X peut prendre les valeurs : 0 ; 0,1 ; 0,2 ou 0,3
$$p(X = 0) = p(R_1 \cap R_2) = 0{,}855$$
$$p(X = 0{,}1) = p(\overline{R_1} \cap R_2) = p(R_2/\overline{R_1}) \times p(\overline{R_1}) = 0{,}035$$
$$p(X = 0{,}2) = p(\overline{R_2} \cap R_1) = p(R_1/\overline{R_2}) \times p(\overline{R_2}) = 0{,}095$$
$$p(X = 0{,}3) = p(\overline{R_2} \cap \overline{R_1}) = p(\overline{R_2}/\overline{R_1}) \times p(\overline{R_1}) = 0{,}015$$
b) **Calculons l'espérance mathématique de X :**
$E(X) = \sum_i x_i \times p(X = x_i) = 0{,}027$
c) **Interprétation : Ada** peut donc "espérer" perdre 0,027 point durant la compétition.

Exercice 60 : **Daouda kassali, gardien de but du Niger doit faire face, lors d'une démonstration, à un certain nombre de tirs directs. Les expériences précédentes conduisent à penser que :**

- **s'il a arrêté le n**$^{\text{ième}}$ **tir, la probabilité pour qu'il arrête le suivant le n**$^{\text{ième}}$ **est 0,8 ;**
- **s'il n'a pas arrêté le n**$^{\text{ième}}$ **tir, la probabilité pour qu'il arrête le suivant est 0,6.**

La probabilité pour qu'il arrête le premier tir est 0,7. Dans tout l'exercice, si E est un événement, on note $\mathrm{p(E)}$ **la probabilité de E, E l'événement contraire de E. On note** $\mathrm{p(E/F)}$ **la probabilité conditionnelle de l'événement** ***E*** **sachant que** ***F*** **est réalisé.** $\mathrm{A_n}$ **est l'événement ''le gardien arrête le n**$^{\text{ième}}$ **tir''. On a donc** $\mathbf{p(A_1) = 0,7}$**.**

a) **Donner pour** ***n*** **> 1 les valeurs de** $\mathrm{p(A_{n+1}/A_n)}$ **et** $\mathrm{p(\overline{A}_{n+1}/A_n)}$**.**
b) **Exprimer** $\mathrm{p(A_{n+1}/A_n)}$ **et** $\mathrm{p(A_{n+1} \cap A_n)}$ **en fonction de** $\mathrm{p(A_n)}$**.**
c) **Déduisez-en que, pour tout entier strictement positif n ≥ 1 on a :** $\mathbf{p(A_{n+1}) = 0,2p(A_n) + 0,6}$**.**

Correction :

a) **Donnons pour** ***n*** **> 1 les valeurs de** $\mathrm{p(A_{n+1}/A_n)}$ **et** $\mathrm{p(\overline{A}_{n+1}/A_n)}$ **:** D'après l'énoncé ; La probabilité qu'*a* le gardien d'arrêter le tire (*n* +1) ; s'il a arrêté le tir *n* est 0,8 : Donc $\mathrm{p(A_{n+1}/A_n) = 0{,}8}$. De même ; la probabilité qu'il n'arrête le tire (*n* +1) s'il n'a pas arrêté le tir *n* est 0,6. Donc ; $\mathrm{p(\overline{A}_{n+1}/A_n) = 0{,}6}$.
b) **Exprimons** $\mathrm{p(A_{n+1}/A_n)}$ **et** $\mathrm{p(A_{n+1} \cap A_n)}$ **en fonction de** $\mathrm{p(A_n)}$ **:** D'après le principe des probabilités conditionnelles ; on a : $\mathrm{P(A_{n+1} \cap A_n) = p(A_{n+1}/A_n) \times p(A_n)}$. Donc $\mathrm{p(A_{n+1} \cap A_n) = 0{,}8p(A_n)}$De même ; on a : $\mathrm{p(A_{n+1} \cap \overline{A_n}) = 0{,}6p(\overline{A_n})}$
c) **Déduisons que, pour tout entier strictement positif n ≥ 1 on a :** $\mathbf{p(A_{n+1}) = 0,2p(A_n) + 0,6}$ **:** D'après la loi des Probabilités Totales ; on a : $\mathrm{p(A_{n+1} \cap}$

$A_n) + p(A_{n+1} \cap \overline{A}_n) = p(A_{n+1})$. Mais d'après la question précédente ; on a aussi : $p(A_{n+1} \cap A_n) + p(A_{n+1} \cap \overline{A}_n) = 0{,}8p(A_n) + 0{,}6p(\overline{A}_n)$. Comme $p(\overline{A}_n) = 1 - p(A_n)$; on comparant ces deux égalités ; on peut écrire : $p(A_{n+1}) = 0{,}8p(A_n) + 0{,}6p(\overline{A}_n) = 0{,}8p(A_n) + 0{,}6$.

<u>Exercice 61 :</u> On étudie une culture de bactéries. Le comportement de chaque bactérie est le suivant:
Si à l'instant t, une bactérie vit, à l'instant t + 1, cette bactérie peut :

- **mourir avec une probabilité p_1,**
- **continuer à vivre avec une probabilité p_2,**
- **se diviser en deux bactéries identiques avec une probabilité p_3. De plus, $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.**

On suppose que les bactéries présentes dans le milieu de culture se comportent indépendamment les unes des autres.

1. A l'instant t, deux bactéries b_1 et b_1 sont présentes dans le milieu de culture. On appelle X le nombre total de bactéries à l'instant t + 1. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. On suppose qu'à l'instant t = 0, une seule bactérie est présente dans le milieu de culture.

a) A l'aide d'un arbre, donner le nombre de bactéries possibles aux instants t = 1 et t = 2.

b) On désigne par A_1 l'événement « à l'instant t = 1, il y a une bactérie » ; B_2 l'événement « à l'instant t = 2, il y a deux bactéries ».Calculer la probabilité de $A_1 \cap B_2$; en déduire la probabilité de B_2.

c) On appelle Y le nombre de bactéries à l'instant t = 2. Déterminer la loi de probabilité de Y.

<u>Correction :</u>

1. X le nombre total de bactéries à l'instant $t + 1$
$X = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ Comme les bactéries présentes dans le milieu de culture se comportent indépendamment les unes des autres, on obtient :

$p(X = 0) = p(b_1 \text{ et } b_2 \text{ meurent}) = (p_1)^2$;

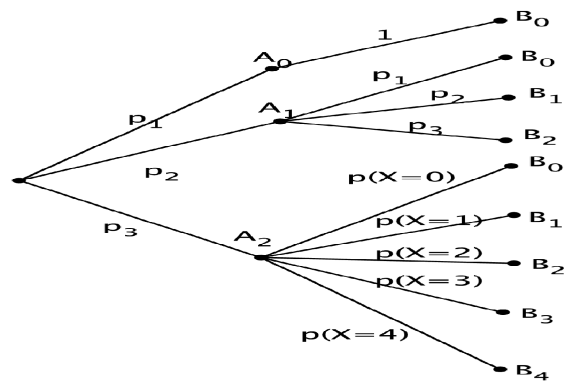
$p(X = 1) = p\begin{pmatrix} b_1 \text{ vit et } b_2 \text{ meurt} \\ \text{ou } b_2 \text{ vit et } b_1 \text{ meurt} \end{pmatrix} = 2p_1p_2$;

$p(X = 2) = p\begin{pmatrix} b_1 \text{ et } b_2 \text{ vivent ou} \\ \text{l'une meurt et} \\ \text{l'autre divise} \end{pmatrix} = (p_2)^2 + 2p_1p_3$.

$p(X = 3) = p\begin{pmatrix} \text{l'une des bactéries vit} \\ \text{et l'autrese divise} \end{pmatrix} = 2p_2p_3$.

$p(X = 0) = p(b_1 \text{ et } b_2 \text{ se divisent}) = (p_3)^2$.

2. à l'instant t = 0, une seule bactérie est présente dans le milieu de culture.



a) A l'aide d'un arbre, donner le nombre de bactéries possibles aux instants t = 1 et t = 2.
A l'instant t = 1, il y a 0, 1 ou 2 bactéries; et à l'instant t = 2, il y a 0, 1, 2, 3 ou 4 bactéries.

b) probabilité de $A_1 \cap B_2$: $p(A_1 \cap B_2) = p_2p_3$.
En déduire la probabilité de B_2
$p(B_2) = p(A_1 \cap B_2) + p(A_2 \cap B_2) = p_2p_3 + p_3[(p_2)^2 + p_1p_3]$.
Y le nombre de bactéries à l'instant t = 2 :
$Y = \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

Loi de probabilité de Y :

$p(Y = 0) = p_1 + p_1p_2 + p_3(p_1)^2$;

$p(Y = 1) = (p_2)^2 + 2p_1p_2p_3$;

$p(Y = 2) = p_3(p_2)^2 + p_2p_3 + 2p_1(p_3)^2$.

$p(Y = 3) = 2p_2(p_3)^3$.

$p(Y = 0) = (p_3)^3$.

<u>Exercice 62 :</u> Une urne contient 10 boules blanches et *n* boules rouges, *n* étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. Moussa tire des boules de l'urne. A chaque tirage, toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.

Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 F et pour chaque boule rouge tirée, il perd 3 F.

Il désigne par X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique obtenu par le joueur.
Les trois questions de l'exercice sont indépendantes.

1. Le joueur tire deux fois successivement et sans remise une boule de l'urne.

a) Démontrer que: $p(X = -1) = \frac{20n}{(n+9)(n+10)}$.

b) Calculer, en fonction de *n*, la probabilité correspondant aux deux autres valeurs prises par la variable X.

c) Vérifier que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X vaut : $E(X) = \frac{-6n^2-14n+360}{(n+9)(n+10)}$.

d) Déterminer les valeurs de *n* pour lesquelles l'espérance mathématique est strictement positive.

2. Le joueur tire 20 fois successivement et avec remise une boule de l'urne. Les tirages sont indépendants.
Déterminer la valeur minimale de l'entier *n* afin que la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge au cours de ces 20 tirages soit strictement supérieure à 0,999.

__Correction :__

1. Le terme **« successivement et sans remise »** renvois à la notion d'arrangement **de 2-liste.**

a) Démontrons que: $p(X=-1)=\frac{20n}{(n+9)(n+10)}$:

Lors d'un tirage de deux boules, soit le jouer tire deux boules blanches, et gagne 4 F soit le jouer tire une boule blanche et une boule rouge, et gagne 2 – 3 = – 1 F soit le jouer tire deux boules rouges, et gagne – 6 F. Si le joueur tire une boule rouge au premier tirage, l'urne contient 10 boules blanches et *n* – 1 boules rouges. Si le joueur tire une boule blanche au premier tirage, l'urne contient 9 boules blanches et *n* boules rouges.

	$1^{ième}$ tirage	$2^{ième}$ tirage	Gain
R_1	$\frac{n}{n+10}$	$\frac{n-1}{n+9}$	-6 F
		$\frac{10}{n+9}$	-1 F
B_1	$\frac{10}{n+10}$	$\frac{n}{n+9}$	-1 F
		$\frac{9}{n+9}$	4 F

Il ressort que $p(X=-1)=\frac{n}{n+10}\times\frac{10}{n+9}+\frac{10}{n+10}\times\frac{n}{n+9}=\frac{20n}{(n+9)(n+10)}$

b) Calculons en fonction de *n*, la probabilité correspondant aux deux autres valeurs prises par la variable X : $p(X=-6)=\frac{n}{n+10}\times\frac{n-1}{n+9}=\frac{n(n-1)}{(n+9)(n+10)}$.

$p(X=4)=\frac{10}{n+10}\times\frac{9}{n+9}=\frac{90}{(n+9)(n+10)}$

c) Vérifions que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X vaut : $E(X)=\frac{-6n^2-14n+360}{(n+9)(n+10)}$:

$E(X)=4p(X=4)-p(X=-1)-6p(X=-6)$.

$E(X)=\frac{360-20n-6n(n-1)}{(n+9)(n+10)}=\frac{-6n^2-14n+360}{(n+9)(n+10)}$

d) Déterminons les valeurs de *n* pour lesquelles l'espérance mathématique est strictement positive :

$$E(X)>0 \Leftrightarrow -6n^2-14n+360>0$$

$-6(n+9)\left(n-\frac{20}{3}\right)>0$; *n* étant un entier supérieur ou égal à 2, l'espérance mathématique est strictement positive si $n\geq 7$.

2. Déterminons la valeur minimale de l'entier *n* afin que la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge au cours de ces 20 tirages soit strictement supérieure à 0,999 :

Les événements « obtenir au moins une boule rouge au cours de ces 20 tirages » et « obtenir 20 boules blanches au cours de ces 20 tirages » sont contraires donc :

$p=1-\left(\frac{10}{n+10}\right)^{20}$.

$p>0{,}999 \Leftrightarrow n>\frac{10}{\sqrt[20]{0{,}001}}-10$, alors $n\geq 5$.

__Exercice 63 :__ **Samari débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives.**

On admet que :
• la probabilité qu'il gagne la première partie est de 0,1 ;
• s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,8;
• s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,6.
On note, pour tout entier naturel *n* non nul :
• G_n l'évènement « Samari gagne la $n^{ième}$ partie » ;
• p_n la probabilité de l'évènement G_n.
On a donc $p_1=0,1$.

1. Montrer que $p_2=0,62$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

2. Samari a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.

3. Calculer la probabilité que Samari gagne au moins une partie sur les trois premières parties.

4. Montrer que pour tout entier naturel *n* non nul, $p_{n+1}=\frac{1}{5}p_n+\frac{3}{5}$

5. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n* non nul, $p_n=\frac{3}{4}-\frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n$

6. Déterminer la limite de la suite (p_n) quand *n* tend vers $+\infty$.

7. Pour quelles valeurs de l'entier naturel *n* a-t-on : $\frac{3}{4}-p_n<10^{-7}$?

__Correction :__

1. Montrons que $p_2=0,62$:

$1^{ième}$ partie		$2^{ième}$ partie	
G_1	0,1	G_2	0,8
		$\overline{G_2}$	0,2
$\overline{G_1}$	0,9	G_2	0,6
		$\overline{G_2}$	0,4

$p_2=p(G_1\cap G_2)+p(\overline{G_1}\cap G_2)$

$$p_2 = p(G_1) \times p(G_2/G_1) + p(\overline{G_1}) \times p(G_2/\overline{G_1})$$
$$p_2 = 0{,}1 \times 0{,}8 + 0{,}9 \times 0{,}6 = 0{,}62$$

2. Calculons la probabilité qu'il ait perdu la première : $p(\overline{G}_1/G_2) = \frac{p(\overline{G_1} \cap G_2)}{p(G_2)} = \frac{0{,}54}{0{,}62}$.

3. Calculons la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières parties : La probabilité que le joueur ne gagne aucune des trois parties est égale à 0,9×0,4×0,4 = 0,144. La probabilité qu'il gagne au moins une partie est donc égale à 1−0,144 = 0,856.

4. Montrons que pour tout entier naturel *n* non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$:

$n^{\text{ième}}$ partie		$(n+1)^{\text{ième}}$ partie	
G_n	p_n	G_{n+1}	0,8
		$\overline{G}_{n+1}$	0,2
$\overline{G}_n$	$1 - p_n$	G_{n+1}	0,6
		$\overline{G}_{n+1}$	0,4

$p_{n+1} = p(G_n \cap G_{n+1}) + p(\overline{G}_n \cap G_{n+1}) = p(G_n) \times p(G_{n+1}/G_n) + p(\overline{G}_n) \times p(G_{n+1}/\overline{G}_n) = 0{,}8p_n + 0{,}6(1 - p_n) = 0{,}2p_n + 0{,}6 = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$.

5. <u>Initialisation :</u> $p_1 = \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^1 = \frac{1}{10} = 0{,}1$; La propriété est vraie au rang 1.

<u>Hérédité :</u> Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{N}$, $a > 1$ tel que $p_a = \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^a$. D'après la formule démontrée à la question 4 : $p_{a+1} = \frac{1}{5}p_a + \frac{3}{5} = \frac{1}{5}\left(\frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^a\right) + \frac{3}{5} = \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{a+1}$.La propriété est vraie au rang $a + 1$.

On a donc démontré par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n$

6. Comme $-1 < \frac{1}{5} < 1$, on a :

$\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \left[p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n \right] = \frac{3}{4} = 0{,}75$.

7. $\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$ ou $\frac{3}{4} - \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n < 10^{-7} \Leftrightarrow n > \frac{\ln\left(\frac{4\times10^{-7}}{13}\right)}{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}$ Or $\frac{\ln\left(\frac{4\times10^{-7}}{13}\right)}{\ln\left(\frac{1}{5}\right)} \approx 10{,}7$; donc p_{11} approche la limite $\frac{13}{4}$ à moins de 10^{-7}.

<u>**Exercice 64 :**</u> **Les trois questions peuvent être traitées de façon indépendante.**

Un candidat de Koygorou participe à un jeu télévisé qui comporte deux épreuves. La première consiste à répondre à une question tirée au hasard parmi celles que l'assistante a prélevées dans une urne. Dans la seconde, il doit répondre à une série de 10 questions sur un thème qu'il choisit.

1. L'urne contient dix bulletins indiscernables au toucher comportant chacun une question. Toutes les questions sont différentes, quatre portent sur l'histoire, quatre portent sur la littérature et deux sur le sport. En début d'émission, l'assistante tire au hasard et simultanément 4 bulletins de l'urne.
On note A l'évènement « les quatre questions portent sur l'histoire » et B l'évènement « l'une au moins des quatre questions porte sur le sport ».
Déterminer la probabilité des évènements A et B.

2. L'animateur annonce les thèmes sur lesquels portent les questions des quatre bulletins choisis par l'assistante. Il y a une question d'histoire, deux de littérature et une sur le sport.
Le candidat tire au hasard l'un de ces quatre bulletins.
On admet que la probabilité que sa réponse soit correcte est 0,7 s'il s'agit d'une question d'histoire, 0,6 s'il s'agit d'une question de littérature et 0,5 pour une question sur le sport.
On considère les évènements suivants :
H : « la question posée au candidat porte sur l'histoire »
L : « la question posée au candidat porte sur la littérature »
S : « la question posée au candidat porte sur le sport »
C : « le candidat répond correctement à la question posée »

a) Calculer la probabilité de l'évènement C.

b) Sachant que le candidat a répondu correctement, quelle est la probabilité que la question posée ait porté sur le sport ?

3. Le candidat a réussi cette première épreuve et choisit l'histoire comme thème pour la seconde épreuve. Les dix questions qu'on lui pose sont indépendantes et on suppose toujours que la probabilité qu'il réponde correctement à chaque question est égale à 0,7.
On désigne par *X* la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de bonnes réponses données par le candidat.

a) Soit *k* un entier compris entre 0 et 10. Quelle est l'expression de la probabilité de l'évènement {*X* = *k*} en fonction de *k* ? On justifiera la réponse.

b) Déterminer la probabilité que le candidat donne au moins neuf bonnes réponses. On arrondira le résultat à 10^{-2} .

Correction :

1. **Déterminons la probabilité des évènements A et B :** Les bulletins sont indiscernables au toucher, les tirages sont donc équiprobables et la probabilité d'un événement est le quotient du nombre de tirages qui lui sont favorables par le nombre de tirages possibles :

• Le nombre de tirages de 4 bulletins choisis simultanément parmi 10 est $C_{10}^4 = 210$

• L'événement *A* est réalisé lorsque les 4 bulletins sont choisis parmi les 4 portant sur l'histoire ; le nombre de tirages favorables à l'événement *A* est : $C_4^4 = 1$

• L'événement $\overline{B}$ est réalisé lorsque les 4 bulletins sont choisis parmi les 8 ne portant pas sur le sport ; le nombre de tirages favorables à l'événement $\overline{B}$ est : $C_8^4 = 70$. D'où $p(A) = \frac{1}{210}$ et $p(B) = 1 - p(\overline{B}) = 1 - \frac{70}{210} = \frac{2}{3}$.

2.

$1^{\text{ième}}$ tirage		$2^{\text{ième}}$ tirage	
H	$\frac{1}{4}$	C	0,7
		$\overline{C}$	0,3
L	$\frac{1}{2}$	C	0,6
		$\overline{C}$	0,4
S	$\frac{1}{4}$	C	0,5
		$\overline{C}$	0,5

a) **Calculons la probabilité de l'évènement C :**

$p(C) = p(C \cap H) + p(C \cap L) + p(C \cap S)$

$p(C) = p(H) \times p(C/H) + p(L) \times p(C/L) + p(S) \times p(C/S)$

$p(C) = \frac{1}{4} \times 0,7 + \frac{1}{2} \times 0,6 + \frac{1}{4} \times 0,5 = 0,6$

b) **probabilité que la question posée ait portée sur le sport :** $p(S/C) = \frac{p(S \cap C)}{p(C)} = \frac{p(S) \times p(C/S)}{p(C)} = \frac{\frac{1}{4} \times 0,5}{0,6} = \frac{5}{24}$

3.

a) **L'expression de la probabilité de l'évènement {*X* = *k*} en fonction de *k* et justifions cette réponse :** Chaque question constitue une épreuve de Bernoulli de paramètre *p* = 0,7 (épreuve à deux issues : le candidat répond correctement à la question — succès — avec la probabilité *p* = 0,7 ou bien il ne répond pas correctement à la question avec la probabilité 1− *p* = 0,3). On répète *n* = 10 fois, de manière indépendante, une telle épreuve de même paramètre *p* = 0,7, alors la variable aléatoire *X* égale au nombre de « succès » suit la loi binomiale de paramètres 10 et 0,7 : pour tout $k \in \{0; 1; \dots; 10\}$; $p(X = k) = C_{10}^k (0,7)^k (0,3)^{10-k}$.

b) $p(X \geq 9) = p(X = 9) + p(X = 10) = C_{10}^9 (0,7)^9 (0,3)^{10-9} + C_{10}^{10} (0,7)^{10} (0,3)^{10-10} \approx 0,15$

Exercice 65 : Un responsable de magasin achète des composants électroniques auprès de deux fournisseurs dans les proportions suivantes : 25 % au premier fournisseur et 75 % au second. La proportion de composants défectueux est de 3 % chez le premier fournisseur et de 2 % chez le second.

On note :

– D l'évènement « le composant est défectueux »

– F1 l'évènement « le composant provient du premier fournisseur » ;

– F2 l'évènement « le composant provient du second fournisseur ».

1. **Dessiner un arbre pondéré.**
2. **Calculer $p(D \cap F_1)$, puis démontrer que la probabilité p(D) = 0,0225.**
3. **Sachant qu'un composant est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur ?**
4. **Le responsable commande 20 composants. Quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre eux soient défectueux ?**

Correction :

1.

$1^{\text{ième}}$		$2^{\text{ième}}$	
F_1	0,25	D	0,03
		$\overline{D}$	0,97
F_2	0,75	D	0,02
		$\overline{D}$	0,98

2. **Calculons $p(D \cap F_1)$, puis démontrer que p(D) = 0,0225 :** $p(D \cap F_1) = 0,25 \times 0,03 = 0,075$, de même $p(D \cap F_2) = 0,75 \times 0,02 = 0,015$ donc $p(D) = p(D \cap F_1) + p(D \cap F_2) = 0,075 + 0,015 = 0,0225$.

3. **La probabilité qu'il provienne du premier fournisseur :** $P_D(F_1) = \frac{P(D \cap F_1)}{P(F_1)} = \frac{0,03}{0,09} = \frac{1}{3}$.

4. **La probabilité qu'au moins deux d'entre eux soient défectueux :** Le nombre N de composants défectueux suit une loi de Bernoulli de paramètres n = 20 et p = 0,0225 ; on a donc

$p(N \geq 2) = 1 - p(N = 1) - p(N = 0) = 1 - C_{20}^1 p^{20} (1-p)^{19} - C_{20}^1 p^{20} (1-p)^{19}$

Exercice 66 : Au lycée Sarawnia de Dosso, dans une classe de 30 élèves sont formés un club photo possédant 10 membres et un club de théâtre possédant 6 membres. Il y a deux élèves qui sont membres des deux clubs à la fois.

1. On interroge un élève de la classe pris au hasard. On appelle P l'évènement « l'élève fait partie du club photo » et T l'évènement « l'élève fait partie du club de théâtre».
Montrer que P et T sont indépendants.
2. Dans une séance du club photo, les 10 membres sont présents. Un premier élève est tiré au sort. Il doit prendre la photo d'un autre membre du club qui sera lui aussi tiré au sort.
a) On appelle T_1 l'évènement « le premier élève appartient au club théâtre». Calculer $P(T_1)$.
b) On appelle T_2 l'évènement « l'élève pris en photo appartient au club théâtre». Calculer $P_{T_1}(T_2)$ puis $P_{\overline{T}_1}(T_2)$. En déduire $P(T_2 \cap T_1)$ et $P(T_2 \cap \overline{T}_1)$.
c) On appelle T_0 l'évènement « l'élève pris en photo appartient au club théâtre». Démontrer $P(T_2) = P_{T_1}(T_2) \times P(T_1) + P_{\overline{T}_1}(T_2) \times P(\overline{T}_1)$.
Calculer $P(T_2)$.
3. Toutes les semaines on recommence de façon indépendante la séance photographique avec tirage au sort du photographe et du photographié. Le même élève peut être photographié plusieurs semaines de suite. Calculer la probabilité qu'au bout de 4 semaines aucun membre du club théâtre n'ait été photographié.

__Correction :__

1. Montrons que P et T sont indépendants :
$P(P) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ et $P(T) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$.
On a alors $P(P \cap T) = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$.
$P(P \cap T) = P(P) \times P(T) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$, donc les événements sont indépendants. Ceci est un pur hasard de calcul, si vous changez par exemple le nombre d'élèves dans la classe ça ne marche pas.
2.
a) Calculons $P(T_1)$: $P(T_1) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.
b) Calculons $P_{T_1}(T_2)$; $P_{\overline{T}_1}(T_2)$ et déduisons $P(T_2 \cap T_1)$ et $P(T_2 \cap \overline{T}_1)$: $P_{T_1}(T_2) = \frac{1}{9}$; il reste à tirer un membre du club théâtre parmi les neufs restants. $P_{\overline{T}_1}(T_2) = \frac{2}{9}$.
$P(T_2 \cap T_1) = P_{T_1}(T_2) \times P(T_1) = \frac{1}{9} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{45}$ et $P(T_2 \cap \overline{T}_1) = \frac{8}{45}$.
Pour une bonne compréhension, il est préférable de construire un arbre pondéré.

c) Démontrons $P(T_2) = P_{T_1}(T_2) \times P(T_1) + P_{\overline{T}_1}(T_2) \times P(\overline{T}_1)$: Avec les probabilités totales, on a : $P(T_2) = P(T_2 \cap T_1) + P(T_2 \cap \overline{T}_1) = P_{T_1}(T_2) \times P(T_1) + P_{\overline{T}_1}(T_2) \times P(\overline{T}_1)$
Calculons : $P(T_2) = \frac{1}{45} + \frac{8}{45} = \frac{1}{5}$. Le calcul aurait pu se faire avec un arbre
3. Calculons la probabilité qu'au bout de 4 semaines aucun membre du club théâtre n'ait été photographié : Il s'agit d'une Loi Binomiale de paramètre $n = 4$ et $p = 1 - P(T_2) = \frac{4}{5}$.
$P(X = 4) = C_4^4 p^4 (1-p)^0 = \frac{256}{625}$.

__Exercice 67 :__ **Une urne contient trois dés équilibrés. Deux d'entre eux sont normaux : ils possèdent six faces numérotées de 1 à 6. Le troisième est truqué : il possède deux faces numérotées 1 et quatre faces portant le numéro 6.On prend un dé au hasard dans l'urne et on effectue de manière indépendante des lancers successifs de celui-ci.**

On note :
*** N'événement : « le dé tiré est normal » ;**
*** U'événement : « on obtient 1 au premier lancer » ;**
*** pour n entier non nul, S_n l'événement : « on obtient 6 à chacun des n premiers lancers ».**
1. Montrer que $p(U) = \frac{2}{9}$.
2. Pour tout entier n non nul, montrer que $P(S_n) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$.
3. Pour n entier non nul, on note p_n la probabilité d'avoir tiré le dé truqué, sachant qu'on a obtenu le numéro 6 à chacun des n premiers lancers.
Montrer que $p_n = \frac{1}{2\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1}$.

__Correction :__

1. $P(N) = \frac{2}{3}$, $P(U/N) = \frac{1}{6}$ et $P(U/\overline{N}) = \frac{2}{6}$.
Reprenons les probabilités totales :
$p(U) = P(U/N) \times P(N) + P(U/\overline{N}) \times P(\overline{N}) = \frac{2}{9}$
2. épreuves indépendantes répétées donc loi binomiale : les paramètres sont n pour le nombre de tirages et p :
- si on choisit un dé normal $p = \frac{1}{6}$, on a alors P (tirer 6 n fois)$=C_n^n p^n (1-p)^0 = \left(\frac{1}{6}\right)^n$.
- si on choisit le dé truqué $p = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$,

on a alors p(tirer 6 n fois)= $\left(\frac{2}{3}\right)^n$. En refaisant le même raisonnement qu'au 1. on obtient :
p(tirer 6 fois)= $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

3. $p_n = P(\bar{N}/S_n) = \frac{P(\bar{N}\cap S_n)}{P(S_n)} = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{1}{2\left(\frac{1}{4}\right)^n+1}$.

<u>Exercice 68 :</u> Une urne A contient une boule rouge et trois boules vertes. Une urne B contient deux boules rouges et deux boules noires. Les boules sont indiscernables au toucher.

1. On dispose d'un dé à 6 faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6.
On le lance une fois ; si l'on obtient un multiple de 3, on tire au hasard une boule de l'urne A, sinon on tire au hasard une boule de l'urne B.
a) Calculer la probabilité d'obtenir une boule noire.
b) Quelle est la couleur qui a la plus grande probabilité de sortir ?
c) Quelle est la probabilité que la boule tirée provienne de l'urne B sachant qu'elle est rouge ?
2. On réunit toutes les boules dans une seule urne et on tire successivement trois boules que l'on pose chaque fois devant l'urne.
a) Montrer que la probabilité de l'évènement « la 3ème boule tirée est noire » vaut $\frac{1}{4}$.
b) Certains pensent que l'évènement « la première boule tirée est noire » a une probabilité supérieure à l'évènement « la troisième boule tirée est noire ». Est-ce vrai ? Justifier.

<u>Correction :</u>

1. Avec un dé il y a deux multiples de 3 : 3 et 6 ; on a donc la probabilité $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et la probabilité $\frac{2}{3}$ de ne pas avoir de multiple de 3.
a) La probabilité d'obtenir une boule noire est alors : $p(N) = p(\text{mult. de } 3) \times p_A(N) + P_B(N) \times p(\text{pas mult. de } 3)$
$p(N) = \frac{1}{3} \times 0 + \frac{2}{3} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{3}$.
b) la couleur qui a la plus grande probabilité de sortir : $p(R) = p(\text{mult. de } 3) \times p_A(R) + P_B(R) \times p(\text{pas mult. de } 3)$
$p(R) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{4} = \frac{5}{12}$. $p(V) = p(\text{mult. de } 3) \times p_A(V) + P_B(V) \times p(\text{pas mult. de } 3)$. $p(V) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \times 0 = \frac{3}{12}$.
Le rouge est donc la couleur qui a la plus grande probabilité de sortir.
c) la probabilité que la boule tirée provienne de l'urne B sachant qu'elle est rouge : $P_R(B) = \frac{P(B\cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{2}{3}\times\frac{2}{4}}{\frac{5}{12}} = \frac{4}{5}$.
2. On réunit toutes les boules dans une seule urne et on tire successivement trois boules que l'on pose chaque fois devant l'urne.
a) Montrer que la probabilité de l'évènement « la 3ème boule tirée est noire » vaut $\frac{1}{4}$: On a les possibilités suivantes : $N\bar{N}N$, $\bar{N}NN$, $\bar{N}\bar{N}N$; on ne remet pas la boule dans l'urne donc : $P(\bar{N}\bar{N}N) = P(\bar{N}) \times P(\bar{N}) \times P(N) = \frac{6}{8} \times \frac{5}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{5}{28}$. $P(\bar{N}NN) = P(\bar{N}) \times P(N) \times P(N) = \frac{6}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{28}$ de même pour $P(N\bar{N}N)$; au total cela donne bien $\frac{1}{4}$.
b) Non, ce sont des probabilités identiques… $P(N) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

<u>Exercice 69 :</u> Une boîte contient 8 cubes : • 1 gros rouge et 3 petits rouges,

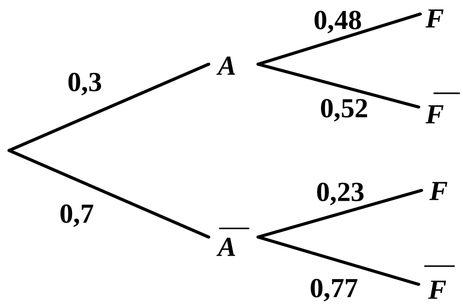
• 2 gros verts et 1 petit vert, • 1 petit jaune.
Un enfant choisit au hasard et simultanément 3 cubes de la boîte. On admettra que la probabilité de tirer un cube donné est indépendante de sa taille et de sa couleur. Les résultats seront donnés sous forme de fraction irréductible.
1. On note A l'événement : "Obtenir des cubes de couleurs différentes" et B l'événement : "Obtenir au plus un petit cube".
a) Calculer la probabilité de A.
b) Vérifier que la probabilité de B est égale à $\frac{2}{7}$.
2. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de petits cubes rouges tirés par l'enfant.
a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Calculer l'espérance mathématique de X.
3. L'enfant répète 5 fois l'épreuve "tirer simultanément 3 cubes de la boîte", en remettant dans la boîte les cubes tirés avant de procéder au tirage suivant. Les tirages sont indépendants. On note p la probabilité que l'événement B soit réalisé.

a) Déterminer la probabilité que B soit réalisé au moins une fois à l'issue des 5 épreuves.
b) Déterminer la probabilité que l'événement B soit réalisé exactement 3 fois.

Correction : Préliminaire : il y a $C_8^3 = 56$ éventualités, c'est-à-dire 56 façons de tirer les 3 cubes.

1.
a) Calculons la probabilité de A :
Obtenir des cubes de couleur différente revient à obtenir 1 rouge ET 1 vert ET 1 jaune, c'est-à-dire obtenir un rouge parmi les 4, et 1 vert parmi les 3 et le jaune :
$p(A) = \frac{C_4^1 \times C_4^1 \times 1}{C_8^3} = \frac{3}{14}$.
b) **Vérifions que la probabilité de B est égale à $\frac{2}{7}$:**
Obtenir au plus un petit cube c'est n'en obtenir aucun OU en obtenir un seul. $p(B) = \frac{C_3^3 \times C_5^1 \times C_3^2}{C_8^3} = \frac{2}{7}$. En effet, n'obtenir aucun cube, c'est prendre les 3 gros, et il n'y a qu'une possibilité (3 parmi les 3) OU n'en prendre qu'un (parmi les 5) ET prendre 2 gros cubes (parmi les 3).
2.
a) Déterminons la loi de probabilité de X :
La variable aléatoire donne le nombre de petits cubes rouges tirés ; il y en en trois en tout, on peut donc en tirer 0, 1, 2 ou 3.
• Aucun petit cube rouge $p(X = 0) = \frac{C_3^0 \times C_5^3}{C_8^3} = \frac{5}{28}$;
• Un seul petit cube rouge $p(X = 1) = \frac{C_3^1 \times C_5^2}{C_8^3} = \frac{15}{28}$;
• Deux petits cubes $p(X = 2) = \frac{C_3^2 \times C_5^1}{C_8^3} = \frac{15}{56}$;
• Trois petits cubes rouges $p(X = 3) = \frac{C_3^3 \times C_5^0}{C_8^3} = \frac{1}{56}$.
b) l'espérance mathématique de X : $E(X) = 0 \times \frac{5}{28} + 1 \times \frac{15}{28} + 2 \times \frac{15}{56} + 3 \times \frac{1}{56} = \frac{9}{8}$.
3. Les événements sont indépendants. Il s'agit d'un schéma de Bernoulli. avec :
• Succès : "Obtenir au plus un petit cube."
• p = p(S) = 2/7 (Voir question 1.)
• Il y a 5 épreuves.
• On obtient k succès lors des n épreuves.
$P(Y = k) = C_5^k \left(\frac{2}{7}\right)^k \left(\frac{5}{7}\right)^{5-k}$.
a) On veut obtenir au moins un succès lors des 5 épreuves. On appelle Y la variable aléatoire qui donne le nombre de succès lors des 5 épreuves. Il s'agit de calculer $p(Y \geq 1)$ ou encore $1 - p(Y = 0)$: $P(Y \geq k) = 1 - P(Y = 0) = 1 - C_5^0 \left(\frac{2}{7}\right)^0 \left(\frac{5}{7}\right)^5 \approx 0,8141$.

b) Déterminons la probabilité que l'événement B soit réalisé exactement 3 fois :
$P(Y = 3) = C_5^3 \left(\frac{2}{7}\right)^3 \left(\frac{5}{7}\right)^2 = 0,1190$.



<u>Exercice 70 :</u> **Dans une entreprise, les salariés ont entre 18 et 60 ans. 30% d'entre eux ont entre 18 et 34 ans. 48% des salariés âgés de 18 à 34 ans fument. Parmi les plus de 34 ans, 23% sont fumeurs. L'infirmière de l'entreprise a créé pour chaque salarié une fiche sur laquelle figure son âge et s'il est fumeur ou non. On choisit au hasard une fiche dans ce fichier. On définit les évènements suivants :A « La fiche est celle d'un salarié âgé de 18 à 34 ans ». F « La fiche est celle d'un fumeur ».**

1. Définir à l'aide d'une phrase en français l'évènement A puis calculer la probabilité de cet évènement.
2. Calculer la probabilité de l'évènement « La fiche choisie est celle d'un salarié fumeur âgé de 18 à 34 ans ».
3. Montrer que la probabilité de l'évènement F est égale à 0,305.
4. Sachant que la fiche choisie est celle d'un fumeur, calculer la probabilité que ce soit celle d'un salarié de plus de 34 ans. En donner une valeur approchée arrondie à 10^{-3} près.

Correction :

1. 30% d'entre eux ont entre 18 et 34 ans, donc $P(A) = \frac{30}{100} = 0,3$; 48% des salariés âgés de 18 à 34 ans fument, donc on a : $P_A(F) = \frac{48}{100} = 0,48$ et $P_A(\overline{F}) = 1 - 0,48 = 0,52$.
L'évènement $\overline{A}$ est défini par : « La fiche est celle d'un salarié âgé de plus de 34 ans » et sa probabilité est : $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,3 = 0,7$ .Parmi les plus de 34

ans, 23% sont fumeurs , donc $P_{\overline{A}}(F)=\frac{23}{100}=0,23$ et

$P_{\overline{A}}(\overline{F})=1-0,23=0,77$

2. La probabilité demandée est :
$P(A\cap F)=P(A)\times P_A(F)=0,3\times 0,48=0,144$

3. On calcule d'abord :
$P(\overline{A}\cap F)=P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(F)=0,7\times 0,23=0,161$

$F=(A\cap F)\cup(\overline{A}\cap F)$. Or les événements $A\cap F$ et $\overline{A}\cap F$ sont incompatibles et forment une partition disjointe de l'univers , donc on a :
$P(A)=P(A\cap F)+P(\overline{A}\cap F)=0,144+0,161=0,305$

4. Calculer la probabilité, sachant F , de l'événement $\overline{A}$. On la notera $P_F(\overline{A})$.

$$P_F(\overline{A})=\frac{P(\overline{A}\cap F)}{P(F)}=\frac{0,161}{0,305}\approx 0,5278688525\approx 0,528$$

Les événements F et A sont-ils indépendants ? Justifier. $P(F\cap A)=0,144$ et $P(F)\times P(A)=0,305\times 0,3=0,0915$, par conséquent $P(F\cap A)\neq P(F)\times P(A)$ et on conclut que les événements A et F ne sont pas indépendants.

__Exercice 71 :__ **Trois coffres notés C_1, C_2, C_3 ont chacun deux tiroirs, et dans chaque tiroir, il y a une pièce. Le coffre C_1 contient 2 pièces d'or, C_2 2 pièces d'argent et C_3 une pièce d'or et une d'argent.**

1. On ouvre au hasard l'un des 6 tiroirs et on trouve une pièce d'argent. Quelle est la probabilité pour que l'on ait ouvert un tiroir du coffre C_2 ?
2. On ouvre à nouveau et indépendamment de la première fois l'un des 6 tiroirs et on trouve encore une pièce d'argent. Quelle est la probabilité pour que l'on ait ouvert deux fois le même coffre ?

__Correction :__

1. la probabilité pour que l'on ait ouvert un tiroir du coffre C_2 : $P(A)=P(A\cap C_1)+P(A\cap C_2)+P(A\cap C_3)=P_{C_1}(A)\times P(C_1)+P_{C_2}(A)\times P(C_2)+P_{C_3}(A)\times P(C_3)=0+1\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$

Alors : $P_A(C_2)=\frac{P(A\cap C_2)}{P(A)}=\frac{P_{C_2}(A)\times P(C_2)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$.

2. la probabilité pour que l'on ait ouvert deux fois le même coffre : Puisqu'on a déjà pris une pièce d'argent, il faut retomber sur C_2, donc $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$ (attention à l'indépendance, sinon on aurait quelque chose plus compliqué).

__Exercice 72 :__ **Une grave maladie affecte le cheptel bovin de Garsso. On estime que 7 % des bovins sont atteints.**

Aâri vient de mettre au point un test pour diagnostiquer la maladie, on a établi que,
– quand un animal est malade, le test est positif dans 87% des cas,
– quand un animal n'est pas malade, le test est négatif dans 98% des cas.
On note F l'événement "être malade" et T l'événement "avoir un test positif".
1. Calculez la probabilité des trois événements suivants : " F et T" ; " $\overline{F}$ et $\overline{T}$ " ; " F et $\overline{T}$ ". Déduisez-en la probabilité de T.
2. Quelle est la probabilité pour qu'un animal ayant un test négatif soit malade ?

__Correction :__ Commençons par traduire en probabilité, les hypothèses de l'énoncé. On sait quand un animal est malade, le test est positif dans 87% des cas. Cela se traduit par : $p(T/F)=0,87$.

On sait aussi que 7% des bovins sont malades, ce qui se traduit par : $p(F)=0,07$ donc $p(\overline{F})=0,93$. On peut aussi dire que $p(\overline{T}/\overline{F})=0,98$; donc $p(T/\overline{F})=1-0,98=0,02$.
$p(\overline{T}/F)=1-p(T/F)=1-0,87=0,13$.
1. D'après le principe des Probabilités Conditionnelles, on peut déduire que :
$p(T\cap F)=p(T/F)\times p(F)=0,87\times 0,07=0,0609$
$p(\overline{T}\cap\overline{F})=p(\overline{T}/\overline{F})\times p(\overline{F})=0,98\times 0,93=0,9114$
$p(\overline{T}\cap F)=p(\overline{T}/F)\times p(F)=0,13\times 0,07=0,0091$
Déduisez-en la probabilité de T :
D'après la Loi Des Probabilités Totales, $p(T)=p(T\cap F)+p(T\cap\overline{F})$; donc $p(T)=0,0609+0,0186=0,0795$.

2. $p(F/\overline{T})=\frac{p(\overline{T}\cap F)}{p(\overline{T})}=\frac{0,0091}{0,9205}=0,0098859$

Exercice 73 : **Un jeu consiste à lancer des fléchettes sur une cible circulaire. La cible est partagée en quatre secteurs inégaux, repartis successivement : 0 point, 5 points, 0 points et 3 points.**

On suppose que les lancers sont indépendants et que le joueur touche la cible à tous les coups.

1. Le joueur lance une fléchette.

On note p_0 la probabilité d'obtenir 0 point.
On note p_3 la probabilité d'obtenir 3 points.
On note p_5 la probabilité d'obtenir 5 points.
On a $p_0 + p_3 + p_5 = 1$. Sachant que $p_5 = \frac{1}{2}p_3$ et que $p_5 = \frac{1}{3}p_0$ déterminer les valeurs de p_0, p_3 et p_5.

2. Une partie de ce jeu consiste à lancer trois fléchettes au maximum. Le joueur gagne la partie s'il obtient un total (pour les 3 lancers) supérieur ou égal à 8 points. Si au bout de 2 lancers, il a un total supérieur ou égal à 8 points, il ne lance pas la troisième fléchette.

On note G_2 l'évènement : « le joueur gagne la partie en 2 lancers ».
On note G_3 l'évènement : « le joueur gagne la partie en 3 lancers ».
On note P l'évènement : « le joueur perd la partie ».
On note $p(A)$ la probabilité d'un évènement A.

a) Montrer, en utilisant un arbre pondéré, que $p(G_2) = \frac{5}{36}$. On admettra dans la suite que $p(G_3) = \frac{7}{36}$.

b) En déduire $p(P)$.

3. Un joueur joue six parties avec les règles données à la question 2. Quelle est la probabilité qu'il gagne au moins une partie ?

4. Pour une partie, la mise est fixée à 2 F.
Si le joueur gagne en deux lancers, il reçoit 5 F. S'il gagne en trois lancers, il reçoit 3 F. S'il perd, il ne reçoit rien.
On note X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur pour une partie. Les valeurs possibles pour X sont donc : −2, 1 et 3.

a) Donner la loi de probabilité de X.

b) Déterminer l'espérance mathématique de X.
Le jeu est-il favorable au joueur ?

Correction :

1. valeurs de p_0, p_3 et p_5 : $p_0 + p_3 + p_5 = 2p_5 + 3p_5 + p_5 = 1 \Leftrightarrow 6p_5 = 1 \Leftrightarrow p_5 = \frac{1}{6}$. Il en résulte que $p_0 = \frac{1}{2}$ et $p_3 = \frac{1}{3}$.

2. lancer trois fléchettes au maximum

a) Montrons, en utilisant un arbre pondéré, que $p(G_2) = \frac{5}{36}$:

1er lancé	points	2ème lancé	points
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
		$\frac{1}{3}$	3
		$\frac{1}{6}$	5
$\frac{1}{3}$	3	$\frac{1}{2}$	0
		$\frac{1}{3}$	3
		$\frac{1}{6}$	5
$\frac{1}{6}$	5	$\frac{1}{2}$	0
		$\frac{1}{3}$	3
		$\frac{1}{6}$	5

On obtient un total d'au moins 8 points en deux lancers à la 6e, 8e et 9e branche. Donc $p(G_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$.

b) $p(P) = 1 - p(G_2) = 1 - \frac{5}{36} = \frac{2}{3}$.

3. la probabilité qu'il gagne au moins une partie : Les lancers sont indépendants ; on a une schéma de Bernoulli de paramètres $n = 6$ et de probabilité $p = \frac{2}{3}$. La probabilité de ne gagner aucune partie est $\left(\frac{2}{3}\right)^6$, donc la probabilité de gagner au moins une partie est $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{665}{729}$.

4.

a) Donnons la loi de probabilité de X :

X	-2	1	3
$P(X = x_i)$	$\frac{24}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$

b) **Déterminons l'espérance mathématique de X :** $E(X) \approx -0{,}72$ F.

Le jeu est-il favorable au joueur ? Un joueur perd en moyenne sur un grand nombre de parties 72 centimes par partie. Le jeu est défavorable au joueur.

III. Divers :

Exercice 74 : **Lors d'un référendum, deux questions étaient posées. 65 % des personnes ont répondu « oui » à la première question, 51 % ont répondu « oui » à la seconde question, et 46 % ont répondu « oui » aux deux questions.**

1) Quelle est la probabilité qu'une personne ait répondu « oui » à l'une ou l'autre des questions ?

2) Quelle est la probabilité qu'une personne ait répondu « non » aux deux questions ?

Correction : Si on note A l'événement « la personne a répondu oui à la première question » et B l'événement « la personne a répondu oui à la deuxième question », l'énoncé nous fournit $p(A) = 0,65$, $p(B) = 0,51$ et $p(A \cap B) = 0,46$.

1) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,65 + 0,51 - 0,46 = 0,7$.

2) $p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = 1 - 0,7 = 0,3$.

Exercice 75 : On constitue une file d'attente en attribuant au hasard des numéros d'ordre à n personnes (n ≥ 2). Deux amis A et B se trouvent dans cette file d'attente.

1. Quelle est la probabilité que les deux amis soient situés l'un derrière l'autre ?
2. Quelle est la probabilité que les deux amis soient distants de r places (i.e. séparés par r − 1 personnes).

Correction : Le nombre total de possibilités de rangement est n!

1. **La probabilité que les deux amis soient situés l'un derrière l'autre :** Supposons que A est en premier, B est derrière, il reste (n − 2)! répartitions possibles. Comme A peut être placé n'importe où dans la file avec B derrière lui, il y a (n − 1) places possibles pour A et donc la probabilité $\frac{(n-1)!}{n!}$ d'avoir A suivi de B ; c'est pareil pour B suivi de A, soit la probabilité finale $\frac{2}{n}$.
2. **La probabilité que les deux amis soient distants de r places (i.e. séparés par r − 1 personnes) :** Même raisonnement ; au pire B est en dernier et A r places devant ; on peut placer A de n − r manières, la probabilité finale est alors $2\frac{(n-r)\times(n-2)!}{n!} = \frac{2(n-r)}{n(n-1)}$.

Exercice 76 : Soient A et B deux événements tels que : $\boldsymbol{P(A) = \frac{1}{5}}$ et $\boldsymbol{P(A \cup B) = \frac{1}{2}}$.

1. **Supposons que A et B soient incompatibles. Calculer P(B).**
2. **Supposons que A et B soient indépendants. Calculer P(B) .**
3. **Calculer P(B) en supposant que l'événement A ne peut être réalisé que si l'événement B est réalisé.**

Correction :

1. **Calculer P (B) :** A et B incompatibles ou A∩ B = ∅ d'où $P(B) = P(A \cup B) - P(A) = \frac{3}{10}$.
2. **Calculer P (B) :** $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{5} + P(B) - \frac{1}{5}P(B) \Leftrightarrow \frac{4}{5}P(B) = \frac{3}{10} \Leftrightarrow P(B) = \frac{3}{8}$.
3. A ne peut être réalisé que si B est réalisé : tous les événements de A sont dans B, $P(A \cap B) = P(A) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{5} + P(B) - \frac{1}{5} \Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{2}$.

Exercice 77 : Sarki -noma a entreposé dans un local humide 12 doses d'herbicides et 8 doses de fongicide. Après plusieurs mois de séjour, les étiquettes ne sont pas différentiables (parce qu'illisibles). En vue d'un traitement, l'agriculteur prend 6 doses au hasard.

1. **Quelle est la probabilité qu'il prenne 6 doses d'herbicide ?**
2. **Quelle est la probabilité qu'il prenne au moins 2 doses d'herbicide ?**

Correction :

1. **probabilité qu'il prenne 6 doses d'herbicide :** L'univers comporte C_{20}^{6} tirages simultanés de 6 objets parmi 20, il y a C_{12}^{6} manières de tires les 6 doses, soit une probabilité de :$\frac{C_{12}^{6}}{C_{20}^{6}} = 0,024$.
2. On cherche 1 – [Probabilité (0 dose herbicide) + (1 dose herbicide)], soit $p(X = 0) = \frac{C_{8}^{6}}{C_{20}^{6}}$ =0,07 % ; $p(X = 1) = \frac{C_{12}^{1}\times C_{8}^{5}}{C_{20}^{6}}$ =0,17 % . Probabilité recherchée = 100 − (0,07+0,17) = 99,76 %.

Exercice 78 : Dans un stand de tir, Kamba-kanou effectue des tirs successifs pour atteindre un ballon afin de le crever. À chacun de ces tirs, il a la probabilité 0,2 de crever le ballon. Le tireur s'arrête quand le ballon est crevé. Les tirs successifs sont supposés indépendants.

1. **Quelle est la probabilité qu'au bout de deux tirs le ballon soit intact ?**
2. **Quelle est la probabilité que deux tirs suffisent pour crever le ballon ?**
3. **Quelle est la probabilité $\boldsymbol{p_n}$ que n tirs suffisent pour crever le ballon ?**
4. **Pour quelles valeurs de n a-t-on $\boldsymbol{p_n}$ > 0,99 ?**

Correction :

1. On note C quand le ballon est crevé, $\bar{C}$ quand il ne l'est pas lors d'un tir. La probabilité qu'au bout de deux tirs le ballon soit intact est : $p(\bar{C} \cap \bar{C}) = p(\bar{C}, \bar{C}) = p(\bar{C}) \times p(\bar{C}) = (0,8)^2 = 0,64$.

2. La probabilité que deux tirs suffisent pour crever le ballon : $p(C \cap C) = p(C, C) = 1 - p(\bar{C}, \bar{C}) = 1 - 0{,}64 = 0{,}36$.
3. probabilité p_n que n tirs suffisent pour crever le ballon : $p_n = 1 - p(\bar{C}, \bar{C}, \dots, \bar{C}) = 1 - (0{,}8)^n$.
4. Valeurs de n pour p_n > 0,99 : $1 - (0{,}8)^n > 0{,}99 \Leftrightarrow n > \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}8)} = 20{,}63$ donc $n \geq 21$.

<u>Exercice 79 :</u> Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher :

4 jetons blancs marqués 0 ;
3 jetons rouges marqués 7 ;
2 jetons blancs marqués 2 ;
1 jeton rouge marqué 5.
1. On tire simultanément 4 jetons du sac. Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. On suppose que tous les tirages sont équiprobables, et on considère les évènements suivants : A « Les quatre numéros sont identiques ». B « Avec les jetons tirés, on peut former le nombre 2000 ».
C : « Tous les jetons sont blancs ».
D : « Tous les jetons sont de la même couleur ».
E : « Au moins un jeton porte un numéro différent des autres ».
a) Montrer que la probabilité de l'évènement B est $\frac{4}{105}$.
b) Calculer la probabilité des évènements A, C, D, E.
c) On suppose que l'évènement C est réalisé, calculer alors la probabilité de l'évènement B.
3. On établit la règle de jeu suivante :
− Si le joueur peut former 5 000, il gagne 75 F.
− Si le joueur peut former 7 000, il gagne 50 F.
− Si le joueur peut former 2 000, il gagne 20 F.
− Si le joueur peut former 0 000, il perd 25 F.
− Pour tous les autres tirages, il perd 5 F.
G est la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Établir la loi de probabilité de G et calculer l'espérance mathématique de G.

<u>Correction :</u>

1. $C_{10}^4 = 210$.
2.
a) Montrons que la probabilité de l'évènement B est $\frac{4}{105}$: Pour faire 2000 il faut tirer 1 blanc n°2 parmi 2 et 3 blancs n°0 parmi 4, soit 8 possibilités. La probabilité de l'évènement B est $p(B) = \frac{8}{210} = \frac{4}{105}$.
b) Calculons la probabilité des évènements A, C, D, E : A : 4 blancs 0 parmi 4 : $p(A) = \frac{1}{210}$; C : 4 blancs parmi 6, soit $p(C) = \frac{C_6^4}{210} = \frac{15}{210} = \frac{1}{14}$; D : 4 blancs parmi 6 ou 4 rouges parmi 4, soit $p(D) = \frac{15}{210} + \frac{1}{210} = \frac{8}{105}$; E : événement contraire : tous les jetons ont le même numéro, soit A ; $p(E) = 1 - p(A) = \frac{209}{210}$.
c) Calculons la probabilité de l'évènement B sachant que l'évènement C soit réalisé : Le fait que C soit réalisé limite les tirages possibles à 15 ; on a alors $p_C(B) = \frac{8}{15}$.
3. Établissons la loi de probabilité de G et calculons l'espérance mathématique de G :

G	-25	-5	20	50	75
p_G	$\frac{1}{210}$	$\frac{210-1-8-12-4}{210} = \frac{185}{210}$	$\frac{8}{210}$	$\frac{3 \times 4}{210}$	$\frac{1 \times 4}{210}$

$E(G) = \frac{-25}{210} + \frac{-5\times185}{210} + \frac{20\times8}{210} + \frac{50\times12}{210} + \frac{75\times4}{210} = \frac{110}{210} \approx 0{,}52$.

<u>Exercice 80 :</u> Une machine A fabrique des ampoules dans la proportion de 30 %. Une machine B fabrique des ampoules dans la proportion de 50 %. Une machine C fabrique des ampoules dans la proportion de 20 %. La fiabilité de A est 0,95 (95 % des ampoules venant de A sont bonnes). La fiabilité de B est 0,97 (97 % des ampoules venant de B sont bonnes). La fiabilité de C est 0,96 (96 % des ampoules venant de C sont bonnes). On prélève une ampoule au hasard provenant de l'une des machines

1. Trouver la probabilité qu'une ampoule soit bonne (à 10^{-3} près).
2. Trouver la probabilité qu'une ampoule bonne provienne de A (à 10^{-3} près).

<u>Correction :</u>

1. $p(\mathrm{b}) = p(\mathrm{b} \cap \mathrm{A}) + p(\mathrm{b} \cap \mathrm{B}) + p(\mathrm{b} \cap \mathrm{C}) = p(\mathrm{A}).p_{\mathrm{A}}(\mathrm{b}) + p(\mathrm{B}).p_{\mathrm{B}}(\mathrm{b}) + p(\mathrm{C}).p_{\mathrm{C}}(\mathrm{b}) = 0{,}962$.
2. $p_{\mathrm{b}}(\mathrm{A}) = \frac{p(\mathrm{b}\cap\mathrm{A})}{p(\mathrm{b})} = \frac{0{,}30\times0{,}95}{0{,}962} = 0{,}296$.

Statistiques

Louange à Allah et que la prière et le salut soient sur le serviteur et Messager d'Allah, Muhammad, le meilleur que l'humanité est porté (malheur à ceux qui l'ont insultés et mentis sur lui.), sa famille et ses Compagnons.
Gloire à Dieu, mon Maitre Qui m'a tout donné et continue à me donner. Je n'ai de savoir de ce qu'Allah (soub hana wat tala), Le Tout Miséricordieux m'avait offert.
Seigneur pardonne nos péchés, fais-nous miséricorde, accepte nos bonnes œuvres et bénit nos actions. Ta parole est véridique.
Louange à Allah, Qui de Sa Grace, j'avais pu proposer cette œuvre Qui sans Lui, je ne serais pas à ce niveau. « Gloire et pureté à Toi, ô Allah, et à Toi la louange. Que ton Nom soit béni et Ta Majesté soit élevée, et il n'y a pas d'autre divinité [digne d'adoration] en dehors de Toi »

ALLAH MERCI

Auteur Moussa Abdoulaye Diallo

SMS 90 10 89 59

Statistiques

Cours :

3. **Série statistique simple :**

Une *population* est l'ensemble des *individus* sur lesquels on recueille une ou plusieurs informations. Le *caractère* (ou *variable statistique*) étudié peut être *qualitatif* ou *quantitatif*. On se limite à l'étude de caractères *discrets*, c'est-à-dire ne présentant qu'un nombre fini de *modalités* (valeurs prises par le caractère).

1. **Définitions :**

☒ **Soit Ω une population d'effectif N. Soit x (ou y) le caractère étudié et soient $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ les modalités de x.**
Soit n_i l'effectif des individus de Ω présentant la modalité x_i avec $1 \leq i \leq p$ et $\mathrm{N} = \sum_{i=1}^{p} n_i$.
L'ensemble des couples $(x_i;\ n_i)$ est une série statistique simple (série statistique décrivant le caractère x).
La fréquence de chaque modalité x_i est le nombre $f_i = \frac{n_i}{\mathrm{N}} = \frac{n_i}{\sum_{i=1}^{p} n_i}$.

☒ **Soit X un caractère quantitatif.**
La valeur moyenne de la série statistique ou moyenne, est le nombre $\bar{x}$ défini par $\bar{\mathrm{X}} = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{p} n_i\, x_i$ ou encore par $\bar{\mathrm{X}} = \sum_{i=1}^{p} f_i\, x_i$.

☒ **La variance de la série est le nombre V(X), défini par : $\mathrm{V(X)} = \frac{1}{\mathrm{N}}\left[\sum_{i=1}^{p} n_i\,(x_i - \bar{\mathrm{X}})^2\right]$ ou encore par $\mathrm{V(X)} = \sum_{i=1}^{p} f_i\,(x_i - \bar{\mathrm{X}})^2$.**
L'écart-type de la série statistique est le nombre noté $\sigma(\mathrm{X})$, défini par $\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{\mathrm{V(X)}}$.

2. **Théorèmes :**

☒ **Pour tout nombre réel a, on a**
$\mathrm{V(X)} = \sum_{i=1}^{p} f_i\,(x_i - a)^2 - (\bar{\mathrm{X}} - a)^2$ **ou**
$\mathrm{V(X)} = \sum_{i=1}^{p} f_i\, x_i^2 - \bar{\mathrm{X}}^2 = \frac{1}{\mathrm{N}}\left(\sum_{i=1}^{p} n_i\, x_i^2\right) - \bar{\mathrm{X}}^2$.

☒ **Pour tous réels a et b, $\overline{a\mathrm{X} + b} = a\bar{\mathrm{X}} + b$**
$$\mathrm{V}(a\mathrm{X} + b) = a^2\mathrm{V(X)}$$

4. **Série statistique double :**

Soit Ω une population d'effectif n. Sur Ω on étudie deux caractères quantitatifs X et Y. Chaque individu de Ω sera désigné par un nombre compris entre 1 et n. A chaque individu i, $1 \leq i \leq n$, on associe le couple $(x_i;\ y_i)$ formé de la modalité de X et de la modalité de Y présentées par l'individu i.
L'ensemble des couples $(x_i;\ y_i)_{1\leq i\leq n}$ décrit le couple (X, Y) de caractère sur Ω.

1. **Nuage de points :**

☒ **Dans un repère orthogonal, on place les points $\mathrm{M}_i(x_i;\ y_i)$, $1 \leq i \leq n$ dont les coordonnées sont les modalités présentées par l'individu i pour les caractères X et Y. On obtient ainsi un nuage de n points qui constitue la représentation graphique du couple (X, Y) dans le repère choisi.**

☒ **Dans un repère orthogonal, l'ensemble des points M_i de coordonnées $(x_i; y_i)$ (avec $1 \leq i \leq n$) est appelé le nuage de points associé à cette série statistique à deux variables.**

Remarque :

- **Lorsqu'on étudie une série chronologique, on préfère parfois considérer le rang de l'année, plutôt que l'année elle-même. Cela permet de simplifier les calculs.**
- **Lorsqu'on dessine un nuage de points, on prend souvent comme origine un point judicieusement choisi, différent du point de coordonnées (0 ; 0). Cela permet de visualiser "au mieux" le nuage.**
- **En général, on choisit pour ce type de représentation un repère orthogonal (plutôt qu'orthonormal), toujours dans le but d'avoir un dessin clair devant les yeux.**

Lorsque l'échelle n'est pas imposée par l'énoncé, il faudra donc être capable de choisir cette dernière, de manière à ce que tous les points du nuage soient présents sur le graphique.

- **Il est primordial d'être capable d'obtenir un nuage de points donné sur la calculatrice.**

2. **Point moyen d'un nuage de points :**

On appelle point moyen d'un nuage de points représentant une série statistique, le point G de coordonnées $\mathrm{G}(\mathrm{X_G};\ \mathrm{Y_G})$ telles que
$\mathrm{X_G} = \bar{\mathrm{X}} = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{n} x_i$ **et** $\mathrm{Y_G} = \bar{\mathrm{Y}} = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{n} y_i$.

3. **Covariance :**

Etant donnée la série statistique double $(x_i;\ y_i)_{1\leq i\leq n}$ décrivant l'étude simultanée des caractères X et Y de moyennes respectives $\bar{\mathrm{X}}$ et $\bar{\mathrm{Y}}$, on appelle convariance de cette série double, notée cov(X, Y) le nombre réel défini par
$\mathrm{cov(X, Y)} = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{n} n_{ij}(x_i - \bar{\mathrm{X}})\,(y_i - \bar{\mathrm{Y}})$ **ou**
$\mathrm{cov(X, Y)} = \left[\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{n} n_{ij} x_i\, y_i\right] - \bar{\mathrm{X}}.\bar{\mathrm{Y}}$.

5. **Méthode des moindres carrés :**

☒ **Etant donné n points représentant dans un repère une série double $(x_i;\ y_i)_{1\leq i\leq n}$. (on cherche à ajuster une droite au nuage de points.**
Soit $\mathrm{D}_{(a,b)}$ la droite d'équation $y = ax + b$ dans le repère choisi. A chaque point $\mathrm{M}_i(x_i;\ y_i)$, on associe le point $\mathrm{N}_i(x_i;\ ax_i + b)$ de $\mathrm{D}_{(a,b)}$ ayant même abscisse que M_i. On veut rendre minimale la somme des distances $\mathrm{M}_i\mathrm{N}_i$, c'est-à-dire la somme des valeurs absolues $|y_i - ax_i - b|$. Par commodité de calcul, on choisit plutôt de rendre minimale la

somme carrées $(y_i - ax_i - b)^2$, c'est-à-dire la somme des $(M_iN_i)^2$:
$S = \sum_{i=1}^{n}(M_iN_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}[y_i - (ax_i + b)]^2$.

☒ On appelle droite d'ajustement (ou droite de régression de y en x) par la méthode des moindres carrés la droite $D_{(a,b)}$ la droite d'équation $y = ax + b$ telle que la somme $S = \sum_{i=1}^{n}[y_i - (ax_i + b)]^2$ soit minimale.

<u>Remarque :</u> les distances M_1N_1, M_2N_2, etc. sont appelés les <u>résidus</u>. On cherche à minimiser la somme des carrés des résidus.

La méthode des moindres carrés permet non seulement de réaliser un bon ajustement, mais encore d'en mesurer la validité par le calcul du coefficient de corrélation linéaire.

3. <u>Equation de la droite de régression de y en x :</u>

La droite (d) de régression de y en fonction de x passe par le point $G(\overline{X};\ \overline{Y})$. Son équation est
$y = ax + b$ où $a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = \frac{\text{cov}(X,Y)}{V(X)}$ et $b = \overline{Y} - a\overline{X}$.

4. <u>Equation de la droite de régression de x en y:</u>

La droite (d') de régression de x en fonction de y passe par le point $G(\overline{X};\ \overline{Y})$. Son équation est
$x = a'x + b'$ où $a' = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2} = \frac{\text{cov}(X,Y)}{V(Y)}$ et $b' = \overline{X} - a\overline{Y}$.

6. <u>Coefficient de corrélation linéaire :</u>

Pour une série double $(x_i;\ y_i)$, un ajustement affine sera d'autant plus justifié que le nuage de points sera proche de l'alignement. Il sera alors possible de faire des prévisions acceptables. Nous allons donc chercher un critère permettant de mesurer la qualité d'un ajustement affine. La dispersion du nuage de points auteur de la droite de régression se mesure par la somme des carrés des résidus :
$S = \sum_{i=1}^{n}(M_iN_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}[y_i - (ax_i + b)]^2$ où
$S = n\sigma_y^2\left[1 - \left(\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}\right)^2\right]$. Posons $r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}$ alors

$$S = n\sigma_y^2(1 - r^2)$$

1. <u>Définitions :</u>

☒ Deux variables statistiques X et Y sont dites en <u>corrélation linéaire</u> lorsque la courbe de régression de Y en X et la courbe de régression de X en Y sont des droites.

☒ on appelle coefficient de corrélation linéaire du couple $(x_i;\ y_i)$, le nombre réel défini par :
$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y} = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)}.\sqrt{V(Y)}} = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X).V(Y)}} \Leftrightarrow r^2 = a \times a'$.

2. <u>Propriétés :</u>

On a vu que $S = n\sigma_y^2(1 - r^2)$. Or S est une somme de carrés, c'est donc un nombre positif, donc $1 - r^2 \geq 0$, et par conséquent $r^2 \leq 1$ et $|r| \leq 1$.

☒ Alors le signe de r dépend de celui de $\text{cov}(X,Y)$.

☒ Ainsi le coefficient de corrélation linéaire r est toujours compris entre -1 et 1. Il a le même signe que le coefficient directeur de la droite de régression

☒ Si $0,87 \leq |r| \leq 1$ alors la corrélation linéaire entre les deux (2) variables est forte. Ainsi les droites d'ajustement sont peu distinctes et le nuage de points est susceptible d'un ajustement affine satisfaisant.

☒ Si $-1 \leq |r| \leq 0,75$ alors la corrélation linéaire entre les deux (2) variables est faible. Le nuage de points n'est pas susceptible d'un ajustement affine satisfaisant, mais il se peut qu'une autre courbe simple (parabole, hyperbole, …) permette un bon ajustement.

☒ Si $r = 1$ alors la corrélation linéaire entre les deux (2) variables est parfaite.

Méthode de calcul :

<u>Comment calculer les variables d'une série statistique ?</u>

Compléter le tableau ci-dessous si $n_i = 1$

	x_i	y_i	x_iy_i	x_i^2	y_i^2
	x_1	y_i	x_1y_1	x_1^2	y_1^2
	…	…	…	…	…
	x_n	y_n	x_ny_n	x_n^2	y_n^2
Total	$\sum_{i=1}^{n} x_i$	$\sum_{i=1}^{n} y_i$	$\sum_{i=1}^{n} x_iy_n$	$\sum_{i=1}^{n} x_i^2$	$\sum_{i=1}^{n} y_i^2$

$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i$; $\overline{Y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} y_i$; $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$;

<u>Comment déterminer par la méthode des moindres carrés l'équation de la droite de régression de y en x ?</u>

On procède à calculer :

☒ Variance de X : $V(X) = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{7} n_i x_i^2\right) - \overline{X}^2$

☒ Covariance :

$\text{cov}(X,Y) = \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} n_{ij}x_i\,y_i\right] - \overline{X}.\overline{Y}$

☒ Coefficient de la droite :

$a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = \frac{\text{cov}(X,Y)}{V(X)}$ et $b = \overline{Y} - a\overline{X}$.

☒ Equation de la droite : $y = ax + b$

<u>Comment déterminer par la méthode des moindres carrés l'équation de la droite de régression de x en y ?</u>

On procède à calculer :

☒ Variance de Y : $V(Y) = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{7} n_i y_i^2\right) - \overline{Y}^2$

☒ Covariance :

$\text{cov}(X,Y) = \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} n_{ij}x_i\,y_i\right] - \overline{X}.\overline{Y}$

☒ Coefficient de la droite :

$a' = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2} = \frac{\text{cov}(X,Y)}{V(Y)}$ et $b' = \overline{X} - a'\overline{X}$.

☒ Equation de la droite : $x = a'y + b'$

<u>Exercice 1 :</u> On donne la série statistique suivante :

x_i	-2	-2	3	3
y_i	2	-2	3	-3

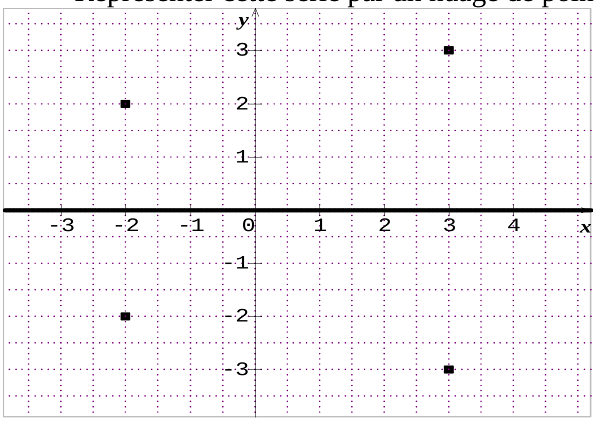
1. **Calculer $\overline{x}$ et $\overline{y}$ les moyennes respectives de x_i et de y_i.**
En déduire les coordonnées du point moyen G
2. **Représenter cette série par un nuage de points. Sans calculatrice, calculer le coefficient de corrélation linéaire et commenter le résultat.**

<u>Correction :</u> N = 4 ; $n_i = 1$.

	x_i	y_i	x_iy_i	x_i^2	y_i^2
	-2	2	-4	4	4
	-2	-2	4	4	4
	3	3	9	9	9
	3	-3	9	9	9
Total	2	0	0	26	26

i. $\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{4} x_i = \frac{2}{4} = 0{,}5$ **et** $\overline{\boldsymbol{y}} = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{4} y_i = 0$.
Les coordonnées du point moyen G$(0{,}5;\ 0)$

ii. Représenter cette série par un nuage de points.



Comme $\mathrm{cov}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \left[\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{4} n_{ij}x_i\, y_i\right] - \overline{\mathrm{x}}.\overline{\mathrm{y}} = \frac{0}{4} - 0{,}5 \times 0 = 0$ alors le coefficient de corrélation linéaire $r = 0$ donc il n'y a aucune corrélation entre les 2 séries.

<u>Exercice 2 :</u> La taille (en cm) moyenne d'un jeune enfant est donnée, en fonction de son âge (en mois), au 06/02/2014 dans le tableau suivant :

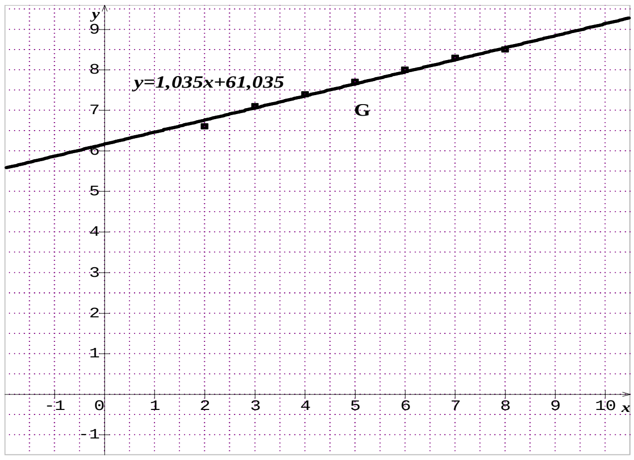
Age (x_i)	**6**	**9**	**12**	**15**	**18**	**21**	**24**
Taille (y_i)	**66**	**71**	**74**	**77**	**80**	**83**	**85**

1. **Calculer $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ les moyennes respectives de (x_i) et de (y_i).**
2. **En déduire les coordonnées du point moyen G.**
3. **Représenter le nuage de points associés à cette série statistique. (unité : 1 cm pour 3 mois en abscisse et 1 cm pour 10 taille en ordonnée).**
4. **Déterminer par la méthode des moindres carrés l'équation la droite (d) de régression de y en x. Représenter graphique (d).**
5. **Montrer que la droite de régression de x en y est d'équation $x = 0{,}948y - 57{,}58$.**
6. **Calculer le coefficient de corrélation r et interpréter ce résultat.**
7. **Quelle serait son âge à la date du 09/02/2014 ? en déduire à cette date sa taille en cm.**
8. **Quelle serait son âge s'il aura fait 1m ?**

<u>**Correction :**</u> 06/02/2014
L' âge (en mois) (x_i) ;
La taille (en cm) moyenne (y_i) ; N = 7 ; $n_i = 1$.

	x_i	y_i	x_iy_i	x_i^2	y_i^2
	6	66	396	36	4356
	9	71	639	81	5041
	12	74	888	144	5476
	15	77	1155	225	5929
	18	80	1440	324	6400
	21	83	1743	441	6889
	24	85	2040	576	7225
Total	105	536	8301	1827	41316

1. $\overline{\mathrm{X}} = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{7} x_i = \frac{105}{7} = 15$ et
$\overline{\mathrm{Y}} = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{7} y_i = \frac{536}{7} = 76{,}57$.
2. Coordonnées du point moyen **G**$(15;\ 76{,}57)$
3. **Représentation du nuage de points.**



4. **l'équation la droite de régression de y en x.**
- **Variance de X :** $\sum_{i=1}^{7} n_i\, x_i^2 = 1827$
$\mathrm{V(X)} = \frac{1}{\mathrm{N}}\left(\sum_{i=1}^{7} n_i\, x_i^2\right) - \overline{\mathrm{X}}^2 = \frac{1827}{7} - (15)^2 = 36$
- **Covariance :** $\sum_{i=1}^{7} n_{ij}x_i\, y_i = 8301$
$\mathrm{cov(X,Y)} = \left[\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{7} n_{ij}x_i\, y_i\right] - \overline{\mathrm{X}}.\overline{\mathrm{Y}} = \frac{8301}{7} - 15 \times 76{,}57 = 37{,}307$
- **Coefficient de la droite :** $a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = \frac{\mathrm{cov(X,Y)}}{\mathrm{V(X)}}$
$a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = \frac{\mathrm{cov(X,Y)}}{\mathrm{V(X)}} = \frac{37{,}307}{36} = 1{,}036$ et
$b = \overline{\mathrm{Y}} - a\overline{\mathrm{X}} = 76{,}57 - 1{,}036 \times 15 = 61{,}03$.
- **Equation de la droite :** $\mathrm{y} = 1{,}036x + 61{,}03$

5. $\mathrm{V(Y)} = \frac{1}{\mathrm{N}}\left(\sum_{i=1}^{7} y_i^2\right) - \overline{\mathrm{Y}}^2 = \frac{41316}{7} - (76{,}57)^2 = 39{,}32$, donc $a' = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2} = \frac{\mathrm{cov(X,Y)}}{\mathrm{V(Y)}} = \frac{37{,}307}{39{,}32} = 0{,}948$ et

$b' = \overline{\mathrm{X}} - a'\overline{\mathrm{Y}} = 15 - 0{,}948 \times 76{,}57 = -57{,}58$ d'où la droite de régression de x en y est $x = 0{,}948y - 57{,}58$.

6. coefficient de corrélation r et l'interpréter :

$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y} = \frac{\mathrm{cov(X,Y)}}{\sqrt{\mathrm{V(X)}}.\sqrt{\mathrm{V(Y)}}} = \frac{37{,}307}{\sqrt{36\times39{,}32}} = 0{,}9915$ alors on remarque que $0{,}87 < r < 1$ alors la corrélation linéaire entre les deux (2) variables est forte. Ainsi les droites d'ajustement sont peu distinctes et le nuage de points est susceptible d'un ajustement affine satisfaisant.

7. âge à la date du 09/02/2014 :

À cette date il aura fait 3 $jours = \frac{3}{28} = 0{,}107\ mois$ et **sa taille** est $\mathrm{y} = 1{,}036 \times 0{,}107 + 61{,}03 = 61{,}14$ cm.

8. son âge s'il aura fait 1m :

$1\ \mathrm{m} = 100\ \mathrm{cm} \Leftrightarrow x = 0{,}948 \times 100 - 57{,}58 = 37{,}22$ donc il aura $37\ mois + 0{,}22 \times 30\ jours$.

<u>Exercice 3 :</u> Les dépenses x_i et les chiffres d'affaires y_i bimensuels d'une grande entreprise ont donné en 2014 la nomenclature suivante, après une étude statistique ; les montants étant exprimés en dizaines de millions de francs CFA. On considère la série statistique suivante où α et β sont deux (2) nombres entiers naturels.

x_i	**40**	**50**	α	**80**	**90**
y_i	**165**	**172**	**182**	**180**	**190**
x_i	**120**	β	**150**	**180**	
y_i	**194**	**183**	**188**	**193**	

1.

a) Sachant que la moyenne de x_i est 100 et leur écart type $\sigma_x = \frac{20\sqrt{46}}{3}$, calculer α et β.

b) Construire le nuage de points (unité : 1 cm pour 100 dépenses en abscisse et 1 cm pour 100 chiffres d'affaires en ordonnée).

2. On suppose que $\alpha = 60$ et $\beta = 130$.

a) Déterminer par la méthode des moindres carrés l'équation la droite (d) de régression de y en x. Représenter graphique (d).

b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire r de cette série statistique. Que peut-on déduire ?

c) Quelle est en deux (2) mois le chiffre d'affaires si la dépense bimensuelle est de 300 millions F ?

<u>Correction :</u> Les dépenses x_i et les chiffres d'affaires y_i bimensuels

1. $n_i = 1$

a) $\sum_{i=1}^{9} x_i = 710 + \alpha + \beta$

$\overline{\mathrm{X}} = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{9} x_i = \frac{710+\alpha+\beta}{9} = 100 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 900 - 710 = 190$ et $\sigma_x = \sqrt{\mathrm{V(X)}} \Leftrightarrow \mathrm{V(X)} = \sigma_x^2$ or $\mathrm{V(X)} = \frac{1}{\mathrm{N}}\left(\sum_{i=1}^{9} x_i^2\right) - \overline{\mathrm{X}}^2 = \frac{87900+\alpha^2+\beta^2}{9} - (100)^2 = \frac{77900+\alpha^2+\beta^2}{9} = \left(\frac{20\sqrt{46}}{3}\right)^2 \Leftrightarrow -2100 + \alpha^2 + \beta^2 = 18400 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 18400 + 2100 = 20500$ or $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta$ donc $\begin{cases} \alpha + \beta = 190 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 20500 \end{cases} \Leftrightarrow$

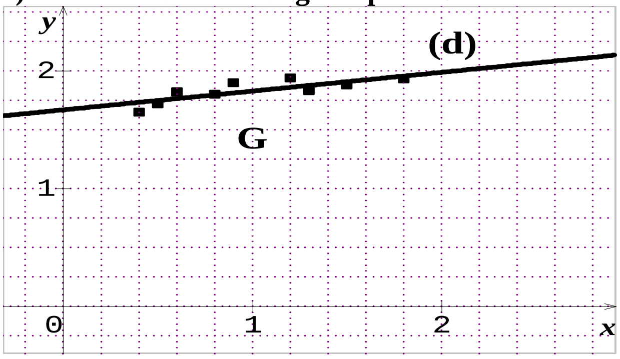
$\begin{cases} \alpha + \beta = 190 \\ (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = 20500 \end{cases}$ Posons

$\begin{cases} \alpha + \beta = \mathrm{S} = 190 \text{ et } \mathrm{P} = \alpha\beta \\ \mathrm{S}^2 - 2\mathrm{P} = 20500 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{S} = 190 \\ \mathrm{P} = 7800 \end{cases}$

$\mathrm{X}^2 - 190\mathrm{X} + 7800 = 0$, $\Delta = (190)^2 - 4 \times 7800 =$ $\Delta = 4900 = (70)^2$; $\mathrm{X}' = 60$ ou $\mathrm{X}'' = 130$

Comme les $\boldsymbol{x_i}$ sont rangés dans l'ordre croissant donc $\boldsymbol{\alpha} = 60$ et $\boldsymbol{\beta} = 130$.

b) Construire le nuage de points.



2. On suppose que $\alpha = 60$ et $\beta = 130$.

a) l'équation la droite de régression de y en x.

	x_i	y_i	x_iy_i	x_i^2	y_i^2
	40	165	6600	1600	27225
	50	172	8600	2500	29584
	60	182	10920	3600	33124
	80	180	14400	6400	32400
	90	190	17100	8100	36100
	120	194	23280	14400	37636
	130	183	23790	16900	33489
	150	188	28200	22500	35344
	180	193	34740	32400	32400
Total	900	1647	167630	108400	302151

- $\overline{\mathrm{X}} = 100$ et $\overline{\mathrm{Y}} = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{9} y_i = \frac{1647}{9} = 183$
- **Variance de X :** $\sum_{i=1}^{9} x_i^2 = 108400$

$\mathrm{V(X)} = \frac{1}{\mathrm{N}}\left(\sum_{i=1}^{9} x_i^2\right) - \overline{\mathrm{X}}^2 = 2044{,}44$

- **Covariance :** $\sum_{i=1}^{9} x_i\, y_i = 167630$

$\mathrm{cov(X,Y)} = \left[\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{9} x_i\, y_i\right] - \overline{\mathrm{X}}.\overline{\mathrm{Y}} = 325{,}55$

- **Coefficient de la droite :** $a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = \frac{\mathrm{cov(X,Y)}}{\mathrm{V(X)}}$

$a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = \frac{\mathrm{cov(X,Y)}}{\mathrm{V(X)}} = \frac{325{,}55}{2044{,}44} = 0{,}1592$ et

$b = \overline{\mathrm{Y}} - a\overline{\mathrm{X}} = 183 - 0{,}1592 \times 100 = 167{,}08$.

Equation de la droite : $\mathrm{y} = 0{,}1592x + 167{,}08$

b) $\mathrm{V(Y)} = \frac{1}{\mathrm{N}}\left(\sum_{i=1}^{9} y_i^2\right) - \overline{\mathrm{Y}}^2 = 83{,}33$

$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y} = \frac{325{,}55}{\sqrt{2044{,}44\times83{,}33}} = 0{,}7887$ la corrélation linéaire entre les deux (2) variables est moins forte. Ainsi les droites d'ajustement sont peu distinctes et le nuage de points est susceptible d'un ajustement affine satisfaisant.

c) $y = 0{,}1592 \times 30 + 167{,}08 = 171{,}856$ **millions F**

Exercice 4 : **Le tableau suivant donne la consommation nigérienne de mil en pourcentage (%) pour la période de 2009 à 2013.**

Année (x_i)	**2009**	**2010**	**2011**	**2012**	**2013**
% (y_i)	**11,6**	**12**	**12,8**	**13,4**	**14,1**

1. **Calculer $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ les moyennes respectives de (x_i) et de (y_i).**
2. **En déduire les coordonnées du point moyen G.**
3. **Déterminer par la méthode des moindres carrés l'équation la droite de régression de y en x.**
4. **Justifier l'opportunité d'un ajustement linéaire par le calculer le coefficient de corrélation r.**
5. **Si l'évolution se produit de la même façon, donner estimation de la consommation nigérienne de mil en pourcentage (%) en 2014 ?**

Correction :

Consommation nigérienne de mil en x_i (%) ;
Année y_i ; N = 5 ; $n_i = 1$.

	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2
	2009	11,6	23304,4	4036081	134,56
	2010	12	24120	4040100	144
	2011	12,8	25740,8	4044121	163,84
	2012	13,4	26960,8	4048144	179,56
	2013	14,1	28383,3	4052169	198,8
T	10055	63,9	128509,3	20220615	820,77

1. $\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{5} x_i = \frac{10055}{5} = 2011$ et

$\bar{Y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{5} y_i = \frac{63{,}9}{5} = 12{,}78$.

2. Coordonnées du point moyen **G**$(2011;\ 12{,}787)$

3. **l'équation la droite de régression de y en x.**

- **Variance de X :** $\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 20220615$

$V(X) = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{5} x_i^2\right) - \bar{X}^2 = 2$

- **Covariance :** $\sum_{i=1}^{5} n_{ij} x_i\, y_i = 128509{,}3$

$\mathrm{cov}(X, Y) = \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{5} n_{ij} x_i\, y_i\right] - \bar{X}.\bar{Y} = 1{,}28$

- **Coefficient de la droite :** $a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{V(X)}$

$a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{V(X)} = \frac{1{,}28}{2} = 0{,}64$ et

$b = \bar{Y} - a\bar{X} = 12{,}78 - 0{,}64 \times 2011 = -1274{,}26$.

- **Equation de la droite :** $y = 0{,}64x - 1274{,}26$

4. **Variance deY :** $\sum_{i=1}^{5} y_i^2 = 820{,}77$

$V(Y) = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{5} y_i^2\right) - \bar{Y}^2 = 0{,}8256$;

$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)}.\sqrt{V(Y)}} = \frac{1{,}28}{\sqrt{2 \times 0{,}8256}} = 0{,}996$ alors on remarque que $0{,}87 < r < 1$ alors la corrélation linéaire entre les deux (2) variables est forte. Ainsi les droites d'ajustement sont peu distinctes et le nuage de points est susceptible d'un ajustement affine satisfaisant.

5. L'estimation de la consommation nigérienne de mil en pourcentage (%) en 2014 est de $y = 0{,}64 \times 2014 - 1274{,}26 = 14{,}7$ %.

Exercice 5 : **Le tableau suivant donne la production de l'uranium nigérien en pourcentage (%) pour la période de 1960 à 1980.**

Année (x_i)	**1960**	**1965**	**1970**	**1975**	**1980**
% (y_i)	**11,6**	**12**	**12,8**	**13,4**	**14,1**

1. **Ecrire une nouvelle série statistique en posant $x'_i = \frac{x_i - 1970}{5}$ et $y'_i = y_i - 12{,}8$.**
2. **Calculer la covariance de la série $(x'_i;\ y'_i)$.**
3. **Calculer le coefficient de corrélation r' de la série $(x'_i;\ y'_i)$.**
4. **Calculer $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ les moyennes.**
5. **Déterminer par la méthode des moindres carrés l'équation la droite de régression de y en x**
6. **Si l'évolution se produit de la même façon, donner estimation de cette production en pourcentage (%) en 2014 ?**

Correction :

1. **posant $x'_i = \frac{x_i - 1970}{5}$ et $y'_i = y_i - 12{,}8$.**

Année x'_i	-2	-1	0	1	2
% y'_i	-1,2	-0,8	0	0,6	1,3

2. **Calculer la covariance de la série $(x'_i;\ y'_i)$.**

	x'_i	y'_i	$x'_i y'_i$	x'^2_i	y'^2_i
	-2	-1,2	2,4	4	1,44
	-1	-0,8	0,8	1	0,64
	0	0	0	0	0
	1	0,6	0,6	1	0,36
	2	1,3	2,6	4	1,69
Total	0	-0,1	6,4	10	4,13

$\bar{X}' = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{5} x'_i = \frac{0}{5} = 0$ et $\bar{Y}' = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{5} y'_i = -0{,}02$.

Covariance : $\sum_{i=1}^{5} n_{ij} x'_i\, y'_i = 6{,}4$

$\mathrm{cov}(X', Y') = \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{5} n_{ij} x'_i\, y'_i\right] - \bar{X}'.\bar{Y}' = 1{,}28$.

3. **coefficient de corrélation r' de $(x'_i;\ y'_i)$.**

$V(X') = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{5} x'^2_i\right) - \bar{X}'^2 = 2$;

$V(Y') = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{5} y'^2_i\right) - \bar{Y}'^2 = 0{,}8256$

$r' = \frac{\mathrm{cov}(X', Y')}{\sqrt{V(X')}.\sqrt{V(Y')}} = \frac{1{,}28}{\sqrt{2 \times 0{,}8256}} = 0{,}996$

4. $x'_i = \frac{x_i - 1970}{5} \Leftrightarrow \bar{x}'_i = \frac{\bar{x}_i - 1970}{5} \Leftrightarrow \bar{x}_i = 5\bar{x}'_i + 1970$ ou $\bar{x}_i = 1970$ **et** $y'_i = y_i - 12{,}8 \Leftrightarrow \bar{y}'_i = \bar{y}_i - 12{,}8 \Leftrightarrow \bar{y}_i = \bar{y}'_i + 12{,}8 = -0{,}02 + 12{,}8 = 12{,}78$.

5. $a = \frac{1}{5} \times \frac{\mathrm{cov}(X', Y')}{V(X')} = \frac{1}{5} \times \frac{1{,}28}{2} = 0{,}128$

$b = \bar{Y} - a\bar{X} = 12{,}78 - 0{,}128 \times 1970 = -239{,}38$

Equation de la droite : $y = 0{,}128x - 239{,}38$

6. $y = 0{,}128 \times 2014 - 239{,}38 = 18{,}412$ %.

Suites numériques

Louange à Allah et que la prière et le salut soient sur le serviteur et Messager d'Allah, Muhammad, le meilleur que l'humanité est porté (malheur à ceux qui l'ont insultés et mentis sur lui.), sa famille et ses Compagnons.
Gloire à Dieu, mon Maitre Qui m'a tout donné et continue à me donner. Je n'ai de savoir de ce qu'Allah (soub hana wat tala), Le Tout Miséricordieux m'avait offert.
Seigneur pardonne nos péchés, fais-nous miséricorde, accepte nos bonnes œuvres et bénit nos actions. Ta parole est véridique.
Louange à Allah, Qui de Sa Grace, j'avais pu proposer cette œuvre Qui sans Lui, je ne serais pas à ce niveau. « Gloire et pureté à Toi, ô Allah, et à Toi la louange. Que ton Nom soit béni et Ta Majesté soit élevée, et il n'y a pas d'autre divinité [digne d'adoration] en dehors de Toi »

ALLAH MERCI

Auteur Moussa Abdoulaye Diallo

SMS 90 10 89 59

SUITE NUMERIQUE

Cours :

I. suites arithmétiques

⌧ Une suite U_n est arithmétique si chaque terme se déduit du précédent par addition d'une constante réelle appelée raison et notée r.

$\forall\, r \in IR$ et $n \in IN$, $U_{n+1} = U_n + r$

⌧ Expression explicite de (U_n)

$$U_n = U_p + (n - p)r$$

r est la raison de (U_n) et du premier terme U_p

⌧ sens de variation

Une suite arithmétique est monotone : croissante lorsque r est positif, décroissante sinon, évidemment stationnaire lorsque sa raison est nulle.

- Si $r < 0$ alors (U_n) est décroissante
- Si $r = 0$ alors (U_n) est constante ou stationnaire
- Si $r > 0$ alors (U_n) est croissante.

⌧ Limites

- Si $r < 0$ alors $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} U_n = -\infty$
- Si $r = 0$ alors lors $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} U_n = U_p$
- Si $r > 0$ alors $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} U_n = +\infty$.

⌧ Convergence et divergente :

⌧⌧ Si (U_n) converge alors $r = 0$

⌧⌧ Toute suite arithmétique non constant est une suite divergente.

⌧ La somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale la moyenne arithmétique du premier et du dernier terme de la suite, multiplié par le nombre de termes.

$$S_{p,n} = U_p + U_1 + \cdots + U_n = \frac{U_p + U_n}{2} \times (n - p + 1).$$

II. suites géométriques

⌧ Une suite U_n est géométrique si chaque terme se déduit du précédent par multiplication d'une constante réelle appelée raison et notée q.

$\forall\, q \in IR$ et $n \in IN$, $U_{n+1} = qU_n$.

Expression explicite de S_n: $S_{n,p} = U_p + U_{p+1} + \cdots + U_n = U_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$, $q \neq 1$.

⌧ Expression explicite de U_n : $U_n = q^{n-p}U_p$.

⌧ Somme des termes consécutifs : S_n

$$S_{n,0} = U_0 + U_1 + \cdots + U_n = U_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q},\ q \neq 1.$$

⌧ sens de variation

Une suite géométrique est monotone que lorsque sa raison est positive : sa monotonie dépend ensuite de la position de sa raison par rapport à 1et du signe du premier terme : à étudier cas par cas.

⌧⌧⌧ Si $q < 0$ alors (U_n) n'est pas monotone

⌧⌧⌧ Si $q = 1$ alors (U_n) est constante

⌧⌧⌧ Si $U_p < 0$

- Si $0 < q < 1$ alors (U_n) est croissante
- Si $q > 1$ alors (U_n) est décroissante

⌧⌧⌧ Si $U_p > 0$

- Si $0 < q < 1$ alors (U_n) est décroissante
- Si $q > 1$ alors (U_n) est croissante

⌧ Limites

⌧⌧⌧ Si $q < -1$ alors (U_n) n'a pas de limite

⌧⌧⌧ Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} U_n = U_p$

⌧⌧⌧ Si $0 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} U_n = 0$

⌧⌧⌧ Si $q > 1$

- Si $U_p < 0$ alors $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} U_n = -\infty$
- Si $U_p > 0$ alors $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} U_n = +\infty$.

Si $q > 1$: $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} q^n = +\infty$.

Si $0 < q < 1$: $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} q^n = 0$.

Si $q \leq -1$: q^n n'a pas de limite.

⌧ Théorème de gendarmes : Supposons qu'à partir d'un rang $a_n \leq u_n \leq b_n$ et que $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} a_n = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} b_n = l$. Alors la suite (u_n) converge et sa limite est l.

⌧ Convergence

Si (U_n) converge alors $\begin{cases} -1 < q < 1 \\ \text{ou} \\ \text{si } q = 1 \end{cases}$ dans le cas contraire, elle est divergente.

III. Suites adjacentes :

☒ On dit que deux suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes lorsque (U_n) est croissante, (V_n) est décroissante et $lim(V_n - U_n) = 0$.

☒ Si deux suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes alors elles convergent et ont même limite ℓ. De plus, pour tout n, $U_n \leq \ell \leq V_n$.

IV. Convergence

☒ si une suite (U_n) est croissante et majorée, alors elle est convergente.

☒ si une suite (U_n) est décroissante et minorée, alors elle est convergente.

☒ si une suite (u_n) est croissante et non majorée, alors $lim\ u_n = +\infty$.

☒ si une suite (u_n) est décroissante et non minorée, alors $lim U_n = -\infty$.

☒ Soit une suite définie par une formule de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction numérique continue sur un intervalle I de IR tel que $\forall\, n \in$ IN $u_n \in$ I et si $(u_n)_{n\in IN}$ est convergente, alors sa limite lorsque n tend vers $+\infty$, est une solution de l'équation : $x \in$ IR, $f(x) = x$.

V. Raisonnement par récurrence

☒ Vocabulaire

Soit P(n) une proposition (quelque chose qu'on propose) qui dépend de l'entier n. On dit que P(n) est héréditaire si « *P(n) vraie ⇒ P(n +1) vraie* » : c'est-à-dire que P(n) est héréditaire, si lorsqu'on suppose que P(n) est vraie, alors forcément P(n+1) [le rang suivant] est vraie. Lorsque l'on suppose que P(n) est vraie, on parle d'hypothèse de récurrence.

☒ Principe raisonnement par récurrence.

(1) Soit P(n) une proposition qui dépend de l'entier naturel n.

(2) Si la proposition P(n) est vraie pour l'entier n_0.

(3) Si la proposition P(n) est héréditaire.

Alors, pour tout entier $n \geq n_0$, la proposition P(n) est vraie.

Méthodes de calcul sur les Suites Numériques.

Comment peut-on montrer qu'une suite est géométrique ?

☒ on montre que le quotient $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ est constant (c-à-d indépendant de n) ou encore qu'il existe un réel q (raison) indépendant de n tel que $U_{n+1} = qU_n$.

☒ si on échoue, on calcule le quotient $\frac{U_1}{U_0}$ pour connaître la raison, admettre le résultat et poursuivre le problème avec la bonne raison q…

Comment peut-on montrer qu'une suite est arithmétique ?

☒ on montre que la différence $U_{n+1} - U_n$ est constant (c-à-d indépendant de n) ou encore qu'il existe un réel r (raison) indépendant de n tel que $U_{n+1} - U_n = r$.

☒ si on échoue, on calcule la différence $U_1 - U_0$ pour connaître la raison, admettre le résultat et poursuivre le problème avec la bonne raison r…

Comment peut-on montrer qu'une suite est monotone

(u) est soit croissante ou constante ou décroissante ?

☒ étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ afin de le comparer à 0.

☒ si la suite (u) est strictement positive, alors comparer $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ à 1.

☒ Si (u) est définie par $\forall\, n \in$ IN $u_n = f(n)$ et f est monotone dans un intervalle du type $[n_0; +\infty[$, alors les variations de (u) sont celle de f.

☒ on le démontre aussi par récurrence.

Par exemple, on calcule les premiers termes de la suite pour conjecturer les variations de la suite.

Imaginons qu'ils soient rangés dans l'ordre décroissant, la proposition pourra s'écrire P(n) : «$u_{n+1} \geq u_n$ ».

Lorsque $u_{n+1} = f(n)$ pour tout $n \geq n_0$, f étant croissante sur un intervalle I contenant U_{n_0} et tel que *f*(I) est inclus dans I , on montre par récurrence que la suite est croissante lorsque $U_{n_0} \leq U_{n_{0+1}}$, décroissante lorsque $U_{n_0} \geq U_{n_{0+1}}$.

Comment calculer la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique ?

☒ La somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique est le produit de nombre de termes $(n-p+1)$ par la demi-somme des termes extrêmes :

$$S_n = U_p + U_{p+1} + \cdots + U_n = \frac{(n-p+1)(U_p+U_n)}{2} \text{ ou}$$

$$S_n = nombre\ de\ termes \times \frac{(1er\ terme+dernier\ terme)}{2}$$

Comment calculer la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique ?

☒ La somme des termes consécutifs d'une suite géométrique est

$$S_n = U_p + U_{p+1} + \cdots + U_n = U_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} \text{ avec } q \neq 1$$

est la raison de la suite géométrique et le nombre de termes $(n-p+1)$.

$$S_n = 1er\ terme \times \frac{1-(raison)^{nombre\ de\ termes}}{1-(raison)}.$$

Comment peut-on montrer qu'une suite converge ?

☒ si U_n est explicitement en fonction de n, on calcule directement la limite.

☒ si on a déjà prouvé qu'elle était minorée (par exemple $U_n \geq 0$), on vérifie qu'elle est décroissante.

☒ idem avec une suite croissante et majorée.

☒ si on a des encadrements dans l'exercice, on tente le théorème des gendarmes.

Comment peut-on calculer la limite d'une suite qui converge ?

☒ si U_n est explicite en fonction de n, on calcule directement la limite.

☒ si on a des encadrements dans l'exercice, on tente le théorème des gendarmes.

☒ Si la suite est de la forme $U_{n+1} = f(U_n)$, avec f continue et (U_n) convergente, on cherche la limite de f parmi les éventuels points fixe de f, c-à-d les solutions de f(L) = L.

Comment démontrer qu'une suite est majoré ou minoré ou bornée ?

☒ on peut procéder à des manipulations d'inégalités concernant le terme général U_n de la suite, de façon à obtenir des majorations et des minorations de ce terme.

☒ on peut aussi étudier le sens de variation de la suite. En particulier, quand la suite est définie sous forme $U_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur $[0;+\infty[$, on peut étudier les variations sur $[0;+\infty[$ et en déduire des renseignements sur la position des termes U_n.

☒ on peut également démontrer une inégalité vérifiée par le terme général U_n de la suite en utilisant un raisonnement par récurrence.

Comment démontrer par récurrence ?

On procède à trois (3) étapes :

☒ Initialisation : $\mathrm{P}(n_0)$ la propriété est vraie pour n_0.

☒ Hérédité : on suppose que la propriété $\mathrm{P}(k)$ est vraie (hypothèse de récurrence), pour un entier naturel k, tel que $k \geq n_0$ et montrer que la propriété $\mathrm{P}(k+1)$ est vraie.

☒ Conclusion : la propriété $\mathrm{P}(n)$ est vraie.

Comment peut-on montrer que 2 suites sont adjacentes ?

☒ deux suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes lorsque: l'une est croissante, l'autre est décroissante et $U_n - V_n$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

☒ deux suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes telles que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, alors, pour tout entier naturel n, on a $U_n \leq V_n$;

☒ Toute suite croissante et majorée est convergente; toute suite décroissante et minorée est convergente.

Exercices sur la suite numérique

Exercice 1 : **Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ $u_n = 3n$.**

1. **Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison et son premier terme.**
2. **Exprimer u_n et $S_{1,n}$ en fonction de n.**
3. **Calculer la somme : $3 + 6 + 9 + \cdots + 30003$.**
4. **Exprimer le produit $P_{1,n}$ en fonction de n.**

Correction : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$

1. $u_{n+1} = 3(n+1) = 3n + 3 = u_n + 3$.
$\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = 3$, d'où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $u_1 = 3$.
2. $S_{1,n} = \sum_{i=1}^{n} u_i = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (3 \times 1) + (3 \times 2) + \cdots + (3 \times n)$
$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $S_{1,n} = 3(1 + 2 + \cdots + n) = 3\,\frac{n(1+n)}{2}$.
3. **la somme : $3 + 6 + 9 + \cdots + 30003$:** ainsi $3 + 6 + 9 + \cdots + 30003 = 3(1 + 2 + 3 + \cdots + 10001)$. On déduit que $n = 10001$.
Donc : $S_{1,10001} = 3\,\frac{10001(1+10001)}{2} = 150045003$.
4. $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $P_{1,n} = \prod_{i=1}^{n} u_i = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n = (3 \times 1) \times (3 \times 2) \times \ldots \times (3 \times n)$
$P_{1,n} = \prod_{i=1}^{n} u_i = 3^n (1 \times 2 \times \ldots \times n) = 3^n n!$.

Exercice 2 : **Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par : $\forall\, n \in \mathrm{IN}^*$ $V_n = an + b$, où $(a, b) \in \mathrm{IR}^2$.**

1. **Montrer que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison.**
2. **Exprimer V_n et $S_{0,n}$ en fonction de n.**
3. **Calculer la somme $S'_{1,20}$ des 20 premiers nombres entiers naturels impairs.**
4. **En déduire la somme $S'_{1,n}$ des n premiers nombres entiers naturels impairs.**
5. **En déduire que la somme $S'_{1,n}$ diverge.**

Correction :

1. $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $V_{n+1} = a(n+1) + b = an + b + a = V_n + a$, d'où la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique de raison $r = a$ et de premier terme $V_1 = a + b$.
2. $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = a + b + (n-1)a = an + b$.
3. $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $S_{1,n} = V_1 + V_2 + \cdots + V_n = (a + b) + (a2 + b) + \cdots + (an + b)$
$\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $S_{1,n} = \frac{n[(a+b)+(an+b)]}{2} = \frac{n[a(n+1)+2b]}{2}$.
4. $S'_{1,20} = V_1 + V_3 + \cdots + V_{39}$
$S'_{1,20} = (a + b) + (a3 + b) + (a5 + b) + (a7 + b) + \cdots + (a39 + b)$
$S'_{1,20} = a(1 + 3 + 5 + \cdots + 39) + 20b$
$S'_{1,20} = a[1 + (2 \times 1 + 1) + (2 \times 2 + 1) + \cdots +$ *2×19+1+20b*
$S'_{1,20} = a[20 + 2(1 + 2 + \cdots + 19)] + 20b = a(20 + 20 \times 19) + 20b = 20a(20) + 20b$.
$$S'_{1,20} = 20(20a + b)$$
5. $S'_{1,n} = n(na + b)$
6. $lim S'_{1,n} = +\infty$; d'où $S'_{1,n}$ diverge.

Exercice 3 : **Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ $U_n = e^{-n}$.**

1. **Montrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.**
2. **Exprimer $S_{1,n}$ en fonction de n.**
3. **Calculer la somme $S'_{1,3}$ des 3 premiers nombres entiers naturels impairs.**
4. **En déduire la somme $S'_{1,n}$ des n premiers nombres entiers naturels impairs.**
5. **Montrer que $S'_{1,n}$ est une suite convergente.**

Correction : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ $U_n = e^{-n}$.

1. $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$ $U_{n+1} = e^{-(n+1)} = \frac{1}{e} e^{-n} = \frac{1}{e} U_n$. $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{e}$, d'où la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{e}$ et de premier terme $U_1 = \frac{1}{e} = \left(\frac{1}{e}\right)^1$.
2. $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $S_{1,n} = \sum_{i=1}^{n} U_i = U_1 + U_2 + \cdots + U_n = \left(\frac{1}{e}\right)^1 + \left(\frac{1}{e}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{e}\right)^n$
$\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $S_{1,n} = \sum_{i=1}^{n} U_i = \frac{1}{e}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{e}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{e}\right)^1}\right)$.
3. $S'_{1,3} = U_1 + U_3 + U_5 = \left(\frac{1}{e}\right)^1 + \left(\frac{1}{e}\right)^3 + \left(\frac{1}{e}\right)^5 = e^{-1} + e^{-3} + e^{-5}$.
$$S'_{1,3} = e^{-1}(1 + e^{-2} + e^{-3})$$
4. $S'_{1,n} = e^{-1}\left(1 + e^{-(n-1)} + e^{-n}\right)$
5. $lim S'_{1,n} = e^{-1}$; d'où $S'_{1,n}$ est une suite convergente.

Exercice 4 : **Moussa dispose d'un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Il note p_k la probabilité de l'évènement « le résultat du lancer est k ». Les nombres p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 et p_6 dans cet ordre sont six termes consécutifs d'une suite arithmétique.**

1. **Démontrer que :** $\forall\, k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, p_k = \frac{k}{21}$.
2. **Calculer** $\forall\, n \in \mathbb{N}^*\ S_{1,n} = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$
3. **On lance ce dé une fois. Déterminer la probabilité de l'événement suivant :**

A : « le chiffre obtenu est pair » ;
B : « le chiffre obtenu est supérieur ou égal à 3 » ;
C : « le chiffre obtenu est 3 ou 4 ».

Correction :

1. **Démontrons que :** $\forall\, k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $p_k = \frac{k}{21} \Leftrightarrow p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = \frac{1+2+3+4+5+6}{21} = \frac{21}{21} = 1$ et $p_2 = p_1 + r$; $p_3 = p_1 + 2r$; $p_4 = p_1 + 3r$; $p_5 = p_1 + 4r$ et $p_6 = p_1 + 5r$. On déduit en remplaçant dans $p(\Omega) = 1$, on aura $6p_1 + 15r = 1$ or $p_1 = r$ alors $p_1 = \frac{1}{21}$, ce qui est juste si $k = 1 \Leftrightarrow p_1 = \frac{1}{21}$. $\forall\, k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, p_k = \frac{k}{21}$.
2. probabilité de l'événement suivant :

A : « le chiffre obtenu est pair »
$p(\text{A}) = p_2 + p_4 + p_6 = \frac{2+4+6}{21} = \frac{4}{7}$

B : « le chiffre obtenu est supérieur ou égal à 3 »
$p(\text{B}) = p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = \frac{3+4+5+6}{21} = \frac{6}{7}$

C : « le chiffre obtenu est 3 ou 4 »
$p(\text{C}) = p_3 + p_4 = \frac{3+4}{21} = \frac{1}{3}$.

Exercice 5 : **Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite géométrique de raison strictement positive.**

1. **Calculer la raison de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ si : $81\, U_{14} = U_{10}$.**
2. **On désigne par $S_{1,n}$ la somme $U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n$. On suppose que l'on a : $\lim S_{1,n} = 2$. Calculer U_1.**

Correction : $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suite géométrique de $q > 0$.

1. $U_n = U_1 q^{n-1}$, alors $U_{10} = U_1 q^9$ et $U_{14} = U_1 q^{13}$, donc $81\, U_{14} = U_{10} \Leftrightarrow q^{13-9} = \frac{1}{3^4} \Leftrightarrow q = \frac{1}{3}$.
2. $S_{1,n} = U_1 + U_2 + \cdots + U_n = \frac{3}{2}U_1\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$. $lim\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n\right] = 0$, donc on en déduit $\frac{3}{2}U_1 = 2 \Leftrightarrow U_1 = \frac{4}{3}$.

Exercice 6 : **Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite arithmétique de raison $r = 6$ et de premier terme $U_1 = 2$.**

1. **Calculer n pour que la somme $S_{1,n} = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n = 290$.**
2. **Trouver l'ensemble des nombres entiers naturels n tels que : $S_{1,n} \leq 574$.**

Correction :

1. $U_n = 6n - 4$, on a aussi $S_{1,n} = 290 = \frac{n(6n-2)}{2} \Leftrightarrow 3n^2 - n - 290 = 0 \Leftrightarrow n = 10$.
2. $S_{1,n} \leq 574 \Leftrightarrow 3n^2 - n - 574 = 0 \Leftrightarrow n = 14$, cet ensemble est : $n = \{1; 2; \dots; 14\}$.

Exercice 7 :

1. **Calculer trois (3) termes consécutifs x, y, z d'une suite géométrique sachant que $x + y + z = 312$ et $z - x = 192$.**
2. **Calculer trois (3) termes consécutifs x, y, z d'une suite arithmétique sachant que $x + y + z = \frac{17}{2}$ et $5x - 6y + z = -\frac{10}{3}$.**
3. **Calculer trois (3) termes consécutifs x, y, z d'une suite arithmétique sachant que $x + y + z = 171$ et $x^2 + y^2 + z^2 = 22869$.**

Correction :

1. A partir de $U_{n+1} = qU_n$, on peut écrire $y = qx$ et $z = qy = q^2x$,donc
$\begin{cases} x + y + z = x(1 + q + q^2) = 312 \\ z - x = x(q^2 - 1) = 192 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} x(1 + q + q^2) = 312 \\ x(q^2 - 1) = 192 \end{cases}$, en divisant membre à membre, on obtient $5q^2 - 8q - 21 = 0$, $\Delta' = 16 + 5 \times 21 = 11^2$, donc $q' = -\frac{7}{5}$ et $q'' = 3$. $x(q^2 - 1) = 192 \Leftrightarrow x = \frac{192}{q^2-1}$. **Pour $q = -\frac{7}{5}$, $x = 200$; $y = -280$ et $z = 392$. Pour $q = 3$, $x = 24$; $y = 72$ et $z = 216$.**
2. A partir de $U_{n+1} - U_n = r$, on peut écrire $y = x + r$ et $z = y + r = x + 2r$, donc
$\begin{cases} 3x + 3r = \frac{17}{2} \\ 6r = 5 \end{cases} \Leftrightarrow r = \frac{5}{6}, x = 2, y = \frac{17}{6}$ et $z = \frac{11}{3}$.
3. A partir de $U_{n+1} - U_n = r$, on peut écrire $y = x + r$ et $z = y + r = x + 2r$, donc
$\begin{cases} 3x + 3r = 171 \\ 3x^2 + 5r^2 + 6xr = 22869 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} x = 57 - r \\ r^2 = 6561 \Leftrightarrow r = \pm 81 \end{cases}$. **Pour $r = 81$, $x = -24$; $y = 57$ et $z = 138$. Pour $r = -81$, $x = 138$; $y = 57$ et $z = -24$.**

Exercice 8 : **Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $U_n = \ln(2^{n-1})$.**

1. **Montrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison.**
2. **Exprimer $S_{0,n}$ en fonction de n.**
3. **Calculer la somme des 30 premiers nombres entiers naturels.**

Correction : $\forall\, n \in \mathbb{N}$

1. $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = \ln(2^{(n+1)-1}) = \ln(2^{n-1} \times 2)$
$\forall\ n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = \ln(2^{n-1}) + \ln 2 = U_n + \ln 2 \Leftrightarrow U_{n+1} - U_n = \ln 2$, d'où la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r = \ln 2$ et de premier terme $U_0 = -\ln 2$.
2. $S_{0,n} = \sum_{i=0}^{n} U_i = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n =$
$S_{0,n} = \frac{(n+1)(-\ln 2 + \ln(2^{n-1}))}{2} = \frac{(n+1)[(n-1)\ln 2 - \ln 2]}{2} =$
$S_{0,n} = \frac{(n+1)(n-2)\ln 2}{2}$.
3. $S_{0,30} = \frac{(30+1)\ln(2^{30-2})}{2} = 434 \ln 2$.

Exercice 9 : $\forall\, n \in \mathbb{N}$

1. **Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall\ n \in \mathbb{N}$ $U_n = n\frac{\pi}{2}$.**
a) **Montrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison.**
b) **Exprimer $S_{0,n}$ en fonction de n.**
2. **Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall\ n \in \mathbb{N}$ $V_n = e^{-U_n}$.**
a) **Montrer que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.**
b) **Exprimer $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n.**
c) **Quelle est la limite de $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$?**
d) **Exprimer $S_{0,n}$ en fonction de n.**
3. **Soit $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $W_n = \frac{(-1)^n}{U_n}$.**
a) **Montrer que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.**
b) **Exprimer $S_{1,n}$ en fonction de n.**

Correction :

1. $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $U_n = n\frac{\pi}{2}$.
a) $U_{n+1} = (n+1)\frac{\pi}{2} = U_n + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow U_{n+1} - U_n = \frac{\pi}{2}$ d'où la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r = \frac{\pi}{2}$ et de premier terme $U_0 = 0$.
b) $S_{0,n} = U_0 + U_1 + \cdots + U_n = \frac{(n+1)(U_0+U_n)}{2} =$
$S_{0,n} = \frac{n\frac{\pi}{2}}{2}(1+n) = \frac{n\pi(1+n)}{4}$. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $S_{0,n} = \frac{n\pi(1+n)}{4}$.
2. $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $V_n = e^{-U_n}$.
a) $V_{n+1} = e^{-U_{n+1}} = e^{-\left(U_n + \frac{\pi}{2}\right)} = e^{-U_n} e^{-\frac{\pi}{2}}$.
$\forall\ n \in \mathbb{N}, \frac{V_{n+1}}{V_n} = e^{-\frac{\pi}{2}}$, d'où la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = e^{-\frac{\pi}{2}}$ et de premier terme $V_0 = e^{-\frac{\pi}{2}}$.
b) $\forall\, n \in \mathbb{N}, V_n = e^{-\frac{\pi}{2}} \frac{1-e^{-\frac{\pi(n+1)}{2}}}{1-e^{-\frac{\pi}{2}}}$
c) **Comme** $\lim_{n \mapsto +\infty} e^{-\frac{\pi(n+1)}{2}} = 0$ **alors** $\lim_{n \mapsto +\infty} V_n = 0$ $\lim_{n \mapsto +\infty} e^{-\frac{\pi}{2}} \frac{1-e^{-\frac{\pi(n+1)}{2}}}{1-e^{-\frac{\pi}{2}}} = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{1-e^{-\frac{\pi}{2}}}$.
d) $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $S_{0,n} = V_0 + V_1 + \cdots + V_n = \frac{(n+1)\left(e^{-\frac{\pi}{2}} + V_n\right)}{2}$ avec $V_n = e^{-\frac{\pi}{2}} \frac{1-e^{-\frac{\pi(n+1)}{2}}}{1-e^{-\frac{\pi}{2}}}$.
3. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ $W_n = \frac{(-1)^n}{U_n} = \frac{(-1)^n}{n\frac{\pi}{2}}$.
a) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, W_{n+1} = \frac{(-1)^{(n+1)}}{n\frac{\pi}{2}} = -\frac{(-1)^n}{n\frac{\pi}{2}} = -W_n$.
$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \frac{W_{n+1}}{W_n} = -1$, d'où la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $q = -1$ et de premier terme $W_1 = \frac{-2}{\pi}$.
b) **Exprimons $S_{1,n}$ en fonction de n :** $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$,
$S_{1,n} = W_1 + W_2 + \cdots + W_n = \frac{-2}{\pi} \times \frac{1-(-1)^n}{1+1} = \frac{(-1)^n - 1}{\pi}$.

Exercice 10 : **Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $U_n = e^{2n+1}$.**

1. **Montrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.**
2. **Exprimer $S_{0,n}$ en fonction de n.**
3. **Trouver la valeur minimum de n pour que : $S_{0,n} \geq 10^6$.**
4. **Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $\forall\ n \in \mathbb{N}$ $V_n = \ln(U_n)$. Exprimer la somme $V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n$ en fonction de n.**

Correction :

1. $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = e^{2(n+1)+1} = e^{2n+1}e^2 = e^2 U_n$
$\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\frac{U_{n+1}}{U_n} = e^2$, d'où la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = e^2$ et de premier terme $U_0 = e$.

2. $S_{0,n} = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n = e\,\frac{1-e^{2(n+1)}}{1-e^2}$.

3. $S_{0,n} = e\,\frac{1-e^{2(n+1)}}{1-e^2} \geq 10^6 \Rightarrow e^{2(n+1)} \leq 1 - \frac{10^6(1-e^2)}{e} \Leftrightarrow 2(n+1) \leq \ln\left[\frac{e-10^6(1-e^2)}{e}\right] \Rightarrow n \leq \frac{1}{2}\ln\left[\frac{e-10^6(1-e^2)}{e}\right] - 1$ soit $n = 14$.

4. **Exprimons la somme $V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n$ en fonction de n :**

- **Cherchons la nature de la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$:**

Supposons que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique :
$\forall \; n \in \mathbb{N},\; V_{n+1} = \ln(e^{2n+1}e^2) = 2 + \ln(U_n)$; d'où notre hypothèse est juste car $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $V_0 = 1$.

- **Exprimons la somme $V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n$ en fonction de n :** $S_{0,n} = \sum_{i=0}^{n} U_i = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n = \frac{(n+1)(1+2n+1)}{2}$. $S_{0,n} = (n+1)^2$.

<u>Exercice 11 :</u> Pour tout entier naturel n,

1. Résoudre dans l'équation d'inconnue x : $\ln(10^n x) = \frac{n}{2}$.

2. Soit la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\ln(10^n V_n) = \frac{n}{2}$.

a) Calculer V_0 et V_1.

b) Démontrer que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrie et déterminer sa raison.

c) $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle une suite convergente ?

3. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} P_0 = V_0 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}^* \;\; P_n = V_n P_{n-1} \end{cases}$$

a) Calculer P_1 et P_2.

b) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}\;\; P_n = \left(\frac{\sqrt{e}}{10}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

c) La suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est – elle convergente ?

d) Trouver l'ensemble des nombres entiers naturels n tels que : $P_n \leq 10^{-6}$.

<u>Correction :</u>

1. $\ln(10^n x) = \frac{n}{2} \Rightarrow x = e^{\frac{n}{2}(1-2\ln 10)} = \left(\frac{\sqrt{e}}{10}\right)^n$.

2. $\forall\, n \in \mathbb{N} \;\; V_n = \left(\frac{\sqrt{e}}{10}\right)^n$

a) $V_0 = 1$ et $V_1 = \frac{\sqrt{e}}{10}$.

b) $V_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{e}}{10}\right)^{n+1} = \left(\frac{\sqrt{e}}{10}\right)^n \frac{\sqrt{e}}{10} = V_n V_1$, d'où la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = V_1 = \frac{\sqrt{e}}{10}$ et de premier terme $V_0 = 1$.

c) **La convergence de la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$:** $lim\, V_n = +\infty$, d'où la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une suite convergente.

3. $$\begin{cases} P_0 = V_0 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}^* \;\; P_n = V_n P_{n-1} = \left(\frac{\sqrt{e}}{10}\right)^n P_{n-1} \end{cases}$$

a) $P_1 = \frac{\sqrt{e}}{10}$ et $P_2 = \left(\frac{\sqrt{e}}{10}\right)^2 \times \frac{\sqrt{e}}{10} = \left(\frac{\sqrt{e}}{10}\right)^3$.

b) $P_0 = 1$; $P_1 = \left(\frac{\sqrt{e}}{10}\right)^{\frac{1(1+1)}{2}} = \left(\frac{\sqrt{e}}{10}\right)^1$ $et\; P_2 = \left(\frac{\sqrt{e}}{10}\right)^{\frac{2(2+1)}{2}} = \left(\frac{\sqrt{e}}{10}\right)^3$. $P_n = \left(\frac{\sqrt{e}}{10}\right)^n P_{n-1} \Leftrightarrow P_{n-1} = P_n \left(\frac{10}{\sqrt{e}}\right)^n$ (1)

$P_{n-1} = \left(\frac{\sqrt{e}}{10}\right)^{\frac{(n-1)(n+1-1)}{2}} = \left(\frac{\sqrt{e}}{10}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ (2)

En remplaçant P_{n-1} de (2) dans (1), on obtient ainsi :

$\left(\frac{\sqrt{e}}{10}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} = P_n \left(\frac{10}{\sqrt{e}}\right)^n \Leftrightarrow P_n = \left(\frac{\sqrt{e}}{10}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} \times \left(\frac{\sqrt{e}}{10}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{e}}{10}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}+n}$. $P_n = \left(\frac{\sqrt{e}}{10}\right)^{\frac{n(n-1)+2n}{2}} = \left(\frac{\sqrt{e}}{10}\right)^{\frac{n(n-1+2)}{2}} = \left(\frac{\sqrt{e}}{10}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

c) Comme la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q \in]-1;0[$ et de premier terme $P_0 = 1$, donc la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

d) $\left(\frac{\sqrt{e}}{10}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} \leq 10^{-6} \Leftrightarrow \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\ln\left(\frac{\sqrt{e}}{10}\right) \leq \ln 10^{-6}$
$\frac{n(n+1)}{2} \leq \frac{-6\ln 10}{\ln\left(\frac{\sqrt{e}}{10}\right)} \Leftrightarrow n^2 + n - 15{,}32 \leq 0,$ posons $n^2 + n - 15{,}32 = 0$, $\Delta = 62{,}28$ ainsi $n = \frac{1-\sqrt{62{,}28}}{2} = -3{,}44$ et $n = \frac{1+\sqrt{62{,}28}}{2} = 4{,}44$, d'où l'ensemble des nombres entiers naturels n tels que : $P_n \leq 10^{-6}$ $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

<u>Exercice 12 :</u> Daouda kassali, gardien de but du Niger doit faire face, lors d'une démonstration, à un certain nombre de tirs directs. Les expériences précédentes conduisent à penser que :

- **s'il a arrêté le n[ième] tir, la probabilité pour qu'il arrête le suivant le n[ième] est 0,8 ;**

- **s'il n'a pas arrêté le $n^{ième}$ tir, la probabilité pour qu'il arrête le suivant est 0,6.**

La probabilité pour qu'il arrête le premier tir est 0,7. Dans tout l'exercice, si E est un événement, on note $p(E)$ la probabilité de E, E l'événement contraire de E. On note $p(E/F)$ la probabilité conditionnelle de l'événement *E* sachant que *F* est réalisé. A_n est l'événement ''le gardien arrête le $n^{ième}$ tir''. On a donc $p(A_1) = 0,7$.

1.

a) Donner pour *n* > 1 les valeurs de $p(A_{n+1}/A_n)$ et $p(\overline{A}_{n+1}/A_n)$.

b) Exprimer $p(A_{n+1}/A_n)$ et $p(A_{n+1} \cap A_n)$ en fonction de $p(A_n)$.

c) Déduisez-en que, pour tout entier strictement positif $n \geq 1$ on a : $p(A_{n+1}) = 0,2p(A_n) + 0,6$.

2. On pose à présent, pour *n* > 1 $p_n = p(A_n)$ et $u_n = p_n - 0,75$.

a) Démontrer que (u_n) est une suite géométrique de raison 0,2.

b) Déduisez-en de p_n en fonction de n.

c) Calculer la limite de (p_n).

<u>Correction :</u>

1.

d) Donnons pour *n* > 1 les valeurs de $p(A_{n+1}/A_n)$ et $p(\overline{A}_{n+1}/A_n)$: D'après l'énoncé ; La probabilité qu'*a* le gardien d'arrêter le tire (*n* +1) ; s'il a arrêté le tir *n* est 0,8 : Donc $p(A_{n+1}/A_n) = 0{,}8$. De même ; la probabilité qu'il n'arrête le tire (*n* +1) s'il n'a pas arrêté le tir *n* est 0,6. Donc ; $p(\overline{A}_{n+1}/A_n) = 0{,}6$.

e) Exprimons $p(A_{n+1}/A_n)$ et $p(A_{n+1} \cap A_n)$ en fonction de $p(A_n)$: D'après le principe des probabilités conditionnelles ; on a : $P(A_{n+1} \cap A_n) = p(A_{n+1}/A_n) \times p(A_n)$. Donc $p(A_{n+1} \cap A_n) = 0{,}8p(A_n)$De même ; on a : $p(A_{n+1} \cap \overline{A_n}) = 0{,}6p(\overline{A_n})$

f) Déduisons que, pour tout entier strictement positif $n \geq 1$ on a : $p(A_{n+1}) = 0,2p(A_n) + 0,6$: D'après la loi des Probabilités Totales ; on a : $p(A_{n+1} \cap A_n) + p(A_{n+1} \cap \overline{A}_n) = p(A_{n+1})$. Mais d'après la question précédente ; on a aussi : $p(A_{n+1} \cap A_n) + p(A_{n+1} \cap \overline{A}_n) = 0{,}8p(A_n) + 0{,}6p(\overline{A}_n)$. Comme $p(\overline{A}_n) = 1 - p(A_n)$; on comparant ces deux égalités ; on peut écrire : $p(A_{n+1}) = 0{,}8p(A_n) + 0{,}6p(\overline{A}_n) = 0{,}8p(A_n) + 0{,}6$.

2. *n* > 1, $p_n = p(A_n)$ *et* $U_n = p_n - 0,75$.

a) Démontrons que (U_n) est une suite géométrique de raison 0,2 : $U_{n+1} = p_{n+1} - 0{,}75 = 0{,}6p_n + 0{,}6 - 0{,}75 = 0{,}2(p_n - 0{,}75) = 0{,}2U_n$ $U_{n+1} = 0{,}2U_n$, d'où (U_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}2$ et de premier terme $U_1 = -005$.

b) Déduisez-en une expression de p_n en fonction de n : $U_n = (-0{,}05) \times (0{,}2)^{n-1}$, d'où $p_n = 0{,}75 + (-0{,}05) \times (0{,}2)^{n-1}$.

c) Montrons que (p_n) admet une limite que l'on calculera : Comme $(0{,}2)^{n-1}$ tend vers 0 si *n* tend vers $+\infty$; on en déduit que la suite (*p*) tend vers 0,75.

<u>Exercice 13 :</u> On désigne par *n* un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On imagine *n* sacs de jetons $S_1, S_2, \dots, S_n$. Au départ, le sac S_1 contient 2 jetons noirs et 1 blanc, et chacun des autres sacs contient 1 jeton noir et 1 jeton blanc. On se propose d'étudier l'évolution des tirages successifs d'un jeton de ces sacs, effectués de la façon suivante :

- **<u>1ère étape :</u> on tire au hasard un jeton de S_1 ;**
- **<u>2ème étape :</u> on place ce jeton dans S_2, et on tire, au hasard, un jeton de S_2 ;**
- **<u>3ème étape :</u> après avoir placer dans S_3 le jeton sorti de S_2, on tire, au hasard, un jeton de S_3. et ainsi de suite…**

Pour tout entier naturel *k* tel que 1< *k* < *n*, On note E_k l'événement "le jeton tiré de S_k est blanc"

1.

a) Déterminer la probabilité de E_1, notée $p(E_1)$, et les probabilités conditionnelles : $p(E_2/E_1)$ et $p(E_2/\overline{E_1})$.

b) Déduisez-en la probabilité de E_2, notée $p(E_2)$.

c) Pour tout entier *k* tel que 1 < *k* < *n*, la probabilité de E_k est notée p_k. Justifier la relation de récurrence suivante : $p_{k+1} = \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3}$.

2. On note (u_k) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{3} \\ u_{k+1} = \frac{1}{3}u_k + \frac{1}{3} \text{ pour entier } k \geq 1 \end{cases}$$

On considère la suite (v_k) définie par, pour tout élément *k* de IN *, $v_k = u_k - 0,5$.

a) Démontrer que la suite (V_k) est une suite géométrique.

b) Déduisez-en de u_k en fonction de *k*.

c) Montrer que la suite (u_k) est convergente et préciser sa limite.

3. On suppose que $n = 10$. Déterminer pour quelles valeur de k on a : $0,4999 < p_k < 0,5$.

Correction : Le sac S_1 contient 2 jetons noires et 1 jeton blanc ; et tous les autres sacs contiennent un jeton noir et 1 jeton blanc. E_k est l'événement " le jeton tiré du sac k est blanc"

1.

a) D'après le texte : $p(E_1) = \frac{1}{3}$; $p(E_2/E_1) = \frac{2}{3}$ et $p(E_2/\overline{E_1}) = \frac{1}{3}$.

b) probabilité de E_2, notée $p(E_2)$: d'après la loi des probabilités totales, on a : $p(E_2) = p(E_1 \cap E_2) + p(\overline{E_1} \cap E_2) = p(E_2/E_1) \times p(E_1) + p(E_2/\overline{E_1}) \times p(\overline{E_1})$

$p(E_2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$.

c) Justifions la relation de récurrence suivante : $p_{k+1} = \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3}$: d'après le principe de tirage des jetons ; on a : $p(E_{k+1}/E_k) = \frac{2}{3}$; $p(E_{k+1}/\overline{E_k}) = \frac{1}{3}$; $p(E_k) = p_k$ et $p(\bar{E}_k) = 1 - p_k$: $p(E_{k+1}) = p(E_{k+1} \cap E_k) + p(E_{k+1} \cap \overline{E_k})$

$p(E_{k+1}) = p(E_{k+1}/E_k) \times p(E_k) + p(E_{k+1}/\overline{E_k}) \times p(\overline{E_k})$ ainsi $p(E_{k+1}) = \frac{2}{3}p_k + \frac{1}{3}(1 - p_k) = \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3}$

2. $\begin{cases} \boldsymbol{u_1 = \frac{1}{3}} \\ \boldsymbol{u_{k+1} = \frac{1}{3}u_k + \frac{1}{3}} \; \textbf{\textit{pour entier}} \; \boldsymbol{k \geq 1} \end{cases}$;

$\boldsymbol{v_k = u_k - 0,5}$.

a) Démontrons que la suite (V_k) est une suite géométrique : $v_{k+1} = u_{k+1} - 0,5 = \frac{1}{3}u_k - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}\left(u_k - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}u_k$. (u_k) est une suite géométrique de premier terme $v_1 = -\frac{1}{6}$ et de raison $q = \frac{1}{3}$.

b) Déduisons l'expression de u_k en fonction de k : $v_k = -\frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = -\frac{1}{2\times3^k} \Leftrightarrow u_k = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^k}\right)$

c) Montrons que la suite (u_k) est convergente et précisons sa limite : On sait que si $q > 1$, $\lim\limits_{k \mapsto +\infty}(q^k = 3^k) = +\infty$, d'où $\lim\limits_{k \mapsto +\infty} u_k = \frac{1}{2}$ donc (u_k) converge vers $\frac{1}{2}$.

3. Déterminons k *pour* $n = 10$: on a : $0,4999 < p_k < 0,5$. On remarque $u_k = p_k$. De ce fait on procède :

$0,4999 < p_k < 0,5$ ou

$0,4999 < u_k < 0,5$

$0,4999 < \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^k}\right) < 0,5 \Leftrightarrow k \geq \frac{\ln 5000}{\ln 3} = 7,75$.

Donc $k = 8$, à partir de **1< *k* < *n*** et comme $n = 10$; les valeurs de k solutions sont 8 ; 9 ; 10.

Exercice 14 : **On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4$.**

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. On pose $v_n = u_n - 8$.

a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et son premier terme.

b) En déduire v_n, puis u_n en fonction de n.

3. Étudier le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

5. Exprimer $S_{0,n} = v_0 + \cdots + v_n$ en fonction de n. Quelle est la limite de $S_{0,n}$?

6. Calculer la somme des 30 premiers nombres entiers naturels.

Correction : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4$.

1. $u_0 = 1$; $u_1 = \frac{9}{2}$; $u_2 = \frac{25}{4}$; $u_3 = \frac{57}{8}$.

2. $v_n = u_n - 8 \Leftrightarrow v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 4 = \frac{1}{2}v_n$.

a) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -7$.

b) $v_n = -7\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $u_n = 8 - 7\left(\frac{1}{2}\right)^n = 8 - \frac{1}{2^n}$.

3. $u_{n+1} - u_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n > 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

4. $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = 8$ car $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \left[\frac{1}{2^n}\right] = 0$

5. $S_{0,n} = v_0 \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 14\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right]$et $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} S_{0,n} = -14$.

6. $S_{0,30} = 14\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{31} - 1\right]$.

Exercice 15 : **Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par son premier terme $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{-1+2u_n}$.**

On pose $v_n = \frac{-1+u_n}{u_n}$ et $w_n = \ln v_n$.

1. Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1.

2. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et son premier terme.

3. Exprimer w_n, v_n puis u_n en fonction de n.

4. Déterminer :

a) La limite de u_n quand n tend vers $+\infty$

b) La somme $S_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_{n-1}$

c) Le produit $P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_{n-1}$

d) La limite de S_n quand n tend vers $+\infty$

e) La limite de P_n quand n tend vers $+\infty$.

Correction :

1. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1 : $u_n \geq 1$

Initialisation : $u_0 = 2 > 1$, la propriété est vraie pour $n = 0$.
Hérédité : on suppose que la propriété est vraie pour un entier naturel k : $u_k \geq 1$, et montrons que $u_{k+1} \geq 1$:
$u_k \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} u_k^2 \geq 1 \\ -1+2u_k \geq 1 \end{cases}$ en divisant membre à membre on aura $\frac{u_n^2}{-1+2u_n} \geq 1$ ou $u_{k+1} \geq 1$ (vraie).
Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N}\ u_n \geq 1$.

2. $w_{n+1} = \ln v_{n+1} = \ln\left(\frac{-1+u_{n+1}}{u_{n+1}}\right) =$

$w_{n+1} = \ln\left(\frac{-1+\frac{u_n^2}{-1+2u_n}}{\frac{u_n^2}{-1+2u_n}}\right) = \ln\left(\frac{u_n^2-2u_n+1}{u_n^2}\right) =$

$w_{n+1} = \ln\left[\frac{(u_n-1)^2}{u_n^2}\right] = 2\ln\left(\frac{-1+u_n}{u_n}\right) = \ln v_n = 2w_n$

donc $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $w_0 = \ln v_0 = \ln\left(\frac{-1+u_0}{u_0}\right) = -\ln 2$.

3. $w_n = -2^n \ln 2$, $w_n = \ln v_n \Leftrightarrow v_n = e^{w_n}$ ou $v_n = e^{-2^n \ln 2}$ puis $v_n = \frac{-1+u_n}{u_n} \Leftrightarrow u_n = \frac{-1}{v_n-1}$ ou $u_n = \frac{-1}{e^{-2^n \ln 2}-1}$.

4. Déterminer

a) $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left(e^{-2^n \ln 2}\right) = 0$ d'où $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = 1$

b) $S_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_{n-1} = -\ln 2\,\frac{1-2^n}{1-2}$

Ou $S_n = (1-2^n)\ln 2$.

c) $v_0 = e^{-2^0 \ln 2}$ $\quad v_1 = e^{-2^1 \ln 2}$ … $v_n = e^{-2^{n-1}\ln 2}$ en multipliant on aura

$P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_{n-1} = e^{-(2^0+2^1+\cdots+2^{n-1})\ln 2}$ **or** $2^0+2^1+\cdots+2^{n-1} = 2^0\frac{1-2^n}{1-2} = -(1-2^n)$ donc

$P_n = e^{-(2^0+2^1+\cdots+2^{n-1})\ln 2} = e^{(1-2^n)\ln 2}$.

d) $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} S_n = \lim\limits_{n\mapsto+\infty}[(1-2^n)\ln 2] = -\infty$;

e) $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} P_n = \lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left[e^{(1-2^n)\ln 2}\right] = 0$.

Exercice 16 : **Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par son premier terme u_1 strictement positif et $u_{n+1} = 2 + \frac{4}{u_n+1}$. On pose $v_n = \frac{u_n-3}{u_n+2}$.**

1. Démontrer qu'il existe deux valeurs de u_1 pour lesquelles la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante.

2. On suppose que $u_1 > -1$.

a) Montrer par récurrence que $u_n > -1$.

b) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et son premier terme.

c) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

d) Calculer la limite de v_n.

e) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite.

Correction : $u_{n+1} = 2 + \frac{4}{u_n+1}$ et $v_n = \frac{u_n-3}{u_n+2}$.

1. $u_1 = 2 + \frac{4}{u_1+1} \Leftrightarrow (u_1-2)(u_1+1) - 4 = 0 \Leftrightarrow u_1^2 - u_1 - 6 = 0$, $\Delta = 25$ les différentes valeurs de u_1 sont $u_1 = \frac{1-5}{2} = -2$ et $u_1 = \frac{1+5}{2} = 3$.

2. On suppose que $u_1 > -1$.

a) $u_n > -1$.

Initialisation : $u_1 > -1$, la propriété est vraie pour $n = 0$.
Hérédité : on suppose que la propriété est vraie pour un entier naturel k non nul : $u_k > -1$, et montrons que $u_{k+1} > -1$: $u_k > -1 \Leftrightarrow \begin{cases} u_k + 1 > 0 \\ \frac{4}{u_k+1} > -3 \end{cases} \Leftrightarrow 2 + \frac{4}{u_k+1} > -1$ ou $u_{k+1} > -1$ (vraie).
Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*\ u_n > -1$.

b) $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-3}{u_{n+1}+2} = \frac{2+\frac{4}{u_n+1}-3}{2+\frac{4}{u_n+1}+2} = \frac{3-u_n}{4u_n+8} = -\frac{1}{4} \times \frac{u_n-3}{u_n+2} = -\frac{1}{4}v_n$ **donc** $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $q = -\frac{1}{4}$ et de premier terme v_1.

c) $v_n = v_1\left(-\frac{1}{4}\right)^n$ puis $u_n = \frac{3+2v_n}{1-v_n} = \frac{3+2v_1\left(-\frac{1}{4}\right)^n}{1-v_1\left(-\frac{1}{4}\right)^n}$.

d) $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n = \lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left[v_1\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right] = 0$.

e) Comme la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée par -1 et $-1 < q < 1$ alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Comme $u_n = \frac{3+2v_n}{1-v_n} = \frac{3+2v_1\left(-\frac{1}{4}\right)^n}{1-v_1\left(-\frac{1}{4}\right)^n}$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et

$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = \lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left[\frac{3+2v_1\left(-\frac{1}{4}\right)^n}{1-v_1\left(-\frac{1}{4}\right)^n}\right] = 3$.

Exercice 17 : **Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par son premier terme $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n+3}$.**

On pose $v_n = \ln\left(\frac{u_n}{u_n+2}\right)$.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. **Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison et son premier terme.**
3. **Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.**
4. **Calculer la limite de u_n.**

Correction : $u_0 = 1$; $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n+3}$ **et** $v_n = \ln\left(\frac{u_n}{u_n+2}\right)$.

1. $u_1 = u_{0+1} = \frac{u_0}{u_0+3} = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}$ et

$u_2 = u_{1+1} = \frac{u_1}{u_1+3} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+3} = \frac{1}{13}$.

2. $v_{n+1} = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_{n+1}+2}\right) = \ln\left(\frac{\frac{u_n}{u_n+3}}{\frac{u_n}{u_n+3}+2}\right) =$

$\ln\left(\frac{u_n}{u_n+2u_n+6}\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\times\frac{u_n}{u_n+2}\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right) + \ln\left(\frac{u_n}{u_n+2}\right) =$

$v_{n+1} = -\ln 3 + v_n \Leftrightarrow v_{n+1} - v_n = -\ln 3$ donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r = -\ln 3$ et du premier terme $v_0 = -\ln 3$.

3. $v_n = -(n+1)\ln 3$ et $v_n = \ln\left(\frac{u_n}{u_n+2}\right) \Leftrightarrow$

$\frac{u_n}{u_n+2} = e^{v_n} \Leftrightarrow u_n = \frac{2e^{v_n}}{1-e^{v_n}} = \frac{2e^{-(n+1)\ln 3}}{1-e^{-(n+1)\ln 3}}$ **or**

$e^{-(n+1)\ln 3} = e^{(n+1)\ln\left(\frac{1}{3}\right)} = e^{\ln\left(\frac{1}{3^{n+1}}\right)} = \frac{1}{3^{n+1}}$ donc

$u_n = \frac{\frac{2}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3^{n+1}}} = \frac{2}{3^{n+1}-1}$

4. Comme $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} 3^{n+1} = +\infty$ alors

$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = \lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left[\frac{2}{3^{n+1}-1}\right] = 0$.

Exercice 18 : **Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par son premier terme $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$.**

On pose $v_n = ku_n + 3$ avec $k \in \mathbb{R}^*$.

1. **Calculer u_1 ; u_2 et u_3.**
2.
a) **Déterminer le réel k pour que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite géométrique dont on précisera la raison et son premier terme.**
b) **Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.**
c) **Calculer la limite de u_n.**
d) **Calculer la somme $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$. En déduire la limite de S_n.**
e) **Calculer Le produit $P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n$.**

Correction : $u_0 = 2$; $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$

On pose $v_n = ku_n + 3$ avec $k \in \mathbb{R}^*$.

1. $u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 2 = \frac{8}{3}$; $u_2 = \frac{1}{3}u_1 + 2 = \frac{26}{9}$ et

$u_3 = \frac{1}{3}u_2 + 2 = \frac{80}{27}$.

2.
a) $v_{n+1} = ku_{n+1} + 3 = k\left(\frac{1}{3}u_n + 2\right) + 3 =$

$v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 = \frac{1}{3}[ku_n + 3(3+2a)]$

Si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite géométrique alors $3 + 2a = 1 \Leftrightarrow a = -1$; de raison $q = \frac{1}{3}$ et du premier terme $v_0 = -u_0 + 3 = -2 + 3 = 1$.

b) $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3^n}$ puis $v_n = -u_n + 3 \Leftrightarrow u_n =$ $3 - v_n = 3 - \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^n}(3^{n+1} - 1)$.

c) Comme $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \frac{1}{3^n} = 0$ alors

$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = \lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left[3 - \frac{1}{3^n}\right] = 3$.

d) $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = \frac{1-\frac{1}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3^{n+1}-1}{2\times 3^n}$.

$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} S_n = \lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left[\frac{1-\frac{1}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3}}\right] = \lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left[3\,\frac{1-\frac{1}{3^{n+1}}}{2}\right] = \frac{3}{2}$.

e) $P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n = \frac{1}{3^0} \times \frac{1}{3^1} \times \ldots \times \frac{1}{3^n}$

$P_n = \frac{1}{3^{0+1+2+\cdots+n}} = \frac{1}{3^{n(n+1)}}$.

Exercice 19 : **Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par son premier terme u_0 strictement positif et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+3u_n}$.**

1.
a) **Calculer les quatre premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de u_0 .**
b) **Calculer les inverses de ces quatre premiers termes.**
c) **Que remarque-t-on ?**
2. **On pose $v_n = \frac{1}{u_n}$. Déterminer la nature de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.**
3. **Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.**
4. **Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.**
5. **Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.**
6. **Déterminer u_0 pour que u_{10} soit égal à 0,025.**

Correction : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} / u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+3u_n}$.

1.
a) $u_1 = \frac{u_0}{1+3u_0}$; $u_2 = \frac{u_0}{1+6u_0}$; $u_3 = \frac{u_0}{1+9u_0}$.
b) $\frac{1}{u_1} = \frac{1}{u_0} + 3$; $\frac{1}{u_2} = \frac{1}{u_0} + 6$; $\frac{1}{u_3} = \frac{1}{u_0} + 9$.
c) On remarque que la suite des inverses semble être une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $\frac{1}{u_0}$.

2. $v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1+3u_n}{u_n} = \frac{1}{u_n} + 3 = v_n + 3$. Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $v_0 = \frac{1}{u_0}$.

3. $v_n = \frac{1}{u_0} + 3n$ et $u_n = \frac{u_0}{1+3nu_0}$.

4. $u_{n+1} - u_n = \frac{-3(u_0)^2}{(1+3nu_0)[(1+3(n+1)u_0)]} < 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

5. $\lim_{n \mapsto +\infty}[1 + 3nu_0] = +\infty$, donc $\lim_{n \mapsto +\infty}[u_n] = 0$. D'où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

6. Comme $u_{10} = 0{,}025$, ou $u_{10} = \frac{u_0}{1+3nu_0}$, on en déduit que $u_0 = 0{,}1$.

<u>Exercice 20 :</u>

1. Résoudre $z^3 = 1$ et montrer que les racines s'´ecrivent 1, j, j^2. Calculer 1 + j + j^2 et en déduire les racines de $1 + z + z^2 = 0$.

2. Résoudre $z^n = 1$et montrer que les racines s'´ecrivent $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$. En déduire les racines de $x = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}$. Calculer, pour tout entier naturel p, $y = 1 + \omega^p + \omega^{2p} + \cdots + \omega^{(n-1)p}$.

<u>Correction :</u>

1. $\boldsymbol{z^3 = 1}$**, les solutions** sont : $z_k = e^{\left(\frac{2k\pi}{3}\right)i} = \left[1; \frac{2k\pi}{3}\right]$ avec $k \in \{0, 1, 2\}$: $z_0 = [1; 1] = 1$; $z_1 = \left[1; \frac{2\pi}{3}\right] = j$ **et** $z_k = \left[1; \frac{-2\pi}{3}\right] = j^2$. **Donc** $1 + j + j^2 = 0$ et $1 + z + z^2 = 0$. Ces racines sont les sommets d'un polygone régulier à 3 côtés inscrit dans le cercle unité.

2. $\boldsymbol{z^n = 1}$**, les racines** $\boldsymbol{n}$**ième de l'unité :** ces racines sont : $z_k = e^{\left(\frac{2k\pi}{n}\right)i} = \left[1; \frac{2k\pi}{n}\right]$ avec $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Ces racines sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité. On a $x = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z} = 0$, car $z_n = e^{\left(\frac{2n\pi}{n}\right)i} = 1$.
Ainsi $\omega = e^{\left(\frac{2\pi}{n}\right)i}$ et $y = 1 + \omega^p + \omega^{2p} + \cdots + \omega^{(n-1)p} = \frac{1-\omega^{pn}}{1-\omega^p} = 0$, car $\omega^n = e^{\left(\frac{2n\pi}{n}\right)i} = 1$.

<u>Exercice 21 :</u> On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{9}{u_n}\right)$.

1. Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 3.

2. Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

3. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n - 3 \leq \frac{1}{2^n}$.

4. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

<u>Correction :</u>$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $u_0 = 4$; $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{9}{u_n}\right)$.

1. Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{9}{x}\right)$. pour tout réel > 0 , $f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2-9}{x^2}\right)$ donc la fonction f est décroissante sur $]0; 3]$ et croissante sur $[3; +\infty[$; elle admet donc un minimum en $x = 3$ qui vaut $f(3) = 3$. Donc pour tout réel $x \geq 3, f(x) \geq 3$.

Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 3.

<u>Initialisation :</u> $u_0 = 4 > 3$, la propriété est vraie pour $n = 0$.

<u>Hérédité :</u> on suppose que la propriété est vraie pour un entier naturel k : $u_k \geq 3$, et montrons que $u_{k+1} \geq 3$:
On a $u_{k+1} = f(u_k)$, et $u_k \geq 3$, donc $f(u_k) \geq 3$, et $u_{k+1} \geq 3$.

<u>Conclusion :</u> la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 3.

2. Montrons par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante :

<u>Initialisation :</u> $u_0 = 4$ et $u_1 = \frac{25}{8} < u_0$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

<u>Hérédité :</u> on suppose que la propriété est vraie pour un entier naturel k : $u_{k+1} < u_k$, et montrons que $u_{k+2} < u_{k+1}$:Sur $[3; +\infty[$, la fonction f est strictement croissante, et pour tout entier n, un _ 3, donc $f(u_{k+1}) < f(u_k)$, soit $f(u_{k+2}) < f(u_{k+1})$.

<u>Conclusion :</u> la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

3. Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n - 3 \leq \frac{1}{2^n}$:

<u>Initialisation :</u> $u_0 - 3 = 1 \leq \frac{1}{2^0} = 1$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

<u>Hérédité :</u> on suppose que la propriété est vraie pour un entier naturel k : $u_k - 3 \leq \frac{1}{2^k}$, et montrons que $u_{k+1} - 3 \leq \frac{1}{2^{k+1}}$ **:** $u_{k+1} - 3 = \frac{1}{2}\left(u_k + \frac{9}{u_k}\right) - 3 = \frac{1}{2}(u_k - 3) + \frac{1}{2}\left(\frac{9}{u_k}\right) - \frac{3}{2}$

$u_{k+1} - 3 \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^k} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \leq \frac{1}{2^{k+1}}$ car $u_k \geq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{u_k} \leq \frac{1}{3}$ entraîne $\frac{9}{u_k} \leq 3$ entraîne $\frac{1}{2}\left(\frac{9}{u_k}\right) \leq \frac{3}{2}$.

<u>Conclusion :</u> pour tout entier naturel n, $u_n - 3 \leq \frac{1}{2^n}$.

4. Pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n - 3 \leq \frac{1}{2^n}$, et on sait que $\lim_{n \mapsto +\infty}\left[\frac{1}{2^n}\right] = 0$, donc par le **théorème des gendarmes**, $\lim_{n \mapsto +\infty}[u_n] = 0$. La suite converge vers 0.

<u>Exercice 22 :</u> On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1$.

1. On pose $v_n = u_n + 3$.

a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique dont on précisera la raison et son premier terme.

b) En déduire v_n, puis u_n en fonction de n.

2. Étudier le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

3. On pose $S_{0,n} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

a) Exprimer $S_{0,n}$ en fonction de n.

b) Quelle est la limite de $S_{0,n}$?

c) Etudier la convergence de la suite $S_{0,n}$.

Correction : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1$.

1. $v_n = u_n + 3 \Leftrightarrow v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2 = \frac{2}{3}v_n$.

a) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = 1$.

b) $v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n - 3$.

2. $u_{n+1} - u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{-1}{3} < 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. Comme $0 < \frac{2}{3} < 1$, alors $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$, donc $\lim\limits_{n \mapsto +\infty}[u_n] = -3$.

3. $S_{0,n} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

a) $S_{0,n} = -3n - 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$

b) $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} S_{0,n} = -\infty$.

c) La suite $S_{0,n}$ diverge vers $-\infty$.

Exercice 24 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}}$.

1. Montrer que, pour tout $\forall\, n \in IN, u_n > 0$.
2. Etudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Calculer les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et conjecturer une expression de u_n en fonction de n.
4. Démontrer cette conjecture en utilisant u_n raisonnement par récurrence.
5. Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}}$.

1. Montrons que, pour tout $\forall\, n \in IN, u_n > 0$:

Initialisation : $u_0 = 1 > 0$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
Hérédité : on suppose que la propriété est vraie pour un entier naturel k : $u_k > 0$, et montrons que $u_{k+1} > 0$:
$u_{k+1} = \frac{u_k}{\sqrt{u_k^2+1}} > 0$ car $u_k > 0$ et $\sqrt{u_k^2 + 1} > 0$, donc la propriété est vraie pour $k+1$.
Conclusion : pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

2. Comme pour tout entier naturel n, $u_n > 0$, on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 afin d'étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{\sqrt{u_n^2+1}}$, or $\sqrt{u_n^2 + 1} > 1$, d'où $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ alors $u_{n+1} < u_n \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n < 0$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

3. $u_0 = 1$; $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $u_3 = \frac{1}{\sqrt{4}}$ et $u_4 = \frac{1}{\sqrt{5}}$. On conjecture que, pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

4. Démontrons cette conjecture en utilisant u_n raisonnement par récurrence :
Initialisation : $u_0 = \frac{1}{\sqrt{0+1}} = 1$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
Hérédité : on suppose que la propriété est vraie pour un entier naturel k : $u_k = \frac{1}{\sqrt{k+1}}$, et montrons que $u_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{k+2}}$: $u_{k+1} = \frac{u_k}{\sqrt{u_k^2+1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{k+1}}+1}} = \frac{1}{\sqrt{k+2}}$, donc la propriété est vraie pour $k+1$.
Conclusion : pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

5. $\lim\limits_{n \mapsto +\infty}[u_n] = \lim\limits_{n \mapsto +\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right] = 0$, La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice 25 : Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 0\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 7u_{n+1} + 8u_n \end{cases}$.

1.
a) On pose $S_n = u_{n+1} + u_n$. Démontrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
b) En déduire S_n en fonction de n.
2. On pose $v_n = (-1)^n u_n$, et $t_n = v_{n+1} - v_n$. Exprimer t_n en fonction de S_n.
3.
a) Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n(on pourra calculer de deux manières la somme $T_{0,n} = t_0 + t_1 + \cdots + t_{n-1}$).
b) Déterminer $\lim \frac{u_n}{8^n}$.

Correction : $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $\begin{cases} u_0 = 0\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 7u_{n+1} + 8u_n \end{cases}$.

1.
a) $S_{n+1} = u_{n+2} + u_{n+1} = 8(u_{n+1} + u_n) = 8S_n$, donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = 8$ et de premier terme $S_0 = 1$.
b) $S_n = 8^n$.
2. $v_n = (-1)^n u_n$, et $t_n = v_{n+1} - v_n$. **Exprimons en fonction de S_n :** $t_n = (-1)^n S_n$.
3.
a) $T_{0,n} = \frac{1}{9}[1 + (-8)^{n+1}]$ et $T_{0,n} = -v_0 - v_{n-1}$. On pouvait en déduire $v_n = \frac{-1}{9}[1 + (-8)^n]$ et $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{9}[1 + (-8)^n]$.
b) $\lim \frac{u_n}{8^n} = \lim\left(\frac{(-1)^{n+1}}{9}\left[\frac{1}{8^n} + (-1)^n\right]\right) = +\infty$.

Exercice 26 : **On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=-2$ et $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+3$.**

1.

a) Montrer que cette suite est majorée par 6.

b) Montrer que cette suite est croissante.

c) Que peut-on déduire des deux questions précédentes ?

2. On pose $v_n=u_n-6$.

a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) En déduire v_n, puis u_n en fonction de n.

c) Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

3. Étudier le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. On pose $S_{0,n}=u_0+u_1+\cdots+u_n$

a) Exprimer $S_{0,n}$ en fonction de n.

b) Quelle est la limite de $S_{0,n}$?

c) Etudier la convergence de la suite $S_{0,n}$.

Correction : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $u_0=-2$; $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+3$.

1.

a) Montrons que cette suite est majorée par 6 :

Initialisation : $u_0=-2<6$, donc la propriété est vraie pour n = 0.

Hérédité : on suppose que la propriété est vraie pour un entier naturel k : $u_k\le 6$, et montrons que $u_{k+1}\le 6$: $\frac{1}{2}u_k\le 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}u_k+3\le 6$,

$u_{k+1}\le 6$

Conclusion : $\forall\, n\in IN,\ u_n\le 6$.

b) $u_{n+1}-u_n=-\frac{1}{2}u_n+3\ge 0$ car $\frac{1}{2}u_k\le 3$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

c) Des deux questions précédentes, on peut déduire que la suite converge puisqu'elle est majorée et croissante. Sa limite l vérifie $-2\le l\le 6$.

2. $v_n=u_n-6 \Leftrightarrow v_{n+1}=u_{n+1}-6=\frac{1}{2}v_n$.

a) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q=\frac{1}{2}$ et du 1er terme $v_0=-8$.

b) $v_n=-8\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $u_n=-8\left(\frac{1}{2}\right)^n+6$ en fonction de n.

c) Comme la raison de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement comprise entre – 1 et 1, $\lim\limits_{n\mapsto +\infty}[v_n]=0$ et $\lim\limits_{n\mapsto +\infty}[u_n]=6$.

3. Étudier le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. $S_{0,n}=u_0+u_1+\cdots+u_n$

a) $S_{0,n}=-8\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{2}-1}=16\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1\right]$.

b) $\lim\limits_{n\mapsto +\infty}[S_{0,n}]=16$

c) La suite $S_{0,n}$ converge vers 16.

Exercice 27 :

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites numériques respectivement définies par $u_n=\frac{n^2}{2^n}$ et $v_n=\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

a) Montrer que $\lim\limits_{n\mapsto +\infty}[v_n]=\frac{1}{2}$.

b) Montrer que pour tout entier naturel $n>0$, $v_n>\frac{1}{2}$.

c) Trouver le plus petit entier N tel que, si $n\ge$ N, $v_n<\frac{3}{4}$.

d) En déduire que si $n\ge$ N, alors $u_{n+1}<\frac{3}{4}u_n$.

2. On pose pour tout entier $n\ge 5$: $S_{5,n}=u_5+u_6+\cdots+u_n$.

a) Montrer par récurrence que, pour tout entier $n\ge 5$: $u_n\le\left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}u_5$.

b) Montrer que, pour tout entier $n\ge 5$:

$$S_{5,n}\le\left[1+\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\cdots+\left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}\right]u_5$$

c) En déduire que, pour tout entier $n\ge 5$: $S_{5,n}\le 4u_5$.

d) Montrer que la suite $(S_n)_{n\ge 5}$ est croissante et en déduire qu'elle converge.

Correction :

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ / $u_n=\frac{n^2}{2^n}$ et $v_n=\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

a) $v_n=\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$,donc

$\lim\limits_{n\mapsto +\infty}[v_n]=\frac{1}{2}$ car $\lim\limits_{n\mapsto +\infty}\left[\frac{1}{n}\right]=0$.

b) On sait que $v_n=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$,or pour tout entier naturel n > 0, $1+\frac{1}{n}>1 \Leftrightarrow v_n>\frac{1}{2}$.

c) $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{n(n+1)}\right)\left(\frac{2n^2+4n+1}{n(n+1)}\right)<0$, ou $v_{n+1}<v_n$donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et $v_5=0{,}72$; $v_4=0{,}78$, donc N= 5.

d) Pour $n\ge$ N, on a $v_n<\frac{3}{4}$ donc $u_{n+1}<\frac{3}{4}u_n$.

2. $n\ge 5$: $S_{5,n}=u_5+u_6+\cdots+u_n$.

a)

Initialisation : $u_5\le\left(\frac{3}{4}\right)^{5-5}u_5$, donc la propriété est vraie pour n = 5.

Hérédité : on suppose que la propriété est vraie pour un entier naturel k : $u_k\le\left(\frac{3}{4}\right)^{k-5}u_5$, et montrons que $u_{k+1}\le\left(\frac{3}{4}\right)^{k-4}u_5$: $u_{k+1}<\frac{3}{4}u_k$ ou $u_{k+1}<$

$\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-5} u_5$, d'où $u_{k+1} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{k-4} u_5$ donc la propriété est vraie pour $k+1$.

Conclusion : $\forall\, n \geq 5 : u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$.

b) on sait que $\forall\, n \geq 5,\ u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$ alors en remplaçant les indices de $n \geq 5$, on retrouve $\forall\, n \geq 5$, $S_{5,n} \leq \left[1+\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\cdots+\left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}\right] u_5$.

c) La suite de terme générale $\left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}$ est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$ donc la somme est $S_{5,n} = 4\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-4}\right]$. Pour tout entier $n \geq 5$, le nombre $\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-4}\right] < 1$ donc $S_{5,n} \leq 4u_5$.

d) On a $S_{5,n+1} - S_{5,n} = u_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} > 0$, donc la suite $((S_n)_{n\geq 5}$ est croissante. Cette suite $(S_n)_{n\geq 5}$ est croissante et majorée par $4u_5$, donc elle converge.

Exercice 28 : On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $U_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \sqrt{3U_n + 4}$.

1.

a) **Montrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 4.**

b) **Montrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.**

c) **En déduire que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.**

2. **Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $4 - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - U_n)$.**

Correction :

1. $U_{n+1} = \sqrt{3U_n + 4}$ **et** $U_0 = 0$

a) **Montrons que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 4 :**

$U_0 = 0$ donc $0 \leq U_0 \leq 4$; la propriété est vraie pour n = 0.

Montrons que pour $n \in \mathbb{N}$, la propriété est héréditaire c'est-à-dire : montrons que pour tout n, si $0 \leq U_n \leq 4$ alors $0 \leq U_{n+1} \leq 4$; $0 \leq U_n \leq 4$donc $4 \leq 3U_n + 4 \leq 3\times 4 + 4$soit $0 \leq 3U_n + 4 \leq 16$. Donc $0 \leq \sqrt{3U_n+4} \leq 4$; $0 \leq U_{n+1} \leq 4$ donc la propriété est vraie pour n + 1 donc est vraie pour tout n de IN .

Il était indispensable de démontrer que $U_n \geq 0$ pour justifier l'existence de $\sqrt{3U_n+4}$.

b) **Montrons que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante :**

Par récurrence : $U_0 = 0$ donc $U_1 = 2$donc $U_0 < U_1$ la propriété est vraie pour n = 0. Montrons que pour tout n de IN , la propriété est héréditaire c'est-à-dire montrons que pour tout n, si $U_n < U_{n+1}$ alors $U_{n+1} < U_{n+2}$.

$0 < 3U_n + 4 < 3U_{n+1} + 4$ donc $\sqrt{3U_n+4} < \sqrt{3U_{n+1}+4}$ soit $U_{n+1} < U_{n+2}$. La propriété est vraie pour n + 1 donc est vraie pour tout n de IN*. $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

c) **Déduisons que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminons sa limite :** $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante majorée par 4 donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite ℓ est comprise entre 0 et 4 $U_{n+1} = f(U_n)$ avec $f(x) = \sqrt{3x+4}$. f est définie continue sur [0 ; 4], pour tout n de IN , $U_n \in [0\,;4]$ et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc sa limite est solution de $f(x) = x$ si $\sqrt{3x+4} = x$ alors x = – 1 ou x = 4 or ℓ est comprise entre 0 et 4 donc ℓ = 4.

2. **Montrons que pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $4 - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - U_n)$:** $4 - U_{n+1} = 4 - \sqrt{3U_n+4} = \frac{3(4-U_n)}{4+\sqrt{3U_n+4}}$; or $0 \leq U_n \leq 4$ donc $2 \leq \sqrt{3U_n+4} \leq 4 \Leftrightarrow 6 \leq 4 + \sqrt{3U_n+4} \leq 8$ donc $\frac{1}{8} < \frac{1}{4+\sqrt{3U_n+4}} < \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{3(4-U_n)}{4+\sqrt{3U_n+4}} < \frac{3(4-U_n)}{6}$; on déduit que $4 - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - U_n)$.

Exercice 29 :

soit $P(z) = 39z^4 - 91z^3 - 52z^2 - 91z + 39$

1. **Vérifier que $P(3) = 0$.**

2. **Calculer trois (3) termes consécutifs x, y, z d'une suite géométrique sachant que leur somme est égale à 13 et celle de leurs carrés est 91.**

Correction : $P(z) = 39z^4 - 91z^3 - 52z^2 - 91z + 39$

1. $P(3) = 39.3^4 - 91.3^3 - 52.3^2 - 91.3 + 39 = 0$.

2. A partir de $U_{n+1} = qU_n$, on peut écrire $y = qx$ et $z = qy = q^2x$,

donc $\begin{cases} x+y+z = x(1+q+q^2) = 13 \\ x^2+y^2+z^2 = x^2(q^4+q^2+1) = 91 \end{cases}$, en remplaçant $x = \frac{13}{1+q+q^2}$ dans $x^2(q^4+q^2+1) = 91$, on obtient $39q^4 - 91q^3 - 52q^2 - 91q + 39 = 0$, donc $q = 3$. **Pour $q = 3$, $x = 1$; $y = 3$ et $z = 9$.**

Exercice 30 :

1. **Une personne reçoit 200 000 F en héritage. Le 1er janvier 1995, elle a placé cette somme à intérêts composés au taux annuel de 7,25%.De quelle somme disposera-t-elle le 1er janvier 1996 ?**

2. **On pose $U_0 = 200\,000$. On désigne par U_n la somme dont elle dispose le 1er janvier de l'année (1995 + n).**

a) **Etablir une relation entre U_{n+1} et U_n.**

b) En déduire que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
c) Exprimer U_n en fonction de n.
d) Calculer $S_{0,n} = \sum_{i=0}^{n} U_i$.

Correction :

1. Somme à disposer au 1er janvier 1996 :
$200\,000\,(1+0{,}075) = 215\,000\,F$
2.
a) Etablissons une relation entre U_{n+1} et U_n :
$$U_{n+1} = U_n\,(1+0{,}075) = 1{,}075U_n.$$
b) Déduisons que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique : La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison q = 1,075. Son premier terme est $U_0 = 200\,000$.
c) Exprimons U_n en fonction de n : $U_n = (1{,}075)^n U_0$
d) Calculons $S_{0,n} = \sum_{i=0}^{n} U_i$:
$S_{0,n} = \sum_{i=0}^{n} U_i = U_0 + U_1 + \cdots + U_n = U_0\,\frac{1-(1{,}075)^{n+1}}{0{,}075}$.

Exercice 31 :

1. soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $U_0 = 5$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ U_n = \left(1-\frac{2}{n}\right)U_{n-1} + \frac{6}{n}$.
Calculer U_1 ; U_2 ; U_3 ; U_3 ; U_4 et U_5.
2. Conjecturer la nature de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $P_n = U_{n+1} - U_n$.
3. On considère la suite arithmétique $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison 8 et de premier terme $V_0 = 16$. Justifier que la somme S_n des n premiers termes de cette suite est égale à $4n^2 + 12n$.
4. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $U_n = 4n^2 + 12n + 5$.

Correction :

1. $U_n = \left(1-\frac{2}{n}\right)U_{n-1} + \frac{6}{n}$ et $U_0 = 5$.
$U_1 = 21$; $U_2 = 45$; $U_3 = 77$; $U_4 = 117$ et $U_5 = 165$.
2. $P_0 = U_1 - U_0 = 21 - 5 = 16$; $P_1 = U_2 - U_1 = 45 - 21 = 24$
$P_2 = U_3 - U_2 = 77 - 45 = 32$; $P_3 = U_4 - U_3 = 117 - 77 = 40$
$P_4 = U_5 - U_4 = 165 - 117 = 48$. Il ressort de cette progression que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison 8.
3. $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n = nV_0 + [1 + 2 + \cdots + n-1 \times 8$
$S_n = 16n + \frac{n(n-1)}{2} \times 8 = 16n + 4n^2 - 4n = 4n^2 + 12n$.
4.
Initialisation : $U_0 = 40^2 + 12 \times 0 + 5 = 5$; la propriété est vraie pour $n = 0$.
Transmission : On considère un entier quelconque p tel que $p \in \mathbb{N}$. Supposons que la propriété U_P est vraie, c'est-à-dire $U_p = 4p^2 + 12p + 5$. Alors $U_{p+1} = 4(p+1)^2 + 12(p+1) + 5 = 4p^2 + 20p + 21$. Or $U_{p+1} = \left(1-\frac{2}{p+1}\right)U_p + \frac{6}{p+1} = \left(1-\frac{2}{p+1}\right)(4p^2 + 12p + 5) + \frac{6}{p+1}$. Après tout calcul on retrouve $U_{p+1} = 4p^2 + 20p + 21$; la propriété est vraie pour n = p.
Conclusion : $\forall\, n \in IN$, $U_n = 4n^2 + 12n + 5$.

Exercice 32 : On définit une suite de points $(\mathrm{M}_n)_{n\in\mathrm{IN}}$ d'affixe z_n par $z_0 = 8$ et pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{4} z_n$.

1. Calculer z_n en fonction de n.
2. Pour tout entier n, calculer le rapport $\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}$.
3. Démontrer que $\mathrm{M}_n\mathrm{M}_{n+1} = \mathrm{kOM}_n$ où k est un réel strictement positif à déterminer.
4. En déduire la nature du triangle $\mathrm{OM}_n\mathrm{M}_{n+1}$.
5. Déterminer la limite de r_n, module de z_n lorsque n tend vers plus l'infini. Quelle interprétation géométrique peut-on en donner ?

Correction :

1. $(z_n)_{n\in\mathrm{IN}}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1+i\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{3}i}$ et du 1er terme $z_0 = 8$; donc $z_n = 8\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{\frac{\pi}{3}ni}$.

2. $n \in \mathrm{IN}$, $\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}} = \frac{\frac{1+i\sqrt{3}}{4}z_n - z_n}{\frac{1+i\sqrt{3}}{4}z_n} = \frac{\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{4}-1\right)z_n}{\frac{1+i\sqrt{3}}{4}z_n} = i\sqrt{3}$.
3. $\left|\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}\right| = \left|i\sqrt{3}\right| \Leftrightarrow |z_{n+1} - z_n| = \sqrt{3}|z_{n+1}| \Leftrightarrow \mathrm{M}_n\mathrm{M}_{n+1} = \sqrt{3}\mathrm{OM}_n$, donc $\mathrm{k} = \sqrt{3}$.
4. La nature du triangle $\mathrm{OM}_n\mathrm{M}_{n+1}$: $\left|\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}\right| = \left|i\sqrt{3}\right| \Leftrightarrow |z_{n+1} - z_n| = \sqrt{3}|z_{n+1}|$ ou $\mathrm{M}_n\mathrm{M}_{n+1} = \sqrt{3}\mathrm{OM}_n$ et $\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}_n}; \overrightarrow{\mathrm{M}_n\mathrm{M}_{n+1}}\right) = \frac{\pi}{2} + 2\mathrm{k}\pi$, donc $\mathrm{OM}_n\mathrm{M}_{n+1}$ est un triangle rectangle en M_{n+1}.
5. $z_n = 8\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{\frac{\pi}{3}ni} \Leftrightarrow r_n = 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$, donc lim $r_n = 0$.

Interprétation géométrique de la limite de r_n : le point M_n a pour position limite le point O lorsque n tend vers plus l'infini.

<u>Exercice 33 :</u> Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \sum_{k=n}^{k=2n}\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$.

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \frac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}$.

2. En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. Établir alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite convergente.

<u>Correction :</u> $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ / $u_n = \sum_{k=n}^{k=2n}\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$.

1. $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=n+1}^{k=2(n+1)}\left(\frac{1}{k}\right) - \sum_{k=n}^{k=2n}\left(\frac{1}{k}\right)$, or $u_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{k=2(n+1)}\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n+2}$ après tout calcul $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n}$, donc $u_{n+1} - u_n = \frac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}$.

2. $u_{n+1} - u_n = \frac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)} < 0$ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.

3. Établir alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite convergente : $u_n = \sum_{k=n}^{k=2n}\left(\frac{1}{k}\right) > 0$, puisque somme de termes strictement positifs. Ainsi, la suite (un) est minorée par 0 et strictement décroissante, donc elle est convergente.

<u>Exercice 34 :</u> Les règles de reproduction chez les abeilles sont telles que l'abeille femelle a un père et une mère tandis que l'abeille mâle n'a qu'une mère.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ le nombre d'ancêtres d'une abeille mâle à la génération suite définie par n : ainsi $u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 3$. Soit F_n le nombre d'ancêtres femelles et M_n le nombre d'ancêtres mâles à la génération n de cette abeille mâle. Alors $u_n = F_n + M_n$.

a) Montrer que $u_n = F_{n+1}$ et que $M_{n+1} = F_n$.

b) En déduire que $u_{n+1} = u_n + F_n = u_n + u_{n-1}$. Une telle suite est appelée suite de Fibonacci.

2. On considère la suite de Fibonacci telle que $u_0 = u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, pour tout entier naturel n.

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geq n$. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $(u_n)^2 = u_{n-1}u_{n+1} + (-1)^n$.

3. On pose $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$

a) Montrer que $v_{n+1} - v_n = \frac{(-1)^n}{u_n u_{n+1}}$.

b) En déduire la limite de $v_{n+1} - v_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4. On pose $w_n = v_{2n-1}$ et $t_n = v_{2n}$.

a) Étudier le sens de variations des suites $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Montrer que les suites $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite l.

c) Montrer que $\lim\limits_{n\mapsto +\infty}[(v_n)^2 - v_n - 1] = 0$.

d) Montrer que $l^2 - l - 1 = 0$.

e) En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le nombre d'or.

<u>Correction :</u>

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ / $u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 3$.

a) Montrons que $u_n = F_{n+1}$ et que $M_{n+1} = F_n$: Comme l'abeille mâle n'a qu'une mère, pour chaque ancêtre mâle de la génération n, il y a une femelle de la génération $n+1$, et pour chaque ancêtre femelle de la génération n, il y a une femelle de la génération $n+1$, donc $u_n = F_{n+1}$. Chaque mâle de la génération $n+1$ donne naissance à une femelle de la génération n, donc $M_{n+1} = F_n$.

b) Déduction de $u_{n+1} = u_n + F_n = u_n + u_{n-1}$: $u_{n+1} = M_{n+1} + F_{n+1} = M_n + F_n = u_n + F_n = u_n + u_{n-1}$.

2. Suite de Fibonacci / $u_0 = u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, pour tout entier naturel n.

a)

<u>Initialisation :</u>$u_0 = 1 \geq 0$, la propriété est vraie pour n = 0.

<u>Hérédité :</u> on suppose que la propriété est vraie pour un entier naturel k telle que $k \geq 2$: $u_k \geq k$, et montrons que $u_{k+1} \geq k+1$ ou $u_{k-1} \geq k-1$: $u_{k+1} = u_k + u_{k-1} \geq k + k - 1 = 2k-1$, $u_{k+1} = 2k-1 \geq k+1$ car $k \geq 2$. Ainsi $u_{k+1} - u_k = u_{k-1} > 0$. Donc la suite (u_k) est croissante, donc la propriété est vraie pour $k+1$.

<u>Conclusion :</u> $\forall\, n \in IN$: $u_n \geq n$. **Déduction de la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:** Donc pour tout entier naturel n, $u_n \geq n$. Par un **théorème de comparaison de limites**, $\lim\limits_{n\mapsto +\infty}[u_n] = +\infty$.

c) Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $(u_n)^2 = u_{n-1}u_{n+1} + (-1)^n$:

<u>Initialisation :</u> $(u_1)^2 = 1$ et $(u_1)^2 = u_0u_2 + (-1)^1 = 1$, donc la propriété est vraie pour n = 1.

<u>Hérédité :</u> on suppose que la propriété est vraie pour un entier naturel k : $(u_k)^2 = u_{k-1}u_{k+1} + (-1)^k$, et montrons que $(u_{k+1})^2 = u_k u_{k+2} + (-1)^{k+1}$:

$(u_{k+1})^2 = (u_{k+1})(u_k + u_{k-1}) = u_{k+1}u_k + u_{k+1}u_{k-1} = u_k u_{k+1} - (u_k)^2 - (-1)^k$

$(u_{k+1})^2 = (u_k)(u_{k+1} + u_k) + (-1)^{k+1} = u_k u_{k+2} + (-1)^{k+1}$, donc la propriété est vraie pour $k+1$.

<u>Conclusion :</u>$\forall\, n \in IN$, $(u_n)^2 = u_{n-1}u_{n+1} + (-1)^n$.

3. $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$

a) $v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} - \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n u_{n+2} - (u_{n+1})^2 =}{u_n u_{n+1}} = \frac{(-1)^n}{u_n u_{n+1}}$, donc $v_{n+1} - v_n = \frac{(-1)^n}{u_n u_{n+1}}$.

b) Déduction de la limite de $v_{n+1} - v_n$ lorsque n tend vers $+\infty$: on a $\frac{-1}{u_n u_{n+1}} \le \frac{(-1)^n}{u_n u_{n+1}} \le \frac{1}{u_n u_{n+1}}$ et comme $\lim\limits_{n \mapsto +\infty}[u_n] = +\infty$ et $\lim\limits_{n \mapsto +\infty}[u_{n+1}] = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \mapsto +\infty}[u_n(u_{n+1})] = +\infty$. Par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \mapsto +\infty}[v_{n+1} - v_n] = 0$.

4. $w_n = v_{2n-1}$ et $t_n = v_{2n}$.

a) Étudions le sens de variations des suites $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$: On a vu que tous les $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont strictement positifs et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, donc $w_{2n-1} - w_{2n+1} < 0$, donc $w_{n+1} - w_n < 0$, et la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. De même $t_{n+1} - t_n = v_{2n+2} - v_{2n} =$ $t_{n+1} - t_n = \frac{(-1)^{2n+1}}{u_{2n+2}u_{2n+1}} - \frac{(-1)^{2n}}{u_{2n}u_{2n+1}} = t_{n+1} - t_n = \frac{-u_{2n} + u_{2n+2}}{u_{2n}u_{2n+2}u_{2n+1}} > 0$ la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

b) Montrons que les suites $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite l. Pour montrer que les suites $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, il reste à montrer que $\lim\limits_{n \mapsto +\infty}[t_n - w_n] = 0$ Or, $t_n - w_n = v_{2n} - v_{2n-1}$. On a vu que pour tout entier naturel n, $\lim\limits_{n \mapsto +\infty}[v_n - v_n] = 0$; donc $\lim\limits_{n \mapsto +\infty}[t_n - w_n] = \lim\limits_{n \mapsto +\infty}[v_{2n} - v_{2n-1}] = 0$. Si les suites $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, elles convergent vers la même limite, soit $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite, donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite l.

c) $(v_n)^2 - v_n - 1 = \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)^2 - \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{(-1)^{n+1}}{(u_n)^2}$, comme $\lim\limits_{n \mapsto +\infty}[u_n] = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \mapsto +\infty}[(v_n)^2 - v_n - 1] = 0$.

d) Montrons que $l^2 - l - 1 = 0$: $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, donc $\lim\limits_{n \mapsto +\infty}[(v_n)^2] = l^2$ et $\lim\limits_{n \mapsto +\infty}[v_n] = l$ d'où $l^2 - l - 1 = 0$.

e) Déduction de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers le nombre d'or : On résout l'équation, $l^2 - l - 1 = 0$, ou $\left(l - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\left(l - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right) = 0$. Tous les termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positifs, donc $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ qui est le nombre d'or.

<u>Exercice 35 :</u> Soit un entier naturel n.

1. Résoudre dans l'équation d'inconnue x : $\ln(7^n x) = 5n$.

2. Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\ln(7^n V_n) = 5n$.

a) Calculer V_0 et V_1.

b) Démontrer que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrie et déterminer sa raison.

c) La suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet-elle une limite ?

d) Déterminer un entier n_0 tel que, pour tout $n > n_0, V_n > 100$.

<u>Correction :</u> Soit un entier naturel n.

1. $\ln(7^n x) = 5\text{n} \Rightarrow x = \left(\frac{e^5}{7}\right)^n$.

2. $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $\ln(7^n V_n) = 5n \Leftrightarrow V_n = \left(\frac{e^5}{7}\right)^n$.

a) $V_0 = \left(\frac{e^5}{7}\right)^0 = 1$ et $V_1 = \frac{e^5}{7}$.

b) $V_{n+1} = \left(\frac{e^5}{7}\right)^{n+1} = \frac{e^5}{7}V_n$, donc la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrie de raison $q = \frac{e^5}{7}$.

c) $\lim\limits_{n \mapsto +\infty}[V_n] = +\infty$.

d) $\left(\frac{e^5}{7}\right)^n > 100 \Leftrightarrow n > \frac{2\ln 10}{5 - \ln 5}$, donc n_0

<u>Exercice 36 :</u> Soit la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur IN par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n}$.

1. Calculer les trois premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. On considère la fonction f définie sur [0; 3] par $f(x) = \frac{2}{1+x}$

a) Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité = 4 cm ou 4 carreaux), ainsi que la droite d'équation $y = x$. Construire alors les six premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses.

b) Quelles conjectures peut-on faire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

3. a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $0 \le u_n \le 2$.

b) Déterminer les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

4. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.

b) Exprimer v_n en fonction de n et déterminer la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $/u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n}$.

1. $u_0 = 0$; $u_1 = 2$; $u_2 = \frac{2}{3}$.

2. f définie sur [0; 3] par $f(x) = \frac{2}{1+x}$

a) faire la figure, pour retrouver les premiers termes.

b) Conjectures sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: elle n'est pas monotone, elle est bornée par 0 et 2, et elle converge vers l'abscisse du point d'intersection de la courbe représentative de f et de la droite d'équation $y = x$.

3. a) Démontrons que pour tout entier naturel n, $0 \le u_n \le 2$:

Initialisation : $u_0 = 0$ donc $0 \le u_n < 2$, donc la propriété est vraie pour n = 0.

Hérédité : on suppose que la propriété est vraie pour un entier naturel k : $0 \le u_k \le 2$, et montrons que $0 \le u_{k+1} \le 2$: $0 \le u_k \le 2 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \le \frac{2}{1+u_k} \le 2$, donc $0 \le \frac{2}{1+u_k} \le 2$ ou $0 \le u_{k+1} \le 2$, donc la propriété est vraie pour $k+1$.

Conclusion : $\forall\, n \in IN$: $0 \le u_n \le 2$.

b)Les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $u_0 < u_1$, $u_2 < u_1$, $u_2 < u_3$, donc la suite n'est pas monotone.

c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si la conjecture de la question 2. b) est vraie. Sa limite est solution de l'équation $f(x) = x$, soit $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2) = 0$. La limite de la suite doit être comprise entre 0 et 2, donc la limite est 1.

4. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $/v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$.

a) $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2} = -\frac{1}{2}v_n$ donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique dont son premier terme est $v_0 = -\frac{1}{2}$et sa raison est $q = -\frac{1}{2}$.

b) $v_n = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ et $\lim\limits_{n\mapsto +\infty}[v_n] = 0$ car $0 < q < 1$.

c) $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2} \Leftrightarrow u_n = \frac{-2v_n-1}{v_n-1} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n-1}{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n-1}$, comme $\lim\limits_{n\mapsto +\infty}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] = 0$ alors $\lim\limits_{n\mapsto +\infty}[u_n] = 1$.

Exercice 37 : On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

1. Calculer les trois premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. On pose $v_n = u_n - 3$.

a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique dont on précisera la raison et son premier terme.

b) En déduire v_n, puis u_n en fonction de n.

c) Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

d) Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

e) Exprimer $S_{0,n} = v_0 + \cdots + v_n$ en fonction de n Quelle est la limite de $S_{0,n}$?

3. On pose $w_n = u_n + 2n$. Étudier les variations des suites $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

1. $u_0 = 1$; $u_1 = -1$; $u_2 = -5$.

2. $v_n = u_n - 3 \Leftrightarrow v_{n+1} = 2u_n - 6 = 2v_n$.

a) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 2$ et du premier terme $v_0 = -2$.

b) $v_n = -2^{n+1}$ et $u_n = 3 - 2^{n+1}$.

c) Étudions les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de premier terme $v_0 = -2$ et de raison 2, elle est donc strictement décroissante; soit pour tout entier naturel n, $v_{n+1} < v_n$. Donc $u_{n+1} - 3 < u_n - 3$, soit $u_{n+1} < u_n$. Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

d) $\lim\limits_{n\mapsto +\infty}[u_n] = \lim\limits_{n\mapsto +\infty}[3 - 2^{n+1}] = -\infty$.

e) $S_{0,n} = -2\frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 1 - 2^{n+1}$ et $\lim\limits_{n\mapsto +\infty}[S_{0,n}] = \lim\limits_{n\mapsto +\infty}[1 - 2^{n+1}] = -\infty$.

3. Étudions les variations des suites $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

Pour étudier les variations de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on étudie le signe de $w_{n+1} - w_n = 2(1 - 2^{n-1}) \le 0$. Ainsi la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante sur IN.

Exercice 38 : Soit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 12$ et $u_{n+1} = \frac{u_n+2v_n}{3}$; $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = \frac{u_n+3v_n}{4}$.

1. Calculer les trois premiers termes des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. On pose $w_n = u_n - v_n$.

a) Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique dont on précisera la raison et son premier terme.

b) En déduire w_n en fonction de n.

c) Étudier les variations des suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

d) En déduire que ces deux suites sont adjacentes.

4. On pose $t_n = 3u_n + 8v_n$.

a) Montrer que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

b) En déduire une expression des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n et déterminer leur limite.

Correction : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $/u_0 = 12$ et $u_{n+1} = \frac{u_n+2v_n}{3}$; $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = \frac{u_n+3v_n}{4}$.

1. $u_0 = 12$; $u_1 = \frac{14}{3}$; $u_2 = \frac{73}{18}$ et $v_0 = 1$; $v_1 = \frac{15}{4}$; $v_2 = \frac{191}{48}$.

2. $w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{12}w_n$.

a) La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{12}$ et du premier terme $w_0 = 11$.

b) $w_n = 11\left(\frac{1}{12}\right)^n$.

c) Étudions les variations des suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n+2v_n-3u_n}{3} = \frac{-w_n}{3} < 0$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ; et $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n+3v_n-4v_n}{4} = \frac{w_n}{4} > 0$, donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

d) Déduction de suites sont adjacentes : De plus $\lim\limits_{n\mapsto +\infty}[w_n] = 0$ car la raison de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement compris entre -1 et 1. Donc les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

3. $t_{n+1} = 3u_{n+1} + 8v_{n+1} = 3u_n + 8v_n = t_n$

a) La suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, car $t_n = t_{n+1}$.

b) $u_n = 4 + 8\left(\frac{1}{12}\right)^n$ et $v_n = 4 - 3\left(\frac{1}{12}\right)^n$.

La limite commune de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 4 .

<u>**Exercice 39 :**</u> **On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\ln(u_{n+1}) = 1 + \ln(u_n)$.**

1 Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1$.

2 Démontrer que pour tout entier naturel n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e$. En déduire la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3 Exprimer u_n en fonction de n puis déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4 On pose $v_n = \ln(u_n)$.

a) Exprimer la somme $S_{0,n} = v_0 + \cdots + v_n$ en fonction de n.

b) En déduire l'expression de $P_{0,n} = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n$.

c) Etudier la limite de $\left(P_{0,n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

<u>**Correction :**</u> $u_0 = 1$ et $\ln(u_{n+1}) = 1 + \ln(u_n)$.

1 Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1$:

<u>Initialisation :</u> $u_0 = 1$, donc $u_n \geq 1$ la propriété est vraie pour *n* = 0.

<u>Hérédité :</u> on suppose que la propriété est vraie pour un entier naturel *k* : $u_k \geq 1$, et montrons que $u_{k+1} \geq 1$: $\ln(u_{k+1}) \geq 0$, car $u_k \geq 1$, donc $u_{k+1} = \ln(u_{k+1}) = 1 + \ln(u_k) \geq 1 = \ln e$, donc $u_{k+1} \geq e$.

<u>Conclusion :</u> $\forall\, n \in IN,\, u_n \geq 1$.

2. On a $\ln(u_{n+1}) = 1 + \ln(u_n) \Leftrightarrow \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = 1 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = 1 = \ln e \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = e$.

$u_{n+1} = eu_n$ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géometrique de raison $q = e$ et du 1er terme $u_0 = 1$.

3. $u_n = e^n$ et $\lim\limits_{n\mapsto +\infty}[u_n] = +\infty$, car la raison est strictement supérieure à 1.

4. $v_n = \ln(u_n) = n$.

a) $S_{0,n} = v_0 + \cdots + v_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

b) $S_{0,n} = \ln(u_0) + \cdots + \ln(u_n) = \ln(u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n) = \ln\left(P_{0,n}\right) \Leftrightarrow P_{0,n} = e^{S_{0,n}}$

$P_{0,n} = e^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

c) $\lim\limits_{n\mapsto +\infty}\left[P_{0,n}\right] = +\infty$.

<u>**Exercice 40 :**</u> **Soient *a* et *b* deux réels tels que $a + b \neq 0$.**

On pose $u_0 = a + b$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_{n+1} = a + b - \frac{ab}{u_n}$.

1. On suppose *a* = *b*.

a) Calculer u_1 , u_2 , u_3 en fonction de *a* .

b) Conjecturer la forme générale de u_n en fonction de *a* . Démontrer par récurrence ce dernier résultat.

c) Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

2. On suppose $a \neq b$.

a) Montrer que $u_0 = \frac{a^2-b^2}{a-b}$ et $u_1 = \frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$.

b) Conjecturer, dans le cas général, l'expression de u_n en fonction de puissances de *a* et de *b* . Démontrer par récurrence ce dernier résultat.

c) Si |*a*| < |*b*| , écrire u_n en fonction de $\frac{a}{b}$. Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

d) Si |*a*| > |*b*| , écrire u_n en fonction de $\frac{b}{a}$. Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

<u>**Correction :**</u> $n \geq 1$, $u_{n+1} = a + b - \frac{ab}{u_n}$.

1. On suppose *a* = *b*. $u_0 = 2a$

a) $u_1 = \frac{3}{2}a$, $u_2 = \frac{4}{3}a$, $u_3 = \frac{5}{4}a$.

b) $\forall\, n \geq 1$, $u_n = \frac{n+2}{n+1}a$.

Démontrons par récurrence $u_n = \frac{n+2}{n+1}a$:

<u>Initialisation :</u> $u_0 = 2a$, donc la propriété est vraie pour *n* = 0.

<u>Hérédité :</u> on suppose que la propriété est vraie pour un entier naturel *k* : $u_k = \frac{k+2}{k+1}a$, et montrons que $u_{k+1} = \frac{k+3}{k+3}a$:$u_{k+1} = a + b - \frac{ab}{u_k} = 2a - \frac{a^2}{u_k}$,

$u_{k+1} = 2a - \frac{a^2}{\frac{k+2}{k+1}a} = \frac{k+3}{k+3}a$

<u>Conclusion :</u> $\forall\, n \geq 1$, $u_n = \frac{n+2}{n+1}a$.

c) $\lim\limits_{n\mapsto +\infty}\left[\frac{n+2}{n+1}a\right] = a$.

2. On suppose $a \neq b$. $u_0 = a + b$

a) $u_0 = (a+b)\frac{a-b}{a-b} = \frac{a^2-b^2}{a-b}$

$u_1 = a + b - \frac{ab}{u_0} = \frac{a^2+2ab+b^2-ab}{a+b}$

$u_1 = \frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(a-b)(a+b)} = \frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$

b) On peut conjecturer que $u_n = \frac{a^{n+2}-b^{n+2}}{a^{n+1}-b^{n+1}}$.

Démontrons par récurrence ce dernier résultat :

Initialisation : $u_0 = \frac{a^{0+2}-b^{0+2}}{a^{0+1}-b^{0+1}} = a + b$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
Hérédité : on suppose que la propriété est vraie pour un entier naturel k : $u_k = \frac{a^{k+2}-b^{k+2}}{a^{k+1}-b^{k+1}}$, et montrons que $u_{k+1} = \frac{a^{k+3}-b^{k+3}}{a^{k+2}-b^{k+2}}$:$u_{k+1} = a + b - \frac{ab}{u_k} =$,
$u_{k+1} = a + b - \frac{ab}{\frac{a^{k+2}-b^{k+2}}{a^{k+1}-b^{k+1}}} = \frac{a^{k+3}-b^{k+3}}{a^{k+2}-b^{k+2}}$
Conclusion : $\forall\, n \in IN$, $u_n = \frac{a^{n+2}-b^{n+2}}{a^{n+1}-b^{n+1}}$.

c) $0 < |a| < |b|$, alors $u_n = b\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{n+2}-1}{\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}-1}$. Comme $-1 < \frac{a}{b} < 1$, $\lim\limits_{n \mapsto +\infty}\left[\left(\frac{a}{b}\right)^n\right] = 0$ donc $\lim\limits_{n \mapsto +\infty}[u_n] = b$.

d) $|a| > |b| > 0$, alors $u_n = a\frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^{n+2}}{1-\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}}$. Comme $-1 < \frac{b}{a} < 1$, $\lim\limits_{n \mapsto +\infty}\left[\left(\frac{b}{a}\right)^n\right] = 0$ donc $\lim\limits_{n \mapsto +\infty}[u_n] = a$.

Exercice 41 : On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n+1}{4}$; $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = \frac{3v_n+1}{4}$.

1. On considère la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $t_n = u_n + v_n$. Montrer par récurrence que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante .

2. On considère la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $d_n = v_n - u_n$. Montrer que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

3. En déduire la limite de $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Ecrire u_n en fonction de t_n et de d_n , puis en fonction de n . Ecrire v_n en fonction de S_n et de d_n , puis en fonction de n . En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et celle de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5. Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles adjacentes ?

Correction : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n+1}{4}$; $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = \frac{3v_n+1}{4}$.

1. $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $t_n = u_n + v_n$. **Montrons par récurrence que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante :**
$t_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{3(u_n+v_n)+2}{4} = \frac{3t_n+2}{4}$
Initialisation : $t_0 = u_0 + v_0 = 2$, et $t_1 = \frac{3t_0+2}{4} = \frac{3\times2+2}{4} = 2$, $t_0 = t_1 = 2$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.
Hérédité : on suppose que la propriété est vraie pour un entier naturel k : $t_k = 2$, et montrons que $t_{k+1} = 2$:$t_{k+1} = \frac{3t_k+2}{4} = \frac{3\times2+2}{4} = \frac{8}{4} = 2$,
Conclusion : $\forall\, n \in IN$, $t_{n+1} = t_n = 2$.

2. $d_n = v_n - u_n \Leftrightarrow d_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1}$.
$d_{n+1} = \frac{3}{4}d_n$, la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{3}{4}$et de premier terme $d_0 = 2$.

3. $\lim\limits_{n \mapsto +\infty}[d_n] = 0$, car la raison est strictement comprise entre -1 et 1 et $d_n = 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

4. $t_n - d_n = 2u_n \Leftrightarrow u_n = \frac{t_n-d_n}{2} = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$.
$t_n + d_n = 2v_n \Leftrightarrow u_n = \frac{t_n+d_n}{2} = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n$.
$\lim\limits_{n \mapsto +\infty}[u_n] = 1$ et $\lim\limits_{n \mapsto +\infty}[v_n] = 1$. Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

5. Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes : il reste à montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante : On a $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n+1}{4}$; il suffit de montrer par récurrence que, pour tout entier $n, u_n < 1$; on a $u_{n+1} - u_n = \frac{-v_n+1}{4}$; il suffit de montrer par récurrence que, pour tout entier n, $v_n > 1$.

Exercice 42 : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur IN dont aucun terme n'est nul. Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur IN par $v_n = \frac{-2}{u_n}$.

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée.
Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre-exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 2, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par – 1.

3. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

4. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Correction : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur IN dont aucun terme n'est nul. Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur IN par $v_n = \frac{-2}{u_n}$.

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, $\lim\limits_{n \mapsto +\infty}[u_n] = l$. Si $l \neq 0$, alors $\lim\limits_{n \mapsto +\infty}[v_n] = \frac{-2}{l}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Si $l = 0$, alors $\lim\limits_{n \mapsto +\infty}[v_n] = \mp\infty$, et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente. Donc proposition fausse.

2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 2, alors pour tout entier naturel n, $u_n \geq 2$, donc $0 < \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{2}$ et $0 > \frac{-2}{u_n} \geq -1$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par -1 Donc proposition vraie.

3. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, alors pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leq u_n$, donc, $\frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{u_{n+1}}$ et $\frac{-2}{u_n} \geq \frac{-2}{u_{n+1}}$, donc $v_{n+1} \leq v_n$ alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Donc proposition fausse.

4. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente, alors plusieurs cas: Si $\lim\limits_{n \mapsto +\infty}[u_n] = \mp\infty$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite. Donc proposition fausse.

<u>Exercice 43 :</u> On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n+v_n}{3}$; $v_0 = 7$ et $v_{n+1} = \frac{u_n+3v_n}{4}$.

1. Calculer u_1; u_2 et v_1; v_2.

2. On pose $w_n = v_n - u_n$.

a) Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique dont on précisera la raison et son premier terme.

b) En déduire w_n en fonction de n. Quelle est la limite de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

3. Étudier les variations des suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. En déduire que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

5. On pose $t_n = 3u_n + 4v_n$.

a) Montrer que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. En déduire la limite de la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) En déduire une expression des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de t_n et de w_n et en fonction de n et déterminer leur limite.

<u>Correction :</u> $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $/u_0 = 12$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n+v_n}{3}$; $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = \frac{u_n+3v_n}{4}$.

1. $u_1 = \frac{14}{3}$; $u_2 = \frac{73}{18}$ et $v_1 = \frac{15}{4}$; $v_2 = \frac{191}{48}$.

2. $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{5}{12}w_n$.

a) La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{12}$ et du premier terme $w_0 = 7$.

b) $w_n = 7\left(\frac{5}{12}\right)^n$ et $\lim\limits_{n \mapsto +\infty}[w_n] = 0$.

3. Étudions les variations des suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n+v_n-3u_n}{3} = \frac{w_n}{3} > 0$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ; et $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n+3v_n-4v_n}{4} = \frac{-w_n}{4} < 0$, donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

4. Déduction de suites sont adjacentes : De plus $\lim\limits_{n \mapsto +\infty}[w_n] = 0$ car la raison de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement compris entre -1 et 1. Donc les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. On en déduit qu'elles convergent vers la même limite.

5. $t_{n+1} = 3u_{n+1} + 4v_{n+1} = 3u_n + 4v_n = t_n = 28$

a) La suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, car $t_n = t_{n+1} = 28$ et $\lim\limits_{n \mapsto +\infty}[t_n] = 28$.

b) $u_n = v_n - w_n = \frac{t_n-3u_n}{4} - w_n = \frac{t_n-3u_n-4w_n}{4}$

$4u_n + 3u_n = t_n - 4w_n \Leftrightarrow u_n = \frac{t_n-4w_n}{7}$ et $u_n = \frac{28-4\times7\left(\frac{5}{12}\right)^n}{7} = 4 - 4\left(\frac{5}{12}\right)^n$. $v_n = u_n + w_n = \frac{t_n-4w_n}{7} + w_n = \frac{t_n+3w_n}{7}$ et $v_n = \frac{28+3\times7\left(\frac{5}{12}\right)^n}{7} = 4 - 3\left(\frac{5}{12}\right)^n$.

La limite commune de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 4 .

<u>Exercice 44 :</u> On considère la suite $(u_n)_{n>0}$ définie par $u_{n+1} = \sum_{k=1}^{2n}\left[\frac{1}{n+k}\right] = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + + \cdots + \frac{1}{3n}$.

a) Calculer u_1; u_2 et u_3.

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n>0}$ est strictement croissante.

<u>Correction :</u> $(u_n)_{n>0}$ / $u_{n+1} = \sum_{k=1}^{2n}\left[\frac{1}{n+k}\right] = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + + \cdots + \frac{1}{3n}$.

a) $u_1 = \frac{5}{6}$; $u_2 = 0{,}95$ et $u_3 = \frac{2509}{2520} = 0{,}9956349$.

b) suite $(u_n)_{n>0}$ est strictement croissante :

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} - \frac{1}{n+1}$

$u_{n+1} - u_n = \frac{9n+5}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} > 0$, $(u_n)_{n>0}$ est strictement croissante.

<u>Exercice 45 :</u> D'unité graphique : 2 cm. Soit A_0 le point d'affixe 2, A'_0 le point d'affixe 2i et A_1 le milieu du segment $[A_0A'_0]$. Plus généralement, si A_n est un point d'affixe z_n, on désigne par A'_n le point d'affixe iz_n et A_{n+1} le milieu du segment $[A_nA'_n]$. On note ρ_n et θ_n le module et l'argument de z_n.

1. Déterminer les affixes des points A_1, A'_1, A_2, A'_2 et A_3. Placer ces points. Calculer ρ_1, ρ_2, ρ_3 et θ_1, θ_2, θ_3.

2.

a) Pour tout entier n, exprimer z_{n+1} en fonction de z_n. En déduire z_n en fonction de n.

b) Exprimer ρ_n et θ_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de la suite $(\rho_n)_{n\in IN}$. interpréter géométriquement ce résultat.

d) Comparer les modules et les arguments de $z_n$et z_{n+8} .

3. Etablir que $A_nA_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}A_{n-1}A_n$.

Après avoir exprimer en fonction de n, déterminer en fonction de n, la longueur d_n de la ligne brisée . $A_0A_1A_2 \dots A_n$.

Déterminer la limite de la suite (d_n).

<u>Correction :</u> $A_0(2)$; $A'_0(2i)$ et A_1 le milieu du segment $[A_0A'_0]$. $A_n(z_n)$; $A'_n(iz_n)$ et A_{n+1} le milieu du segment $[A_nA'_n]$. $z_n = \rho_n e^{i\theta_n}$.

1. $z_{A_1} = \frac{z_{A_0}+z_{A'_0}}{2} = \frac{2+2i}{2} = 1+i$, $z_{A'_1} = iz_{A_1} = -1+i$, $z_{A_2} = \frac{z_{A_1}+z_{A'_1}}{2} = \frac{1+i-1+i}{2} = i$, $z_{A'_2} = iz_{A'_1} = -1 = e^{\pi i}$ et $z_{A_3} = \frac{z_{A_2}+z_{A'_2}}{2} = \frac{-1+i}{2}$. **Placer ces points dans le repère**. $z_{A_0} = 2e^{2\pi i}$ ou $z_{A_0} = 2e^{0i}$, $z_{A'_0} = 2e^{\frac{\pi}{2}i}$, $z_{A_1} = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$, $z_{A'_1} = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$, $z_{A_2} = e^{\frac{\pi}{2}i}$, $z_{A_3} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$. On en déduit que $\rho_1 = \sqrt{2}$, $\rho_2 = 1$, $\rho_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$, $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_3 = \frac{3\pi}{4}$.

2. $z_n = \rho_n e^{i\theta_n}$

a) $z_{n+1} = \frac{z_{A_n}+z_{A'_n}}{2} = \frac{z_n+iz_n}{2} = z_n\left(\frac{1+i}{2}\right)$. La suite des nombres complexes $(z_n)_{n\in IN}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1+i}{2}$ et de premier terme $z_{A_0} = z_0 = 2$; donc $z_n = 2\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$.

b) $\rho_{n+1} = |z_{n+1}| = |z_n|\left|\frac{1+i}{2}\right| = \rho_n\left|\frac{1+i}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}\rho_n$; donc la suite $(\rho_n)_{n\in IN}$ est géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $\rho_0 = 2$; donc $\rho_n = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ et $\theta_{n+1} = arg(z_{n+1}) = arg\left[z_n\left(\frac{1+i}{2}\right)\right] = arg(z_n) + arg\left(\frac{1+i}{2}\right) = \theta_n + \frac{\pi}{4}$, donc la suite $(\theta_n)_{n\in IN}$ est arithmétique de raison $\frac{\pi}{4}$ et de premier terme $\theta_0 = 0$; donc $\theta_n = n\frac{\pi}{4}$.

c) $\lim\limits_{n\mapsto +\infty}[\rho_n] = \lim\limits_{n\mapsto +\infty}\left[2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right] = 0$, ce qui signifie que la distance OA_n tend vers 0.

d) $z_{n+8} = \rho_{n+8}e^{i\theta_{n+8}} = \rho_n\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^8 e^{i\left(\theta_n+\frac{8\pi}{4}\right)} = \frac{1}{16}z_n$, donc $\rho_{n+8} = \frac{1}{16}\rho_n$ et $\theta_{n+8} = \theta_n$.

3. $A_nA_{n+1} = |z_{n+1}-z_n| = \left|(z_{n-1}-z_n)\left(\frac{1+i}{2}\right)\right| = \left|(z_n-z_{n-1})\left(\frac{1+i}{2}\right)\right| = \left|\frac{1+i}{2}\right||z_n-z_{n-1}| = \frac{1}{\sqrt{2}}A_{n-1}A_n$. Soit $u_n = A_nA_{n+1}$; on a alors, pour tout entier $n \geq 1$; donc la suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et de premier terme $u_0 = A_0A_1 = \sqrt{2}$. Ainsi $A_nA_{n+1} = u_n = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$.

La longueur d_n de la ligne brisée $A_0A_1A_2 \dots A_n$ est la somme des longueurs A_nA_{n+1}; donc $d_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = u_0\frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2(\sqrt{2}+1)\left[1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right]$.

Limite de la suite (d_n) : $\lim\limits_{n\mapsto +\infty}[d_n] = \lim\limits_{n\mapsto +\infty}\left[2(\sqrt{2}+1)\left(1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right)\right] = 2(\sqrt{2}+1)$

<u>**Exercice 46 :**</u> **On définit une suite de points $(A_n)_{n\in IN}$ d'affixe z_n par $z_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \frac{1+i}{2}z_n$.**

1. Montrer que $\forall n \in IN$, $z_n = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{\frac{\pi}{4}ni}$.

2. Placer les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4.

3. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = |z_n|$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et son premier terme.

4. A partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre O et de rayon 0,1 ?

5.

a) Etablir que, pour tout entier naturel n, $\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}} = i$.

En déduire la nature du triangle OA_nA_{n+1}.

b) Pour tout entier naturel n, on note d_n la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2\dots A_{n-1}A_n$ .On a ainsi $d_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n$. Exprimer d_n en fonction de n. Quelle est la limite de la suite (d_n) ?

<u>**Correction :**</u> $(A_n)_{n\in IN}$ (z_n) / $z_0 = 2$, $z_{n+1} = \frac{1+i}{2}z_n$.

1. $(z_n)_{n\in IN}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1+i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ et du 1er terme $z_0 = 2$; donc $z_n = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{\frac{\pi}{4}ni}$.

2. Placer les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4.

3. $u_n = |z_n| = \left|2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{\frac{\pi}{4}ni}\right| = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \Leftrightarrow u_{n+1} = |z_{n+1}| = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\times 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = \frac{\sqrt{2}}{2}u_n$, donc, $(u_n)_{n\in IN}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et du 1er terme $u_0 = 2$.

4. A_n appartient au disque de centre O et de rayon 0,1 si $u_n = |z_n| \leq 0{,}12 \Leftrightarrow 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \leq 0{,}12 \Leftrightarrow n = 8{,}6 \Leftrightarrow n_0 = 9$. A partir du rang 9, tous les points A_n appartiennent au disque de centre O et de rayon 0,1.

5. $\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}} = \frac{\frac{1+i}{2}z_n - z_n}{\frac{1+i}{2}z_n} = \frac{\left(\frac{1+i}{2}-1\right)z_n}{\frac{1+i}{2}z_n} = i$ et $\left|\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}\right| = |i| \Leftrightarrow |z_{n+1}-z_n| = |z_{n+1}|$ ou $A_nA_{n+1} = OA_n$ et $\left(\overrightarrow{OA_n}; \overrightarrow{A_nA_{n+1}}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, donc OA_nA_{n+1} est un triangle rectangle et isocèle en A_{n+1}.

6. $2(A_{n+1}A_n)^2 = (OA_n)^2 \Leftrightarrow A_{n+1}A_n = \frac{OA_n}{\sqrt{2}} = \frac{u_n}{\sqrt{2}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$. Ainsi $A_0A_1 = \sqrt{2}$, $A_1A_2 = 1$, $A_2A_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(d_n) est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $\sqrt{2}$ et de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$d_n = \sqrt{2}\frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{-1+\sqrt{2}}\left[1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right]$.

$\lim\ d_n = -2+2\sqrt{2}$.

<u>Exercice 47 :</u> On considère la suite des nombres complexes définie

par : $\begin{cases} \boldsymbol{z_0 = 0} \\ \boldsymbol{z_1 = i} \\ \boldsymbol{z_n - z_{n-1} = i(z_{n-1} - z_{n-2})\quad si\ n \geq 2} \end{cases}$

1. **Exprimer $z_n - z_{n-1}$ en fonction de i et de n.**
2. **Etablir que $z_n = \frac{1-i}{2}(i^n - 1)$.**
3. **Démontrer que cette suite est périodique de période 4.**

<u>**Correction :**</u> $\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_1 = i \\ z_n - z_{n-1} = i(z_{n-1} - z_{n-2})\quad si\ n \geq 2 \end{cases}$

1. $z_2 - z_1 = i(z_1 - z_0) = i^2$
$z_3 - z_2 = i(z_2 - z_1) = i^3$
$z_4 - z_3 = i(z_3 - z_2) = i^4$, pour n, on a : $z_n - z_{n-1} = i^n$.

2. $z_n - z_{n-1} = \frac{1-i}{2}(i^n - 1) - \frac{1-i}{2}(i^{n-1} - 1) = \frac{1-i}{2}i^n(1+i) = i^n$, donc $z_n = \frac{1-i}{2}(i^n - 1)$.

3. $z_{n+4} = \frac{1-i}{2}(i^{n+4} - 1) = \frac{1-i}{2}(i^n - 1) = z_n$, car $i^{n+4} = i^n \times i^4 = i^n$, donc cette suite est périodique à 4.

<u>Exercice 48 :</u> Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{cases} U_1 = 1 \\ (U_{n+1})^2 = 4U_n \end{cases}$.

1. **Calculer U_2, U_3, U_3 et U_4.**
2. **On pose $V_n = \ln(U_n) - \ln 4$.**

a) Montrer que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et son premier terme.

b) Exprimer V_n en fonction de n. En déduire U_n.

c) Calculer $lim\ U_n$.

d) Pour quelles valeurs de n a-t- on $U_n > 3{,}96$?

<u>**Correction :**</u> $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ /$\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{cases} U_1 = 1 \\ (U_{n+1})^2 = 4U_n \end{cases}$.

1. $U_2 = 2$; . $U_3 = 2^{\frac{3}{2}}$; $U_4 = 2^{\frac{7}{4}}$; $U_5 = 2^{\frac{15}{8}}$

2.

a) $V_{n+1} = \ln(U_{n+1}) - \ln 4 = \frac{1}{2}V_n$, $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $V_1 = -2\ln 2$.

b) $V_n = -2\ln 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ et $U_n = 4e^{\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]}$.

c) $lim\ U_n = lim\left(4e^{\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]}\right) = 4e.$

d) $U_n > 3{,}96 \Leftrightarrow 4e^{\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]} > 3{,}96 \Leftrightarrow n < \ln(2 - 2\ln 0{,}99) + 1$. Vous pouvez continuer !

<u>Exercice 49 :</u> Soit a un réel strictement positif. Soit une suite réelle (u_n) définie par son premier terme U_0 strictement positif et la relation de récurrence : $U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{a}{U_n}\right)$.

1. **Démontrer que : $\forall\ n \in\ \mathbb{N}$, $U_n > 0$.**

Pour quelle valeur de U_0 la suite (U_n) est- elle constante ?

2. **On suppose désormais que $U_0^2 - a \neq 0$.**

a) Démontrer que :

- $\forall\ \boldsymbol{n} \in\ \mathbb{N}$, $\boldsymbol{U_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2U_n}\left(U_n - \sqrt{a}\right)^2}$
- $\forall\ \boldsymbol{n} \in\ \mathbb{N}$, $\boldsymbol{U_{n+1} + \sqrt{a} = \frac{1}{2U_n}\left(U_n + \sqrt{a}\right)^2}$.

b) Démontrer que la suite (U_n) est strictement décroissante à partir du rang 1.

En déduire que la suite (U_n) admet une limite. On ne demande pas de calculer cette limite.

3. **Soit (V_n) la suite définie par : $V_n = \frac{U_n - \sqrt{a}}{U_n + \sqrt{a}}$.**

a) Exprimer V_{n+1} en fonction de V_n puis en fonction de V_1 et n.

b) En déduire la limite de la suite (V_n).

4. **Déterminer la limite de la suite (U_n).**

<u>**Correction :**</u>

1. **Démontrons que : $\forall\ n \in\ \mathbb{N}$, $U_n > 0$:**

<u>Initialisation :</u> $U_0 > 0$, donc la propriété est vraie pour n = 0.
<u>Hérédité :</u> on suppose que la propriété est vraie pour un entier naturel k : $U_k > 0$, et montrons que $U_{k+1} > 0$:
$U_{k+1} = \frac{1}{2}\left(U_k + \frac{a}{U_k}\right) > 0$, car $\frac{a}{U_k} > 0$ et $U_k > 0$.
<u>Conclusion :</u> $\forall\ n \in IN$, $U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{a}{U_n}\right)$.

$U_{n+1} = U_n \Leftrightarrow U_n = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{a}{U_n}\right) \Leftrightarrow U_n = \sqrt{a}$.

2. $\boldsymbol{U_0^2 - a \neq 0}$.

a) $U_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{a}{U_n}\right) - \sqrt{a} =$
$\frac{(U_n{}^2 - 2\sqrt{a}U_n + a)}{2U_n} = \frac{1}{2U_n}\left(U_n - \sqrt{a}\right)^2$.
$U_{n+1} + \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{a}{U_n}\right) + \sqrt{a} = \frac{(U_n{}^2 + 2\sqrt{a}U_n + a)}{2U_n} =$
$\frac{1}{2U_n}\left(U_n + \sqrt{a}\right)^2$.

b) $U_1 - U_0 = \frac{1}{2U_0}\left(U_0 - \sqrt{a}\right)^2 - U_0 = -\frac{1}{2U_0}\left(U_0 + \sqrt{a}\right)^2 < 0$, donc la suite (U_n) est strictement décroissante à partir du rang 1 et la suite (U_n) admet une limite, car elle diverge.

3. (V_n) / $V_n = \frac{U_n - \sqrt{a}}{U_n + \sqrt{a}}$.

a) $V_{n+1} = \frac{U_{n+1} - \sqrt{a}}{U_{n+1} + \sqrt{a}} = \left(\frac{U_n - \sqrt{a}}{U_n + \sqrt{a}}\right)^2 = V_n{}^2$ et

$V_0 = \sqrt{V_1}$; $V_n = \sqrt{V_1}(V_n)^{n+1} \Leftrightarrow V_n = \left[\frac{\sqrt{V_1}}{V_1}\right]^{\frac{1}{n}}$.

b) $lim(V_n) = lim\left(\left[\frac{\sqrt{V_1}}{V_1}\right]^{\frac{1}{n}}\right) = 0$.

4. $lim(U_n) = lim\left(\sqrt{a}\,\frac{V_n + 1}{1 - V_n}\right) = \sqrt{a}$.

<u>Exercice 50 :</u> Un client d'une banque dispose au 1er janvier 1996, d'une somme de x F qu'il dépose sur son compte. La banque rémunère à 5% d'intérêts annuels toutes les sommes déposées et verse ces intérêts sur le compte de son client tous les 31 décembre de chaque année. De plus, ce client décide de rajouter y F tous les 31 décembre de chaque année. On désigne par u_n (n entier naturel) la somme disponible après n années écoulées depuis le 1er janvier 1996, ainsi $u_0 = x$.

2. **Calculer u_1, u_2 et u_3.**

3. **Montrer que pour tout entier naturel non nul, $u_{n+1} = (1,05)u_n + y$.**

<u>Correction :</u> $u_0 = x$

1. $u_1 = x + x \times 5\% + y = x(1 + 5\%) + y$,
$u_2 = u_1(1 + 5\%) + y$ **et** $u_3 = (1 + 5\%)u_2 + y$.

2. **Montrer que $u_{n+1} = (1,05)u_n + y$:**

u_n la somme placée au le 1er janvier 1996, un an plus tard le client dispose de $u_n + 0{,}05u_n = 1{,}05u_n$. Or au 31 décembre de chaque année $(1996 + n)$, il dépose y F soit donc $u_{n+1} = (1,05)u_n + y$.

Fonctions numériques

Louange à Allah et que la prière et le salut soient sur le serviteur et Messager d'Allah, Muhammad, le meilleur que l'humanité est porté (malheur à ceux qui l'ont insultés et mentis sur lui.), sa famille et ses Compagnons.
Gloire à Dieu, mon Maitre Qui m'a tout donné et continue à me donner. Je n'ai de savoir de ce qu'Allah (soub hana wat tala), Le Tout Miséricordieux m'avait offert.
Seigneur pardonne nos péchés, fais-nous miséricorde, accepte nos bonnes œuvres et bénit nos actions. Ta parole est véridique.
Louange à Allah, Qui de Sa Grace, j'avais pu proposer cette œuvre Qui sans Lui, je ne serais pas à ce niveau. « Gloire et pureté à Toi, ô Allah, et à Toi la louange. Que ton Nom soit béni et Ta Majesté soit élevée, et il n'y a pas d'autre divinité [digne d'adoration] en dehors de Toi »

ALLAH MERCI

Moussa Abdoulaye Diallo

Auteur

SMS 90 10 89 59

Fonctions numériques

<u>Problème 1 :</u> On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2-|1-x|}{|x|}$; d'unité graphique 2 cm.

1.

a) Etudier les limites de f sur D_f.

b) Etudier le sens de variation de f puis sa dérivabilité en 1. Déterminer les équations des demi-tangentes T_{1^-} et T_{1^+} au point d'abscisse 1 ($f(1) = 1$)

c) Dresser le tableau de f sur D_f.

2. Montrer que les droites (d) et (d') d'équations respectives $y = -x - 1$ et $y = x - 1$ sont asymptotes obliques à $\mathcal{C}_f$ respectivement en $-\infty$ et $+\infty$. Etudier leurs positions relatives par rapport à $\mathcal{C}_f$.

3. Tracer $\mathcal{C}_f$; T_{1^-} ; T_{1^+} ; (d) et (d').

4. Soit λ un nombre réel tel que $\lambda < e$.

a) Calculer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ en cm^2 du domaine plan limité par $\mathcal{C}_f$, la droite (d') et des droites d'équations respectives $x = \lambda$ et $x = 1$.

b) Déterminer la limite éventuelle de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers 2.

<u>Correction :</u> $f(x) = \frac{x^2-|1-x|}{|x|}$.

1.

a) Etudier les limites de f sur $D_f = IR - \{0\}$.

- $\forall\, x \in]-\infty; 0[$, $f(x) = -\frac{x^2+x-1}{x} = -x - 1 + \frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \left[-x - 1 + \frac{1}{x}\right] = +\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0^-} \left[-x - 1 + \frac{1}{x}\right] = \frac{1}{0^-} = -\infty$.

- $\forall\, x \in]0; 1]$ $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x} = x + 1 - \frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x \mapsto 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0^+} \left[x + 1 - \frac{1}{x}\right] = -\frac{1}{0^+} = -\infty$

- $\forall\, x \in [1; +\infty[$ $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x} = x - 1 + \frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[x - 1 + \frac{1}{x}\right] = +\infty$.

b) dérivabilité de f en 1 ($f(1) = 1$).

$\forall\, x < 0$ $f(x) = -\frac{x^2+x-1}{x} \Leftrightarrow f'(x) = -1 - \frac{1}{x^2} < 0$ alors f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$.

$\forall\, x \in]0; 1]$, $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x} \Leftrightarrow f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0$ alors f est strictement croissante sur $]0; 1]$ et $f'g(1) = 2$ donc T_{1^-} $y = 2x - 1$.

$\forall\, x \in [1; +\infty[$ $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x} \Leftrightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} > 0$ alors f est strictement croissante sur $[1; +\infty[$ et $f'd(1) = 0$ donc T_{1^+} $y = 1$.

$f'g(1) \neq f'd(1)$ alors f n'est pas dérivable en 1.

c) Dresser le tableau de f sur D_f.

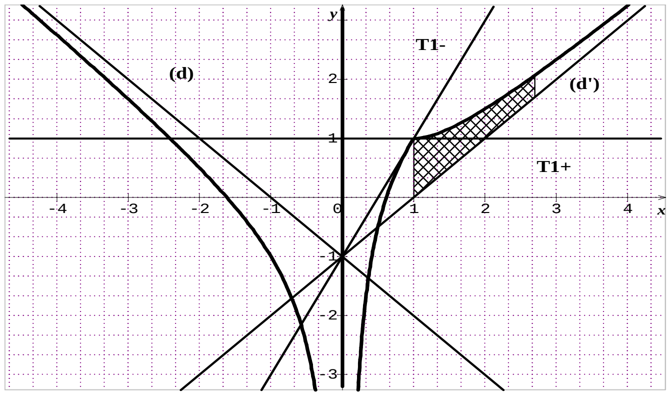
x	$-\infty$		0		1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$		$\Vert$	$-\infty \nearrow$	1	$\nearrow +\infty$

2. $\lim\limits_{x \mapsto -\infty}[f(x) - (-x - 1)] = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc la droite (d) d'équation $y = -x - 1$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en en $-\infty$.

Sur $]-\infty; 0[$ $f(x) - (-x - 1) = \frac{1}{x} < 0$ alors $\mathcal{C}_f$ est au dessous de la droite (d) en $-\infty$.

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty}[f(x) - (x - 1)] = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc la droite (d') d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en en $+\infty$. Sur $]0; +\infty[$ $f(x) - (x - 1) = \frac{1}{x} > 0$ alors $\mathcal{C}_f$ est au dessus de la droite (d') en $+\infty$.

3. f ; T_{1^-} ; T_{1^+} ; (d) et (d') :



4. λ un nombre réel tel que $\lambda < e$.

a) $U = \int_1^\lambda [f(x) - (x - 1)]dx = \int_1^\lambda \frac{1}{x}dx = [\ln x]_1^\lambda$

$U = \ln \lambda$. Donc l'aire $\mathcal{A}(\lambda) = U\ 4\ cm^2 = 4 \ln \lambda\ cm^2$.

b) $\lim\limits_{\lambda \mapsto 2} \mathcal{A}(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \mapsto 2}[4 \ln \lambda\ cm^2] = 4 \ln 2\ cm^2$.

<u>Problème 2 :</u>

1. On considère la fonction g définie par $g(x) = x + \sqrt{|x^2 - 1|}$.

a) Quel est l'ensemble de définition de g ? Donner les expressions de g sans le symbole de la valeur absolue sur D_g.

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de g en -1 et en 1. Interpréter ces résultats.

c) Déterminer les limites de g sur D_g.

Dresser le tableau de variation de g.

d) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_g$ en $+\infty$.

e) Déterminer l'équation de la tangente T au point d'abscisse 0. Construire $\mathcal{C}_g$; T et (D).

2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution, notée x_0, appartient à l'intervalle $[-1; 0]$. Donner une valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près. En déduire le signe de la fonction g.

3. Démontrer que la restriction g de f à l'intervalle $[1; +\infty[$ admet une application réciproque f^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition. Expliciter f^{-1}. Construire $\mathcal{C}_{f^{-1}}$.

4. Dresser le tableau de variation de la fonction h définie par $h(x) = |g(x)|$. Construire $\mathcal{C}_h$.

<u>**Correction :**</u> $g(x) = x + \sqrt{|x^2 - 1|}$

1.

a) $D_g =]-\infty; +\infty[$.

$\forall\, x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$, $g(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$.

$\forall\, x \in [-1; 1]$, $g(x) = x + \sqrt{1 - x^2}$

b) Continuité de g en -1 :

$\lim\limits_{x \mapsto -1^-} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto -1^-}\left[x + \sqrt{x^2 - 1}\right] = -1$ et

$\lim\limits_{x \mapsto -1^+} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto -1^+}\left[x + \sqrt{1 - x^2}\right] = -1$ alors g est continue en -1.

Continuité de g en 1 :

$\lim\limits_{x \mapsto 1^+} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto 1^+}\left[x + \sqrt{x^2 - 1}\right] = 1$ et

$\lim\limits_{x \mapsto 1^-} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto 1^-}\left[x + \sqrt{1 - x^2}\right] = 1$ alors g est continue en 1.

dérivabilité de g en -1 :

$\lim\limits_{x \mapsto -1^-} \frac{g(x) - g(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x \mapsto -1^-}\left[1 + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right] = +\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto -1^+} \frac{g(x) - g(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x \mapsto -1^+}\left[1 + \sqrt{\frac{1-x}{x+1}}\right] = +\infty$ alors g n'est pas dérivable en -1. Donc $\mathcal{C}_g$ admet en -1 une tangente verticale.

dérivabilité de g en 1 :

$\lim\limits_{x \mapsto 1^+} \frac{g(x) - g(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \mapsto 1^+}\left[1 + \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right] = +\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \mapsto 1^-}\left[1 - \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\right] = -\infty$ alors g n'est pas dérivable en 1. Donc $\mathcal{C}_g$ admet en 1 une tangente verticale.

c) $g(x) = x + \sqrt{x^2 - 1} = \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}\left[\frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}}\right] = 0$ et

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[x + \sqrt{x^2 - 1}\right] = +\infty$.

$\forall\, x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, $g'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1}}$, $\forall\, x \in]-\infty; -1[$, $g'(x) < 0$, alors g est strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$.

$\forall\, x \in]1; +\infty[$, $g'(x) > 0$, alors g est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.

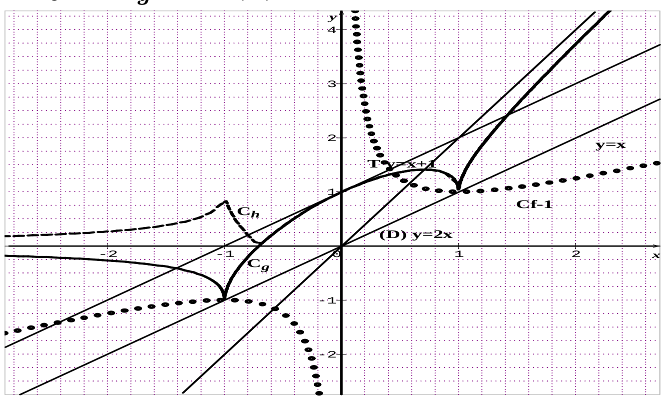
$\forall\, x \in]-1; 1[$, $g'(x) = \frac{\sqrt{1 - x^2} - x}{\sqrt{1 - x^2}} > 0$, alors g est strictement croissante sur $]-1; 1[$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	‖	$+$	‖	$+$	
$g(x)$	0	↘	-1	↗	1	↗	$+\infty$

d) $g(x) - y = x + \sqrt{x^2 - 1} - 2x = \frac{-1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$. On calcule $\lim\limits_{x \mapsto +\infty}[g(x) - y] = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[\frac{-1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}\right] = 0$ donc la droite (D) d'équation $y = 2x$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_g$ en $+\infty$. La droite (D) est au-dessus de $\mathcal{C}_g$.

e) T $y = g'(0)(x - 0) + g(0) = x + 1$.

Traçons $\mathcal{C}_g$; T et (D).



2. g est continue et strictement croissante sur $[-1; 0]$. Elle réalise donc une bijection de $[-1; 0]$ sur $[g(-1); g(0)] = [-1; 1]$. Or $g(-1) \times g(1) < 0$. Donc sur $[-1; 0]$, il a un unique antécédent. Ainsi l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $x_0 \in [-1; 0]$ et $x_0 = -0{,}72$.

3. f est continue et strictement croissante sur $[1;+\infty[$. Donc la fonction f réalise une bijection de $[1;+\infty[$ vers $J = [f(1); f(+\infty)[= [1;+\infty[$.

Explicitons f^{-1} : $y = x + \sqrt{x^2-1} \Rightarrow x = \frac{y^2+1}{2y}$.

$\forall\, x \in [1;+\infty[\,, f^{-1}(x) = \frac{x^2+1}{2x}$.

Voir la figure pour $\mathcal{C}_{f^{-1}}$.

4. $h(x) = |g(x)| = \left|x + \sqrt{|x^2-1|}\right|$; $D_h = \mathbb{R}$.

Soit $\beta \in$ IR telle que $h(\beta) = 0$.

x	$-\infty$	-1	β	1	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	‖ $-$	‖ $+$	‖ $+$	
$h(x)$	$0 \nearrow$	$1 \searrow$	$0 \nearrow$	$\nearrow$	$+\infty$

Pour tracer $\mathcal{C}_h = \mathcal{C}_{|g|}$ en dehors de ce tableau, on doit toujours considérer que $h(x) > 0$.

Problème 3 :

1. Soit la fonction u définie par $u(x) = x^3 + 3x + 8$.

a) Etudier le sens de variation de u sur IR.

b) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet sur IR une solution unique α dont on donnera un encadrement d'amplitude 0,1 puis donner une valeur approchée de α à 0,01 près si $\alpha \in [-2;-1]$.

c) Préciser le signe de $u(x)$ selon les valeurs de x.

2. On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^3-4}{x^2+1}$.

a) Montrer que $\forall\, x \in$ IR $f'(x) = x\frac{u(x)}{(x^2+1)^2}$. En déduire le sens de variation de f sur D_f.

b) Dresser le tableau de f sur D_f.

c) Vérifier que $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$.

d) En déduire une valeur approchée de $f(\alpha)$.

3.

a) Démontrer qu'il existe des nombres réels a, b, c et d tels que, pour tout x appartenant à IR, $f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2+1}$.

b) Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique Δ à l'infinie.

c) Etudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ à l'infinie (c-à-d en $-\infty$ et en $+\infty$).

4. Déterminer les abscisses des points B et B' de $\mathcal{C}_f$ admettant une tangente parallèle à Δ.

5. Construire la courbe $\mathcal{C}_f$ et Δ.

Correction :

1. $u(x) = x^3 + 3x + 8$.

a) $\forall\, x \in$ IR , $u'(x) = 3(x^2+1) > 0$, alors u est strictement croissante sur IR.

b) u est continue et strictement croissante sur IR. Elle réalise une bijection de IR sur IR. Et $u(-\infty) \times u(+\infty) < 0$ alors l'équation $u(x) = 0$ admet sur IR une solution unique α telle que $u(\alpha) = 0$.

Encadrement d' α à l'amplitude 0,1 près

$u(-1{,}6) = -0{,}896$ et $u(-1{,}5) = 0{,}125$

$u(-1{,}6) \times u(-1{,}5) < 0$ alors $-1{,}6 \le \alpha \le -1{,}5$

Encadrement d' α à l'amplitude 0,01 près.

$u(-1{,}52) = -0{,}072$ et $u(-1{,}51) = 0{,}027$

$u(-1{,}52) \times u(-1{,}51) < 0$ alors $-1{,}52 \le \alpha \le -1{,}51$.

c) $\forall\, x \in]-\infty; \alpha]$ $u(x) \le 0$ et $\forall\, x \in [\alpha; +\infty[$, $u(x) \ge 0$.

2. $f(x) = \frac{x^3-4}{x^2+1}$.

a) Etudier les variations de f.

$\forall\, x \in$ IR $f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1)-2x(x^3-4)}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^4+3x^2-2x^4+8x}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = \frac{x^4+3x^2+8x}{(x^2+1)^2} = x\frac{x^3+3x+8}{(x^2+1)^2} = x\frac{u(x)}{(x^2+1)^2}$ son signe de celui de $x.u(x)$:

$\forall\, x \in]-\infty;\alpha] \cup [0;+\infty[$ $f'(x) \ge 0$ alors f est croissante sur $]-\infty;\alpha]$ et sur $[0;+\infty[$.

$\forall\, x \in [\alpha; 0]$ $f'(x) \le 0$ alors f est décroissante sur $[\alpha; 0]$.

b) Dresser le tableau de f sur D_f :

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} x = +\infty$

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	$f(\alpha) \searrow$	$-4 \nearrow$	$+\infty$

c) On sait que $g(\alpha) = \alpha^3 + 3\alpha + 8 = 0$. D'une part $f(\alpha) = \frac{\alpha^3-4}{\alpha^2+1} = \frac{3}{2}\alpha \Leftrightarrow \frac{-\alpha^3-3\alpha-8}{2} = 0 \Leftrightarrow \alpha^3 + 3\alpha + 8 = 0$. Ainsi $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$.

d) valeur approchée de $f(\alpha)$.

D'après ce qui précède, on a $-1{,}52 \le \alpha \le -1{,}51 \Leftrightarrow -2{,}28 \le \frac{3}{2}\alpha \le -2{,}26$ or $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$

donc $-2{,}28 \le f(\alpha) \le -2{,}26$.

3.

a) $f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2+1} = \frac{ax^3+bx^2+(a+c)x+b+d}{x^2+1} = \frac{x^3-4}{x^2+1}$. Par identification on obtient : $a = 1$, $b = 0$, $c = -1$ et $d = -4$. D'où $f(x) = x - \frac{x+4}{x^2+1}$.

b) $f(x) - x = -\frac{x+4}{x^2+1}$, on a :

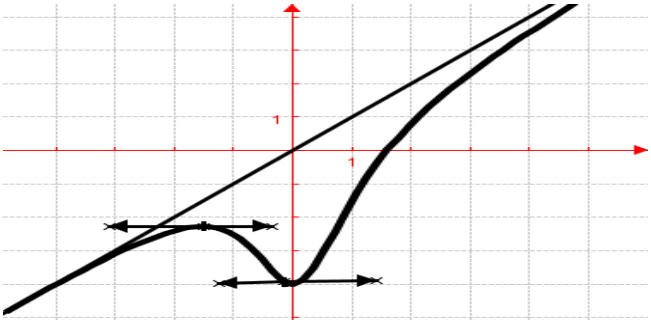
$\lim\limits_{x \mapsto \pm\infty}[f(x) - x] = \lim\limits_{x \mapsto \pm\infty}\left[-\frac{x+4}{x^2+1}\right] = 0$ donc la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique Δ d'équation $y = x$.

c) $\forall\, x \in]-\infty;-4]\ f(x)-x=-\frac{x+4}{x^2+1} \geq 0$ alors $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de Δ en $-\infty$ et

$\forall\, x \in [-4;+\infty[\ f(x)-x=-\frac{x+4}{x^2+1} \leq 0$ alors $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de Δ en $+\infty$.

4. $f'(x_0)=1 \Leftrightarrow {x_0}^2+8x_0-1=\big(x_0+4+$ *17x0+4+17=0* alors B *−4−17;f−4−17* et B$'\left[-4+\sqrt{17};f\left(-4+\sqrt{17}\right)\right]$.

5. $\mathcal{C}_f$ **et** Δ**.**



Problème 4 : **unité graphique 2 cm**

1. **Soit la fonction u définie par $u(x)=2x^3+6x^2+6x-4$.**

a) **Etudier le sens de variation de u sur IR.**

b) **Montrer que l'équation $u(x)=0$ admet une solution unique α telle que $\alpha \in [0,4;0,5]$.**

c) **Préciser le signe de $u(x)$ selon les valeurs de x.**

2. **On considère la fonction f définie par :**

$f(x)=\frac{2x^3+3x^2+2}{(x+1)^2}$.

a) **Démontrer que $f(x)=2x-1+\frac{3}{(x+1)^2}$.**

b) **Montrer que $\forall\, x \in$ IR $-\{-1\}$ $f'(x)=\frac{u(x)}{(x+1)^3}$.**

En déduire le sens de variation de f sur D_f.

c) **Dresser le tableau de f sur D_f.**

3. **Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique (d) d'équation $y=2x-1$ à l'infinie. Etudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (d) à l'infinie.**

4. **Construire la courbe $\mathcal{C}_f$ et (d).**

5. **Soit λ un nombre réel tel que $\lambda>0$.**

a) **Calculer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ en cm^2 du domaine plan limité par $\mathcal{C}_f$, la droite (d) et des droites d'équations respectives $x=\lambda$ et $x=0$.**

b) **Déterminer $\mathcal{A}\left(\frac{3}{2}\right)$**

Correction :

1. $u(x)=2x^3+6x^2+6x-4$ **.**

a) $\forall\, x \in$ IR , $u'(x)=6(x+1)^2>0$, alors u est strictement croissante sur IR.

b) $u(0{,}5)=0{,}75$ et $u(0{,}4)=-0{,}512$

u est continue et strictement croissante sur $[\mathbf{0};\mathbf{0},\mathbf{4}]$. De plus $u(0{,}4)\times u(0{,}5)<0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $u(x)=0$ admet une solution unique α telle que $\alpha \in [0{,}4;0{,}5]$ et $u(\alpha)=0$.

c) $\forall\, x \in]-\infty;\alpha]\ u(x) \leq 0$ et

$\forall\, x \in [\alpha;+\infty[,\ u(x) \geq 0$.

2. $f(x)=\frac{2x^3+3x^2+2}{(x+1)^2}$; $D_f=]-\infty;-1[\,\cup\,]-1;+\infty[$

a) **Démontrer que $f(x)=2x-1+\frac{3}{(x+1)^2}$:**

$f(x)=2x-1+\frac{3}{(x+1)^2}=\frac{(2x-1)(x^2+2x+1)+3}{(x+1)^2}=$

$f(x)=\frac{2x^3+4x^2+2x-x^2-2x-1+3}{(x+1)^2}=\frac{2x^3+3x^2+2}{(x+1)^2}$.

b) **Etudier les variations de f.**

$\forall\, x \neq -1\ f'(x)=2-\frac{6}{(x+1)^3}=\frac{2x^3+6x^2+6x+2-6}{(x+1)^3}$

$f'(x)=\frac{2x^3+6x^2+6x-4}{(x+1)^2}=\frac{u(x)}{(x+1)^2}$ son signe de $u(x)$:

$\forall\, x \in]-\infty;-1[\,\cup\,]-1;\alpha]\ f'(x)<0$ alors f est strictement décroissante sur $]-\infty;-1[$ et sur $]-1;\alpha]$.

$\forall\, x \in]\alpha;+\infty[\ f'(x)>0$ alors f est strictement croissante sur $]\alpha;+\infty[$.

c) **Dresser le tableau de f sur D_f :**

$\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto-\infty} 2x=-\infty$; $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty} 2x=+\infty$

$\lim\limits_{x\mapsto-1^-} f(x)=\frac{3}{0^+}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\mapsto-1^+} f(x)=\frac{3}{0^+}=+\infty$.

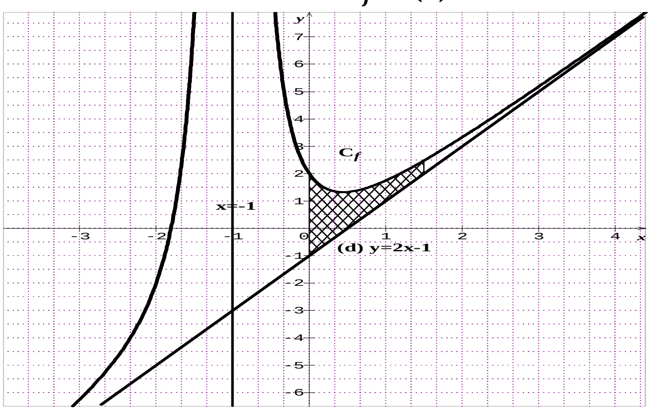
x	$-\infty$	-1		α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	||	$-$		$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	||	$+\infty \searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow +\infty$

3. $f(x)-y=\frac{3}{(x+1)^2}$ on aura :

$\lim\limits_{x\mapsto\pm\infty}[f(x)-(2x-1)]=\lim\limits_{x\mapsto\pm\infty}\left[\frac{3}{(x+1)^2}\right]=0$ donc $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique (d) d'équation $y=2x-1$ à l'infinie.

$\forall\, x \neq -1\ \ f(x)-y=\frac{3}{(x+1)^2}>0$ alors $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (d) à l'infinie.

4. **Construire la courbe $\mathcal{C}_f$ et (d).**



5. **λ un nombre réel tel que $\lambda > 0$.**

a) $U = \int_0^{\lambda}[f(x) - y]dx = \int_0^{\lambda} \frac{3}{(x+1)^2} dx = \left[-\frac{3}{x+1}\right]_0^{\lambda}$

$U = 3 - \frac{3}{\lambda+1} = 3\left(1 - \frac{1}{\lambda+1}\right)$.

Donc l'aire $\mathcal{A}(\lambda) = U\ 4\ cm^2 = 12\left(1 - \frac{1}{\lambda+1}\right) cm^2$.

b) $\mathcal{A}\left(\frac{3}{2}\right) = 12\left(1 - \frac{1}{\frac{3}{2}+1}\right) cm^2 = 7{,}2\ cm^2$

<u>Problème 5 :</u> On considère la fonction h définie par : $h(x) = x + 1 + \frac{1}{x+1}$. D'unité graphique 2 cm.

1.

a) **Quel est l'ensemble de définition de h ?**

b) **Soit A le point de coordonnées $(-1; 0)$. Montrer que le point A est centre de symétrie de $\mathcal{C}_h$.**

4.

a) **Etudier les limites de h sur D_h.**

b) **Montrer que $\forall\ x \neq -1$, $h'(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$. En déduire le sens de variation de h sur D_h.**

c) **Dresser le tableau de variation de h.**

d) **Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_h$. Etudier la position relative de $\mathcal{C}_h$ par rapport à (D).**

5.

a) **Monter que h admet une bijective de $[0; +\infty[$ sur l'intervalle J qu'on déterminera. Expliciter la fonction h^{-1} réciproque de h.**

b) **Tracer les courbes $\mathcal{C}_h$ et $\mathcal{C}_{h^{-1}}$.**

c) **Indiquer graphiquement, suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation : $h(x) = m$.**

6. **Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :**
$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ \ u_{n+1} = h^{-1}(u_n) \end{cases}$
Montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N}\ \ u_n > 0$.

7. **On note $\mathbb{C} - \{-1\}$ l'ensemble des nombres complexes différent de -1 et on considère l'application $h(z) = z + 1 + \frac{1}{z+1}$, on pose $z = x + iy$.**

- **Quel est l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant chacune des conditions suivantes :**

a) **$h(z) \in$ IR**

b) **$h(z) \in i$IR**

- **résoudre dans $\mathbb{C}$, $h(z) = 0$.**

6. **Soit λ un nombre réel tel que $\lambda > 0$.**

a) **Montrer que la fonction h admet une primitive H qu'on calculera sur $]-\infty; -1[$, telle que $H(0) = 0$.**

b) **Calculer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ en cm^2 du domaine plan limité par $\mathcal{C}_f$, la droite (D) et des droites d'équations respectives $x = \lambda$ et $x = 0$.**

c) **Déterminer $\mathcal{A}\left(\frac{3}{2}\right)$**

<u>Correction :</u> $h(x) = x + 1 + \frac{1}{x+1}$.

1.

a) $D_h =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$.

b) $h(-2-x) + h(x) = \left(-2 - x + 1 + \frac{1}{-2-x+1}\right) + \left(x + 1 + \frac{1}{x+1}\right) = 0$, alors le point $A(-1; 0)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_h$.

2.

a) Comme $\lim\limits_{x \mapsto \pm\infty} \frac{1}{x+1} = 0$ alors

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}(x+1) = -\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}(x+1) = +\infty$; $\lim\limits_{x \mapsto -1^-} h(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto -1^+} h(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$. $\mathcal{C}_h$ admet l'asymptote verticale $x = -1$. Comme $\lim\limits_{x \mapsto \infty} h(x) = \infty$, alors il ya une possibilité d'avoir une branche infinie qu'on déterminera plus tard.

b) $\forall\ x \neq -1$, $h'(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$, alors h est strictement croissante sur $]-\infty; -2[$ et sur $]0; +\infty[$. h est aussi strictement décroissante sur $]-2; -1[$ et sur $]-1; 0[$.

c) **tableau de variation de la fonction f.**

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$		$-$	‖	$-$		$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$ $-\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

d) $h(x) - y = h(x) - x - 1 = \frac{1}{x+1}$, on calcule $\lim\limits_{x \mapsto \pm\infty}[h(x) - y] = 0$, alors la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_h$ à l'infinie.

Position relative de $\mathcal{C}_h$ par rapport à (D).

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$\frac{1}{x+1}$	$-$	‖	$+$

Sur $]-\infty; -1[$, $\mathcal{C}_h$ est au-dessous de (D).

Sur $]-1; +\infty[$, $\mathcal{C}_h$ est au-dessus de (D).

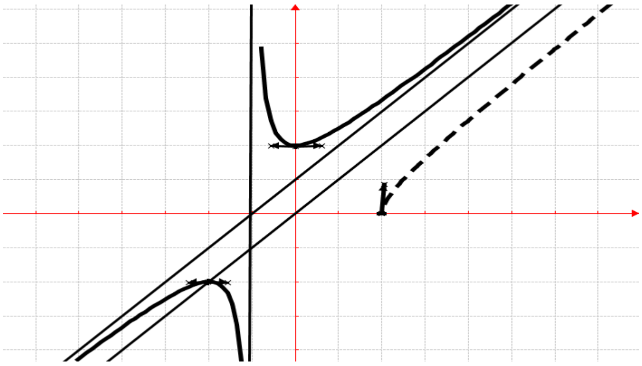
3.

a) h est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $[0; +\infty[$ sur

$J = [2;+\infty[$. **Explicitons h^{-1} :** $y = x + 1 + \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow x^2 + (2-y)x + 2 - y = 0 \Leftrightarrow x = \frac{y-2+\sqrt{y^2-4}}{2}$.

$\forall\, x \in [2;+\infty[\ h^{-1}(x) = \frac{1}{2}\left(x - 2 + \sqrt{x^2-4}\right)$.

b) $\mathcal{C}_h$ en trait continue et $\mathcal{C}_{h^{-1}}$ en trait discontinue



c) nombre de solutions de $h(x) = m$.

On trouve la droite d'équation $y = m$ et on détermine graphiquement en combien de points elle coupe $\mathcal{C}_h$.

- Si $m \in]-\infty;-2[$, deux solutions
- Si $m = -2$, une seule solution
- Si $m = 2$, une seule solution
- Si $m \in]-2;2[$, aucune solution
- Si $m \in]2;+\infty[$, deux (2) solutions.

4. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = \frac{u_n - 2 + \sqrt{u_n^2 - 4}}{2} \end{cases}$

Montrons que : $\forall\, n \in \mathbb{N}\ u_n > 0$

<u>Initialisation :</u> $u_0 = 2 > 0$, la propriété est vraie, $n = 0$.
<u>Hérédité :</u> on suppose que la propriété est vraie pour un entier naturel k : $u_k > 0$, et montrons que $u_{k+1} > 0$:
On a $u_k^2 - 4 > -4 \Leftrightarrow \sqrt{u_k^2 - 4} > 2 \Leftrightarrow -2 + \sqrt{u_k^2-4} > 0 \Leftrightarrow u_k - 2 + \sqrt{u_k^2-4}$, donc $u_{k+1} > 0$ (vraie). <u>Conclusion :</u> $\forall\, n \in \mathbb{N}\ u_n > 0$.

5. $\mathbb{C} - \{-1\}$ / $h(z) = z + 1 + \frac{1}{z+1}$.

- **l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant chacune des conditions suivantes :**

$h(z) = \frac{z^2+2z+2}{z+1} = \frac{x^3+3x^2+2x+2xy^2+4+i(yx^2+y^2)}{(x+1)^2+y^2}$

a) $h(z) \in \mathrm{IR} \Leftrightarrow \mathrm{Im}[h(z)] = yx^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ou $y = -x^2$, c'est une parabole.

b) $h(z) \in i\mathrm{IR} \Leftrightarrow \mathrm{Re}[h(z)] = x^3 + 3x^2 + 2x + 2xy^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{\frac{-(x^3+3x^2+2x+2xy^2+4)}{2x}}$, c'est une hyperbole.

- **résoudre dans $\mathbb{C}$,** $h(z) = \frac{z^2+2z+2}{z+1} = 0 \Leftrightarrow z^2 + 2z + 2 = 0$, $\Delta = -4 = (2i)^2$, la racine est $z = -1 \pm 2i$, donc $S_{\mathbb{C}} = \{-1-2i; -1+2i\}$

6. **Soit λ un nombre réel tel que $\lambda > 0$.**

a) $h(x) = x + 1 + \frac{1}{x+1}$ a pour primitive
$H(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x+1| + C$, avec C est constante.
$H(0) = 0 \Leftrightarrow C = 0$, on obtient
$\forall\, x \in]-\infty;-1[$, $H(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + \ln(-x-1)$.

b) $U = \int_0^{\lambda}[f(x) - y]dx = \int_0^{\lambda}\frac{1}{x+1}dx = [\ln(x+1)]_0^{\lambda} = \ln(\lambda+1)$.
Donc l'aire $\mathcal{A}(\lambda) = U\ 4\ cm^2 = 4\ln(\lambda+1)\ cm^2$.

c) $\mathcal{A}\left(\frac{3}{2}\right) = 4\ln(\lambda+1)\ cm^2 = 3{,}66\ cm^2$

<u>Problème 6 :</u> On considère la fonction h définie par : $h(x) = \frac{x^2}{2x-1}$.

1.

a) Quel est l'ensemble de définition de h ?

b) Soit A le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Montrer que le point A est centre de symétrie de $\mathcal{C}_h$.

c) Déterminer les réels a, b, c tels que pour tout réel x de l'ensemble de définition de h, on ait $h(x) = ax + b + \frac{c}{2x-1}$.

d) Montrer que la fonction h admet une primitive H sur $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ qu'on calculera, telle que $H(0) = \frac{\ln 2}{4}$.

2.

a) Etudier les limites de h sur D_h.

b) Montrer que $\forall\, x \neq \frac{1}{2}\ h'(x) = \frac{2x^2-2x}{(2x-1)^2}$. En déduire le sens de variation de h sur D_h.

c) Dresser le tableau de variation de h.

d) Montrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_h$.

Etudier la position relative de $\mathcal{C}_h$ par rapport à (D).

3. Monter que h admet une bijective de $]-\infty;0]$ sur l'intervalle J qu'on déterminera. Expliciter la fonction h^{-1} réciproque de h.

Tracer les courbes $\mathcal{C}_h$ et $\mathcal{C}_{h^{-1}}$.

4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = h(u_n) \end{cases}$ et on considère les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$ et $w_n = \ln(v_n)$.

a) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}\ u_n > 1$.

b) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}\ v_n > 0$.

c) Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. Donner les éléments caractéristiques.

d) **Exprimer $S_{0,n} = w_0 + w_1 + \cdots w_n$ en fonction de n. Calculer $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} S_{0,n}$.**

e) **Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.**

En déduire que : $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n$.

<u>**Correction :**</u> $h(x) = \frac{x^2}{2x-1}$.

1.

a) $D_h = \left\{x / x \in IR, x \neq \frac{1}{2}\right\} = \left]-\infty ; \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$.

b) $\forall\, x \neq \frac{1}{2},\ h(1-x) + \frac{x^2}{2x-1} = \frac{-1+2x-x^2+x^2}{2x-1} = 1$, donc $A\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_h$.

c) $h(x) = \frac{x^2}{2x-1} = ax + b + \frac{c}{2x-1} = \frac{ax^2+(2b-a)x-b+c}{2x-1}$. Par identification $a = \frac{1}{2}$; $b = \frac{1}{4}$ et $c = \frac{1}{4}$, on obtient $h(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{1}{8x-4}$.

d) $h(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \times \frac{8}{8x-4}$ a pour primitive $H(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\ln|8x-4| + C$ avec C est cte.

$H(0) = \frac{\ln 2}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4}\ln 2 + C = \frac{\ln 2}{4} \Leftrightarrow C = 0$, on obtient $\forall\, x < \frac{1}{2}\ H(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\ln(4-8x)$.

2.

a) Comme $\lim\limits_{x \mapsto \pm\infty} \frac{1}{8x-4} = 0$ alors

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) = -\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) = +\infty$; $\lim\limits_{x \mapsto \frac{1}{2}^-} h(x) = \frac{\frac{1}{4}}{0^-} = -\infty$

et $\lim\limits_{x \mapsto \frac{1}{2}^+} h(x) = \frac{\frac{1}{4}}{0^+} = +\infty$. $\mathcal{C}_h$ admet l'asymptote verticale $x = \frac{1}{2}$. Comme $\lim\limits_{x \mapsto \infty} h(x) = \infty$, alors il ya une possibilité d'avoir une branche infinie qu'on déterminera plus tard.

b) $\forall\, x \neq \frac{1}{2},\ h'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{(2x-1)^2} = \frac{(2x-1)^2-1}{2(2x-1)^2} = \frac{(2x-1-1)(2x-1+1)}{2(2x-1)^2} = \frac{2x(2x-2)}{2(2x-1)^2} = \frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2}$, alors h est strictement croissante sur $]-\infty; 0]$ et sur $[1; +\infty[$ et h est aussi strictement décroissante sur $\left[0; \frac{1}{2}\right[$ et sur $\left]\frac{1}{2}; 1\right]$.

c) **tableau de variation de la fonction f.**

x	$-\infty$ 0	$\frac{1}{2}$	1 $+\infty$
$h'(x)$	$+$ $-$	‖	$-$ $+$
$h(x)$	$-\infty \nearrow 0 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 1 \nearrow +\infty$

d) $h(x) - y = h(x) - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = \frac{1}{8x-4}$, on calcule $\lim\limits_{x \mapsto \pm\infty}[h(x) - y] = 0$, alors la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_h$ à l'infinie.

Position relative de $\mathcal{C}_h$ par rapport à (D).

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$\frac{1}{8x-4}$	$-$	‖	$+$

Sur $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$, $\mathcal{C}_h$ est au-dessous de (D).

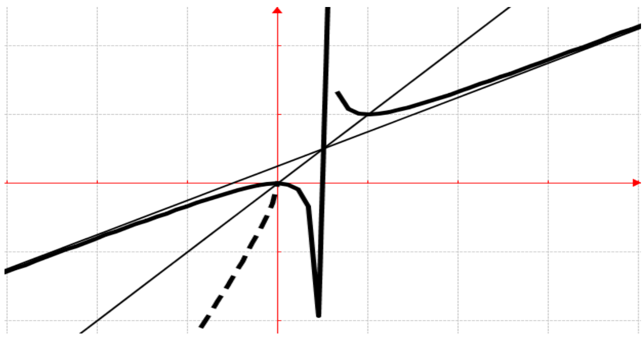
Sur $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$, $\mathcal{C}_h$ est au-dessus de (D).

3. h est continue et strictement croissante sur $]-\infty; 0]$. Elle réalise donc une bijection de $]-\infty; 0]$ sur $J =]-\infty; 0]$.

Explicitons h^{-1} : $y = \frac{x^2}{2x-1} \Leftrightarrow x^2 - 2yx + y = 0 \Leftrightarrow x = y - \sqrt{y^2 - y}$.

$\forall\, x \in]-\infty; 0]$,$h^{-1}(x) = x - \sqrt{x^2 - x}$.

$\mathcal{C}_h$ en trait plein et $\mathcal{C}_{h^{-1}}$



4. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} / \begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = \frac{u_n^{\,2}}{2u_n - 1} \end{cases}$

a) **Montrons que : $\forall\, n \in \mathbb{N}\ u_n > 1$**

<u>Initialisation :</u> $u_0 = 2 > 1$, la propriété est vraie pour $n = 0$.

<u>Hérédité :</u> on suppose que la propriété est vraie pour un entier naturel k : $u_k > 1$, et démontrons que $u_{k+1} > 1$:

On a $2u_k - 1 > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2u_k - 1} < 1 < u_k^{\,2} \Leftrightarrow \frac{u_k^{\,2}}{2u_k-1} > 1$, donc $u_{k+1} > 1$ (vraie)

<u>Conclusion :</u> $\forall\, n \in \mathbb{N}\ u_n > 1$.

b) **Montrons que : $\forall\, n \in \mathbb{N}\ v_n > 0$**

<u>Initialisation :</u> $v_0 = \frac{1}{2} > 0$, la propriété est vraie pour $n = 0$.

<u>Hérédité :</u> montrons que pour un entier naturel k : $v_k > 0$,: On a sait que $u_k > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{u_k} < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{u_k} > 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{u_k} > 0$, or $v_k = 1 - \frac{1}{u_k} = \frac{u_k - 1}{u_k}$ donc $v_k > 0$ (vraie)

<u>Conclusion :</u> $\forall\, n \in \mathbb{N}\ v_n > 0$.

c) **suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.**

$w_{n+1} = \ln(v_{n+1}) = \ln\left[\frac{\frac{u_n{}^2}{2u_n-1}-1}{\frac{u_n{}^2}{2u_n-1}}\right] =$ $\ln\left[\frac{u_n{}^2-2u_n+1}{u_n{}^2}\right] = \ln\left[\frac{(u_n-1)^2}{u_n{}^2}\right] = 2\ln(v_n) = 2w_n$ alors $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $w_0 = -\ln 2$.

d) $S_{0,n} = w_0 + w_1 + \cdots w_n = -\ln 2 \times \frac{2^{n+1}-1}{2-1} =$ $(1-2^{n+1})\ln 2$ et $\lim_{n\mapsto+\infty} S_{0,n} = -\infty$.

e) $v_n = e^{w_n}$ or $w_n = -2^n \ln 2 \Leftrightarrow v_n = \frac{1}{2^{2^n}}$.

$v_n = \frac{u_n-1}{u_n} \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{1-v_n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2^{2^n}}}$. $\lim_{n\mapsto+\infty} u_n = 1$.

Problème 7 : **On considère la fonction f définie par :** $f(x) = \frac{x^4-1}{x^3-1}$.

1.

a) **Quel est l'ensemble de définition de f ?**

b) **Montrer que pour tout réel x, $f(x) = \frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+x+1}$. En déduire que pour tout réel x, f admet un prolongement par continuité en 1.**

c) **Déterminer les limites de f sur IR.**

d) **Calculer $f'(x)$.**

En déduire le sens de variation de f.

2.

a) **Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, notée x_0, appartient à l'intervalle $]-\infty; -1]$.**

b) **Dresser le tableau de variation de f sur IR.**

c) **En déduire le signe de $f(x)$ sur IR.**

d) **Montrer que $\forall\, x \in$ IR, $f''(x) = \frac{6x(x^2+1)}{(x^2+x+1)^3}$.**

e) **Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion A dont on déterminera son coordonnée.**

f) **Déterminer l'équation de la tangente T au point d'abscisse A.**

3.

a) **Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout x de f, on ait $f(x) = ax + \frac{bx+c}{x^3-1}$.**

b) **Montrer qu'une droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$. Etudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (D).**

c) **Construire la courbe T ; (D) et $\mathcal{C}_f$.**

4. **Soit $(u_n)_{n\geq 2}$ avec n entier naturel la suite numérique définie par : $u_n = f(n)$.**

Etudier les variations de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$.

5. **On note $\mathbb{C}^*$ l'ensemble des nombres complexes non nuls et on considère l'application :**

$f(z) = \frac{z^4-1}{z^3-1}$ et où $\bar{z}$ est le conjugué de z.

Quel est l'ensemble des nombres complexes vérifiant chacune des équations suivantes :

a) **$f(z) = 0$**

b) **$f(z) = z$**

c) **$f(z) = \bar{z}$ et $|z^3| = 1$.**

Correction : $f(x) = \frac{x^4-1}{x^3-1}$.

1.

a) $D_f = \{x/x \in \text{IR}, x^3 - 1 \neq 0\} = \text{IR} - \{1\}$.

b) $f(x) = \frac{x^4-1}{x^3-1} = \frac{(x-1)(x^3+x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+x+1}$.

Calculons $\lim_{x\mapsto 1} f(x) = \frac{4}{3}$ alors pour tout réel x, f admet un prolongement par continuité en 1.

c) $\lim_{x\mapsto-\infty} f(x) = \lim_{x\mapsto-\infty} \frac{x^4}{x^3} = \lim_{x\mapsto-\infty} x = -\infty$ et

$\lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = \lim_{x\mapsto+\infty} \frac{x^4}{x^3} = \lim_{x\mapsto+\infty} x = +\infty$.

d) $\forall\, x \in$ IR, $f'(x) = \frac{x^2(x^2+2x+3)}{(x^2+x+1)^2} > 0$ alors f est strictement croissante sur IR.

2.

a) $f(x) = \frac{x^4-1}{x^3-1} = 0 \Leftrightarrow x^4 = 1 \Leftrightarrow x = -1$, puisque $f(1) = \frac{4}{3}$ et f est croissante sur IR. Donc sur $]-\infty; -1]$, il a un unique antécédent. Ainsi l'équation admet une unique solution $x_0 = -1$.

b) **tableau de variation de f sur IR**.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

c) comme $f(-1) = 0$ alors sur $]-\infty; -1]$ $f(x) \leq 0$ et sur $[-1; +\infty[$ $f(x) \geq 0$.

d) $\forall\, x \in$ IR, $f''(x) = \frac{12x^2+6x-6x^2}{(x^2+x+1)^3} = \frac{6x(x^2+1)}{(x^2+x+1)^3}$.

e) **Point d'inflexion A : $f''(x) = 0 \Leftrightarrow$** $6x(x^2+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, d'où A(0; 1).

f) **T au point A** $y = 1$.

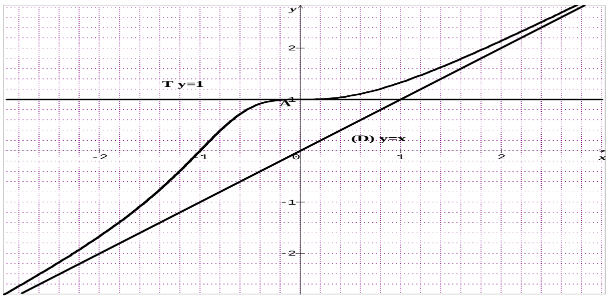
3.

a) $f(x) = \frac{x^4-1}{x^3-1} = ax + \frac{bx+c}{x^3-1} = \frac{ax^4+(b-a)x+c}{x^3-1}$. Par identification $a = 1$, $c = -1$ et $b - 1 = 0 \Leftrightarrow b = 1$, on obtient $f(x) = x + \frac{x-1}{x^3-1}$.

b) $f(x) - y = x + \frac{x-1}{x^3-1} - x = \frac{x-1}{x^3-1}$

$\lim\limits_{x \mapsto \pm\infty}[f(x) - y] = \lim\limits_{x \mapsto \pm\infty} \frac{x}{x^3} = \lim\limits_{x \mapsto \pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, alors la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ à l'infini. $\forall\, x \in$ IR, $\mathcal{C}_f$ est au -dessus de (D).

c) T ; (D) et $\mathcal{C}_f$



4. $(\boldsymbol{u_n})_{\boldsymbol{n \geq 2}}$ / $u_n = f(n) = \frac{n^4-1}{n^3-1}$.

Variations de la suite $(\boldsymbol{u_n})_{\boldsymbol{n \geq 2}}$

Pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$ de $\boldsymbol{n \geq 2}$, $u_n = f(n)$. Comme f est strictement croissante sur IR, on a $f(n) < f(n+1) \Leftrightarrow \boldsymbol{u_n < u_{n+1}}$, **donc** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante et elle diverge car $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = +\infty$

5. $\mathbb{C}^*$ / $f(z) = \frac{z^4-1}{z^3-1}$.

L'ensemble des nombres complexes vérifiant chacune des équations suivantes :

a) $f(z) = 0 \Leftrightarrow z^4 = 1 = e^{0i}$, on a les racines quatrièmes de 1 sont $z_0 = [1; 0] = 1$; $z_1 = \left[1; \frac{\pi}{2}\right] = i$; $z_2 = [1; \pi] = -1$ et $z_3 = \left[1; -\frac{\pi}{2}\right] = -i$. On considère les points A, B, C et D, d'affixes respectives z_0, z_1, z_2 et z_3. L'ensemble des nombres complexes vérifiant $f(z) = 0$ est un carré ABCD de centre d'origine du repère O privé du point A.

b) $f(z) = z \Leftrightarrow z = 1$. L'ensemble des nombres complexes vérifiant $f(z) = z$ est la droite d'équation $x = 1$.

c) $f(z) = \bar{z} \Leftrightarrow z^3(z - \bar{z}) = 1 - \bar{z} \Leftrightarrow |z^3(z - \bar{z})| = |1 - \bar{z}|$ or $|z^3| = 1$, donc $|z - \bar{z}| = |1 - \bar{z}|$ or $|z - \bar{z}| = 2$, d'où en posant $z = x + iy \Leftrightarrow \bar{z} = x - iy$, on a $(x-1)^2 + y^2 = 2$. L'ensemble des nombres complexes vérifiant $f(z) = \bar{z}$ est le cercle de centre I$(1; 0)$ et de rayon R= $\sqrt{2}$.

<u>Problème 8 :</u> On considère la fonction $\boldsymbol{h}$ définie par :
$\boldsymbol{h(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{x^2 - x - 1, si\ x \in\ ]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[} \\ \boldsymbol{-x^2 - x + 1, si\ x \in\ ]-1; 1[} \end{cases}$ **et** $\boldsymbol{h(-1) = 1}$ **et** $\boldsymbol{h(1) = -1}$.

1.

a) Quel est l'ensemble de définition de $\boldsymbol{h}$: $\mathrm{D}_{\boldsymbol{h}}$?

b) Etudier les limites de $\boldsymbol{h}$ sur $\mathrm{D}_{\boldsymbol{h}}$.

c) Etudier le sens de variation de $\boldsymbol{h}$ sur $\mathrm{D}_{\boldsymbol{h}}$.

d) Etudier la dérivabilité de $\boldsymbol{h}$ en $\boldsymbol{-1}$ et en $\boldsymbol{1}$. Interpréter ces résultats.

2. Dresser le tableau de variation de $\boldsymbol{h}$.

3. Etudier les branches infinies de $\boldsymbol{\mathcal{C}_h}$.

4. Monter que $\boldsymbol{h}$ admet une bijective de $[\boldsymbol{1}; +\infty[$ sur l'intervalle J qu'on déterminera. Expliciter la fonction $\boldsymbol{h^{-1}}$ réciproque de $\boldsymbol{h}$.

5. Tracer les courbes $\boldsymbol{\mathcal{C}_h}$ et $\boldsymbol{\mathcal{C}_{h^{-1}}}$.

<u>Correction :</u>

1.

a) $\mathrm{D}_h = \{x / x \in \mathrm{IR}\} =]-\infty; +\infty[$.

b) $\lim\limits_{x \mapsto -1^{\pm}} h(x) = 1$; $\lim\limits_{x \mapsto 1^{\pm}} h(x) = -1$; $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} [x^2 - x - 1] = +\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} [x^2 - x - 1] = +\infty$.

c) $\forall x \in\ ]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, $h'(x) = 2x - 1$ alors h est strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$ et h est strictement croissante sur $]1; +\infty[$;
$\forall\, x \in\ ]-1; 1[$, $h'(x) = -2x - 1$, alors h est strictement croissante sur $\left]-1; -\frac{1}{2}\right[$ et sur $\left]-\frac{1}{2}; 1\right[$.

d) Dérivabilité de $\boldsymbol{h}$ en $\boldsymbol{-1}$ et en $\boldsymbol{1}$:

- $h'_g(-1) = -3$ et $h'_d(-1) = 1$, comme $h'_g(-1) \neq h'_d(-1)$ donc h n'est pas dérivable en -1. $\mathcal{C}_h$ admet en -1 deux demi-tangentes verticales. Ce point est anguleux.
- $h'_g(1) = 1$ et $h'_d(1) = -3$, comme $h'_g(1) \neq h'_d(1)$ donc h n'est pas dérivable en 1. $\mathcal{C}_h$ admet en 1 deux demi-tangentes verticales. Ce point est anguleux.

e) Dressons le tableau de variation de $\boldsymbol{h}$.

x	$-\infty$		-1		-1/2		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	‖	$+$		$-$	‖	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	5/4	↘	-1	↗	$+\infty$

f) branches infinies de $\boldsymbol{\mathcal{C}_h}$.

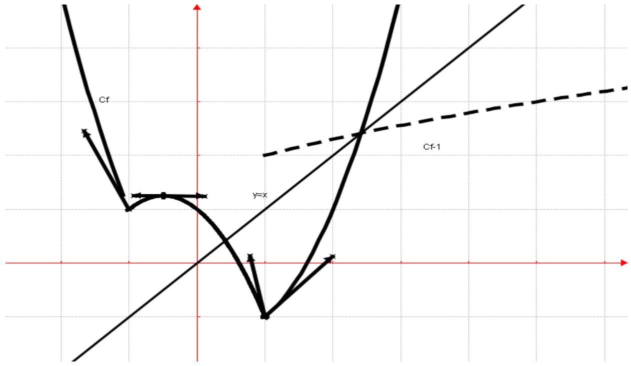
$\forall x \in\ ]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, $\frac{h(x)}{x} = x - 1 - \frac{1}{x}$ et $\forall x \in\ ]-1; 1[$, $\frac{h(x)}{x} = -x - 1 + \frac{1}{x}$. Branche parabolique de direction (Oy) car $\lim\limits_{x \mapsto \pm\infty} \frac{h(x)}{x} = \infty$.

g) h est continue et strictement croissante sur $[2; +\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $[2; +\infty[$ sur J $= [1; +\infty[$.

explicitons h^{-1} : $y = x^2 - x - 1 \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{4y+5}}{2}$.

donc $\forall\, x \in [1; +\infty[$,$h^{-1}(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{4x+5}\right)$.

h) $\boldsymbol{\mathcal{C}_h}$ et $\boldsymbol{\mathcal{C}_{h^{-1}}}$.



<u>Problème 9 :</u> Soit la fonction h définie par

$\boldsymbol{h(x) = \frac{x^2-3x+6}{x-1}}$**. D'unité graphique 2 cm.**

1.

a) Quel est l'ensemble de définition de h : D_h ?

b) Déterminer les réels a, b, c tels que pour tout réel x de D_h de h, on ait $h(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$.

c) Soit A le point de coordonnées $(1; -1)$. Montrer que le point A est centre de symétrie de $\mathcal{C}_h$.

d) Montrer que h admet sur $]-\infty; 1[$ une primitive H qu'on calculera, telle que $H(0) = 0$.

e) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 2$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_h$ à l'infinie. Etudier la position relative de $\mathcal{C}_h$ par rapport à (D).

2.

a) Etudier les limites de h sur D_h. Interpréter graphiquement ces résultats.

b) Montrer que $\forall\, x \neq 1,\ h'(x) = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$. En déduire le sens de variation de la fonction h.

c) Dresser le tableau de variation de h.

3. Monter que h admet une bijective de $[3; +\infty[$ sur l'intervalle J qu'on déterminera. Expliciter la fonction h^{-1} réciproque de h.

4. Tracer (D) ; $\mathcal{C}_h$ et $\mathcal{C}_{h^{-1}}$.

5. n est un entier naturel. Soit $(u_n)_{n\geq 2}$ la suite numérique définie par : $u_n = h(n)$

a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est croissante.

b) La suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est- elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

<u>Correction :</u> $\boldsymbol{h(x) = \frac{x^2-3x+6}{x-1}}$.

1.

a) $D_h = \{x/x \in \mathrm{IR}, x \neq 1\} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$.

b) $h(x) = \frac{x^2-3x+6}{x-1} = ax + b + \frac{c}{x-1} = \frac{ax^2+(b-a)x-b+c}{x-1}$. Par identification $a = 1$ et $b - 1 = -3 \Leftrightarrow b = -2$ et $-b + c = 6 \Leftrightarrow c = 4$. On obtient $h(x) = x - 2 + \frac{4}{x-1}$.

c) $h(2-x) + h(x) = \left(2 - x - 2 + \frac{4}{2-x-1}\right) + \left(x - 2 + \frac{4}{x-1}\right) = -2$, alors le point $A(1; -1)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_h$.

d) $h(x) = x - 2 + \frac{4}{x-1}$ a pour primitive $H(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 4\ln|x-1| + C$, avec C est cte. $H(0) = 0 \Leftrightarrow C = 0$, on obtient $\forall\, x \in]-\infty; 1[$, $H(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \ln(1-x)$.

e) $h(x) - y = h(x) - x + 2 = \frac{4}{x-1}$, on calcule $\lim_{x\mapsto\pm\infty}[h(x) - y] = \lim_{x\mapsto\pm\infty}\left[\frac{4}{x-1}\right] = 0$, alors la droite (D) d'équation $y = x - 2$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_h$ à l'infinie.

Position relative de $\mathcal{C}_h$ par rapport à (D).

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$\frac{4}{x-1}$	$-$	‖	$+$

Sur $]-\infty; 1[$, $\mathcal{C}_h$ est au-dessous de (D).

Sur $]1; +\infty[$, $\mathcal{C}_h$ est au-dessus de (D).

2.

a) Comme $\lim_{x\mapsto\pm\infty}\frac{4}{x-1} = 0$ alors

$\lim_{x\mapsto-\infty} h(x) = \lim_{x\mapsto-\infty}(x-2) = -\infty$ et

$\lim_{x\mapsto+\infty} h(x) = \lim_{x\mapsto+\infty}(x-2) = +\infty$;

$\lim_{x\mapsto1^-} h(x) = -1 + \frac{4}{0^-} = -\infty$ et

$\lim_{x\mapsto1^+} h(x) = -1 + \frac{4}{0^+} = +\infty$. $\mathcal{C}_h$ admet l'asymptote verticale $x = -1$. Comme $\lim_{x\mapsto\infty} h(x) = \infty$, alors il ya une possibilité d'avoir une branche infinie qu'on déterminera plus tard.

b) $\forall\, x \neq 1,\ h'(x) = 1 - \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2-4}{(x-1)^2} = \frac{(x-1+2)(x-1-2)}{(x-1)^2} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$, alors h est strictement croissante sur $]-\infty; -1[$ et sur $]3; +\infty[$ et h est aussi strictement décroissante sur $]-1; 1[$ et sur $]1; 3[$.

c) tableau de variation de la fonction h.

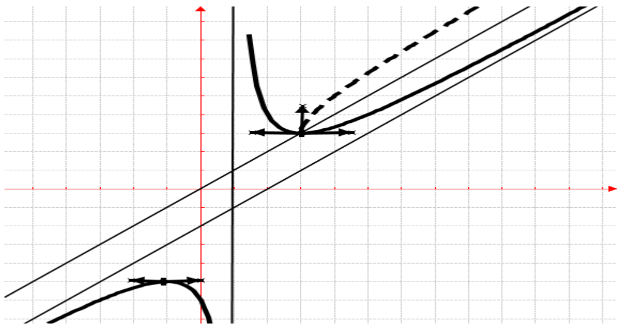
x	$-\infty$ $\quad$ -1		1		3 $\quad$ $+\infty$
$h'(x)$	$+$	$-$	‖	$-$	$+$
$h(x)$	$-\infty \nearrow -5$	$\searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow$	$3 \nearrow +\infty$

3. h est continue et strictement croissante sur $[3; +\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $[3; +\infty[$ sur $J = [3; +\infty[$.

Explicitons h^{-1} : $y = x - 2 + \frac{4}{x-1} \Leftrightarrow$ $x^2-(3+y)x+6+y=0$, c'est une équation d'inconnu x donc $\Delta = y^2+2y-15$ $\Leftrightarrow x = \frac{y+3\pm\sqrt{y^2+2y-15}}{2}$.

$\forall\, x\in[3;+\infty[\,, h^{-1}(x) = \frac{x+3+\sqrt{x^2+2x-15}}{2}$.

4. $\mathcal{C}_h$ **et** $\mathcal{C}_{h^{-1}}$



5. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}\geq 2} \,/\, u_n = \frac{n^2-3n+6}{n-1}$

a) Montrons que $(u_n)_{n\geq 2}$ est croissante :

Pour tout entier naturel n de $n\geq 2$, $u_n = f(n)$. Comme f est strictement croissante sur $[3;+\infty[$, or $[2;+\infty[\,\subset[3;+\infty[$ on a $f(n)<f(n+1)\Leftrightarrow u_n<u_{n+1}$, **donc** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

b) $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = +\infty$ alors $(u_n)_{n\geq 2}$ est divergente.

<u>Problème 10 :</u> On considère la fonction h définie par : $h(x) = \left|\frac{4-2x}{2+x}\right|$.

1.

a) Quel est l'ensemble de définition de h ?

b) Donner les expressions de la fonction h sans le symbole de la valeur absolue.

c) Déterminer dans chaque les réels a, b tels que on ait $\forall\, x\in\,]-\infty;-2[\,\cup\,]-2;2]$, $h(x) = a+\frac{b}{x+2}$ **et** $\forall\, x\in[2;+\infty[$, $h(x) = a+\frac{b}{x+2}$.

d) Montrer que la fonction h admet sur D_h une primitive H qu'on calculera.

e) Etudier la continuité et la dérivabilité de h en 2. En déduire que $\mathcal{C}_h$ admet deux demi-tangentes au point d'abscisse 2 dont on déterminera les équations réduites.

2.

a) Etudier les limites de h sur D_h.

b) Etudier le sens de variation de h sur D_h.

c) Dresser le tableau de variation de h sur D_h.

3. Monter que h admet une bijective de $[2;+\infty[$ sur l'intervalle J qu'on déterminera.

4. Tracer les demi-tangentes verticales : T_{2^-} et T_{2^+} et la courbes $\mathcal{C}_h$.

<u>Correction :</u> $h(x) = \left|\frac{4-2x}{2+x}\right|$

1.

a) $D_h = \,]-\infty;-2[\,\cup\,]-2;+\infty[$.

b) h sans le symbole de la valeur absolue

$\forall x\in\,]-\infty;-2[\,\cup\,]-2;2]$, $h(x) = 2\frac{x-2}{x+2}$ et

$\forall x\in[2;+\infty[$, $h(x) = 2\frac{2-x}{x+2}$.

c) $\forall\, x\in\,]-\infty;-2[\,\cup\,]-2;2]$, $h(x) = 2-\frac{8}{x+2}$ et

$\forall x\in[2;+\infty[$, $h(x) = -2+\frac{8}{x+2}$.

d) $\forall\, x\in\,]-\infty;-2[\,\cup\,]-2;2]$,

$H(x) = 2x-8\ln|x+2|$ et

$\forall\, x\in[2;+\infty[$ $H(x) = -2x+8\ln(x+2)$.

e) Continuité de h en 2: $\lim\limits_{x\mapsto 2^-} h(x) = 0$; $\lim\limits_{x\mapsto 2^+} h(x) = 0$ et $h(2)=0$ alors h est continue en 2.

Dérivabilité de h en 2: $\frac{h(x)-h(2)}{x-2} = 2\frac{\left|\frac{2-x}{2+x}\right|}{x-2}$. Ainsi on calcule $\lim\limits_{x\mapsto 2^-}\frac{h(x)-h(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\mapsto 2^-}\left(\frac{2}{x+2}\right) = \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\mapsto 2^+}\frac{h(x)-h(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\mapsto 2^+}\left(\frac{-2}{x+2}\right) = -\frac{1}{2}$; on remarque que $h'_g(2)\neq h'_d(2)$ donc h n'est pas dérivable en 2. par conséquent $\mathcal{C}_h$ admet en ce point 2 deux demi-tangentes : T_{2^-}: $y = \frac{1}{2}x-1$ et T_{2^+}: $y = -\frac{1}{2}x+1$. Ce point est anguleux.

2.

a) $\lim\limits_{x\mapsto -2^-} h(x) = \frac{-6}{0^-} = +\infty$; $\lim\limits_{x\mapsto -2^+} h(x) = \frac{6}{0^-} = -\infty$;

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left[2\frac{2-x}{x+2}\right] = \lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left[2\frac{-x}{x}\right] = \lim\limits_{x\mapsto+\infty}[-2] = -2$ et

$\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\left[2\frac{x-2}{x+2}\right] = \lim\limits_{x\mapsto-\infty}\left[2\frac{x}{x}\right] = \lim\limits_{x\mapsto-\infty}[2] = -2$.

b) $\forall x\in\,]-\infty;-2[\,\cup\,]-2;2[$, $h'(x) = \frac{8}{(x+2)^2}>0$ alors h est strictement croissante sur $]-\infty;-2[$ et sur $]-2;2[$.

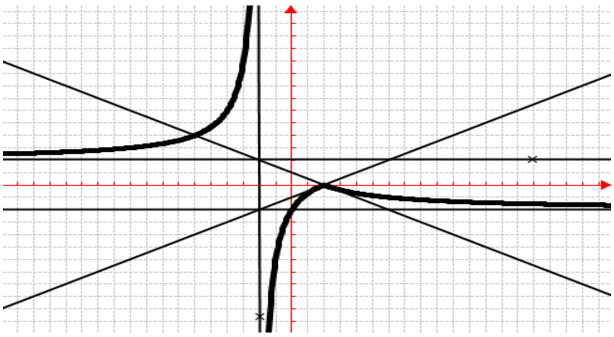
$\forall\, x\in\,]2;+\infty[$, $h'(x) = \frac{-8}{(x+2)^2}<0$, alors h est strictement décroissante sur $]2;+\infty[$.

c) Dressons le tableau de variation de h.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	‖	$+$	‖	$-$	
$h(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-2

3. h est continue et strictement décroissante sur $[2;+\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $[2;+\infty[$ sur $\mathrm{J}=]-2;0]$.

4. **$\mathcal{C}_h$ et tangentes : T_{2^-} et T_{2^+}.**



<u>Problème 11 :</u> On considère la fonction h définie par : $h(x)=\frac{x^2-1}{2+x^2}$.

1.

a. Quel est l'ensemble de définition de h ?

b. Etudier les limites de h sur D_h. Interpréter graphiquement ces résultats.

2.

a) Etudier le sens de variation de h sur D_h.

b) Dresser le tableau de variation de h sur D_h.

c) Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution, notée x_0, appartient à $]0;1,5[$.

3. Monter que h admet une bijective de $[1;+\infty[$ sur l'intervalle J qu'on déterminera. Expliciter la fonction h^{-1} réciproque de h.

Tracer les courbes $\mathcal{C}_h$ et $\mathcal{C}_{h^{-1}}$.

4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $u_n=h(n)$

a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est- elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

5. Résoudre dans $\mathbb{C}$, $h(z)=2$.

<u>Correction :</u> $h(x)=\frac{x^2-1}{x^2+2}$.

1.

a) $\mathrm{D}_h=\{x/x\in \mathrm{IR}\ \ x^2+2\neq 0\}=]-\infty;+\infty[$.

b) $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} h(x)=\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\left(\frac{x^2}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\mapsto-\infty}(1)=1$ et $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}(1)=1$ alors $\mathcal{C}_h$ admet une asymptote horizontale $y=1$.

2.

a) $\forall\ x\in \mathrm{IR}\ \ h'(x)=\frac{6x}{(x^2+2)^2}$ alors h est décroissante sur $]-\infty;0]$ et h est croissante sur $[0;+\infty[$.

b) **tableau de variation de h.**

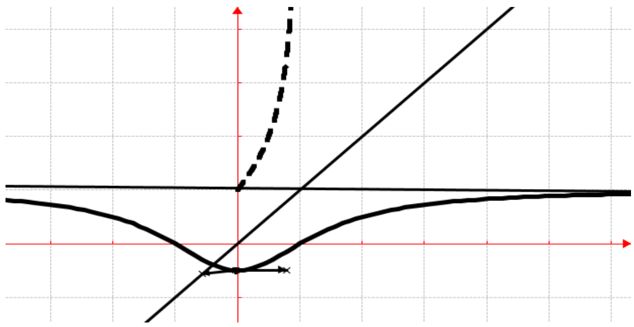
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$		$+$	
$h(x)$	1	$\searrow$	$-1/2$	$\nearrow$	1

c) $h(x_0)=0\Leftrightarrow {x_0}^2-1=0\Leftrightarrow x_0=1$.

3. h est continue et strictement croissante sur $[1;+\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $[1;+\infty[$ sur $\mathrm{J}=[0;1[$. **Explicitons h^{-1} :** $y=\frac{x^2-1}{2+x^2}\Leftrightarrow x^2(y-1)=-2y-1\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{2y+1}{1-y}}$.

$\forall\ x\in[0;1[\ ,h^{-1}(x)=\sqrt{\frac{2x+1}{1-x}}$.

$\mathcal{C}_h$ en trait continu et $\mathcal{C}_{h^{-1}}$ en trait discontinu



4. $(\boldsymbol{u_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ / $\boldsymbol{u_n}=\frac{n^2-1}{n^2+2}$

a) **Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante :**

$u_{n+1}-u_n=\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2+2}-\frac{n^2-1}{n^2+2}=\frac{n+3}{(n^2+2n+3)(n^2+2)}>0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

b) $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n=1$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est converge vers 1.

5. résoudre dans $\mathbb{C}$ $h(z)=\frac{z^2-1}{z^2+2}=2\Leftrightarrow z^2-3=0$, la racine est $z=\pm\sqrt{3}$, donc $S_{\mathbb{C}}=\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\}$.

<u>Problème 12 :</u> D'unité graphique 2 cm.

1. Soit la fonction t définie par $t(x)=\frac{3x^2+\alpha x+\beta}{x^2-1}$. Déterminer les réels α et β pour que la droite (d) d'équation $y=-4x+3$ soit une tangente à $\mathcal{C}_t$ au point I de coordonnées $(0;3)$.

2. Soit la fonction f définie par $f(x)=\frac{3x^2+4x-3}{x^2-1}$

a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) Etudier les limites de f sur D_f. Interpréter graphiquement ces résultats.

c) Montrer que $\forall\ x\neq\{-1;1\}$ $f'(x)=\frac{-2(x^2+2)}{(x^2-1)^2}$. En déduire le sens de variation de f. Dresser le tableau de variation de f.

3.

a) Déterminer les réels a, b, c tels que pour tout réel x de l'ensemble de définition de f, on ait $f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$.

b) Montrer que la fonction f admet une primitive F qu'on calculera, telle que $F(0) = -1$.

4.

a) Soit A le point $\mathcal{C}_f$ abscisse 0. Montrer que le point A est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

b) Déterminer l'équation réduite de (T) tangente à $\mathcal{C}_f$ en A.

c) Etudier pour x élément de]-1 ;1[la position relative de (T) et de $\mathcal{C}_f$.

5. Soit λ un nombre réel tel que $\lambda > 5$.

a) Calculer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ en cm^2 du domaine plan limité par $\mathcal{C}_f$, la droite (d') d'équation $y = 3$ et des droites d'équations respectives $x = \lambda$ et $x = 2$.

b) Déterminer $\lim\limits_{\lambda \mapsto +\infty} \mathcal{A}(\lambda) =$.

6. Indiquer graphiquement, suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation :
(3-m) x² + 4x + (m-3) = 0.

7. Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{3x^2+4|x|-3}{x^2-1}$

a) Etudier la parité de g.

b) Montrer comment, sans nouveaux calculs, on peut représenter $\mathcal{C}_g$. Représenter $\mathcal{C}_g$ dans le même repère que $\mathcal{C}_f$, en utilisant une couleur différente.

__Correction :__

1. I $\in \mathcal{C}_t \Leftrightarrow t(0) = \frac{30^2+0+\beta}{0^2-1} = 3 \Leftrightarrow \beta = -3$

$t(x) = \frac{3x^2+\alpha x+\beta}{x^2-1} \Leftrightarrow t'(x) = \frac{-\alpha x^2-2(3+\beta)x-\alpha}{(x^2-1)^2}$.

(d) tangente à $\mathcal{C}_t \Leftrightarrow t'(0) = \frac{-\alpha 0^2-2(3+\beta)0-\alpha}{(0^2-1)^2} = -4 \Leftrightarrow \alpha = 4$.

2. $f(x) = \frac{3x^2+4x-3}{x^2-1}$

a) $D_f = \{\forall \in IR\ /x^2 - 1 \neq 0\} = IR—\{-1; 1\}$ ou $D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$.

b) $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \frac{3x^2}{x^2} = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}(3) = 3$ et $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{3x^2}{x^2} = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}(3) = 3$; $\lim\limits_{x \mapsto -1^-} f(x) = \frac{-4}{0^+} = -\infty$; $\lim\limits_{x \mapsto -1^+} f(x) = \frac{-4}{0^-} = +\infty$; $\lim\limits_{x \mapsto 1^-} f(x) = \frac{4}{0^-} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto 1^+} f(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty$. $\mathcal{C}_f$ admet les asymptotes verticales $x = -1$ et $x = 1$ et une asymptote horizontale $y = 3$.

c) $\forall\ x \in IR—\{-1; 1\}$,

$f'(x) = \frac{(6x+4)(x^2+1)-2x(3x^2+4x-3)}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x^2-2(3-3)x-4}{(x^2-1)^2} = \frac{-4(x^2+1)}{(x^2-1)^2} < 0$, f est strictement décroissante sur $]-\infty, -1[$; sur $]-1,1[$ et sur $]1, +\infty[$.

x	$-\infty$ $\quad$ -1	$\quad$ 1	$\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$3 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow -\infty$	$+\infty \searrow -3$

3.

a) $f(x) = \frac{3x^2+4x-3}{x^2-1} = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1} = \frac{ax^2+(b+c)x-a+b-c}{x^2-1}$. Par identification $a = 3$ et $\begin{cases} b+c=4 \\ b-c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} b=2 \\ c=2 \end{matrix}$, donc $f(x) = 3 + \frac{2}{x-1} + \frac{2}{x+1}$.

b) $f(x) = 3 + \frac{2}{x-1} + \frac{2}{x+1}$ a pour primitive $F(x) = 3x + 2\ln|x-1| + 2\ln|x+1| + C = 3x + 2\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$ avec C est constante. $F(0) = -1 \Leftrightarrow C = -1$, on obtient $F(x) = 3x - 1 + 2\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$.

4.

a) A(0 ; $f(0)$) donc A(0 ; 3) : $f(x) + f(a+x) = f(-x) + f(x) = 2f(a)$. Donc $f(x) + f(0+x) = f(-x) + f(x) = 2f(0) = 6$; d'où le point A est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

b) T : $\begin{cases} y = 3 + (-4)x \\ y = -4x + 3 \end{cases}$.

c) Soit h(x) = f(x) – (-4x+3) = $\frac{4x^3}{x^2-1}$.

- Sur]-1 ;0[h(x) > 0 f(x) > -4x + 3 donc $\mathcal{C}_f$ est au dessus de (T).
- Sur]0 ;1[f(x) < -4x + 3 donc $\mathcal{C}_f$ est au dessous de (T).
- $\mathcal{C}_f$ et (T) se coupent au point A.

5.

a) $U = \int_2^\lambda [f(x) - y]dx = \int_2^\lambda \left(\frac{2}{x-1} + \frac{2}{x+1}\right) dx = \left[2\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]_2^\lambda = 2\ln\left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right)$.

Donc l'aire $\mathcal{A}(\lambda) = U\ 4\ cm^2 = 8\ln\left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right) cm^2$.

b) $\lim\limits_{\lambda \mapsto +\infty} \mathcal{A}(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \mapsto +\infty} 8\ln\left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right) = \lim\limits_{\lambda \mapsto +\infty} 8\ln(1) = 0$.

6. (3-m) x² + 4x + (m-3) = 0 ⇔ 3x² + 4x – 3 = mx² - m ⇔ 3x² + 4x – 3 = m(x²-1) ⇔ $\frac{3x^2+4x-3}{x^2-1} = g(x) = m$.

On trouve la droite d'équation $y = m$ et on détermine graphiquement en combien de points elle coupe $\mathcal{C}_f$.

- Si m ∈]−∞ ;3[, deux (2) solutions

- Si m = 3, une (1) solution (x = 0)
- Si m ∈]3 ;+∞ [, deux (2) solutions.

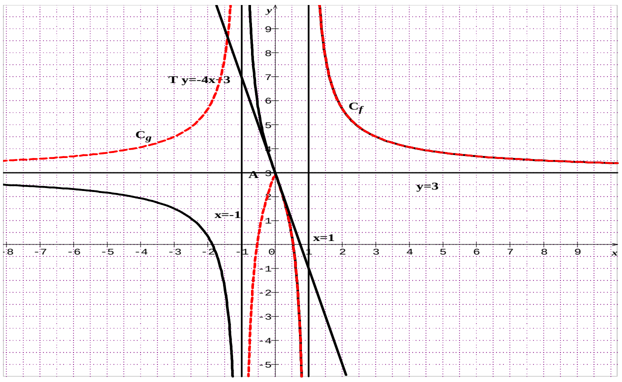
7. $\boldsymbol{g(x) = \frac{3x^2+4|x|-3}{x^2-1}}$;

a) $g(-x) = \frac{3(-x)^2+4|-x|-3}{(-x)^2-1} = \frac{3x^2+4|x|-3}{x^2-1} = g(x)$, donc g est paire.

b) Si x ≥ 0, $g(x) = \frac{3x^2+4x-3}{x^2-1} = f(x)$

Sur [0 ;1[U]1 ; +∞ [, $\mathcal{C}_g = \mathcal{C}_f$

Sur]−∞ ;-1[U]-1 ;0], on construit la symétrie de $\mathcal{C}_g$ par rapport à l'axe des ordonnées, puisque g est paire.



Problème 13 :

1. On considère la fonction g définie par :
$\boldsymbol{g(x) = x^3 - 3x - 4}$

a) Etudier le sens de variation de g sur IR.

b) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $[2,1; 2,2]$, notée α. Donner une valeur approchée de α au centième près.

c) En déduire le signe de $g(x)$ sur IR.

2. On considère la fonction f définie par :
$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^3+2x^2}{x^2-1}}$.

a) Déterminer les limites de f sur D_f.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer qu'une droite (D) d'équation $y = x + 2$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$. Etudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (D).

d) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2.

e) Montrer que $f(\alpha) = \frac{2\alpha+1}{\alpha-1}$.

f) Construire T ; (D) et la courbe $\mathcal{C}_f$.

Correction :

1. $\boldsymbol{g(x) = x^3 - 3x - 4}$

a) $\forall\, x \in$ IR, $g'(x) = 3(x^2 - 1)$, alors g est croissante sur $]-\infty; -1]$ et sur $[1; +\infty[$ et g est décroissante sur $[-1; 1]$.

b) $g(2,1) = -1,039$ et $g(2,2) = 0,048$.
g est continue et strictement croissante sur $[\mathbf{2,1; 2,2}]$. De plus $g(2,1) \times g(2,2) < 0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $\alpha \in [\mathbf{2,1; 2,2}]$ et $g(\alpha) = 0$.
Valeur approchée de α au centième près : 2,19.

c) Donc $g(x) \leq 0$ sur $]-\infty; \alpha]$ et $g(x) \geq 0$ sur $[\alpha; +\infty[$.

2. $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^3+2x^2}{x^2-1}}$.

a) $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} (x) = -\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} (x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \mapsto -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -1^-} \frac{1}{0^+} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -1^+} \frac{1}{0^-} = -\infty$.

$\lim\limits_{x \mapsto 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto 1^-} \frac{3}{0^-} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto 1^+} \frac{3}{0^+} = +\infty$.

b) $\forall\, x \neq \{-1; 1\}$ $f'(x) = \frac{(3x^2+4x)(x^2-1)-2x(x^3+2x^2)}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-3x^2-4x}{(x^2-1)^2} = \frac{x(x^3-3x-4)}{(x^2-1)^2} = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$ son signe dépend de celui de $xg(x)$

x	$-\infty$	-1	0	1	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖ $+$	$-$	‖ $-$	$+$	
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖ $-\infty$	0	$-\infty$ ‖ $+\infty \searrow$	$f(\alpha) \nearrow$	

c) $f(x) - y = \frac{x^3+2x^2}{x^2-1} - x - 2 = \frac{x+2}{x^2-1}$

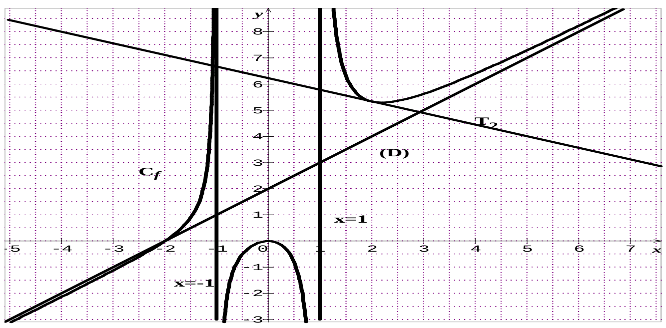
$\lim\limits_{x \mapsto \pm\infty} [f(x) - y] = \lim\limits_{x \mapsto \pm\infty} \frac{x+2}{x^2-1} = \lim\limits_{x \mapsto \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$, alors la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ à l'infini.

- Sur $]-\infty; -2[$, $\mathcal{C}_f$ est au dessous de (D) ;
- Sur $]-2; \infty[$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de (D)
- Si $x = -2$, $\mathcal{C}_f$ et (D) se coupent

d) $f(2) = \frac{16}{3}$ et $f'(2) = -\frac{4}{9}$, ainsi
$T_2 : y = -\frac{4}{9}x + \frac{56}{9}$.

e) $g(\alpha) = \alpha^3 - 3\alpha - 4 = 0 \Leftrightarrow \alpha^3 = 3\alpha + 4$ et
$f(\alpha) = \frac{\alpha^3+2\alpha^2}{\alpha^2-1} = \frac{2\alpha^2+3\alpha+4}{(\alpha-1)(\alpha+1)} = \frac{(\alpha+1)(2\alpha+1)}{(\alpha-1)(\alpha+1)} = \frac{2\alpha+1}{\alpha-1}$.

f) **T ; (D) et $\mathcal{C}_f$.**



Problème 14 :

1. **Résoudre dans IR, $-x^2 - 14x + 15 = 0$.**
En déduire la résolution de l'équation
$-x^4 - 14x^2 + 15 = 0$.

2. **On considère la fonction f définie par :**
$f(x) = \frac{-x^3+5x}{x^2+3}$.

a) **Montrer que la fonction f définie sur IR est une fonction impaire. Interpréter graphiquement.**
b) **Déterminer les limites de f sur IR.**
c) **Etudier le sens de variation de f sur IR.**
d) **Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α_1 et α_2, dont $\alpha_1 \in [-2,3; -2,2]$. Donner une valeur approchée de α_1 et de α_2 à 10^{-2} près.**
e) **Dresser le tableau de variation de f sur IR.**
f) **En déduire le signe de $f(x)$ sur IR.**
g) **Déterminer les réels a, b, tels que pour tout x de IR, on ait $f(x) = ax + \frac{bx}{x^2+3}$.**

3. **Montrer que la fonction f admet une primitive F qu'on calculera, telle que $F(0) = 0$.**

4. **Montrer qu'une droite (D) d'équation $y = -x$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$.**
Etudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (D).

5. **Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.**

6. **Construire T, (D) et la courbe $\mathcal{C}_f$.**

Correction :

1. $-x^2 - 14x + 15 = 0$, $\Delta = 256 = 16^2$,
$S_{IR} = \{-15; 1\}$. **Déduire la résolution de l'équation** $-x^4 - 14x^2 + 15 = 0$, $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \mp 1$,
$S_{IR} = \{-1; 1\}$.

2. $f(x) = \frac{-x^3+5x}{x^2+3}$.

a) $\forall\, x \in$ IR, $f(-x) = \frac{x^3-5x}{x^2+3} = -\frac{-x^3+5x}{x^2+3} = -f(x)$, f est une fonction impaire. Donc $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère O.

b) $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \frac{-x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}(-x) = +\infty$ et
$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{-x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}(-x) = -\infty$.

c) $\forall\, x \in$ IR, $f'(x) = \frac{-x^4-14x^2+15}{(x^2+3)^2} = \frac{(x^2+15)(1-x^2)}{(x^2+3)^2}$, alors f est décroissante sur $]-\infty; -1]$ et sur $[1; +\infty[$ et f est aussi croissante sur $[-1; 1]$.

d) $f(-2,3) = 8,04.10^{-2}$ et $f(-2,2) = -4,48.10^{-2}$. f est continue et strictement décroissante sur $[-2,3; -2,2]$. Elle réalise donc une bijection de $[-2,3; -2,2]$ sur $[f(-2); f(-2,4)]$. Or $f(-2,2) \times f(-2,3) < 0$. Donc sur $[-2,3; -2,2]$, il a un unique antécédent. Ainsi l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\boldsymbol{\alpha_1} \in [-2,3; -2,2]$ et $\boldsymbol{\alpha_1} = -2,27$.
Comme f est une fonction impaire alors $\boldsymbol{\alpha_2} \in [2,2; 2,3]$ et $\boldsymbol{\alpha_2} = 2,27$.

e) **tableau de variation de f sur IR**.

x	$-\infty$	-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	-1	↗	1	↘	$-\infty$

f) Sur $]-\infty; \boldsymbol{\alpha_1}] \cup [0; \boldsymbol{\alpha_2}]$, $f(x) \geq 0$.
Sur $[\boldsymbol{\alpha_1}; 0] \cup [\boldsymbol{\alpha_2}; +\infty[$, $f(x) \leq 0$.

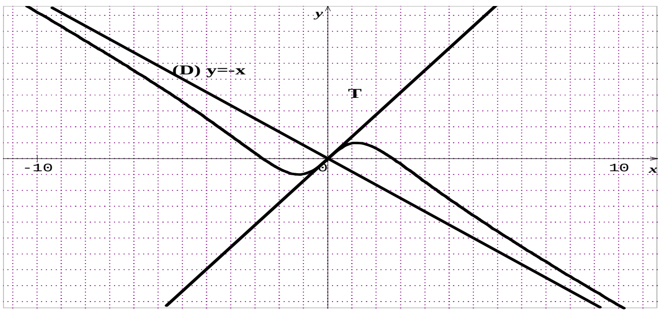
g) $f(x) = \frac{-x^3+5x}{x^2+3} = ax + \frac{bx}{x^2+3} = \frac{ax^3+(3a+b)x}{x^2+3}$. Par identification $a = -1$ et $-3 + b = 5 \Leftrightarrow b = 8$, on obtient $f(x) = -x + \frac{8x}{x^2+3}$.

3. $f(x) = -x + 4 \times \frac{2x}{x^2+3}$ a pour primitive
$F(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4\ln(x^2 + 3) + C$ avec C est constante.
$F(0) = 0 \Leftrightarrow C = -4\ln 3$, on obtient
$F(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4\ln(x^2 + 3) - 4\ln 3 =$
$F(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4\ln\left(\frac{1}{3}x^2 + 1\right)$.

4. $f(x) - y = -x + \frac{8x}{x^2+3} + x = \frac{8x}{x^2+3}$
$\lim\limits_{x \mapsto \pm\infty}[f(x) - y] = \lim\limits_{x \mapsto \pm\infty} \frac{8x}{x^2} = \lim\limits_{x \mapsto \pm\infty} \frac{8}{x} = 0$, alors la droite (D) d'équation $y = -x$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ à l'infini.
Sur $]-\infty; 0]$, $\mathcal{C}_f$ est au dessous de (D) et sur $[0; +\infty[$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de (D).

5. $f(0) = 0$ et $f'(0) = \frac{5}{3}$, ainsi $T_0 : y = \frac{5}{3}x$.

6. $\boldsymbol{\mathcal{C}_f}$, **T et (D).**



Problème 15 : **On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^3+6x}{3x^2+2}$.**

1.
a) **Montrer que la fonction f définie sur IR est une fonction impaire. Interpréter graphiquement.**
b) **Déterminer les limites de f sur IR.**

c) Etudier le sens de variation de f définie sur IR. En déduire le sens de variation de f.
d) Dresser le tableau de variation de f sur IR.
2.
a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, notée x_0, telle que $x_0 \in [-1; 1]$.
b) En déduire le signe de $f(x)$ sur IR.
3.
a) Montrer que $\forall\, x \in$ IR, $f''(x) = \frac{96x(x^2-2)}{(3x^2+2)^3}$.
b) Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet trois points d'inflexion α, β, γ tels que $\alpha < \beta < \gamma$ dont on déterminera leurs abscisses.
4.
a) Déterminer les réels a, b, tels que pour tout x de IR, on ait $f(x) = ax + \frac{bx}{3x^2+2}$.
b) Montrer que la fonction f admet une primitive F qu'on calculera, telle que $F(0) = 0$.
c) Montrer qu'une droite (D) d'équation $y = \frac{1}{3}x$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$.
Etudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (D).
5.
a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
b) Construire T ; (D) et la courbe $\mathcal{C}_f$.

<u>Correction :</u> $f(x) = \frac{x^3+6x}{3x^2+2}$.

1.

a) $\forall\, x \in$ IR, $f(-x) = \frac{-x^3-6x}{3x^2+2} = -\frac{x^3+6x}{3x^2+2} = -f(x)$, f est une fonction impaire. Donc $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère O.

b) $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \frac{x^3}{3x^2} = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \frac{x}{3} = -\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{x^3}{3x^2} = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{x}{3} = +\infty$.

c) $\forall\, x \in$ IR, $f'(x) = \frac{(3x^2+6)(3x^2+2)-6x(x^3+6x)}{(3x^2+2)^2} = \frac{3x^4-12x^2+12}{(3x^2+2)^2} = \frac{3(x^4-4x^2+4)}{(3x^2+2)^2} = \frac{3(x^2-2)^2}{(3x^2+2)^2} > 0$, alors f est strictement croissante sur IR.

d) tableau de variation de f sur IR

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2.

a) $f(x) = \frac{x^3+6x}{3x^2+2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$, donc sur $[-1; 1]$, il a un unique antécédent. Ainsi l'équation admet une unique solution $x_0 = 0$.

b) Sur $]-\infty; 0]$, $f(x) \le 0$ et sur $[0; +\infty[$, $f(x) \ge 0$.

3.

a) $\forall\, x \in$ IR, $f''(x) = \frac{12x(2x^2-6x^2-4+12x^2-12)}{(3x^2+2)^3} = \frac{96x(x^2-2)}{(3x^2+2)^3}$.

b) Trois points d'inflexion dont on déterminera leurs abscisses : $f''(x) = 0$ $\Leftrightarrow 96x(x^2-2) = 0 \Leftrightarrow x(x^2-2) = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\sqrt{2}$, $\beta = 0$ et $\gamma = \sqrt{2}$.

4.

a) $f(x) = \frac{x^3+6x}{3x^2+2} = ax + \frac{bx}{3x^2+2} = \frac{3ax^3+(2a+b)x}{3x^2+2}$. Par identification $a = \frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3} + b = 6 \Leftrightarrow b = \frac{16}{3}$, on obtient $f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{16x}{9x^2+6}$.

b) $f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{8}{9} \times \frac{6x}{3x^2+2}$ a pour primitive $F(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{8}{9}\ln(3x^2+2) + C$, avec C est constante. $F(0) = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{8}{9}\ln 2$, on obtient $F(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{8}{9}\ln\left(\frac{3}{2}x^2 + 1\right)$.

c) $f(x) - y = \frac{1}{3}x + \frac{16x}{9x^2+6} - \frac{1}{3}x = \frac{16x}{9x^2+6}$

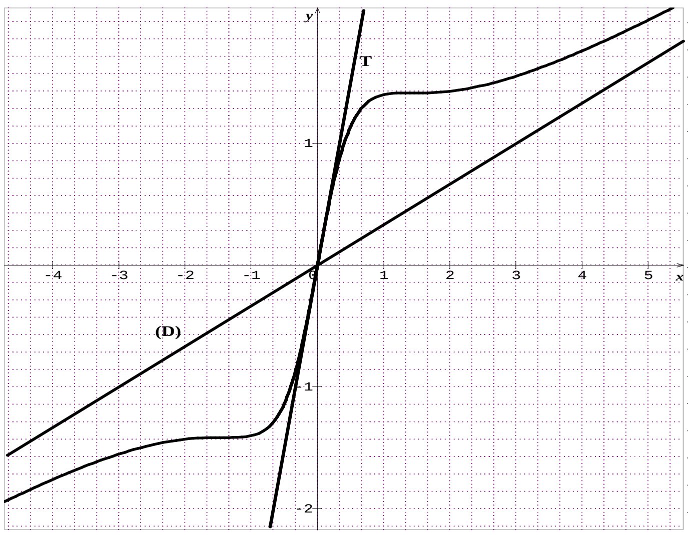
$\lim\limits_{x \mapsto \pm\infty}[f(x) - y] = \lim\limits_{x \mapsto \pm\infty} \frac{16x}{9x^2} = \lim\limits_{x \mapsto \pm\infty} \frac{16}{9x} = 0$, alors la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{3}x$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ à l'infini.

Sur $]-\infty; 0]$, $\mathcal{C}_f$ est au dessous de (D) et sur $[0; +\infty[$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de (D).

5.

a) $f(0) = 0$ et $f'(0) = 3$, ainsi $T_0 : y = 3x$.

b) $\mathcal{C}_f$, T et (D).



<u>Problème 16 :</u> Soit la fonction f définie par

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}}.$$

1.

a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) Etudier les limites de f sur son ensemble de définition. Interpréter graphiquement ces résultats.

c) Déterminer les réels a, b, c tels que pour tout réel x de l'ensemble de définition de f, on ait $f(x) = x + a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$.

d) Montrer que la fonction f admet une primitive F qu'on calculera, telle que $F(0) = 0$.

e) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 2$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$. Etudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (D).

2.

a) Montrer que $\forall\, x \in \mathrm{IR}—\{1\}$, $f'(x) = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$. En déduire le sens de variation de f.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3.

a) Montrer que $\forall\, x \in \mathrm{IR}—\{1\}$, $f''(x) = \frac{6x}{(x-1)^4}$.

b) Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion α dont on déterminera son coordonnée.

c) Déterminer une équation de la tangente T_0 à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

d) Construire la courbe $\mathcal{C}_f$, T_0 et (D).

<u>Correction :</u> $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}}$.

1.

a) $D_f = \{\forall \in \mathrm{IR} \,/ x \neq 1\} =]-\infty; 1[\, \cup\,]1; +\infty[$.

b) $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}(x) = -\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}(x) = +\infty$;

$\lim\limits_{x \mapsto 1^-} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto 1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$. $\mathcal{C}_f$ admet l'asymptote verticale $x = 1$. Comme $\lim\limits_{x \mapsto \infty} f(x) = \infty$, alors il ya une possibilité d'avoir une branche infinie qu'on déterminera plus tard.

c) $f(x) = \frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2} = x + a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} = \frac{x^3+(a-2)x^2+(1-2a+b)x+a-b+c}{(x-1)^2}$. Par identification $a = -2$ et $\begin{cases} 1-2a+b = 8 \\ a-b+c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} b = 3 \\ c = 1 \end{matrix}$, on obtient $f(x) = x - 2 + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$.

d) $f(x) = x - 2 + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$ a pour primitive $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \mathrm{C}$ avec C est constante. $\mathrm{F}(0) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{C} = 1$, on obtient $\mathrm{F}(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + 1$.

e) $f(x) - y = f(x) - x + 2 = \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$, on calcule $\lim\limits_{x \mapsto \pm\infty} [f(x) - y] = 0$, alors la droite (D) d'équation $y = x - 2$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$ à l'infinie. $\frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$.

Sur $\left]-\infty; \frac{2}{3}\right]$ $\mathcal{C}_f$ est au dessous de (D) et sur $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right[$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de (D).

2.

a) $\forall\, x \neq 1$,

$f'(x) = \frac{(3x^2-8x+8)(x-1)^2-2(x-1)(x^3-4x^2+8x-4)}{(x-1)^4} = \frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3} = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3} = \frac{x-3}{x-1} \times \frac{x^2}{(x-1)^2}$, le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $\frac{x-3}{x-1}$; alors f est strictement croissante sur $]-\infty; 1[$ et sur $]3; +\infty[$ et f est strictement décroissante sur $]1; 3[$.

b) tableau de variation de la fonction f.

x	$-\infty$	0	1		3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	‖	$-$		$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow -4$	$\nearrow +\infty$	‖	$+\infty \searrow$	m	$\nearrow +\infty$

$m = f(3) = 2{,}75$.

3.

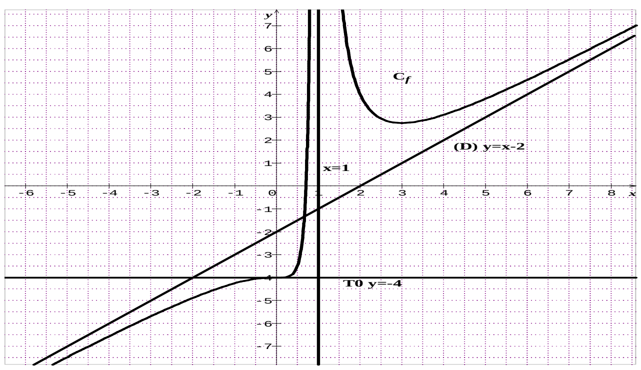
a) $\forall\, x \in \mathrm{IR}—\{1\}$,

$f''(x) = \frac{3x^3-3x^2-6x^2+6x-3x^3+9x^2}{(x-1)^4} = \frac{6x}{(x-1)^4}$.

b) Un point d'inflexion dont : $f''(x) = 0$ $\Leftrightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow \alpha(0; 4)$.

c) $f(0) = -4$ et $f'(0) = 0$ ainsi $T_0 : y = -4$.

d) $\mathcal{C}_f$, T_0 et (D)



<u>Problème 17 :</u> Soit le réel m non nul. On considère la fonction h_m définie par $h_m(x) = 1 - mx^2$.

1.

a) Montrer que la fonction h_m définie sur IR est une fonction paire. Interpréter graphiquement.

b) Etudier le sens de variation de la fonction de h_m suivant les valeurs de m.

c) Déterminer suivant les valeurs de m les limites de h_m .

d) Dresser suivant les valeurs de m, le tableau de variation de h_m.

2.

a) Pour tout réel positif m tel que $m > 1$, montrer que l'équation $h_m(x) = 0$ admet deux solutions à déterminer, dont l'une est notée x_m, appartient à l'intervalle $]0; 1]$.

b) Montrer que l'équation $h_2(x) = 0$ admet deux solutions, dont l'une est notée x_2, appartient à l'intervalle $]0,4; 1[$. Donner une valeur approchée de x_2 à 10^{-2} près.

c) En déduire pour tout réel x, le signe de $h_m(x)$.

3. Etudier les branches infinies de $\mathcal{C}_{h_m}$.

4. Monter que h_{-1} admet une bijective de $[0; +\infty[$ sur l'intervalle J qu'on déterminera. Expliciter la fonction h_{-1}^{-1} réciproque de h_{-1}.

5. Tracer les courbes $\mathcal{C}_{h_1}$; $\mathcal{C}_{h_{-1}}$ et $\mathcal{C}_{h_{-1}^{-1}}$.

<u>Correction :</u> $m \in$ IR* et $h_m(x) = 1 - mx^2$.

D_{h_m} = IR

1.

a) $\forall\, x \in$ IR, $h_m(-x) = 1 - m(-x)^2 = 1 - mx^2 = h_m(x)$, alors h_m est une fonction paire. Donc $\mathcal{C}_{h_m}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

b) sens de variation de la fonction de h_m :

$\forall\, x \in IR$,$h_m'(x) = -2mx$,

Si $m < 0$ la fonction h_m est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

si $m > 0$ la fonction h_m est strictement croissante sur $]-\infty; 0]$ et est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

c) $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} h_m(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}(-mx^2) = \begin{cases} +\infty \; si \; m < 0 \\ -\infty \; si \; m > 0 \end{cases}$ et

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} h_m(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}(-mx^2) = \begin{cases} +\infty \; si \; m < 0 \\ -\infty \; si \; m > 0 \end{cases}$

d) Tableau de variation de h_m

Si $m < 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h_m'(x)$	$-$		$+$
$h_m(x)$	$+\infty$ $\searrow$	1	$\nearrow$ $+\infty$

Si $m > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h_m'(x)$	$+$		$-$
$h_m(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	1	$\searrow$ $-\infty$

2.

a) Si $m > 1$ on a, h_m est continue et strictement décroissante sur $]0; 1]$. Elle réalise donc une bijection de $]0; 1]$ sur $[h_m(1); h_m(0)[= [1 - m; 1[$. Or $h_m(0) \times h_m(1) < 0$. Donc sur $]0; 1]$, il a un unique antécédent. $\forall\, m > 1$, l'équation $h_m(x) = 0$ admet une unique solution $x_m \in\,]0; 1]$. Comme h_m est paire alors la deuxième solution est $-x_m$ tel que $-x_m \in [-1; 0[$.

b) h_2 est continue et strictement décroissante sur $]0{,}4; 1[$. Elle réalise donc une bijection de $]0{,}4; 1[$ sur $]h_2(1); h_2(0{,}4)[=]-1; 0{,}68[$.

Or $h_2(1) \times h_2(0{,}4) < 0$. Donc sur $]0{,}4; 1[$, il a un unique antécédent. Ainsi l'équation $h_2(x) = 0$ admet une unique solution $x_2 \in\,]0{,}4; 1[$. Comme h_2 est paire alors la deuxième solution est $-x_2$ tel que $-x_2 \in\,]-1; 0{,}4[$ avec $x_2 = 0{,}74$.

c) Signe de $h_m(x)$

$\forall\, x \in IR$ et **si $m < 0$**, alors $h_m(x) > 0$.

Si $m > 0$

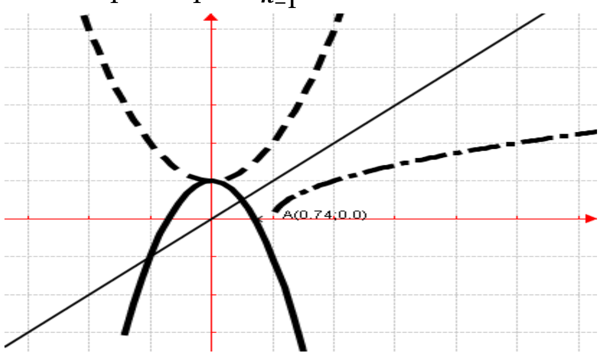
$\forall\, x \in\,]-\infty; -x_m[\, \cup\,]x_m; +\infty[$, alors $h_m(x) < 0$.

$\forall\, x \in\,]-x_m; x_m[$, alors $h_m(x) > 0$.

3. $\frac{h_m(x)}{x} = \frac{1}{x} - mx$, on a $\lim\limits_{x \mapsto \pm\infty} h_m(x) = \infty$, ainsi $\mathcal{C}_{h_m}$ admet une branche parabolique de direction l'axe (OY).

4. h_{-1} est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $[0; +\infty[$ sur J $= [1; +\infty[$. **Explicitons h_{-1}^{-1} :** $y = x^2 + 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{y - 1}$. donc $\forall\, x \in [1; +\infty[$,$h_{-1}^{-1}(x) = \sqrt{x - 1}$.

5. $\mathcal{C}_{h_1}$; $\mathcal{C}_{h_{-1}}$ et $\mathcal{C}_{h_{-1}^{-1}}$



<u>Problème 18 :</u> Soit la fonction f_m définie par $f_m(x) = \frac{x^2 - m}{x + m}$ avec $m \in$ IR*.

1.

a) Quel est l'ensemble de définition de f_m ?

b) Etudier les limites de f_m sur son ensemble de définition. Interpréter graphiquement ces résultats.

c) Déterminer les réels a, b, c tels que pour tout réel x de l'ensemble de définition de f_m, on ait $f_m(x) = ax + b + \frac{c}{x+m}$.

d) Montrer que la fonction f_m admet une primitive F qu'on calculera.

e) Montrer que la droite (D_m) d'équation $y = x - m$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_{f_m}$.

2. Soit A_m le point de coordonnées $(-m; -2m)$. Montrer que le point A_m est centre de symétrie de $\mathcal{C}_{f_m}$.

3.

a) Résoudre dans IR, $x^2 + 2mx + m = 0$.

b) Montrer que $\forall\, x \neq -m$, $f_m'(x) = \frac{x^2+2mx+m}{(x+m)^2}$. En déduire le sens de variation de f_m.

c) Dresser le tableau de variation de f_m.

d) Monter que f_m admet une bijective de $[m; +\infty[$ sur l'intervalle J qu'on déterminera.

e) Tracer les courbes $\mathcal{C}_{f_{-2}}$, (D_{-2}) et $\mathcal{C}_{f_2}$, (D_2)

__Correction :__ **$f_m(x) = \frac{x^2-m}{x+m}$ avec $m \in$ IR***

1.

a) $D_{f_m} =]-\infty; -m[\cup]-m; +\infty[$.

b) $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \frac{x^2}{x} = -\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$;

Si $m \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$, alors $m^2 - m > 0$.

$\lim\limits_{x \mapsto -m^-} f_m(x) = \frac{m^2-m}{0^-} = -\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto -m^+} f_m(x) = \frac{m^2-m}{0^+} = +\infty$. $\mathcal{C}_{f_m}$ admet l'asymptote verticale $x = -m$.

Si $m \in]0; 1[$, alors $m^2 - m < 0$.

$\lim\limits_{x \mapsto -m^-} f_m(x) = \frac{m^2-m}{0^-} = +\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto -m^+} f_m(x) = \frac{m^2-m}{0^+} = -\infty$. $\mathcal{C}_{f_m}$ admet l'asymptote verticale $x = -m$.

Si $m = 1$, alors $f_1(x) = \frac{x^2-1}{x+1} = x - 1$.

$\lim\limits_{x \mapsto -1} f_1(x) = -1 - 1 = -2$ $\mathcal{C}_{f_1}$ admet un prolongement par continuité en -1.

c) $f_m(x) = \frac{x^2-m}{x+m} = ax + b + \frac{c}{x+m} = \frac{ax^2+(am+b)x+bm+c}{x+m}$. Par identification $a = 1$ et $\begin{cases} am + b = 0 \\ mb + c = -m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} b = -m \\ c = m^2 - m \end{array}$, on obtient $f_m(x) = x - m + \frac{m^2-m}{x+m}$.

d) $f_m(x) = x - m + \frac{m^2-m}{x+m}$ a pour primitive $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - mx + (m^2 - m)\ln|x + m| + C$, avec C est constante.

e) $f_m(x) - y = f_m(x) - x + m = \frac{m^2-m}{x+m}$, on calcule $\lim\limits_{x \mapsto \pm\infty}[f_m(x) - y] = 0$, alors la droite ($D_m$) d'équation $y = x - m$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_{f_m}$ à l'infinie.

2. $f_m(-2m - x) + f_m(x) = \left(-2m - x - m + \frac{m^2-m}{-2m-x+m}\right) + \left(x - m + \frac{m^2-m}{x+m}\right) = -4m$, alors le point $A_m(-m; -2m)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_{f_m}$.

3.

a) $x^2 + 2mx + m = 0$, $\Delta' = m(m - 1)$

1er cas : $m = 1$, $S_{IR} = \{-1\}$ car $\Delta' = 0$

2^e cas : $m \in]0; 1[$, $S_{IR} = \emptyset$ car $\Delta' < 0$

3^e cas : $m \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$, $\Delta' > 0$ alors $x' = -m - \sqrt{m(m-1)}$ et $x'' = -m + \sqrt{m(m-1)}$

$S_{IR} = \left\{-m - \sqrt{m(m-1)};\ -m + \sqrt{m(m-1)}\right\}$.

b) $\forall\, x \neq -m$, $f_m'(x) = \frac{x^2+2mx+m}{(x+m)^2}$,

1er cas : $m = 1$, f_1 est strictement croissante sur $]-\infty; -1[$ et sur $]-1; +\infty[$. **NB :** f_1 admet un prolongement par continuité en -1.

2^e cas : $m \in]0; 1[$, $f_m'(x) = \frac{x^2+2mx+m}{(x+m)^2} > 0$, alors f_m est strictement croissante sur $]-\infty; -m[$ et sur $]-m; +\infty[$.

3^e cas : $m \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$, posons $x' = -m - \sqrt{m(m-1)}$ et $x'' = -m + \sqrt{m(m-1)}$ alors f_m est strictement croissante sur $]-\infty; x'[$ et sur $]x''; +\infty[$ et f_m est strictement décroissante sur $]x'; -m[$ et sur $]-m; x''[$.

c) **tableau de variation de f_m.**

1er cas : $m = 1$, $f_1(x) = \frac{x^2-1}{x+1} = x - 1$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	
$f_1(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2^e cas : $m \in]0; 1[$,

x	$-\infty$		$-m$		$+\infty$
$f_m'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	

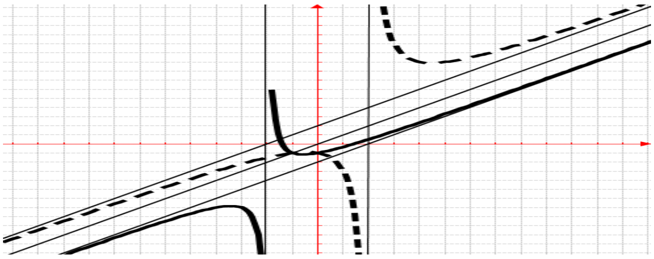
$f_m(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow +\infty$

3^e **cas :** $\boldsymbol{m} \in]-\infty; \mathbf{0}[\cup]\mathbf{1}; +\infty[$,

x	$-\infty$	x'	$-m$	x''	$+\infty$
$f_m'(x)$	$+$	$-$ ‖	$-$	$+$	
$f_m(x)$	$-\infty \nearrow \alpha \searrow -\infty$		‖ $+\infty \searrow \beta \nearrow +\infty$		

d) f_m est continue et strictement croissante sur $[m; +\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $[m; +\infty[$ sur J $= \left[\frac{m-1}{2}; +\infty\right[$.

e) $\mathcal{C}_{f_{-2}}$, (D$_{-2}$) et $\mathcal{C}_{f_2}$, (D$_2$).



Problème 19 : Soit la fonction f_m définie par $f_m(x) = \frac{-x^2+mx+2}{mx-1}$ avec $m \in$ IR*.

1.

a) Quel est l'ensemble de définition de f_m ?

b) Etudier les limites de f_m sur son ensemble de définition. Interpréter graphiquement ces résultats.

c) Déterminer les réels a, b, c tels que pour tout réel x de l'ensemble de définition de f_m, on ait $f_m(x) = ax + b + \frac{c}{mx-1}$.

d) Montrer que la fonction f_m admet une primitive F qu'on calculera.

e) Montrer que la droite (D$_m$) d'équation $y = -\frac{1}{m}x + 1 - \frac{1}{m^2}$ est une asymptote à $\mathcal{C}_{f_m}$.

f) Soit A$_m$ le point de coordonnées $\left(\frac{1}{m}; \frac{1}{m}\right)$. Montrer que le point A$_m$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_{f_m}$.

2.

a) Résoudre dans IR, $-mx^2 + 2x - 3m = 0$.

b) Montrer que $\forall\, x \in IR-\left\{\frac{1}{m}\right\}$, $f_m'(x) = \frac{-mx^2+2x-3m}{(mx-1)^2}$. En déduire le sens de variation de f_m.

c) Dresser le tableau de variation de f_m.

3. Tracer les courbes $\mathcal{C}_{f_{-2}}$, (D$_{-2}$) et $\mathcal{C}_{f_2}$, (D$_2$)

Correction : $f_m(x) = \frac{-x^2+mx+2}{mx-1}$ **avec $m \in$ IR***

1.

a) D$_{f_m} = \left]-\infty; \frac{1}{m}\right[\cup \left]\frac{1}{m}; +\infty\right[$.

b) $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \frac{-x^2}{mx} = \begin{cases} -\infty & si\ m < 0 \\ +\infty & si\ m > 0 \end{cases}$ et

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{-x^2}{mx} = \begin{cases} +\infty & si\ m < 0 \\ -\infty & si\ m > 0 \end{cases}$.

m	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$3m^2-1$	$+$	0	$-$ ‖ $-$	0	$+$

1^{er} cas : Si $m \in \left]-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right[\cup \left]\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right[$ alors le numérateur est positif pour $x = \frac{1}{m}$.

$\lim\limits_{x \mapsto \frac{1}{m}^-} f_m(x) = \begin{cases} +\infty & si\ m < 0 \\ -\infty & si\ m > 0 \end{cases}$ et

$\lim\limits_{x \mapsto \frac{1}{m}^+} f_m(x) = \begin{cases} -\infty & si\ m < 0 \\ +\infty & si\ m > 0 \end{cases}$. $\mathcal{C}_{f_m}$ admet l'asymptote verticale $x = \frac{1}{m}$.

2^e cas : Si $m \in \left]-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right[$ alors le numérateur est négatif pour $x = \frac{1}{m}$.

$\lim\limits_{x \mapsto \frac{1}{m}^-} f_m(x) = \begin{cases} -\infty & si\ m < 0 \\ +\infty & si\ m > 0 \end{cases}$ et

$\lim\limits_{x \mapsto \frac{1}{m}^+} f_m(x) = \begin{cases} +\infty & si\ m < 0 \\ -\infty & si\ m > 0 \end{cases}$. $\mathcal{C}_{f_m}$ admet l'asymptote verticale $x = \frac{1}{m}$.

3^e cas : Si $m = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$ alors le numérateur est nul pour $x = \frac{1}{m}$: $\lim\limits_{x \mapsto \frac{1}{m}^{\mp}} f_m(x) = 0$.

c) $f_m(x) = \frac{-x^2+mx+2}{mx-1} = ax + b + \frac{c}{mx-1} = \frac{amx^2+(bm-a)x-b+c}{x+m}$. Par identification $a = -\frac{1}{m}$ et $\begin{cases} bm - a = m \\ -b + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} b = 1 - \frac{1}{m^2} \\ c = 3 - \frac{1}{m^2} \end{array}$, on obtient $f_m(x) = -\frac{1}{m}x + 1 - \frac{1}{m^2} + \frac{3-\frac{1}{m^2}}{x-m}$.

d) $f_m(x) = -\frac{1}{m}x + 1 - \frac{1}{m^2} + \frac{3-\frac{1}{m^2}}{x-m}$ a pour primitive $F(x) = -\frac{1}{m}x^2 + x - \frac{1}{m^2}x + \left(3 - \frac{1}{m^2}\right)\ln|x-m| + \mathrm{C}$, avec C est constante.

e) $f_m(x) - y = f_m(x) + \frac{1}{m}x - 1 + \frac{1}{m^2} = \frac{3-\frac{1}{m^2}}{x-m}$, on calcule $\lim\limits_{x \mapsto \pm\infty}[f_m(x) - y] = 0$, alors la droite (D$_m$) d'équation $y = -\frac{1}{m}x + 1 - \frac{1}{m^2}$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_{f_m}$ à l'infinie.

f) $f_m\left(\frac{2}{m}-x\right)+f_m(x)=\left(-\frac{1}{m}\left(\frac{2}{m}-x\right)+1-\frac{1}{m^2}+\frac{3-\frac{1}{m^2}}{\frac{2}{m}-x-m}\right)+\left(-\frac{1}{m}x+1-\frac{1}{m^2}+\frac{3-\frac{1}{m^2}}{x-m}\right)=\frac{2}{m}$, alors le point $A_m\left(\frac{1}{m};\frac{1}{m}\right)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_{f_m}$.

2.

a) $-mx^2+2x-3m=0$, $\Delta'=2(1-3m^2)$, $\forall\, m\in$ IR*, $\Delta'<0$ alors $S_{IR}=\emptyset$.

b) $\forall\, x\neq\frac{1}{m}$, $f_m{}'(x)=\frac{-mx^2+2x-3m}{(mx-1)^2}$,

Posons $-mx^2+2x-3m=0$, $\Delta=4(1-3m^2)$.

1^er^ cas : Si $m\in\left]-\infty;-\frac{\sqrt{3}}{3}\right[\cup\left]\frac{\sqrt{3}}{3};+\infty\right[$, $\Delta<0$,

- **Si $m\in\left]-\infty;-\frac{\sqrt{3}}{3}\right[$**, f_m est strictement croissante sur $\left]-\infty;\frac{1}{m}\right[$ et sur $\left]\frac{1}{m};+\infty\right[$.
- **Si $m\in\left]\frac{\sqrt{3}}{3};+\infty\right[$**, alors f_m est strictement décroissante sur $\left]-\infty;\frac{1}{m}\right[$ et sur $\left]\frac{1}{m};+\infty\right[$.

2^e^ cas : Si $m\in\left]-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right[$, $\Delta>0$: $x'=-1-\sqrt{1-3m^2}$ et $x'=-1+\sqrt{1-3m^2}$

- **Si** $-\frac{\sqrt{3}}{3}<m<0$, f_m est strictement croissante sur $\left]-\infty;-1-\sqrt{1-3m^2}\right[$ et sur $\left]-1+\sqrt{1-3m^2};+\infty\right[$. f_m est strictement décroissante sur $\left]-1-\sqrt{1-3m^2};\frac{1}{m}\right[$ et sur $\left]\frac{1}{m};-1+\sqrt{1-3m^2}\right[$.
- **Si 0** $<m<\frac{\sqrt{3}}{3}$, alors f_m est strictement décroissante sur $\left]-\infty;-1-\sqrt{1-3m^2}\right[$; sur $\left]-1+\sqrt{1-3m^2};\frac{1}{m}\right[$ et sur $\left]\frac{1}{m};+\infty\right[$. f_m est strictement croissante sur $\left]-1-\sqrt{1-3m^2};-1+\sqrt{1-3m^2}\right[$.

3^e^ cas : Si $m=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $\boldsymbol{m}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\Delta=0$, $x'=x''=-1$.

- **Si $m=-\frac{\sqrt{3}}{3}$** : alors $f_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}$ est strictement croissante sur $]-\infty;-\sqrt{3}[$; $]-\sqrt{3};-1]$ et sur $[-1;+\infty[$.
- **Si $m=\frac{\sqrt{3}}{3}$**, alors $f_{\frac{\sqrt{3}}{3}}$ est strictement décroissante sur $]-\infty;\sqrt{3}[$ et sur $]\sqrt{3};+\infty[$.

c) **tableau de variation de f_m.**

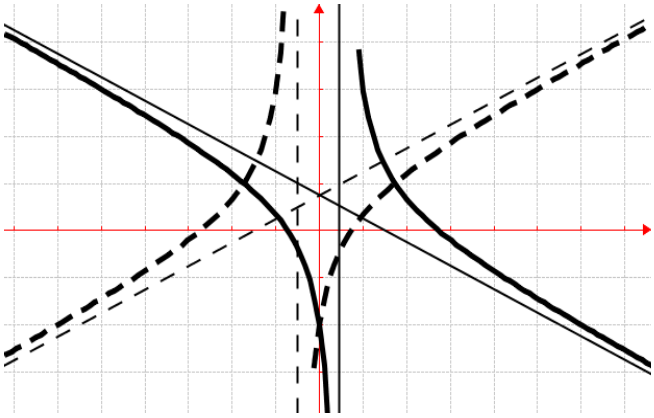
1^er^ cas : $m<0$,

x	$-\infty$	$\frac{1}{m}$	$+\infty$
$f_m{}'(x)$	$+$	‖	$+$
$f_m(x)$	$-\infty\nearrow+\infty$	‖	$-\infty\nearrow\ \ +\infty$

2^e^ cas : $m>0$,

x	$-\infty$	$\frac{1}{m}$	$+\infty$
$f_m{}'(x)$	$-$	‖	$-$
$f_m(x)$	$+\infty\searrow-\infty$	‖	$+\infty\searrow\ \ -\infty$

3. $\mathcal{C}_{f_{-2}}$, **(D₋₂) et $\mathcal{C}_{f_2}$, (D₂).**



<u>Problème 20 :</u> Soit la fonction f_m définie par $f_m(x)=\frac{x^2+2}{x^2+mx+1}$ avec $m\in$ IR*.

1.

a) **Quel est l'ensemble de définition de f_m ?**

b) **Etudier les limites de f_m sur son ensemble de définition. Interpréter graphiquement ces résultats.**

2.

a) **Résoudre dans IR, $mx^2-2x-2m=0$.**

b) **Calculer $f_m{}'(x)$.**

En déduire le sens de variation de f_m.

c) **Dresser le tableau de variation de f_2 et celui de f_{-2}. Tracer les courbes $\mathcal{C}_{f_{-2}}$ et $\mathcal{C}_{f_2}$.**

<u>Problème 31 :</u> $f_m(x)=\frac{x^2+2}{x^2+mx+1}$ avec $m\in$ IR*

1.

a) $D_{f_m}=\{x/x\in\text{IR}, x^2+mx+1\neq0\}$.

Posons $x^2+mx+1=0$, $\Delta=m^2-4$

1^er^ cas : $m\in\,]-\infty;-2[\,\cup\,]2;+\infty[$, $\Delta>0$ alors $x'=\frac{-m-\sqrt{m^2-4}}{2}$ et $x''=\frac{-m+\sqrt{m^2-4}}{2}$, donc $D_{f_m}=\text{IR}-\left\{\frac{-m-\sqrt{m^2-4}}{2};\frac{-m+\sqrt{m^2-4}}{2}\right\}$.

2^e^ cas : $m\in\,]-2;2[$, alors $\Delta<0$ donc $D_{f_m}=$ IR.

3^e^ cas : $m=-2$, alors $\Delta=0$ donc $D_{f_{-2}}=\text{IR}-\{1\}$ **ou $m=2$**, alors $\Delta=0$ donc $D_{f_2}=\text{IR}-\{-1\}$.

b) $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}f_m(x)=\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$ et

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty}f_m(x)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$;

Comme $\forall\, x \in \mathrm{IR},\ x^2+2>0$ alors étudions le signe de x^2+mx+1 afin déterminer la limite.

x	$-\infty$ $\quad x'$	x''	$+\infty$
x^2+mx+1	$+$	$-$	$+$

1^er^ cas : $\boldsymbol{m \in\,]-\infty;-2[\,\cup\,]2;+\infty[}$**,** $\Delta>0$

$\lim\limits_{x\mapsto (x')^-} f_m(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\mapsto (x')^+} f_m(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\mapsto (x'')^-} f_m(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\mapsto (x'')^+} f_m(x)=+\infty$

2^e^ cas : $\boldsymbol{m \in\,]-2;2[}$, alors $\Delta<0$ donc $\mathrm{D}_{f_m}=\mathrm{IR}$.

$\lim\limits_{x\mapsto -\infty} f_m(x)=\lim\limits_{x\mapsto -\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$ et $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} f_m(x)=\lim\limits_{x\mapsto +\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$.

3^e^ cas : $\boldsymbol{m=-2}$, alors $\Delta=0$ donc $\mathrm{D}_{f_{-2}}=\mathrm{IR}-\{1\}$ **ou** $\boldsymbol{m=2}$, alors $\Delta=0$ donc $\mathrm{D}_{f_2}=\mathrm{IR}-\{-1\}$.

$\lim\limits_{x\mapsto 1^-} f_{-2}(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\mapsto 1^+} f_{-2}(x)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\mapsto -1^-} f_{-2}(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\mapsto -1^+} f_{-2}(x)=+\infty$

$\mathcal{C}_{f_m}$ admet les asymptotes verticales $x=x'$; $x=x''$.

$\mathcal{C}_{f_{-2}}$ admet l'asymptote verticale $x=1$.

$\mathcal{C}_{f_2}$ admet l'asymptote verticale $x=-1$.

2.

a) $mx^2-2x-2m=0$, $\Delta=4(1+2m^2)>0$, $\alpha=\frac{1-\sqrt{1+2m^2}}{m}$ et $\beta=\frac{1+\sqrt{1+2m^2}}{m}$, donc, $\forall\, m\in\mathrm{IR}^*$, $\Delta>0$ alors $S_{IR}=\left\{\frac{1-\sqrt{1+2m^2}}{m};\frac{1+\sqrt{1+2m^2}}{m}\right\}$.

b) $\forall\, x\in \mathrm{D}_{f_m},\ f_m{}'(x)=\frac{mx^2-2x-2m}{(x^2+mx+1)^2}$.

Si $\boldsymbol{m}>0$ **alors** $\alpha<\beta$

x	$-\infty$ $\quad\alpha$	β	$+\infty$
$f_m{}'(x)$	$+$	$-$	$+$

f_m est croissante sur $]-\infty;\alpha[$ et sur $[\beta;+\infty[$ et f_m est décroissante sur $]\alpha;\beta]$.

Si $\boldsymbol{m}<0$ **alors** $\alpha>\beta$

x	$-\infty$ $\quad\beta$	α	$+\infty$
$f_m{}'(x)$	$+$	$-$	$+$

f_m est croissante sur $]-\infty;\beta[$ et sur $[\alpha;+\infty[$ et f_m est décroissante sur $]\beta;\alpha]$.

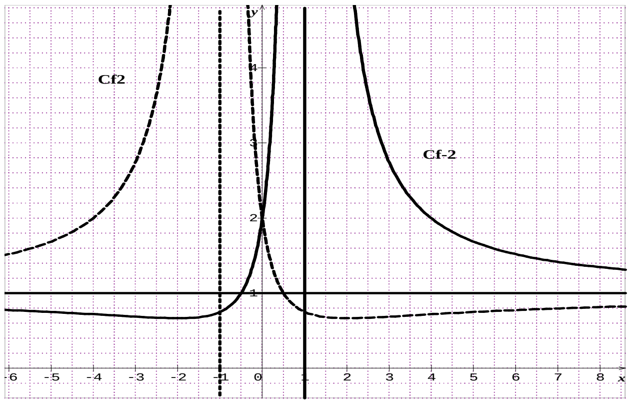
c) Tableau de variation de $\boldsymbol{f_{-2}}$**.**

x	$-\infty$ $\quad -2$		1	$+\infty$
$f_{-2}{}'(x)$	$-$	$+$	‖	$-$
$f_{-2}(x)$	$1\ \searrow\ 0{,}66$	$\nearrow +\infty$	‖	$+\infty\ \searrow\ 1$

Tableau de variation de $\boldsymbol{f_2}$**.**

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f_2{}'(x)$	$+$	‖	$-$	$+$
$f_2(x)$	$1\nearrow+\infty$	‖	$+\infty\searrow\ 0{,}66$	$\nearrow\ 1$

$\boldsymbol{\mathcal{C}_{f_{-2}}}$ **et** $\boldsymbol{\mathcal{C}_{f_2}}$



__Problème 21 :__ Soit $\boldsymbol{n}$ un réel et la fonction $\boldsymbol{h_n}$ définie par : $\boldsymbol{h_n(x)=\sqrt{x^2+2nx-1}}$.

1.

a. Quel est l'ensemble de définition de $\boldsymbol{h_n}$ D_{h_n}?

b. Etudier dérivabilité de $\boldsymbol{h_n}$ en $\boldsymbol{-n-\sqrt{n^2+1}}$ et en $\boldsymbol{-n+\sqrt{n^2+1}}$. Interpréter ces résultats.

c. Etudier le sens de variation de $\boldsymbol{h_n}$ suivant les valeurs de $\boldsymbol{n}$.

2.

a) Etudier les limites de $\boldsymbol{h_n}$ sur D_{h_n}.

b) Dresser le tableau de variation de $\boldsymbol{h_n}$ sur D_{h_n}.

3.

a) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $\boldsymbol{y=x+n}$ est une asymptote de $\boldsymbol{\mathcal{C}_{h_n}}$ en $+\infty$.

b) Démontrer que la droite $(\boldsymbol{D})$ d'équation $\boldsymbol{y=-x-n}$ est une asymptote de $\boldsymbol{\mathcal{C}_{h_n}}$ en $-\infty$.

c) Etudier la position de la courbe $\boldsymbol{\mathcal{C}_{h_n}}$ par rapport à (Δ) et à $(\boldsymbol{D})$.

4. Faire les figures dans le cas où $\boldsymbol{n=1}$et dans le cas où $\boldsymbol{n=-1}$.

__Correction :__ $n\in\mathrm{IR}$ /$\boldsymbol{h_n(x)=\sqrt{x^2+2nx-1}}$.

1.

a) $\mathrm{D}_{h_n}=\{x/x\in\mathrm{IR},x^2+2nx-1\geq 0\}$.

Posons $x^2+2nx-1=0$, $\Delta=4(n^2+1)>0$, alors $x'=-n-\sqrt{n^2+1}$ et $x''=-n+\sqrt{n^2+1}$;

$\mathrm{D}_{h_n}=\left]-\infty;-n-\sqrt{n^2+1}\right]\cup\left[-n+\sqrt{n^2+1};+\infty\right[$.

b) dérivabilité de $\boldsymbol{h_n}$ en $\boldsymbol{-n-\sqrt{n^2+1}}$ et en $\boldsymbol{-n+\sqrt{n^2+1}}$: $\frac{h_n(x)-h_n\left(-n-\sqrt{n^2+1}\right)}{x+n+\sqrt{n^2+1}}=\frac{\sqrt{x^2+2nx-1}}{x+n+\sqrt{n^2+1}}=\sqrt{\frac{x+n-\sqrt{n^2+1}}{x+n+\sqrt{n^2+1}}}$ et $\frac{h_n(x)-h_n\left(-n+\sqrt{n^2+1}\right)}{x+n-\sqrt{n^2+1}}=\frac{\sqrt{x^2+2nx-1}}{x+n-\sqrt{n^2+1}}=\sqrt{\frac{x+n+\sqrt{n^2+1}}{x+n-\sqrt{n^2+1}}}$. On calcule $\lim\limits_{x\mapsto x'}\frac{h_n(x)-h_n(x')}{x-x'}=+\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto x''} \frac{h_n(x)-h_n(x'')}{x-x''} = +\infty$, h_n n'est pas dérivable en $-n-\sqrt{n^2+1}$ et en $-n+\sqrt{n^2+1}$. $\mathcal{C}_{h_n}$ admet à chaque point une demi-tangente verticale.

c) $h'_n(x) = \frac{x+n}{\sqrt{x^2+2nx-1}}$, donc h_n est strictement décroissante sur $]-\infty; -n-\sqrt{n^2+1}[$ et strictement croissante sur $]-n+\sqrt{n^2+1}; +\infty[$.

2.

a) $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} h_n(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \left[-x\sqrt{1+\frac{2n}{x}-\frac{1}{x^2}}\right] = -\infty$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} h_n(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[x\sqrt{1+\frac{2n}{x}-\frac{1}{x^2}}\right] = +\infty$;

$h_n\left(-n-\sqrt{n^2+1}\right) = 0$ et $h_n\left(-n+\sqrt{n^2+1}\right) = 0$.

b) **tableau de variation de h_n sur**

	$-\infty$		x'	x''		$+\infty$
$h'_n(x)$		$-$	‖	‖	$+$	
$h_n(x)$	$+\infty$	↘	0	0	↗	$+\infty$

3.

a) $h_n(x) - x - n = \sqrt{x^2+2nx-1} - x - n = \frac{-2}{\sqrt{x^2+2nx-1}+x+n}$, on calcule

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty}[h_n(x) - x - n] = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[\frac{-2}{\sqrt{x^2+2nx-1}+x+n}\right] = 0$, donc la droite (Δ) d'équation $y = x + n$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_{h_n}$ en $+\infty$.

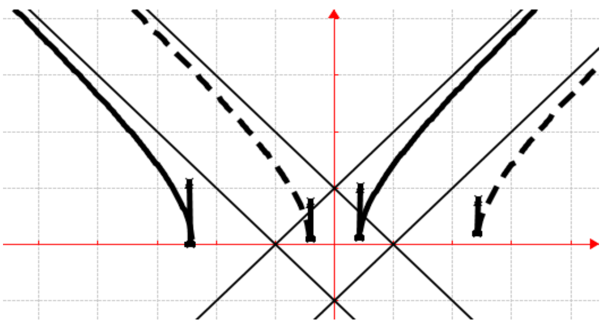
b) $h_n(x) + x + n = \sqrt{x^2+2nx-1} + x + n = \frac{-2}{\sqrt{x^2+2nx-1}-x-n}$, on calcule

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty}[h_n(x) + x + n] = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}\left[\frac{-2}{\sqrt{x^2+2nx-1}-x-n}\right] = 0$, donc la droite (D) d'équation $y = -x - n$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_{h_n}$ en $-\infty$.

c) $h_n(x) - x - n = \frac{-2}{\sqrt{x^2+2nx-1}+x+n} < 0$, donc (Δ) est dessus de $\mathcal{C}_{h_n}$ en $+\infty$.

$h_n(x) + x + n = \frac{-2}{\sqrt{x^2+2nx-1}-x-n} < 0$, donc (D) est dessus de $\mathcal{C}_{h_n}$ en $-\infty$.

4. $\boldsymbol{n = 1}$**et** $\boldsymbol{n = -1}$.



<u>Problème 22 :</u> On considère la fonction h définie par : $h(x) = \frac{|x|+1}{|x|-1}$.

1. **Quel est l'ensemble de définition de h ?**
2. **Montrer que la fonction h définie sur D_h est une fonction paire. Interpréter graphiquement.**
3. **Donner les expressions de la fonction h sans le symbole de la valeur absolue.**
4. **Etudier les limites de h sur D_h.**
5. **Etudier la continuité et la dérivabilité de h en 0. En déduire que $\mathcal{C}_h$ admet deux demi-tangentes au point d'abscisse 0 dont on déterminera les équations réduites.**
6. **Etudier le sens de variation de la fonction h.**
7. **Dresser le tableau de variation de h.**

Tracer la courbe $\mathcal{C}_h$ et T_{0^-} et T_{0^+}.

<u>Correction :</u> $h(x) = \frac{|x|+1}{|x|-1}$

1. $D_h = \{x / x \in \mathrm{IR}, |x| - 1 \neq 0\}$. On résout $|x| \neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 1 \end{cases}$ donc $D_h = \mathrm{IR} - \{-1; 1\}$

2. $\forall\, x \in D_h$, $h(-x) = \frac{|-x|+1}{|-x|-1} = \frac{|x|+1}{|x|-1} = h(x)$, donc h est une fonction paire. Donc $\mathcal{C}_h$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

3. **h sans le symbole de la valeur absolue**

$\forall x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0]$, $h(x) = \frac{-x+1}{-x-1}$ et

$\forall x \in [0; 1[\cup]1; +\infty[$, $h(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

4. $\lim\limits_{x \mapsto -1^-} h(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \mapsto -1^+} h(x) = -\infty$;

$\lim\limits_{x \mapsto 1^-} h(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \mapsto 1^+} h(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[\frac{x+1}{x-1}\right] = 1$ et

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \left[\frac{-x+1}{-x-1}\right] = 1$.

5. **Continuité de h en 0:** $\lim\limits_{x \mapsto 0^-} h(x) = -1$; $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} h(x) = -1$ et $hg(0) = -1$ et $hd(0) = -1$ alors h est continue en 0.

Dérivabilité de h en 0: $\frac{h(x)-h(0)}{x} = \frac{1}{x} \times \frac{|x|+1}{|x|-1}$. Ainsi on calcule $\lim\limits_{x \mapsto 0^-} \frac{h(x)-h(0)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto 0^-}(-2) = -2$

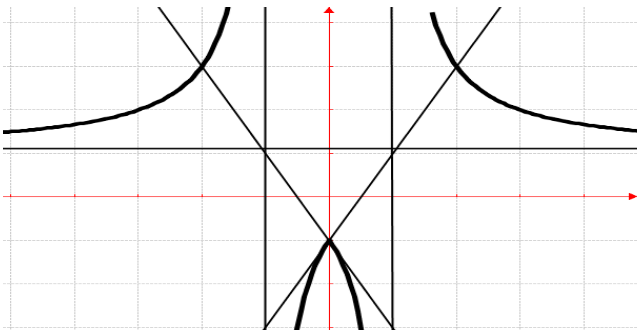
$\lim\limits_{x \mapsto 0^+} \frac{h(x)-h(0)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto 0^+}(2) = 2$; on remarque que $h'_g(0) \neq h'_d(0)$ donc h n'est pas dérivable en 0, par conséquent $\mathcal{C}_h$ admet en ce point 2 deux demi-tangentes : $T_{0^-} : y = -2x - 1$ et $T_{0^+} : y = 2x - 1$. Ce point est anguleux.

6. $\forall x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0[$, $h'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$ et $\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$, $h'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$, alors h est strictement croissante sur $]-\infty; -1[$ et sur $]-1; 0[$ et h est strictement décroissante sur $]0; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.

7. Dressons le tableau de variation de h.

x	$-\infty$ -1	0	1	$+\infty$
$h'(x)$	$+$ ‖	$+$ ‖	$-$ ‖	$-$
$h(x)$	$1 \nearrow +\infty$ ‖	$-\infty \nearrow -1 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 1$

$\mathcal{C}_h$ et T_{0^-} et T_{0^+}.



<u>Problème 23 :</u> On considère la fonction h définie par : $h(x) = \frac{x-3}{|x+1|-2}$.

1. **Quel est l'ensemble de définition de h ?**
2. **Donner les expressions de la fonction h sans le symbole de la valeur absolue.**
3. **Etudier les limites de h sur D_h.**
4. **Etudier la continuité et la dérivabilité de h en -1. En déduire que $\mathcal{C}_h$ admet deux demi-tangentes au point d'abscisse -1 dont on déterminera les équations réduites.**
5. **Etudier le sens de variation de h.**

Dresser le tableau de variation de h.

Tracer la courbe $\mathcal{C}_h$ et T_{-1^-} et T_{-1^+}.

<u>Correction :</u> $h(x) = \frac{x-3}{|x+1|-2}$

1. $D_h = \{x / x \in \mathrm{IR}, |x+1| - 2 \neq 0\}$. On résout $|x+1| \neq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \neq -2 \\ x+1 \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -3 \\ x \neq 1 \end{cases}$ donc $D_h = \mathrm{IR} - \{-3; 1\}$

2. h sans le symbole de la valeur absolue

$\forall x \in]-\infty; -3[\cup]-3; -1]$, $h(x) = \frac{x-3}{-x-3}$ et

$\forall x \in [0; 1[\cup]1; +\infty[$, $h(x) = \frac{x-3}{x-1}$.

3. $\lim\limits_{x \mapsto -3^-} h(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \mapsto -3^+} h(x) = +\infty$;

$\lim\limits_{x \mapsto 1^-} h(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \mapsto 1^+} h(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[\frac{x-3}{x-1}\right] = 1$ et

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \left[\frac{x-3}{-x-3}\right] = -1$.

4. Continuité de h en -1: $\lim\limits_{x \mapsto -1^-} h(x) = -1$; $\lim\limits_{x \mapsto -1^+} h(x) = 2$ et $hg(-1) = 2$ et $hd(-1) = 2$ alors h est continue en -1.

Dérivabilité de h en -1: $\frac{h(x)-h(-1)}{x+1}$. On en déduit les limites : $\lim\limits_{x \mapsto -1^-} \frac{h(x)-h(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x \mapsto -1^-} \left(\frac{3}{-x-3}\right) = -\frac{3}{2}$

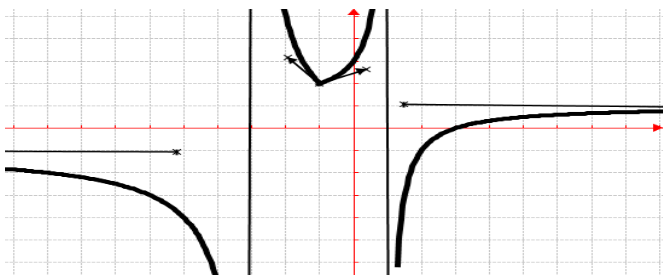
$\lim\limits_{x \mapsto -1^+} \frac{h(x)-h(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x \mapsto -1^+} \left(\frac{-1}{x-1}\right) = \frac{1}{2}$; on remarque que $h'_g(-1) \neq h'_d(-1)$ donc h n'est pas dérivable en -1, par conséquent $\mathcal{C}_h$ admet en ce point 2 deux demi-tangentes : $T_{-1^-} : y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ et $T_{-1^+} : y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$. Ce point est anguleux.

5. $\forall x \in]-\infty; -3[\cup]-3; -1[$, $h'(x) = \frac{-6}{(x+3)^2}$ et $\forall x \in]-1; 1[\cup]1; +\infty[$, $h'(x) = \frac{2}{(x-1)^2}$, alors h est strictement décroissante sur $]-\infty; -3[$ et sur $]-3; -1[$ et h est strictement croissante sur $]-1; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.

Dressons le tableau de variation de h.

x	$-\infty$ -3	-1	1	$+\infty$
$h'(x)$	$-$ ‖	$-$ ‖	$+$ ‖	$+$
$h(x)$	$-1 \searrow -\infty$ ‖	$+\infty \searrow$ 2	$\nearrow +\infty$ ‖	$-\infty \nearrow 1$

$\mathcal{C}_h$ et T_{-1^-} et T_{-1^+}.



<u>Problème 24 :</u> On considère la fonction h définie par : $h(x) = \frac{x^2}{|x^2|-3}$.

1. **Quel est l'ensemble de définition de h ?**
2. **Montrer que la fonction h définie sur D_h est une fonction paire. Interpréter graphiquement.**
3. **Donner les expressions de la fonction h sans le symbole de la valeur absolue.**
4. **Etudier les limites de h sur D_h.**

5. **Etudier la continuité et la dérivabilité de h en 0. Interpréter ces résultats.**
6. **Etudier le sens de variation de la fonction h.**
7. **Dresser le tableau de variation de h.**
8. **Tracer la courbe $\mathcal{C}_h$.**

Correction : $h(x) = \frac{x^2}{|x^2|-3}$

1. $D_h = \{x / x \in IR, |x^2| - 3 \neq 0\}$. On résout $|x^2| \neq 3 \Leftrightarrow x \neq \sqrt{3}$, car la valeur d'un nombre est toujours positive donc $D_h = IR - \{\sqrt{3}\}$.

2. $\forall\, x \in D_h$, $h(-x) = \frac{(-x)^2}{|(-x)^2|-3} = \frac{x^2}{|x^2|-3} = h(x)$, donc h est une fonction paire. Donc $\mathcal{C}_h$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

3. **h sans le symbole de la valeur absolue**

$\forall x \in]-\infty; 0]$, $h(x) = \frac{x^2}{-x^2-3}$ et

$\forall x \in [0; \sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}; +\infty[$, $h(x) = \frac{x^2}{x^2-3}$.

4. $\lim\limits_{x \mapsto \sqrt{3}^-} h(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \mapsto \sqrt{3}^+} h(x) = +\infty$;

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[\frac{x^2}{x^2-3}\right] = 1$ et $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \left[\frac{x^2}{-x^2-3}\right] = -1$.

5. **Continuité de h en 0:** $\lim\limits_{x \mapsto 0^-} h(x) = 0$; $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} h(x) = 0$ et $hg(0) = 0$ et $hd(0) = 0$ alors h est continue en 0.

Dérivabilité de h en 0: $\frac{h(x)-h(0)}{x}$. On en déduit les limites :

$\lim\limits_{x \mapsto 0^-} \frac{h(x)-h(0)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto 0^-} \left(\frac{x^2}{-x^3-3x}\right) = \lim\limits_{x \mapsto 0^-} \left(\frac{x}{-x^2-3}\right) = 0$ et

$\lim\limits_{x \mapsto 0^+} \frac{h(x)-h(0)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto 0^+} \left(\frac{x^2}{x^3-3x}\right) = \lim\limits_{x \mapsto 0^+} \left(\frac{x}{x^2-3}\right) = 0$;

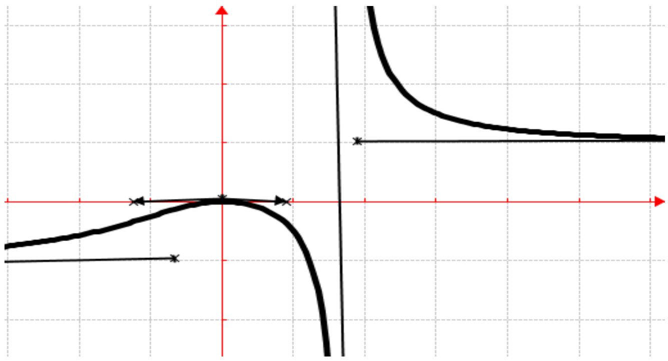
on remarque que $h'_g(0) = h'_d(0)$ donc h est dérivable en 0.

6. $\forall x \in]-\infty; 0]$, $h'(x) = \frac{-6x}{(-x^2-3)^2}$ et $\forall x \in [0; \sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}; +\infty[$, $h'(x) = \frac{-6x}{(x^2-3)^2}$, alors h est strictement décroissante sur $[0; \sqrt{3}[$ et sur $]\sqrt{3}; +\infty[$ et h est strictement croissante sur $]-\infty; 0]$.

7. **Dressons le tableau de variation de h.**

x	$-\infty$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$		$-$	‖	$-$	
$h(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$ $-\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$	1

8. **$\mathcal{C}_h$.**



Problème 25 : **On considère la fonction h définie par : $h(x) = \frac{x^2}{|x^2-1|+2}$.**

1. **Quel est l'ensemble de définition de h ?**
2. **Montrer que la fonction h définie sur D_h est une fonction paire. Interpréter graphiquement.**
3. **Donner les expressions de la fonction h sans le symbole de la valeur absolue.**
4. **Etudier les limites de h sur D_h.**
5. **Etudier la continuité et la dérivabilité de h en -1 et en 1. En déduire que $\mathcal{C}_h$ admet deux demi-tangentes à ces points dont on déterminera les équations réduites.**
6. **Etudier le sens de variation de la fonction h.**
7. **Dresser le tableau de variation de h.**
8. **Tracer la courbe $\mathcal{C}_h$; T_{-1^-} ; T_{-1^+} ; T_{1^-} et T_{1^+}**

Correction : $h(x) = \frac{x^2}{|x^2-1|+2}$

1. $D_h = \{x / x \in IR, |x^2 - 1| + 2 \neq 0\}$. Or la valeur d'un nombre est toujours positive, donc $D_h = IR$

2. $\forall\, x \in D_h$, $h(-x) = \frac{(-x)^2}{|(-x)^2-1|+2} = \frac{x^2}{|x^2-1|+2} = h(x)$, donc h est une fonction paire. Donc $\mathcal{C}_h$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

3. **h sans le symbole de la valeur absolue**

$\forall x \in [-1; 1]$, $h(x) = \frac{x^2}{-x^2+3}$ et

$\forall x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$, $h(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$.

4. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[\frac{x^2}{x^2+1}\right] = 1$ et $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \left[\frac{x^2}{x^2+1}\right] = 1$.

5. **Continuité de h en -1 et en 1:** $\lim\limits_{x \mapsto -1^-} h(x) = \frac{1}{2}$; $\lim\limits_{x \mapsto -1^+} h(x) = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x \mapsto 1^-} h(x) = \frac{1}{2}$; $\lim\limits_{x \mapsto 1^+} h(x) = \frac{1}{2}$

$h(-1) = \frac{1}{2}$ et $h(1) = \frac{1}{2}$ alors h est continue en -1 et en 1.

Dérivabilité de h en -1 et en 1: $\forall\, x \in \,]-1;1[$,
$h'(x) = \frac{6x}{(-x^2+3)^2}$ et $\forall\, x \in \,]-\infty;-1[\, \cup \,]1;+\infty[$,
$h'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$, $h'd(-1) = \frac{-3}{2}$ et $h'g(-1) = \frac{-1}{2}$;
$h'd(1) = \frac{3}{2}$ et $h'g(1) = \frac{1}{2}$ donc h n'est pas dérivable en -1 et en 1. Par conséquent $\mathcal{C}_h$ admet à chacun de ces points, 2 deux demi-tangentes : $\mathbf{T_{-1^-}}$: $y = -\frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}x$

$\mathbf{T_{-1^+}}$: $y = -\frac{3}{2}(x+1) + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}x - 1$

$\mathbf{T_{1^-}}$: $y = \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x$

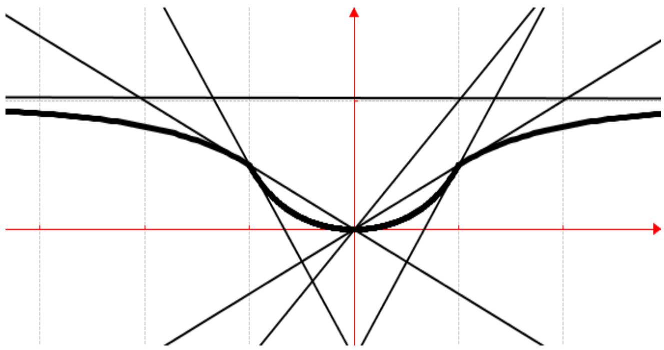
$\mathbf{T_{1^+}}$: $y = \frac{3}{2}(x-1) + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}x - 1$. Ces points sont anguleux.

6. $\forall x \in \,]-1;1[$, $h'(x) = \frac{6x}{(-x^2+3)^2}$ et $\forall x \in \,]-\infty;-1[\, \cup \,]1;+\infty[$, $h'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$, alors h est strictement décroissante sur $]-\infty;-1[$ et sur $]-1;0[$et h est strictement croissante sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$.

7. Dressons le tableau de variation de h.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	‖	$-$	|	$+$	‖	$+$	
$h(x)$	1	↘			0	↗			1

8. $\mathcal{C}_h$; $\mathbf{T_{-1^-}}$; $\mathbf{T_{-1^+}}$; $\mathbf{T_{1^-}}$ et $\mathbf{T_{1^+}}$



<u>Problème 27 :</u> On considère la fonction h définie par : $h(x) = \frac{|x+1|}{|x|-2}$.

1.

a) Quel est l'ensemble de définition de h ?

b) Donner les expressions de la fonction h sans le symbole de la valeur absolue.

2. Etudier les limites de h sur D_h.

3. Etudier la continuité et la dérivabilité de h en 0 et en -1. En déduire que $\mathcal{C}_h$ admet deux demi-tangentes à ces points dont on déterminera les équations réduites.

4. Etudier le sens de variation de la fonction h.

5. Dresser le tableau de signe de h'.

6. Tracer la courbe $\mathcal{C}_h$; $\mathrm{T_{-1^-}}$; $\mathrm{T_{-1^+}}$; $\mathrm{T_{0^-}}$ et $\mathrm{T_{0^+}}$.

<u>Correction :</u> $h(x) = \frac{|x+1|}{|x|-2}$

1.

a) $D_h = \{x/x \in \mathrm{IR}, |x| - 2 \neq 0\} = \mathrm{IR} - \{-2;2\}$

b) h sans le symbole de la valeur absolue

$\forall x \in \,]-\infty;-2[\, \cup \,]-2;-1]$, $h(x) = \frac{x+1}{x+2}$;

$\forall x \in [-1;0]$, $h(x) = -\frac{x+1}{x+2}$ et

$\forall x \in [0;2[\, \cup \,]2;+\infty[$, $h(x) = \frac{x+1}{x-2}$.

2. $\lim\limits_{x \mapsto -2^-} h(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \mapsto -2^+} h(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \mapsto 2^-} h(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \mapsto 2^+} h(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[\frac{x+1}{x-2}\right] = 1$ et $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \left[\frac{x+1}{x+2}\right] = 1$.

3. Continuité de h en -1 et en 0 : $\lim\limits_{x \mapsto -1^-} h(x) = 0$; $\lim\limits_{x \mapsto -1^+} h(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \mapsto 0^-} h(x) = \frac{-1}{2}$; $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} h(x) = -\frac{1}{2}$

$h(-1) = 0$ et $h(0) = \frac{-1}{2}$ alors h est continue en -1 et en 0.

Dérivabilité de h en -1 et en 0 :

$\forall x \in \,]-\infty;-2[\, \cup \,]-2;-1]$, $h'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$; $\forall x \in [-1;0]$, $h'(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}$ et

$\forall x \in [0;2[\, \cup \,]2;+\infty[$, $h'(x) = \frac{-3}{(x-2)^2}$,

$h'g(-1) = 1$ et $h'd(-1) = -1$; $h'g(0) = \frac{-1}{2}$ et $h'd(0) = \frac{-3}{4}$ donc h n'est pas dérivable en -1 et en 0. Par conséquent $\mathcal{C}_h$ admet à chacun de ces points, 2 deux demi-tangentes :

$\mathbf{T_{-1^-}}$: $y = (x+1) + 0 = x + 1$

$\mathbf{T_{-1^+}}$: $y = -(x+1) + 0 = -x - 1$

$\mathbf{T_{0^-}}$: $y = -\frac{1}{2}(x) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

$\mathbf{T_{0^+}}$: $y = \frac{-3}{4}(x) - \frac{1}{2} = \frac{-3}{4}x - \frac{1}{2}$. Ces points sont anguleux.

4. $\forall x \in \,]-\infty;-2[\, \cup \,]-2;-1]$, $h'(x) = \frac{1}{(x+2)^2} > 0$

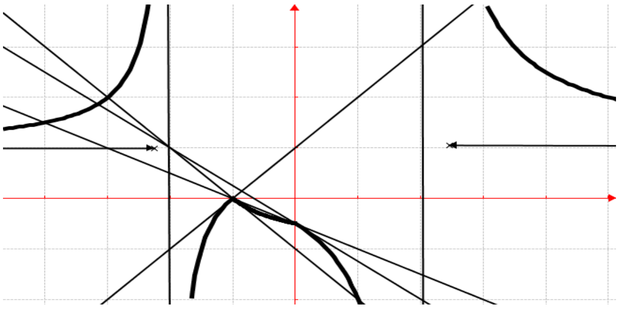
$\forall x \in [-1;0]$, $h'(x) = -\frac{1}{(x+2)^2} < 0$ et

$\forall x \in [0;2[\, \cup \,]2;+\infty[$, $h'(x) = \frac{-3}{(x-2)^2} < 0$, alors h est strictement croissante sur $]-\infty;-2[$ et sur $]-2;-1[$ et h est strictement décroissante sur $]-1;0[$ et sur $]2;+\infty[$.

5. Dressons le tableau de signe de h'.

x	$-\infty$		-2		-1		0		2		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	‖	$+$	‖	$-$	‖	$-$	‖	$-$	

6. $\mathcal{C}_h$; $\mathbf{T_{-1^-}}$; $\mathbf{T_{-1^+}}$; $\mathbf{T_{0^-}}$ et $\mathbf{T_{0^+}}$.



<u>Problème 28 :</u> On considère la fonction h définie par : $h(x) = |x+1| + \frac{1}{|x-1|}$.

1.

a) Quel est l'ensemble de définition de h ?

b) Donner les expressions de la fonction h sans le symbole de la valeur absolue.

2.

a) Etudier les limites de h sur D_h.

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de h en -1. En déduire que $\mathcal{C}_h$ admet deux demi-tangentes au point d'abscisse -1 dont on déterminera les équations réduites.

c) Etudier le sens de variation de la fonction h.

d) Dresser le tableau de variation de h.

3. Montrer que $\mathcal{C}_h$ admet deux asymptotes (d) et (d') obliques d'équation $y = |x+1|$ à déterminer leur équation.

Etudier leur position relative par rapport à $\mathcal{C}_h$.

4. Tracer la courbe $\mathcal{C}_h$; T_{-1^-} ; T_{-1^+} ; (d) et (d').

<u>Correction :</u> $h(x) = |x+1| + \frac{1}{|x-1|}$

1.

a) $D_h = \{x/x \in IR, |x-1| \neq 0\} = IR - \{1\}$

b) h sans le symbole de la valeur absolue

$\forall x \in]-\infty;-1]$, $h(x) = -x-1+\frac{1}{1-x}$;

$\forall x \in [-1;1[$, $h(x) = x+1+\frac{1}{1-x}$ et

$\forall x \in]1;+\infty[$, $h(x) = x+1+\frac{1}{x-1}$.

2.

a) $\lim_{x \mapsto -1^-} h(x) = +\infty$; $\lim_{x \mapsto -1^+} h(x) = +\infty$;

comme $\lim_{x \mapsto \pm\infty} \left[\frac{1}{|x-1|}\right] = 0$; on déduit les limites de

$\lim_{x \mapsto +\infty} h(x) = \lim_{x \mapsto +\infty} [x+1] = +\infty$ et

$\lim_{x \mapsto -\infty} h(x) = \lim_{x \mapsto -\infty} [-x-1] = +\infty$.

b) Continuité de h en -1 : $\lim_{x \mapsto -1^-} h(x) = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x \mapsto -1^+} h(x) = \frac{1}{2}$ or $h(-1) = \frac{1}{2}$ alors h est continue en -1.

Dérivabilité de h en – 1 :

$\forall x \in]-\infty;-1[$, $h'(x) = \frac{x(2-x)}{(1-x)^2}$ et $\forall x \in]-1;1[$, $h'(x) = -\frac{x^2-2x+2}{(1-x)^2}$ on calcule $h'g(-1) = \frac{-3}{4}$ et $h'd(-1) = \frac{5}{4}$ donc h n'est pas dérivable en -1. Par conséquent $\mathcal{C}_h$ admet en ce point deux demi-tangentes :

T_{-1^-} : $y = \frac{-3}{4}(x+1) + \frac{1}{2} = \frac{-3}{4}x - \frac{1}{4}$

T_{-1^+} : $y = \frac{5}{4}(x+1) + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}x + \frac{7}{4}$.

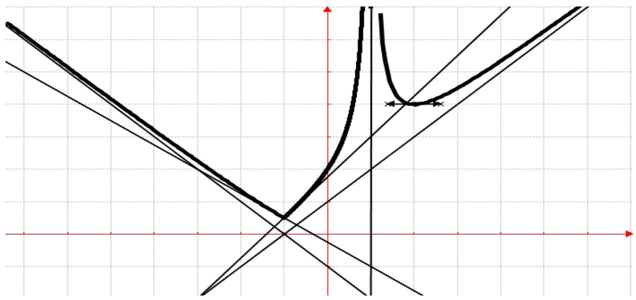
c) $\forall x \in]-\infty;-1[$, $h'(x) = \frac{x(2-x)}{(1-x)^2}$; $\forall x \in]-1;1[$, $h'(x) = \frac{x^2-2x+2}{(1-x)^2}$ et $\forall x \in]1;+\infty[$, $h'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, alors h est strictement décroissante sur $]-\infty;-1[$ et sur $]1;2[$ et h est strictement croissante sur $]-1;1[$ et sur $]2;+\infty[$.

d) Dressons le tableau de variation de h.

x	$-\infty$	-1		1		2	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	‖	$+$	‖	$-$		$+$
$h(x)$	$+\infty \searrow$	$1/2$	$\nearrow +\infty$	‖	$+\infty \searrow$	4	$\nearrow +\infty$

3. $h(x) - |x+1| = \frac{1}{|x-1|}$, on a $\lim_{x \mapsto \pm\infty} [h(x) - |x+1|] = \lim_{x \mapsto \pm\infty} \left[\frac{1}{|x-1|}\right] = 0$ donc $\mathcal{C}_h$ admet deux asymptotes (d) et (d') obliques d'équation : (d) : $y = x+1$ et (d') : $y = -x-1$. $\mathcal{C}_h$ est au dessus de droite (d) en $+\infty$ et de droite (d') en $-\infty$; car $\frac{1}{|x-1|} > 0$.

4. $\mathcal{C}_h$; T_{-1^-} ; T_{-1^+} ; (d) et (d').



<u>Problème 29 :</u> On considère la fonction h définie par : $h(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

1.

a) Quel est l'ensemble de définition de h ?

b) Etudier les limites de h sur D_h.

c) Montrer que $\forall x \in D_h$, $h'(x) = \frac{1}{x^2+1}$. En déduire le sens de variation de h.

d) **Dresser le tableau de variation de h.**

2. **Monter que h admet une bijective de $]-\infty;0]$ sur l'intervalle J qu'on déterminera. Expliciter la fonction h^{-1} réciproque de h.**

3. **Tracer les courbes $\mathcal{C}_h$ et $\mathcal{C}_{h^{-1}}$.**

4. **Montrer que la fonction h admet une primitive H sur $]-\infty;0[$ qu'on calculera.**

5. **Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{{u_n}^2+1}}$.**

a) **Montrer que, pour tout $\forall\, n \in IN, u_n > 0$. Etudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.**

b) **Calculer les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et conjecturer une expression de u_n en fonction de n.**

c) **Démontrer cette conjecture en utilisant u_n raisonnement par récurrence.**

d) **Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.**

<u>Correction :</u> $h(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

1.

a) $D_h = \{x/x \in IR, \sqrt{x^2+1} \neq 0\} = IR$.

b) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left[\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right] = \lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right] = 1$ et

$\lim\limits_{x\mapsto-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\mapsto-\infty}\left[\frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right] = \lim\limits_{x\mapsto-\infty}\left[\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right] = -1$.

c) $\forall x \in]-\infty;+\infty[,\ h'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2} = \frac{1}{x^2+1}$; alors h est strictement croissante sur $]-\infty;+\infty[$.

d) **Dressons le tableau de variation de h :**

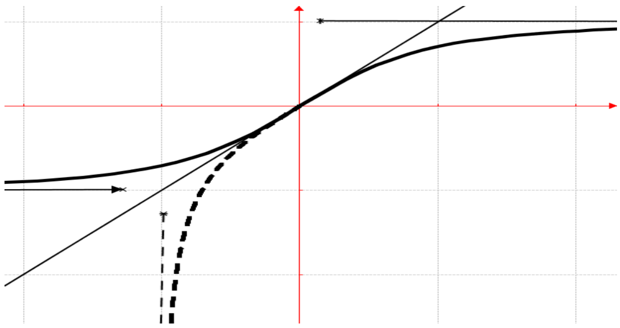
x	$-\infty$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	
$h(x)$	-1	$\nearrow$	1

2. h est continue et strictement croissante sur $]-\infty;0]$. Elle réalise donc une bijection de $]-\infty;0]$ sur $J =]-1;0]$.

Explicitons h^{-1} : $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow y^2 = \frac{x^2}{x^2+1} \Leftrightarrow x^2 = \frac{y^2}{1-y^2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{y^2}{1-y^2}}$.

$\forall\, x \in]-1;0]$,$h^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{x^2}{1-x^2}}$.

3. **$\mathcal{C}_h$ en trait continu et $\mathcal{C}_{h^{-1}}$ en trait discontinu**



4. $\forall x \in]-\infty;0[$, $h(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ a pour primitive $H(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)$

5. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{{u_n}^2+1}}$.

a) **Montrons que $\forall\, n \in IN, u_n > 0$:**

<u>Initialisation :</u> $u_0 = 1 > 0$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

<u>Hérédité :</u> on suppose que la propriété est vraie pour un entier naturel k : $u_k > 0$, et montrons que $u_{k+1} > 0$: $u_{k+1} = \frac{u_k}{\sqrt{{u_k}^2+1}} > 0$ car $u_k > 0$ et $\sqrt{{u_k}^2+1} > 0$, donc la propriété est vraie pour $k+1$.

<u>Conclusion :</u> pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

b) Comme pour tout entier naturel n, $u_n > 0$, on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 afin d'étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{\sqrt{{u_n}^2+1}}$, or $\sqrt{{u_n}^2+1} > 1$, d'où $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ alors $u_{n+1} < u_n \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n < 0$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

c) $u_0 = 1$; $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $u_3 = \frac{1}{\sqrt{4}}$ et $u_4 = \frac{1}{\sqrt{5}}$. On conjecture que, pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

d) **Démontrons cette conjecture en utilisant u_n raisonnement par récurrence :**

<u>Initialisation :</u> $u_0 = \frac{1}{\sqrt{0+1}} = 1$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

<u>Hérédité :</u> on suppose que la propriété est vraie pour un entier naturel k : $u_k = \frac{1}{\sqrt{k+1}}$, et montrons que $u_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{k+2}}$: $u_{k+1} = \frac{u_k}{\sqrt{{u_k}^2+1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{k+1}}+1}} = \frac{1}{\sqrt{k+2}}$, donc la propriété est vraie pour $k+1$.

<u>Conclusion :</u> pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

e) $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}[u_n] = \lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right] = 0$, La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

<u>Problème 30 :</u> On considère la fonction h définie par : $h(x) = \sqrt{x+2}$.

1.

a) **Quel est l'ensemble de définition de h ?**

b) Etudier les limites de h sur D_h.

c) Etudier la continuité et la dérivabilité de h en -2. Interpréter graphiquement ce résultat.

d) Etudier le sens de variation de h.

e) Dresser le tableau de variation de h.

2. Etudier la branche infinie de $\mathcal{C}_h$ en $+\infty$.

3. Monter que h admet une bijective de $[-2;+\infty[$ sur l'intervalle J qu'on déterminera. Expliciter la fonction h^{-1} réciproque de h.

4. Tracer les courbes $\mathcal{C}_h$ et $\mathcal{C}_{h^{-1}}$.

5. Montrer que la fonction h admet une primitive H sur $[-2;+\infty[$ qu'on calculera.

6. Soit θ un nombre réel tel que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : $U_0 = 2\cos\theta$ et $U_{n+1} = \sqrt{2+U_n}$.

a) Calculer les trois premier termes de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de θ.

b) Démontrer : $\forall\, n \in \mathbb{N}\;\; U_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$.

c) Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $V_n = \frac{\theta}{2^n}$. Déterminer la limite de la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

d) En déduire que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Quelle est sa limite ?

<u>Correction :</u> $h(x) = \sqrt{x+2}$

1.

a) $D_h = \{x / x \in IR, x+2 \geq 0\} = [-2;+\infty[$.

b) $\lim\limits_{x\mapsto -2} h(x) = \lim\limits_{x\mapsto -2}\left[\sqrt{x+2}\right] = 0$ et $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} h(x) = \lim\limits_{x\mapsto +\infty}\left[\sqrt{x+2}\right] = +\infty$.

c) Continuité de h en -2 : $\lim\limits_{x\mapsto -2^+} h(x) = 0$ et $h(-2) = 0$ alors h est continue en -2.

Dérivabilité de h en -2 :

$\frac{h(x)-h(-2)}{x+2} = \frac{\sqrt{x+2}}{x+2} = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$, on calcule $\lim\limits_{x\mapsto -2^+}\frac{h(x)-h(-2)}{x+2} = \lim\limits_{x\mapsto -2^+}\left[\frac{1}{\sqrt{x+2}}\right] = +\infty$ donc h n'est pas dérivable en -2. Par conséquent $\mathcal{C}_h$ admet en ce point une demi-tangente verticale.

d) $\forall x \in]-2;+\infty[$, $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} > 0$ alors h est strictement croissante sur $]-2;+\infty[$.

e) Dressons le tableau de variation de h :

x	-2	$+\infty$
$h'(x)$	‖ +	
$h(x)$	0 ↗	$+\infty$

2. branche infinie de $\mathcal{C}_h$ en $+\infty$.

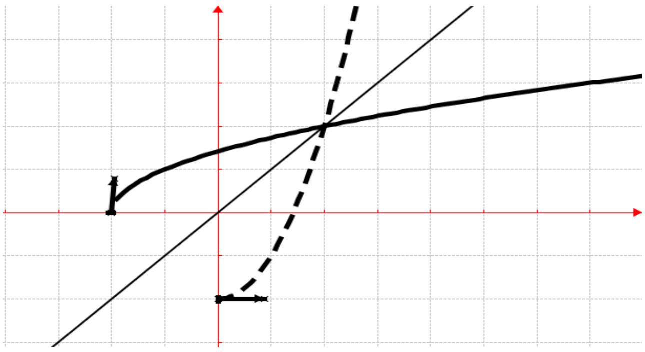
$\frac{h(x)}{x} = \frac{\sqrt{x+2}}{x} = \frac{|x|\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}{x} = \sqrt{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}$ donc

$\lim\limits_{x\mapsto +\infty}\frac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x\mapsto +\infty}\left[\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}\right] = 0$ $\mathcal{C}_h$ admet une branche parabolique de direction (Ox) en $+\infty$.

3. h est continue et strictement croissante sur $[-2;+\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $[-2;+\infty[$ sur $J = [0;+\infty[$.

Explicitons h^{-1} : $y = \sqrt{x+2} \Leftrightarrow y^2 = x+2 \Leftrightarrow x = y^2 - 2$. $\forall\, x \in [0;+\infty[\,, h^{-1}(x) = x^2 - 2$.

4. $\mathcal{C}_h$ en trait continu et $\mathcal{C}_{h^{-1}}$ en trait discontinu



5. $\forall\, x \in [-2;+\infty[$, $h(x) = \sqrt{x+2}$ a pour primitive $H(x) = \frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}} + C$.

6. $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $U_0 = 2\cos\theta$ et $U_{n+1} = \sqrt{2+U_n}$.

a) $U_1 = \sqrt{2+U_0} = \sqrt{2+2\cos\theta} = \sqrt{2\left(1+1-2sin^2\frac{\theta}{2}\right)} = \sqrt{4\left(1-sin^2\frac{\theta}{2}\right)} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$U_2 = \sqrt{2+U_1} = \sqrt{2+2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \sqrt{2\left(1+1-2sin^2\left(\frac{\theta}{2^2}\right)\right)} = \sqrt{4\left(1-sin^2\frac{\theta}{2^2}\right)} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right)$.

b) Démontrons $\forall\, n \in \mathbb{N}\;\; U_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$.

<u>Initialisation :</u> $u_0 = U_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^0}\right) = 2\cos\theta$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

<u>Hérédité :</u> on suppose que la propriété est vraie pour un entier naturel k : $u_k = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$, et montrons que $u_{k+1} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^{k+1}}\right)$: $u_{k+1} = \sqrt{2+U_k} = \sqrt{2+2\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)} = \sqrt{4\left(1-sin^2\frac{\theta}{2^{k+1}}\right)} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^{k+1}}\right)$, donc la propriété est vraie pour $k+1$.

<u>Conclusion :</u> $\forall\, n \in \mathbb{N}\;\; U_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$.

c) $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ /$V_n = \frac{\theta}{2^n}$.

$\lim\limits_{n \mapsto +\infty} V_n = \lim\limits_{n \mapsto +\infty} \frac{\theta}{2^n} = 0$, car $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} 2^n = +\infty$.

d) Comme $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, alors $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la composée de 2cos(0) et converge vers un nombre fini. Posons $t = \frac{\theta}{2^n}$, on calcule $\lim\limits_{t \mapsto 0} U_n = \lim\limits_{t \mapsto 0} 2\cos(t) = 2$, donc $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} U_n = 2$, aussi on peut lire sur la figure cette limite de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est 2.

<u>Problème 31 :</u> On considère la fonction h définie par : $h(x) = 1 + x\sqrt{x^2+1}$.

1.

a) **Quel est l'ensemble de définition de h ?**

b) **Etudier les limites de h sur D_h.**

c) **Etudier le sens de variation de h.**

d) **Dresser le tableau de variation de h.**

e) **Etudier les branches infinies de $\mathcal{C}_h$.**

2.

a) **Montrer que $\forall\, x \in D_h$, $h''(x) = \frac{x(2x^2+3)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.**

b) **Montrer que la courbe $\mathcal{C}_h$ admet un point d'inflexion A dont on déterminera son coordonnée.**

c) **Déterminer une équation de la tangente T au point A.**

3. **Tracer T et la courbe $\mathcal{C}_h$.**

4. **Montrer que la fonction h admet une primitive H sur IR qu'on calculera.**

<u>Correction :</u> $h(x) = 1 + x\sqrt{x^2+1}$

1.

a) $D_h = \{x / x \in \text{IR}, x^2+1 \geq 0\} = \text{IR}$.

b) $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \left[1 + x\sqrt{x^2+1}\right] = -\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[1 + x\sqrt{x^2+1}\right] = +\infty$.

c) $\forall x \in \text{IR}$, $h'(x) = \sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} > 0$ alors h est strictement croissante sur $]-\infty; +\infty[$.

d) **Dressons le tableau de variation de h :**

x	$-\infty$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

e) **branche infinie de $\mathcal{C}_h$ en $+\infty$.**

$\frac{h(x)}{x} = \frac{1+x\sqrt{x^2+1}}{x} = \frac{1}{x} + \sqrt{x^2+1}$ donc

$\lim\limits_{x \mapsto \pm\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto \pm\infty} \left[\frac{1}{x} + \sqrt{x^2+1}\right] = +\infty$ $\mathcal{C}_h$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$ et en $-\infty$.

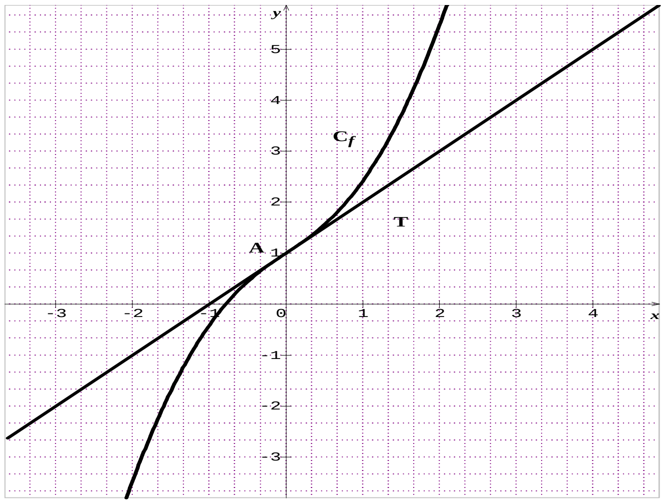
2.

a) $\forall\, x \in \text{IR}$, $h''(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}(2x^2+1)}{(x^2+1)} = \frac{4x^3+4x-2x^3-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x^3+3x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{x(2x^2+3)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

b) **Point d'inflexion A : $f''(x) = 0 \Leftrightarrow$** $x(2x^2+3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, A$(0; 1)$.

c) **T :** $y = h'(0)(x-0) + h(0) = x + 1$.

3. **$\mathcal{C}_h$ et T.**



4. $\forall\, x \in \text{IR}$, $h(x) = 1 + x\sqrt{x^2+1}$ a pour primitive $\text{H}(x) = x + \frac{2}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}} + \text{C}$.

<u>Problème 32:</u> Soit la fonction g définie par : $g(x) = \frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}$.

1. **Déterminer le domaine de définition de la fonction g. Etudier la continuité de g.**

2. **Etudier la dérivabilité de g en -2 et en 2. Interpréter graphiquement ces résultats.**

3. **Pour tout x réel, étudier le signe de $u(x) = 2 + \sqrt{4-x^2}$.**

4. **Montrer que $\forall\, x \in]-2; 0[\cup]0; 2[$, $g'(x) = \frac{-2u(x)}{x^2\sqrt{4-x^2}}$. En déduire le sens de variation de g.**

5. **Montrer que $\lim\limits_{x \mapsto 0^-} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} g(x) = +\infty$.**

6. **Dresser le tableau de variation de g.**

7. **Monter que g admet une bijective de $]0; 2]$ sur l'intervalle J qu'on déterminera. Expliciter la fonction g^{-1} réciproque de g.**

8. **Tracer les courbes $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_{g^{-1}}$.**

<u>Correction :</u> $g(x) = \frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}$,

1. $D_g = \{x / x \in IR, 4 - x^2 \geq 0 \; et \; x \neq 0\} = [-2; 0[\cup]0; 2]$. Comme $\lim_{x \mapsto -2} g(x) = -1 = g(-2)$ et $\lim_{x \mapsto 2} g(x) = 1 = g(2)$, alors g est continue sur $[-2; 0[$ et sur $]0; 2]$.

2. $\frac{g(x)-g(-2)}{x+2} = \frac{1}{x}\left[1 + \sqrt{\frac{2-x}{x+2}}\right]$ et $\frac{g(x)-g(2)}{x-2} = \frac{-1}{x}\left[1 + \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\right]$; on calcule $\lim_{x \mapsto -2^+} \frac{g(x)-g(-2)}{x+2} = -\infty$, car $\lim_{x \mapsto -2^+} \sqrt{\frac{2-x}{x+2}} = +\infty$ et $\lim_{x \mapsto 2^-} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = +\infty$, car $\lim_{x \mapsto 2^-} \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} = +\infty$. Mais g n'est pas dérivable en -2 et en 2. Donc g est dérivable sur $]-2; 0[$ et sur $]0 : 2[$. Donc $\mathcal{C}_g$ admet deux demi-tangentes en -2 et deux autres en 2.

3. $\forall\, x \in [-2; 0[\cup]0; 2]$, $u(x) = 2 + \sqrt{4 - x^2} > 0$.

4. $\forall\, x \in]-2; 0[\cup]0; 2[$, $g'(x) = \frac{-2u(x)}{x^2\sqrt{4-x^2}} < 0$, g est strictement décroissante sur $]-2; 0[$ et sur $]0 : 2[$.

5. $\lim_{x \mapsto 0^-} g(x) = \frac{4}{0^-} = -\infty$ et $\lim_{x \mapsto 0^+} g(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty$.

6. **Dressons le tableau de variation de g:**

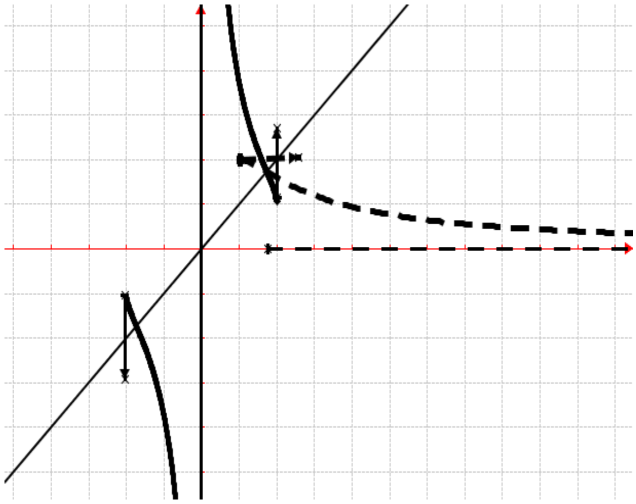
x	-2		0		2
$g'(x)$	‖	$-$	‖	$-$	‖
$g(x)$	-1 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1

7. g est continue et strictement décroissante sur $]0; 2]$. Elle réalise donc une bijection de $]0; 2]$ sur $J = [1; +\infty[$.

Explicitons g^{-1} : $y = \frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x} \Leftrightarrow x[x(1 + y^2) - 4y] = 0 \Leftrightarrow x(1 + y^2) = 4y \Leftrightarrow x = \frac{4y}{1+y^2}$.

$\forall\, x \in [1; +\infty[$, $g^{-1}(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.

8. $\boldsymbol{\mathcal{C}_g}$ **et** $\boldsymbol{\mathcal{C}_{g^{-1}}}$**.**



<u>Problème 33 :</u> Soit la fonction f définie par $f(x) = (x-1)^2 + \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$.

1. **Quel est l'ensemble de définition de f ?**

2. **Etudier la continuité de f.**

3. **Etudier la dérivabilité de f en -1 et en 3. Interpréter graphiquement.**

4. **Etudier le signe, $\left(2\sqrt{-x^2 + 2x + 3} - 1\right)$, $\forall\, x \in [-1; 3]$.**

5. **Montrer que $\forall\, x \in]-1; 3[$, $f'(x) = \frac{(x-1)\left(2\sqrt{-x^2+2x+3}-1\right)}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$. En déduire le sens de variation de la fonction f.**

6. **Dresser le tableau de variation de f.**

7. **Montrer que la droite d'équation $x = 1$ est axe de symétrie.**

8. **Monter que f admet une bijective de $[0; +\infty[$ sur l'intervalle J qu'on déterminera. Expliciter la fonction f^{-1} réciproque de f.**

9. **Tracer les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$.**

D'unité graphique 3 cm.

<u>Correction :</u> $f(x) = (x-1)^2 + \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$

1. $D_f = \{x / x \in IR, -x^2 + 2x + 3 \geq 0\} = [-1; 3]$.

2. $\lim_{x \mapsto -1^+} f(x) = \lim_{x \mapsto -1^+}[(x-1)^2] = 4$ et $f(-1) = 4$ alors f est continue au point -1.

$\lim_{x \mapsto 3} f(x) = \lim_{x \mapsto 3}[(x-1)^2] = 4$ et $f(3) = 4$ alors f est continue au point 3. Donc f est continue sur $[-1; 3]$.

3. **dérivabilité d'une fonction f en x_0** s'obtient en étudiant $\lim_{h \mapsto 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

- Si $h > 0$, alors $\lim\limits_{h \mapsto 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim\limits_{h \mapsto 0} h - 4 + \sqrt{-1+\frac{4}{h}} = +\infty$
- Si $h > 0$, alors $\lim\limits_{h \mapsto 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim\limits_{h \mapsto 0} h - 4 + \sqrt{-1+\frac{4}{h}} = +\infty$
- Si $h < 0$, alors $\lim\limits_{h \mapsto 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim\limits_{h \mapsto 0} h - 4 - \sqrt{-1-\frac{4}{h}} = -\infty$
- Si $h < 0$, alors $\lim\limits_{h \mapsto 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim\limits_{h \mapsto 0} h - 4 + \sqrt{-1+\frac{4}{h}} = +\infty$

f n'est pas dérivable en -1 et en 3.

Interprétons graphiquement : La courbe représentative de la fonction f admet en ces points d'abscisse -1 et 3 une demi-tangente verticale.

4. $\forall\, x \in [-1; 3]$, posons $2\sqrt{-x^2+2x+3} - 1 = 0 \Leftrightarrow -4x^2 + 8x + 11 = 0$. Les racines sont $x' = 1 - \frac{\sqrt{15}}{2} = -0{,}93$ et $x'' = 1 + \frac{\sqrt{15}}{2} = 2{,}93$.

x	-1	-0,93	2,93	3
$2\sqrt{-x^2+2x+3} - 1$	$-$	$-$	$+$	$-$

5. $\forall\, x \in]-1; 3[$, $f'(x) = \frac{(x-1)(2\sqrt{-x^2+2x+3}-1)}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$, alors f est strictement croissante sur $]-\infty; 1[$ et sur $]3; +\infty[$ et f est strictement décroissante sur $]1; 3[$.

$\lim\limits_{x \mapsto -1} f(x) = 4$; $\lim\limits_{x \mapsto 3} f(x) = 4$.

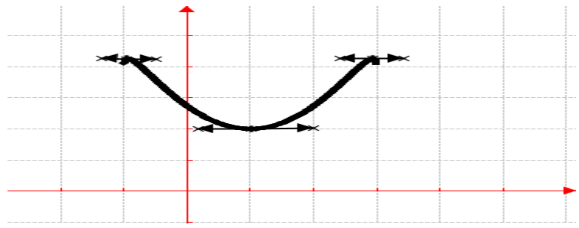
6. Dressons le tableau de variation de f:

x	-1		$-0{,}93$		1		2,93		3
$f'(x)$	‖	$+$		$-$		$+$		$-$	‖
$f(x)$	4	↗	$\frac{17}{4}$	↘	2	↗	$\frac{17}{4}$	↘	4

7. Deux méthodes possibles : changer de repère en prenant par exemple Ω(1,0) pour nouvelle origine, ou comparer f(1-h) et f(1+h).

$f(1-x) = (1-x-1)^2 + \sqrt{-(1-x)^2 + 2(1-x) + 3} = f(1+x)$, alors le point Ω(1,0) est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

8.



<u>Problème 34 :</u> On considère la fonction f définie par : $\boldsymbol{f(x) = x + \sqrt{1+x^2}}$.

1.

a) Déterminer les limites de f sur IR.

b) Pour tout x réel, étudier le signe de $u(x) = \sqrt{1+x^2} + x$.

c) Montrer que $\forall\, x \in IR$, $f'(x) = \frac{u(x)}{\sqrt{1+x^2}}$.

En déduire le sens de variation de f.

d) Dresser le tableau de variation de f.

e) Etudier les branches infinies.

f) Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$, d'unité graphique 2 cm.

g) Calculer l'expression $f(x)$ en fonction de x dans le nouveau repère orthonormé $(I; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ où $I(0; 1)$ dans $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

2.

a) Montrer que f admet une application réciproque f^{-1} dont on étudiera les variations.

b) Démontrer que $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ admet une asymptote oblique (d) d'équation à déterminer.

c) Expliciter f^{-1} sur IR.

d) Construire $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ et (d).

3. Calculer $x - \sqrt{1+x^2}$ en fonction de $f(x)$.

4. Soit g l'application définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(u) = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right)$.

a) Donner les expressions de $(g + f^{-1})(x)$ et $\frac{1}{(g-f^{-1})(x)}$ en fonction de $x \in \mathbb{R}^*$.

b) En déduire l'expression de $(g + f^{-1})^{-1}(x)$ en fonction de x.

5. **On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{9}{u_n}\right)$.**

a) Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 3.

b) Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

c) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n - 3 \leq \frac{1}{2^n}$.

d) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

<u>Correction :</u> $\boldsymbol{f(x) = x + \sqrt{1+x^2} = x + |x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}$

1. $f(x)=\frac{1}{x-\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{x-|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}$.

a) D_f =IR, $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\left[\frac{1}{x\left(1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)}\right]=0$ et

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left[x\left(1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)\right]=+\infty$.

b) Posons $\sqrt{1+x^2}+x>0 \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2}>-x \Leftrightarrow x^2+1>x^2 \Leftrightarrow 1>0$(vraie), donc $u(x)>0$.

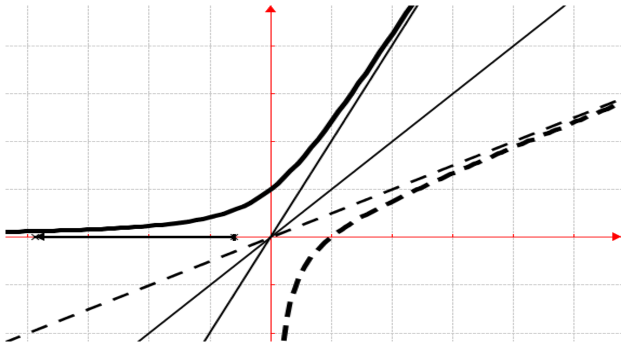
c) $\forall\, x\in IR,\ f'(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}>0$ alors la fonction f est strictement croissante sur IR.

d) **Dressons le tableau de variation de f:**

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

e) $\frac{f(x)}{x}=1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}$, $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\frac{f(x)}{x}=2$ et $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}[f(x)-2x]=0$, donc $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique d'équation $y=2x$.

f)



g)

- Cherchons une équation de $\mathcal{C}_f$ dans le nouveau repère orthonormé $(\mathrm{I};\vec{\imath},\vec{\jmath})$ avec $\mathrm{I}(0;1)$. Si $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{\mathrm{IM}}=X\vec{\imath}+Y\vec{\jmath}$, la relation de Chasles : $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\overrightarrow{\mathrm{OI}}+\overrightarrow{\mathrm{IM}}$ fournit les formules e changement de repère : $\begin{cases} x=X \\ y=1+Y \end{cases}$.
- Alors $\mathrm{M}\in\mathcal{C}_f \Leftrightarrow y=x+\sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow 1+Y=X+\sqrt{1+X^2} \Leftrightarrow Y=X-1+\sqrt{1+X^2}$ est la nouvelle équation de $\mathcal{C}_f$ dans le nouveau repère orthonormé $(\mathrm{I};\vec{\imath},\vec{\jmath})$ avec $\mathrm{I}(0;1)$.

2.

a) f est continue et strictement croissante sur IR. Elle réalise donc une bijection de IR vers J = $]0;+\infty[$. f^{-1} est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

x	0		$+\infty$
$(f^{-1})'(x)$	‖	$+$	
$f^{-1}(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

b) On sait que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote d'équation $y=2x$, alors l'équation de (d) se déduit par $y=2x \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}y$; donc (d) : $y=\frac{1}{2}x$.

c) **Explicitons f^{-1} :** $y=x+\sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow x=\frac{y^2-1}{2y}$. $\forall\, x\in\,]0;+\infty[\,, f^{-1}(x)=\frac{x^2-1}{2x}$.

d) **$\mathcal{C}_{f^{-1}}$ et (d) voir figure à gauche.**

3. $f(x)=x+\sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow f(x)-x=\sqrt{1+x^2}$, on la remplace : $x-\sqrt{1+x^2}=x-f(x)+x=2x-f(x)$

4. $g(u)=\frac{1}{2}\left(u+\frac{1}{u}\right)$.

a) $(g+f^{-1})(x)=\ g(x)+f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{x^2-1}{2x}=x$.

et $\frac{1}{(g-f^{-1})(x)}=\frac{1}{g(x)-f^{-1}(x)}=\frac{1}{\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)-\frac{x^2-1}{2x}}=x$.

b) $(g+f^{-1})^{-1}(x)=\frac{1}{g(x)+f^{-1}(x)}=\frac{1}{x}$.

5. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $u_0=4$; $u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{9}{u_n}\right)$.

a) Soit la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{9}{x}\right)$. pour tout réel >0 , $h'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2-9}{x^2}\right)$ donc la fonction h est décroissante sur $]0;3]$ et croissante sur $[3;+\infty[$; elle admet donc un minimum en x = 3 qui vaut h(3) = 3. Donc pour tout réel $x\geq 3, h(x)\geq 3$.

Montrons par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 3.

<u>Initialisation :</u> $u_0=4>3$, la propriété est vraie pour n = 0.

<u>Hérédité :</u> on suppose que la propriété est vraie pour un entier naturel k : $u_k\geq 3$, et montrons que $u_{k+1}\geq 3$:
On a $u_{k+1}=f(u_k)$, et $u_k\geq 3$, donc $f(u_k)\geq 3$, et $u_{k+1}\geq 3$.

<u>Conclusion :</u> la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 3.

b) **Montrons par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante :**

<u>Initialisation :</u> $u_0=4$ et $u_1=\frac{25}{8}<u_0$, donc la propriété est vraie pour n = 0.

<u>Hérédité :</u> on suppose que la propriété est vraie pour un entier naturel k : $u_{k+1}<u_k$, et montrons que $u_{k+2}<u_{k+1}$:Sur $[3;+\infty[$, la fonction f est strictement croissante, et pour tout entier n, un _ 3, donc $f(u_{k+1})<f(u_k)$, soit $f(u_{k+2})<f(u_{k+1})$

<u>Conclusion :</u> la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

c) **Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n-3\leq\frac{1}{2^n}$:**

<u>Initialisation :</u> $u_0-3=1\leq\frac{1}{2^0}=1$, donc la propriété est vraie pour n = 0.

Hérédité : on suppose que la propriété est vraie pour un entier naturel k : $u_k - 3 \le \frac{1}{2^k}$, et montrons que $u_{k+1} - 3 \le \frac{1}{2^{k+1}}$: $u_{k+1} - 3 = \frac{1}{2}\left(u_k + \frac{9}{u_k}\right) - 3 = \frac{1}{2}(u_k - 3) + \frac{1}{2}\left(\frac{9}{u_k}\right) - \frac{3}{2}$

$u_{k+1} - 3 \le \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^k} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \le \frac{1}{2^{k+1}}$ car $u_k \ge 3 \Leftrightarrow \frac{1}{u_k} \le \frac{1}{3}$ entraîne $\frac{9}{u_k} \le 3$ entraîne $\frac{1}{2}\left(\frac{9}{u_k}\right) \le \frac{3}{2}$.

Conclusion : pour tout entier naturel n, $u_n - 3 \le \frac{1}{2^n}$.

d) Pour tout entier naturel n, $0 \le u_n - 3 \le \frac{1}{2^n}$, et on sait que $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \left[\frac{1}{2^n}\right] = 0$, donc par le **théorème des gendarmes**, $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} [u_n] = 0$. La suite converge vers 0.

Problème 35 : On considère la fonction g définie par : $g(x) = (x+1)\sqrt{x+1} - 1$.

(Unités graphiques : 3 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée).

1. Etudier la continuité de g au point -1.

2. Etudier la dérivabilité de g au point -1. Interpréter graphiquement.

3. Étudier les variations de la fonction g, puis dresser le tableau de variations de la fonction g sur l'ensemble de définition de la fonction g.
Etudier la branche infinie de $\mathcal{C}_g$ en $+\infty$.

4. Tracer $\mathcal{C}_g$.

5. Montrer que g est une bijection de l'intervalle $[-1; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

6. Soit g^{-1} l'application réciproque de g.

a) Représenter graphiquement les variations de g^{-1} sur le meme graphique que précédemment.

b) Expliciter g^{-1}.

c) g^{-1} est-elle dérivable au point -1 ?

d) Expliciter $(g^{-1})'$.

- **En utilisant l'expression de $g^{-1}(x)$ calculer au b).**
- **En utilisant le théorème sur la dérivée d'une bijection réciproque.**

7. Soit β un nombre réel compris entre $\frac{1}{2}$ et 1. On note $\mathcal{A}(\beta)$ l'aire de la partie du plan définie par : $\begin{cases} 0 \le x \le \beta \\ 0 \le y \le g(x) \end{cases}$.

a) Déterminer la valeur en cm^2 de $\mathcal{A}(\beta)$.

b) Calculer la limite de $\mathcal{A}(\beta)$ quand β vers $+\infty$.

Correction : $g(x) = (x+1)\sqrt{x+1} - 1$;

1. $D_g = [-1; +\infty[$. **Continuité de g en -1 :** $\lim\limits_{x \mapsto -1^+} g(x) = -1$ et $g(-1) = -1$ alors g est continue en -1.

2. $\frac{g(x)-g(-1)}{x+1} = \sqrt{x+1}$. La fonction g est dérivable sur $[-1; +\infty[$ car $\lim\limits_{x \mapsto -1^+} \frac{g(x)-g(-1)}{x+1} = 0$. donc $\mathcal{C}_g$ admet une tangente à droite en -1.

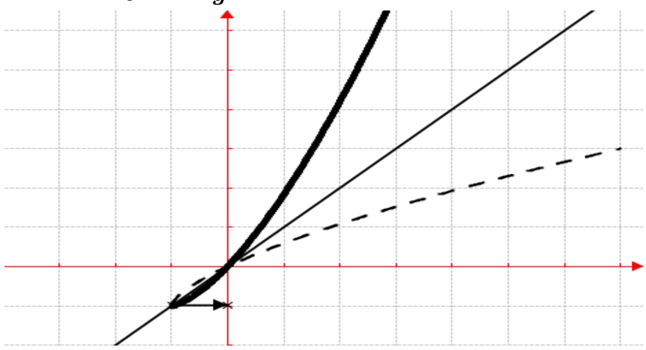
3. $\lim\limits_{x \mapsto -1} g(x) = -1$ et $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} g(x) = +\infty$. $\forall\, x \in [-1; +\infty[$, $g'(x) = \frac{3}{2}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x+1}}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{(x+1)\times\sqrt{x+1}}{x+1}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{x+1}$, alors $g'(x) > 0$

x	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	-1 $\nearrow$	$+\infty$

Branche infinie : $\frac{g(x)}{x} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\sqrt{x+1} - \frac{1}{x}$.

On calcule $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$; $\mathcal{C}_g$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.

4. Traçons $\mathcal{C}_g$:



5. Montrons que g est une bijection de l'intervalle $[-1; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera : La fonction g est continue et strictement croissante sur $[-1; +\infty[$. Donc la fonction g réalise une bijection de $[-1; +\infty[$ vers $J = [g(-1); g(+\infty)[= [-1; +\infty[$.

6.

a) Représentation graphiquement les variations de g^{-1} sur le même graphique que précédemment : Voir la figure.

b) Explicitons g^{-1} :

$y = (x+1)\sqrt{x+1} - 1 \Rightarrow x = (y+1)^{2/3} - 1$.

$\forall\, x \in [-1; +\infty[$, $g^{-1}(x) = (x+1)^{2/3} - 1$.

c) g^{-1} est-elle dérivable au point -1 ?

$y = g^{-1}(x) \Leftrightarrow x = g(y)$.

$\lim\limits_{x \mapsto -1^+} \frac{g^{-1}(x)-g^{-1}(-1)}{x+1} = \lim\limits_{y \mapsto -1^+} \frac{y+1}{g(y)+1} = +\infty$. La fonction g^{-1} n'est pas dérivable en -1.

d) Expliciter $(g^{-1})'$.

- **En utilisant l'expression de $g^{-1}(x)$ calculer au b) :** $\forall\, x \in [-1;+\infty[\,, g^{-1}(x) = (x+1)^{2/3} - 1$

$\forall\, x \in\,]-1;+\infty[,\ (g^{-1})'(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}(x+1)^{-1/3}$.

- **En utilisant le théorème sur la dérivée d'une bijection réciproque :**

On sait que : $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))}$.

$\forall\, x \in [-1;+\infty[,\ g'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x+1}$.

$\forall\, x \in [-1;+\infty[\,, g^{-1}(x) = (x+1)^{2/3} - 1$.

$\forall\, x \in\,]-1;+\infty[\,, (g^{-1})'(x) = \frac{1}{\frac{3}{2}\left(\frac{(x+1)^{2/3}}{\sqrt{(x+1)^{2/3}}}\right)}$.

$\forall\, x \in\,]-1;+\infty[,\ (g^{-1})'(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{-1}{3}}$.

7. $\beta \in \left[\frac{1}{2};1\right]$ $\mathcal{A}(\beta)$ l'aire de $\begin{cases} 0 \le x \le \beta \\ 0 \le y \le g(x) \end{cases}$.

a) $\mathcal{A}(\beta) = \int_0^\beta g(x)\,dx \times 6cm^2 = \left[\frac{2}{5}(x+\right.$

12x+1−x0β×6cm2.

$\mathcal{A}(\beta) = \left[\frac{12}{5}(\beta+1)^2\sqrt{\beta+1} + 6\beta + \frac{12}{5}\right] cm^2$.

b) $\lim\limits_{\beta \mapsto +\infty} \mathcal{A}(\beta) = +\infty$.

<u>Problème 36 :</u>

1. On considère la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} -x^2 - x + 1 & si\ x \le 0 \\ 1 + x^2 & si\ 0 < x < 2 \\ \sqrt{2x} + 3 & si\ x \ge 2 \end{cases}.$$

a) Quel est l'ensemble de définition de g ?

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de g en 0 et en 2.

c) Déterminer les limites de g sur D_g.

d) Dresser le tableau de variation de g.

e) Etudier les branches infinies.

f) Construire la courbe $\mathcal{C}_g$.

2. Soit f la restriction de g à l'intervalle $[2;+\infty[$. On notera f^{-1} l'application réciproque de g.

a) Démontrer que f est une bijection de l'intervalle $[2;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Représenter graphiquement les variations de f^{-1} sur le même graphique que précédemment.

c) Expliciter g^{-1}.

<u>Correction :</u> $g(x) = \begin{cases} -x^2 - x + 1\ \ si\ \ x \le 0 \\ 1 + x^2\ \ \ si\ \ 0 < x < 2 \\ \sqrt{2x} + 3\ \ \ si\ \ x \ge 2 \end{cases}$

1.

a) $D_g = \,]-\infty;+\infty[$.

b) Continuité de g en 0 :

$\lim\limits_{x \mapsto 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0^-}[-x^2 - x + 1] = 1$ et

$\lim\limits_{x \mapsto 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0^+}[x^2 + 1] = 1$ alors g est continue en 0.

Continuité de g en 2 : $\lim\limits_{x \mapsto 2^+} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto 2^+}\left[\sqrt{2x} + 3\right] = 5$

et $\lim\limits_{x \mapsto 2^-} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto 2^-}[x^2 + 1] = 5$ alors g est continue en 2.

dérivabilité de g en 0 :

$\lim\limits_{x \mapsto 0^-} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto 0^-}\left[\frac{-x^2-x+1-1}{x}\right] = -1$ et

$\lim\limits_{x \mapsto 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto 0^+}\left[\frac{x^2+1-1}{x}\right] = 0$ alors g n'est pas dérivable en 0. Donc $\mathcal{C}_g$ admet deux-demi tangente en 0.

dérivabilité de g en 2 :

$\lim\limits_{x \mapsto 2^+} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = \lim\limits_{x \mapsto 2^+}\left[\frac{\sqrt{2x}+3-5}{x-2}\right] = \frac{1}{2}$ et

$\lim\limits_{x \mapsto 2^-} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = \lim\limits_{x \mapsto 2^-}\left[\frac{x^2+1-4}{x-2}\right] = 4$ alors g n'est pas dérivable en 2. Donc $\mathcal{C}_g$ admet deux-demi tangente en 2.

c) $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}[-x^2 - x + 1] = -\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[\sqrt{2x} + 3\right] = +\infty$.

d) $\forall\ x \le 0,\ g'(x) = -2x - 1,\ g\left(\frac{-1}{2}\right) = 1{,}25$

$\forall\, x \in\,]0;2[,\ g'(x) = 2x$

$\forall\, x \ge 2,\ g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}}$.

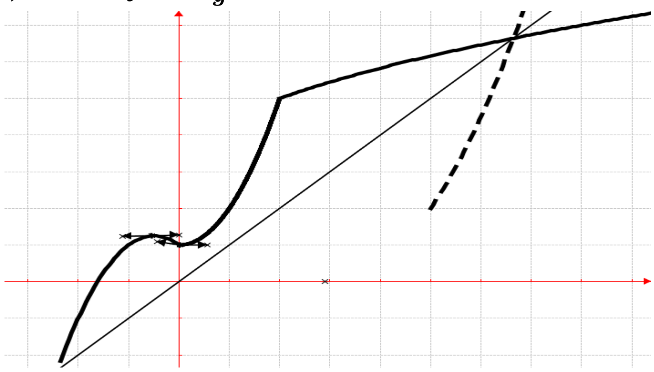
x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	‖	$-$	|	$+$	‖	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$1{,}25$	↘	1	↗		↗	$+\infty$

e) Branches infinies : $\frac{g(x)}{x} = -x - 1 + \frac{1}{x}$.

On calcule $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$; $\mathcal{C}_g$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$.

$\frac{g(x)}{x} = \frac{1}{2\sqrt{2x}} + \frac{3}{x}$. On calcule $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$; $\mathcal{C}_g$ admet une branche parabolique de direction (Ox) en $+\infty$.

f) **Traçons $\mathcal{C}_g$:**



2.

a) La fonction f est continue et strictement croissante sur $[2;+\infty[$. Donc la fonction f réalise une bijection de $[2;+\infty[$ vers $\mathrm{J} = [f(2); f(+\infty)[= [5;+\infty[$.

b) Voir la figure pour $\mathcal{C}_{f^{-1}}$.

c) **Explicitons f^{-1} :**

$y = \sqrt{2x} + 3 \Longrightarrow x = \frac{y^2-6y+9}{2}$.

$\forall\, x \in [5;+\infty[,\ f^{-1}(x) = \frac{x^2-6x+9}{2}$.

<u>Problème 37 :</u>

1. On considère la fonction g définie par

$$\boldsymbol{g(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x^2-1} & si\ \ x \in]-\infty;-1] \cup]1;+\infty[\\ \frac{1}{x} & si\ \ x \in]-1;0[\cup]0;1] \end{cases}}.$$

a) Quel est l'ensemble de définition de g ?

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de g en -1 et en 1.

c) Déterminer les limites de g sur D_g.

d) Dresser le tableau de variation de g.

e) Etudier les branches infinies.

f) Construire la courbe $\mathcal{C}_g$.

2. Etudier et construire la courbe de la fonction f définie par $f(x) = x + \sqrt{x^2-1}$. Que peut-on dire des courbes $\mathcal{C}_{g_1}$ et $\mathcal{C}_f$? avec g_1 la restriction de g sur $x \in]-\infty;-1] \cup]1;+\infty[$.

<u>Correction :</u>

1. $\boldsymbol{g(x) =}$

$$\boldsymbol{\begin{cases} x - \sqrt{x^2-1} & si\ \ x \in]-\infty;-1] \cup]1;+\infty[\\ \frac{1}{x} & si\ \ x \in]-1;0[\cup]0;1] \end{cases}}.$$

a) $D_g =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

b) **Continuité de g en -1 :**

$\lim\limits_{x \mapsto -1^-} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto -1^-} [x - \sqrt{x^2-1}] = -1$ et

$\lim\limits_{x \mapsto -1^+} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto -1^+} \left[\frac{1}{x}\right] = -1$ alors g est continue en -1.

Continuité de g en 1 :

$\lim\limits_{x \mapsto 1^+} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto 1^+} [x - \sqrt{x^2-1}] = 1$ et

$\lim\limits_{x \mapsto 1^-} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto 1^-} \left[\frac{1}{x}\right] = 1$ alors g est continue en 1.

dérivabilité de g en -1 :

$\lim\limits_{x \mapsto -1^-} \frac{g(x)-g(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x \mapsto -1^-} \left[\frac{x-\sqrt{x^2-1}+1}{x+1}\right] = -\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto -1^+} \frac{g(x)-g(-1)}{x-1} = \lim\limits_{x \mapsto -1^+} \left[\frac{\frac{1}{x}+1}{x+1}\right] = -1$ alors g n'est pas dérivable en -1. Donc $\mathcal{C}_g$ admet deux-demi tangente en -1.

dérivabilité de h en 1 :

$\lim\limits_{x \mapsto 1^+} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \mapsto 1^+} \left[\frac{x-\sqrt{x^2-1}-1}{x-1}\right] = -\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto 1^-} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \mapsto 1^-} \left[\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}\right] = -1$ alors g n'est pas dérivable en 1.

Donc $\mathcal{C}_g$ admet deux-demi tangente en 1.

c) $x - \sqrt{x^2-1} = x - |x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$,

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \left[x\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)\right] = -\infty$;

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right] = 0$;

$\lim\limits_{x \mapsto 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0^-} \left[\frac{1}{x}\right] = -\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0^+} \left[\frac{1}{x}\right] = +\infty$

d) $\forall\ x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$, $g'(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}-x}{\sqrt{x^2-1}}$, g est strictement décroissante sur $]1;+\infty[$ et g est strictement croissante sur $]-\infty;-1[$.

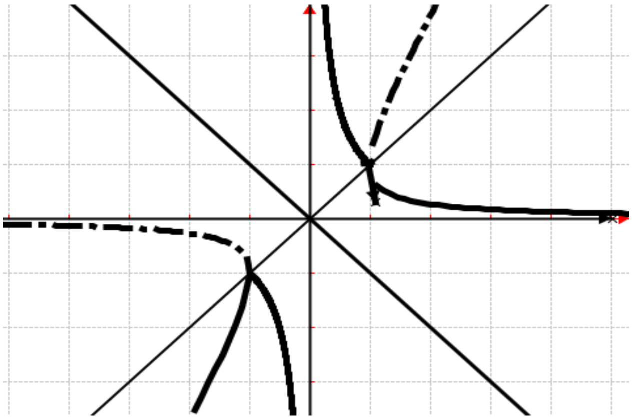
$\forall\, x \in]-1;0[\cup]0;1[$, $g'(x) = \frac{-1}{x^2}$, g est strictement décroissante sur $]-1;0[$ et sur $]0;1[$

x	$-\infty$ $\quad -1$	0	1 $\quad +\infty$
$g'(x)$	$+$ ‖ $-$	‖	$-$ ‖ $-$
$g(x)$	$-\infty \nearrow 1 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 1 \searrow 0$

e) **Branches infinies :** $\frac{g(x)}{x} = 1 - \frac{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x}$.

On calcule $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \frac{g(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \mapsto -\infty}[g(x) - x] = -\infty$; donc $\mathcal{C}_g$ admet une branche parabolique de coefficient directeur 1.

f) Traçons $\mathcal{C}_g$:



2. $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$, et $D_f =]-\infty; -1] \cup]1; +\infty[$. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[x\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)\right] = +\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \left[\frac{-1}{x\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}\right] = 0$; comme g,

f est continue en -1 et en 1 et elle n'est pas dérivable en -1 et en 1.

$\forall\ x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, $f'(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}$, f est strictement croissante sur $]1; +\infty[$ et f est strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	‖	‖	$+$
$g(x)$	$0 \searrow$	-1	1	$\nearrow +\infty$

$\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont symétriques par rapport au milieu O du segment [AB] tels que $A(-1; -1)$ et $B(1; 1)$.

<u>Problème 38 :</u>

1. On considère la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x-1} & si\ x \leq 2 \\ (x-2)(x-4) & si\ x > 2 \end{cases}.$$

a) Quel est l'ensemble de définition de g ?

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de g en 2.

c) Déterminer les limites de g sur D_g.

d) Dresser le tableau de variation de g.

e) Construire la courbe $\mathcal{C}_g$.

2. Soit h la restriction de g à l'intervalle $]-\infty; 1[$. On note $\mathbb{C} - \{1\}$ l'ensemble des nombres complexes différent de 1 et on considère l'application : $h(z) = \frac{z-2}{z-1}$.

- **Quel est l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant chacune des conditions suivantes :**

a) $h(z) \in$ IR

b) $h(z) \in i$IR

- **Résoudre dans $\mathbb{C}$ $h(z) = 2i$.**

<u>Correction :</u>

1. $$g(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x-1} & si\ x \leq 2 \\ (x-2)(x-4) & si\ x > 2 \end{cases}.$$

a) $D_g =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$.

b) Continuité de g en 2 :

$\lim\limits_{x \mapsto 2^+} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto 2^+}[(x-2)(x-4)] = 0$ et

$\lim\limits_{x \mapsto 2^-} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto 2^-} \left[\frac{x-2}{x-1}\right] = 0$ alors g est continue en 2.

dérivabilité de g en 2 : $\lim\limits_{x \mapsto 2^+} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = \lim\limits_{x \mapsto 2^+} \left[\frac{1}{x-1}\right] = 1$

et $\lim\limits_{x \mapsto 2^-} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = \lim\limits_{x \mapsto 2^-}[x - 4] = -2$ alors g n'est pas dérivable en 2. Donc $\mathcal{C}_g$ admet deux-demi tangente en 2.

c) $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \left[\frac{x-2}{x-1}\right] = 1$;

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[(x-2)(x-4)] = +\infty$;

$\lim\limits_{x \mapsto 1^-} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto 1^-} \left[\frac{x-2}{x-1}\right] = \frac{-1}{0^-} = +\infty$ et

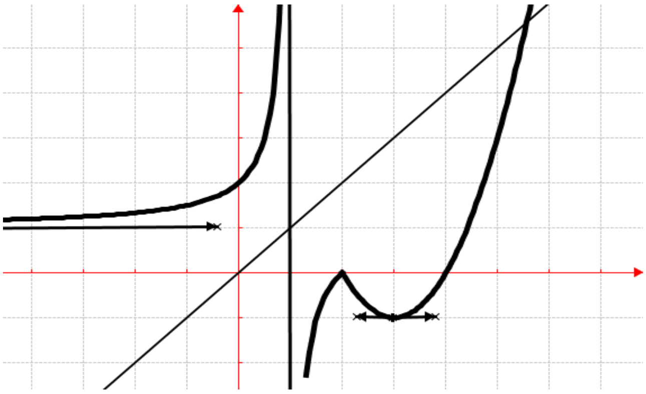
$\lim\limits_{x \mapsto 1^+} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto 1^+} \left[\frac{x-2}{x-1}\right] = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

d) $\forall\ x \in]-\infty; 1[\cup]1; 2[$, $g'(x) = \frac{1}{(x-1)^2} > 0$, g est strictement croissante sur $]-\infty; 1[$et sur $]1; 2[$.

$\forall\, x \in]2; +\infty[$, $g'(x) = 2(x-3)$, g est strictement décroissante sur $]2; 3[$ et sur $]3; +\infty[$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	‖ $+$	‖ $-$	$+$	
$g(x)$	$1 \nearrow +\infty$	‖ $-\infty \nearrow$	0	$\searrow -1$	$\nearrow +\infty$

e) Traçons $\mathcal{C}_g$:



3. $\mathbb{C}-\{\mathbf{1}\}$ / $\quad \boldsymbol{h(z)=\frac{z-2}{z-1}}$.

- ensemble des points M d'affixe z vérifiant chacune des conditions suivantes :

$h(z)=\frac{z-2}{z-1}=\frac{x^2-3x+y^2+2+yi}{(x-1)^2+y^2}$

a) $h(z)\in$ IR $\Leftrightarrow \mathrm{Im}[h(z)]=y=0$, c'est la droite d'équation $y=0$.

b) $h(z)\in i$IR $\Leftrightarrow \mathrm{Re}[h(z)]=x^2+y^2-3x+2=0$ ou $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$, c'est cercle de centre $\mathrm{I}\left(\frac{3}{2};0\right)$ et rayon R$=\frac{1}{2}$.

- résoudre $h(z)=\frac{z-2}{z-1}=2i \Leftrightarrow z(1-2i)=2-2i \Leftrightarrow z=\frac{6}{5}+\frac{2}{5}i$, donc $S_{\mathbb{C}}=\left\{\frac{6}{5}+\frac{2}{5}i\right\}$.

<u>Problème 39 :</u> d'unité graphique : 2 cm et 3 cm

1. On considère la fonction g définie par

$$\boldsymbol{g(x)=\begin{cases} x^2+1 & si\ \ x\leq 0\\ 1-x^2 & si\ \ 0<x<1\\ \sqrt{x}-1 & si\ \ x\geq 1\end{cases}}.$$

a) Quel est l'ensemble de définition de g ?

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de g en 0 et en 1.

c) Déterminer les limites de g sur D_g.

d) Etudier la dérivabilité de g' en 0. En déduire que la courbe $\mathcal{C}_g$ admet un point d'inflexion A à déterminer son coordonnée.

e) Dresser le tableau de variation de g.

f) Etudier les branches infinies.

g) Déterminer les équations de la tangente à gauche T_{1^-} et à droite T_{1^+}du point B d'abscisse 1.

h) Construire $\mathcal{C}_g$ et les tangentes T_{1^-} et T_{1^+}.

2. Soit f la restriction de g à l'intervalle $[1;+\infty[$. On notera f^{-1} l'application réciproque de g.

a) Démontrer que f est une bijection de l'intervalle $[1;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Représenter graphiquement les variations de f^{-1} sur le même graphique que précédemment.

3. Soit la droite (D) d'équation $y=x$. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x,y) vérifient : $\begin{cases} 0\leq x\leq 2\\ 0\leq (D)\leq f^{-1}(x)\end{cases}$.

<u>Correction :</u> $g(x)=\begin{cases} x^2+1 & si\ \ x\leq 0\\ 1-x^2 & si\ \ 0<x<1\\ \sqrt{x}-1 & si\ \ x\geq 1\end{cases}$

1.

a) $D_g=]-\infty;+\infty[$.

b) Continuité de g en 0 :

$\lim\limits_{x\mapsto 0^-} g(x)=\lim\limits_{x\mapsto 0^-}[x^2+1]=1$ et

$\lim\limits_{x\mapsto 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\mapsto 0^+}[1-x^2]=1$ alors g est continue en 0.

Continuité de g en 1 : $\lim\limits_{x\mapsto 1^+} g(x)=\lim\limits_{x\mapsto 1^+}[\sqrt{x}-1]=0$

et $\lim\limits_{x\mapsto 1^-} g(x)=\lim\limits_{x\mapsto 1^-}[1-x^2]=0$ alors g est continue en 1.

dérivabilité de g en 0 :

$\lim\limits_{x\mapsto 0^-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\mapsto 0^-}\left[\frac{x^2+1-1}{x}\right]=0$ et

$\lim\limits_{x\mapsto 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\mapsto 0^+}\left[\frac{1-x^2-1}{x}\right]=0$ alors g est dérivable en 0.

dérivabilité de g en 1 $\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\frac{\sqrt{x}-1-0}{x-1}=\frac{1}{\sqrt{x}+1}$ **et**

$\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\frac{1-x^2-0}{x-1}=-x-1$.

$\lim\limits_{x\mapsto 1^+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\mapsto 1^+}\left[\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right]=\frac{1}{2}$ et

$\lim\limits_{x\mapsto 1^-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\mapsto 1^-}[-x-1]=-2$ alors g n'est pas dérivable en 1. Donc $\mathcal{C}_g$ admet deux-demi tangente en 1.

c) $\lim\limits_{x\mapsto -\infty} g(x)=\lim\limits_{x\mapsto -\infty}[x^2+1]=+\infty$ et

$\lim\limits_{x\mapsto +\infty} g(x)=\lim\limits_{x\mapsto +\infty}[\sqrt{x}-1]=+\infty$.

d) dérivabilité de g' en 0 :

$\lim\limits_{x\mapsto 0^-}\frac{g\prime(x)-g\prime(0)}{x}=\lim\limits_{x\mapsto 0^-}\left[\frac{2x-0}{x}\right]=2$ et

$\lim\limits_{x\mapsto 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\mapsto 0^+}\left[\frac{-2x-0}{x}\right]=-2$ alors g' n'est pas dérivable en 0. Par conséquent $\mathcal{C}_g$ admet un point d'inflexion $\mathrm{A}(0;1)$.

e) $\forall\ x \leq 0,\ g'(x) = 2x,\ g(0) = 1$

$\forall\ x\ \in\ ]0;1[,\ g'(x) = -2x.$

$\forall\ x\ \geq 1,\ g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$-$	$\Vert$	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

f) **Branches infinies :**. On calcule

$\lim\limits_{x\mapsto -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\mapsto -\infty}\left[x+\frac{1}{x}\right] = -\infty$; $\mathcal{C}_g$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$.

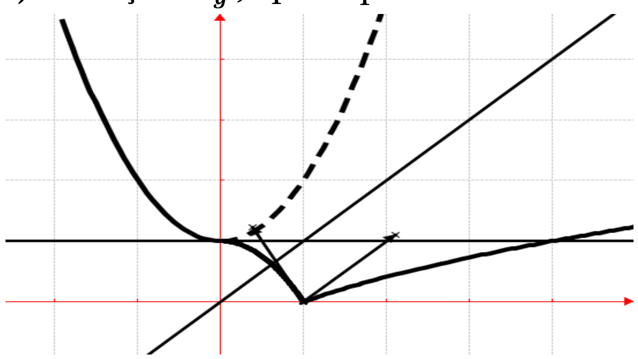
$\frac{g(x)}{x} = \frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$. On calcule

$\lim\limits_{x\mapsto +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\mapsto +\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right] = 0$; $\mathcal{C}_g$ admet une branche parabolique de direction (Ox) en $+\infty$.

g) Les 2 deux demi-tangentes au point B :

T_{1^-} : $y = -2x + 2$ et T_{1^+} : $y = x - 1$. Ce point est anguleux

h) **Traçons $\mathcal{C}_g$; T_{1^-} et T_{1^+}.**



2.

a) La fonction f est continue et strictement croissante sur $[1;+\infty[$. Donc la fonction f réalise une bijection de $[1;+\infty[$ vers $J = [f(1); f(+\infty)[= [0;+\infty[$.

b) Voir la figure pour $\mathcal{C}_{f^{-1}}$.

c) **Explicitons f^{-1} :** $y = \sqrt{x} - 1 \Rightarrow x = y^2 + 1$.

$\forall\ x\ \in\ [0;+\infty[,\ f^{-1}(x) = x^2 + 1$.

3. (D) :$y = x$. l'aire $\mathcal{A} = \int_0^2 [f^{-1}(x) - y]\,dx \times 6\ cm^2 = \int_0^2 [x^2 + 1 - x]dx \times 6\ cm^2 = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \right.$ *x02×6 cm2=2x3−3x2+6x02 cm2=16 cm2* .

Problème 40 :

1. **Soit $h(x) = x^2 - 4x + 3$. Etudier et graphiquement la fonction h.**

Etudier le signe de la fonction h.

2. **On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$.**

a) **Quel est l'ensemble de la fonction f.**

b) **Déterminer les limites de f sur D_f.**

c) **Etudier la dérivabilité de f en 1 et en 3. Interpréter ces résultats.**

d) **Dresser le tableau de variation de f.**

e) **Montrer que la droite (D) d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie pour $\mathcal{C}_f$.**

f) **Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = -x + 2$ est une asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.**

g) **Montrer que la droite (Δ') d'équation $y = x - 2$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.**

3. **Etudier le signe de la fonction f.**

4. **Soit g_1 la restriction de f à l'intervalle $]-\infty;1]$. On notera g_1^{-1} l'application réciproque de f.**

a) **Démontrer que g_1 est une bijection de l'intervalle $]-\infty;1]$ sur un intervalle I que l'on précisera.**

b) **Représenter graphiquement les variations de g_1^{-1} sur le même graphique que précédemment.**

5. **Soit g_2 la restriction de f à l'intervalle $[3;+\infty[$. On notera g_2^{-1} l'application réciproque de f.**

a) **Démontrer que g_2 est une bijection de l'intervalle $[3;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.**

b) **Représenter graphiquement les variations de g_2^{-1} sur le même graphique que précédemment.**

6. **Expliciter g_1^{-1} et g_2^{-1}.**

Correction :

1. $h(x) = x^2 - 4x + 3$; $D_h =]-\infty;+\infty[$.

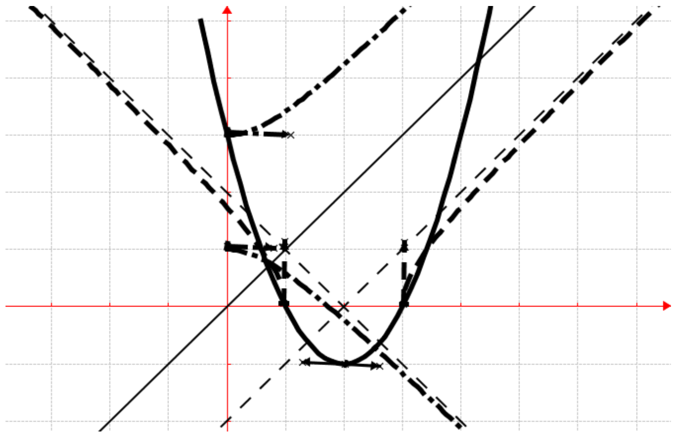
$\lim\limits_{x\mapsto -\infty} h(x) = \lim\limits_{x\mapsto -\infty} x^2 = +\infty$ et

$\lim\limits_{x\mapsto +\infty} h(x) = \lim\limits_{x\mapsto +\infty} x^2 = +\infty$.

$\forall x \in]-\infty;+\infty[,\ h'(x) = 2x - 4 = 2(x-2)$; alors h est strictement décroissante sur $]-\infty;2[$ et h est strictement croissante sur$]2;+\infty[$.

Dressons le tableau de variation de h.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$h'(x)$		$-$		$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$



2. $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}}$.

a) $D_f = \{x / x \in IR, x^2 - 4x + 3 \geq 0\} =$.
$D_f =]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[$.

b) $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \left[-x\sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}}\right] = +\infty$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[x\sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}}\right] = +\infty$ et $f(1) = 0$ et $f(3) = 0$.

c) **Dérivabilité de f en 1 :**

$\lim\limits_{x \mapsto 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \mapsto 1^-} \left[\sqrt{\frac{x-3}{x-1}}\right] = +\infty$ alors f n'est pas dérivable en 1. Donc $\mathcal{C}_f$ admet une demi-tangente verticale à gauche de 1.

Dérivabilité de f en 3 :

$\lim\limits_{x \mapsto 3^+} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim\limits_{x \mapsto 3^+} \left[\sqrt{\frac{x-1}{x-3}}\right] = +\infty$ alors f n'est pas dérivable en 3. Donc $\mathcal{C}_f$ admet à droite de 3 une demi-tangente verticale.

d) $\forall x \in]-\infty; 1[\cup]3; +\infty[$, $f'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}$; alors f est strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$ et f est strictement croissante sur$]3; +\infty[$.

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		1	3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	0	$\nearrow$	$+\infty$

e) $f(2 + x) = \sqrt{(2 + x)^2 - 4(2 + x) + 3} = \sqrt{x^2 - 1}$, et $f(2 - x) = \sqrt{(2 - x)^2 - 4(2 - x) + 3} = \sqrt{x^2 - 1}$ alors la droite (D) d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie pour $\mathcal{C}_f$.

f) $f(x) - y = \sqrt{x^2 - 4x + 3} - (-x + 2) = \frac{-7}{\sqrt{x^2-4x+3}-x+2}$, on a :

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty}[f(x) - y] = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \left[\frac{-1}{\sqrt{x^2-4x+3}-x+2}\right] = 0$ donc la droite (Δ') d'équation $y = -x + 2$ est une asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

g) $f(x) - y = \sqrt{x^2 - 4x + 3} - (x - 2) = \frac{-7}{\sqrt{x^2-4x+3}-x+2}$, on a :

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty}[f(x) - y] = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[\frac{-7}{\sqrt{x^2-4x+3}+x-2}\right] = 0$ donc la droite (Δ) d'équation $y = x - 2$ est une asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

3. $\forall x \in]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[$, $f(x) > 0$.

4.

a) La fonction g_1 est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; 1]$. Donc la fonction g_1 réalise une bijection de $]-\infty; 1]$ vers
$I = [g_1(-1); g_1(-\infty)[= [0; +\infty[$.

b) Voir la figure pour $\mathcal{C}_{g_1^{-1}}$.

5.

a) La fonction g_2 est continue et strictement croissante sur $[3; +\infty[$. Donc la fonction g_2 réalise une bijection de $[3; +\infty[$ vers $J = [g_2(3); g_2(+\infty)[= [0; +\infty[$.

b) Voir la figure pour $\mathcal{C}_{g_2^{-1}}$.

6. **Explicitons $\boldsymbol{g_1^{-1}}$et $\boldsymbol{g_2^{-1}}$.**

$y = \sqrt{x^2 - 4x + 3} \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 - y^2$, $\Delta = 4 + 4y^2$; $x = 2 \pm \sqrt{y^2 + 1}$.

$\forall\, x \in [0; +\infty[\,, g_1^{-1}(x) = 2 - \sqrt{y^2 + 1}$.

$\forall\, x \in [0; +\infty[\,, g_1^{-1}(x) = 2 + \sqrt{y^2 + 1}$.

<u>Problème 41 :</u>

1. **Soit g définie par :**
$\boldsymbol{g(x) = 2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 1}}$.

a) **Etudier le sens de variation de g et ses limites en $+\infty$ *et* $-\infty$.**

b) **Montrer que pour tout réel x,**
$\boldsymbol{[g(x) - 1][g(-x) - 1] = 1}$.

c) **Montrer que la droite (D) d'équation $y = 4x + 1$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_g$ en $+\infty$.**
On remarque que $g(x) - 4x = g(-x)$.

d) **Démontrer que pour tout réel x, $g(x) - 1 > 0$.**

e) **Etudier les variations de g.**

2. **On considère la fonction f définie par :**
$\boldsymbol{f(x) = 2x + 1 - \sqrt{4x^2 + 1}}$

a) **Etudier les variations de f et ses limites en $+\infty$ *et* $-\infty$.**

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 4x + 1$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

c) Construire $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

3. Que peut-on dire des courbes $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_f$?

<u>Correction :</u>

1. $\forall\, x \in$ IR, $g(x) = 2x + 1 + \sqrt{4x^2+1}$ ou $g(x) = \frac{4x}{2x+1-|x|\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}$,

a) $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[2x + 1 + \sqrt{4x^2+1}\right] = +\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}\left[\frac{4}{\left(2+\frac{1}{x}+\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}\right)}\right] = 1$.

$\forall\, x \in$ IR, $g'(x) = 2 + \frac{8x}{2\sqrt{4x^2+1}} = \frac{2\sqrt{4x^2+1}+4x}{\sqrt{4x^2+1}}$. Posons $2\sqrt{4x^2+1} + 4x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{4x^2+1} > -2x \Leftrightarrow 4x^2 + 1 > 4x^2 \Leftrightarrow 1 > 0$ (vraie), d'où $2\sqrt{4x^2+1} + 4x > 0$.
$\forall\, x \in$ IR, $g'(x) > 0$, g est strictement croissante sur IR.

b) $g(x) - 1 = \sqrt{4x^2+1} + 2x$ et $g(-x) - 1 = \sqrt{4x^2+1} - 2x$,

$\forall\, x \in$ IR, $[g(x) - 1][g(-x) - 1] = [\sqrt{4x^2+1} +$
2x4x2+1−2x=4x2+1−4x2=1.

c) $g(x) - y = \sqrt{4x^2+1} - 2x = \frac{1}{2x+|x|\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}$, ;

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty}[g(x) - y] = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[\frac{1}{x\left(2+\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}\right)}\right] = 0$, alors la droite (D) d'équation $y = 4x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_g$ en $+\infty$.

d) $\forall\, x \in$ IR, $g(x) - 1 = \sqrt{4x^2+1} + 2x > 0$, car posons $\sqrt{4x^2+1} + 2x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{4x^2+1} > -2x \Leftrightarrow 4x^2 + 1 > 4x^2 \Leftrightarrow 1 > 0$ (vraie).

e) **Dressons le tableau de variation de g:**

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$

<u>Problème 42 :</u> Soit la fonction f définie par $f(x) = x - 1 + \sqrt{2x^2 - 1}$.

1.

a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) Etudier la continuité de f en $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et en $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) Etudier la dérivabilité de f en $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et en $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Interpréter graphiquement.

2.

2. $\forall\, x \in$ IR, $f(x) = 2x + 1 - \sqrt{4x^2+1}$.

a) $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = -\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[\frac{4}{\left(2+\frac{1}{x}+\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}\right)}\right] = 1$.

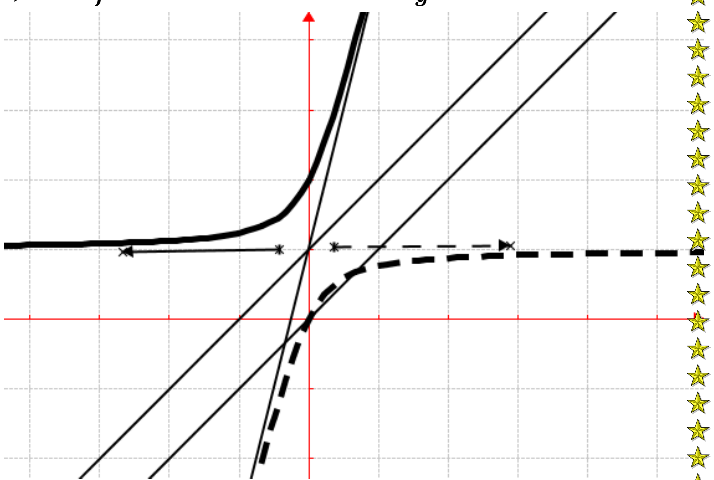
$\forall\, x \in$ IR, $f'(x) = 2 - \frac{8x}{2\sqrt{4x^2+1}} = \frac{2\sqrt{4x^2+1}-4x}{\sqrt{4x^2+1}}$. Posons $2\sqrt{4x^2+1} - 4x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{4x^2+1} > -2x \Leftrightarrow 4x^2 + 1 > 4x^2 \Leftrightarrow 1 > 0$ (vraie), d'où $2\sqrt{4x^2+1} - 4x > 0$.
$\forall\, x \in$ IR, $f'(x) > 0$, f est strictement croissante sur IR.

Dressons le tableau de variation de f:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1

b) $f(x) - y = -\sqrt{4x^2+1} - 2x = \frac{-1}{2x-|x|\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}$, on calcule $\lim\limits_{x \mapsto -\infty}[f(x) - y] = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}\left[\frac{-1}{x\left(2+\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}\right)}\right] = 0$, alors la droite (**D**) d'équation $y = 4x + 1$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

c) **$\mathcal{C}_f$ en trait discontinue et $\mathcal{C}_g$ en trait continue**



3. $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x + 1$.

a) Etudier le signe, $\sqrt{2x^2 - 1} + 2x$ sur $\left]-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

b) Montrer que $\forall\, x \in \mathrm{D}_f$, $f'(x) = \frac{\sqrt{2x^2-1}+2x}{\sqrt{2x^2-1}}$. En déduire le sens de variation de f.

c) Dresser le tableau de variation de f.

3. Montrer que la droite (d) d'équation $y = (1 - \sqrt{2})x - 1$ est une asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

4. Montrer que la droite (d') d'équation $y = (1+\sqrt{2})x - 1$ est une asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

Correction : $f(x) = x - 1 + \sqrt{2x^2 - 1}$.

2.

3. continuité de f en $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et en $\frac{\sqrt{2}}{2}$:

$\lim\limits_{x \mapsto \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^+} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^+} \left[x - 1 + \sqrt{2x^2 - 1}\right] = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$ alors f est continue à droite de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et

$\lim\limits_{x \mapsto \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^-} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^-} \left[x - 1 + \sqrt{2x^2 - 1}\right] = -\frac{\sqrt{2}}{2} - 1$ alors f est continue à gauche de $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. dérivabilité de f en $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et en $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Interpréter graphiquement.

$\lim\limits_{x \mapsto \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^+} \frac{f(x) - f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{x - \frac{\sqrt{2}}{2}} = +\infty$ alors f n'est pas dérivable à droite de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\lim\limits_{x \mapsto \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^-} \frac{f(x) - f\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)}{x + \frac{\sqrt{2}}{2}} = +\infty$ alors f n'est pas dérivable à gauche de $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. $\mathcal{C}_f$ admet en ces points chacun une demi-tangente verticale.

5. $\forall\ x \in \left]-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, $\sqrt{2x^2 - 1} + 2x < 0$.

6. $\forall\ x \in \mathrm{D}_f$, $f'(x) = \frac{\sqrt{2x^2 - 1} + 2x}{\sqrt{2x^2 - 1}}$, donc f est strictement décroissante sur $\left]-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ et f est strictement croissante sur $\left]\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right[$.

7. tableau de variation de f.

5. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$; (d) et (d').

1. $\mathrm{D}_f = \left]-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right[$

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \left[x - 1 + \sqrt{2x^2 - 1}\right] = +\infty$;

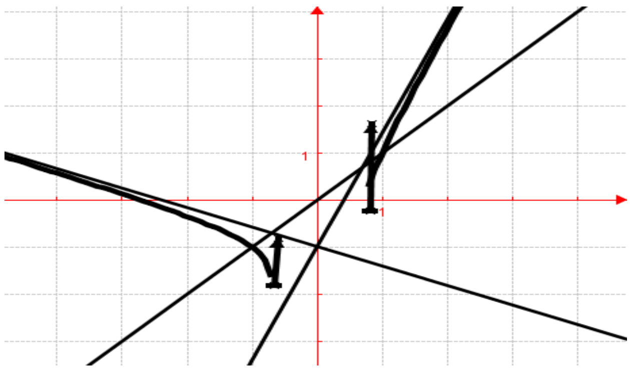
$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[x - 1 + \sqrt{2x^2 - 1}\right] = +\infty$

x	$-\infty$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$				$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-1{,}7$		$-0{,}29$	↗ $+\infty$

8. $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} [f(x) - y] = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \left[\sqrt{2}x + \sqrt{2x^2 - 1}\right] = 0$ donc la droite (d) d'équation $y = (1 - \sqrt{2})x - 1$ est une asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

9. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} [f(x) - y] = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[-\sqrt{2}x + \sqrt{2x^2 - 1}\right] = 0$ donc la droite (d') d'équation $y = (1 + \sqrt{2})x - 1$ est une asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

10. $\mathcal{C}_f$; (d) et (d').



Calcule intégrale

Louange à Allah et que la prière et le salut soient sur le serviteur et Messager d'Allah, Muhammad, le meilleur que l'humanité est porté (malheur à ceux qui l'ont insultés et mentis sur lui.), sa famille et ses Compagnons.
Gloire à Dieu, mon Maitre Qui m'a tout donné et continue à me donner. Je n'ai de savoir de ce qu'Allah (soub hana wat tala), Le Tout Miséricordieux m'avait offert.
Seigneur pardonne nos péchés, fais-nous miséricorde, accepte nos bonnes œuvres et bénit nos actions. Ta parole est véridique.
Louange à Allah, Qui de Sa Grace, j'avais pu proposer cette œuvre Qui sans Lui, je ne serais pas à ce niveau. « Gloire et pureté à Toi, ô Allah, et à Toi la louange. Que ton Nom soit béni et Ta Majesté soit élevée, et il n'y a pas d'autre divinité [digne d'adoration] en dehors de Toi »

ALLAH MERCI

Auteur Moussa Abdoulaye Diallo

SMS 90 10 89 59

Calcul intégrale

Intégration et les primitives.

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que F est une primitive de f sur I si F est dérivable et si pour tout x de I, F'(x) = f(x).

Théorème : Soit f une fonction continue, croissante et positive sur [a ;b]. Alors F admet une primitive sur cet intervalle.

Formules

Fonctions f		Primitives F
$u'u^n$	$\longmapsto$	$\frac{u^n}{n+1}$
$\frac{u'}{u^n}$ $\forall n \neq 1$	$\longmapsto$	$\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}}$
$\frac{u'}{u}$	$\longmapsto$	$\ln\lvert u\rvert$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$\longmapsto$	$2\sqrt{u}$
$u'\sin u$	$\longmapsto$	$-\cos u$
$u'\cos u$	$\longmapsto$	$\sin u$
$u'\tan u$	$\longmapsto$	$-\ln\lvert\cos u\rvert$
$u'[1+tan^2(u)]$	$\longmapsto$	$\tan(u) = \frac{1}{co\tan(u)}$
$\frac{1}{cos^2(x)} = 1+tan^2(x)$	$\longmapsto$	$\tan(x) = \frac{1}{co\tan(x)}$
$\frac{1}{sin^2(x)} = 1+cotan^2(x)$	$\longmapsto$	$-co\tan(x) = \frac{-1}{\tan(x)}$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\longmapsto$	$\frac{1}{2}.\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert$
$\frac{u'}{u}.\ln u$ $u>0$	$\longmapsto$	$\frac{1}{2}(\ln u)^2$
$u'e^u$	$\longmapsto$	e^u

Comment peut-on déterminer une primitive ?

☒ On nous donne une fonction F possible donc il suffit de la dériver et de comparer à f.

☒ On reconnaît une formule de référence usuelle.

☒ On applique une intégration par parties.

Comment peut-on calculer une intégrale $\int_a^b f$?

☒ On détermine une primitive F de f : dans ce cas, $\int_a^b f$ = F(b) – F(a).

☒ On se rappelle que l'intégrale correspond à une aire algébrique, ça peut servir…

☒ On applique une intégration par parties.

Intégrations par parties

On applique $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b (u.v')dx = [u.v]_a^b - \int_a^b (u'.v)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Comment peut-on montrer des inégalités avec des intégrales ?

☒ Pour montrer que $\int_a^b f \leq \int_a^b g$, on peut montrer que sur [a,b], $f \leq g$.

☒ Pour montrer que $\int_a^b f \geq 0$, on peut montrer que sur [a,b], $f \geq 0$.

Comment calculer l'intégrale $\int_a^b p(x)e^{|s|}dx$ ou $\int_a^b p(x)\sin x\,dx$ ou $\int_a^b p(x)\cos x\,dx$?

☒ on doit toujours dérivée le polynôme $p(x)$

☒ puis on doit chercher la primitive de $e^{|s|}$ ou $\sin x$ ou $\cos x$.

Comment calculer l'intégrale $I = \int_a^b \sin x\, e^{|s|}dx$ ou $J = \int_a^b \cos x\, e^{|s|}dx$?

☒ on doit toujours dérivée $\sin x$ ou $\cos x$

☒ puis on doit chercher la primitive de $e^{|s|}$

☒ puis on retrouve : $I = [\quad]_a^b - \alpha I \Leftrightarrow I = \frac{1}{\alpha+1}[\quad]_a^b$ ou $J = [\quad]_a^b - \alpha J \Leftrightarrow J = \frac{1}{\alpha+1}[\quad]_a^b$ avec $\alpha \in IR^*$.

Exercices sur le calcul intégral

<u>Exercice 1 :</u> Application de $u'u^n$

Déterminer les primitives de chacune des fonctions :

1. $\boldsymbol{f_1(x) = 3x^5 - 2x^4 + 6x^3 - 11.}$
2. $\boldsymbol{f_2(x) = 3x\sqrt{x^2-3} - 2\sqrt{x} + x^2\sqrt{11-6x^3}.}$
3. $\boldsymbol{f_3(x) = 7\sin^6(x)\cos(x) - 6\cos^5(x)\sin(x)}$

<u>Correction :</u> Application de $u'u^n$

1. $\forall\, x \in \mathrm{IR}, \mathrm{F}_1(x) = \frac{3}{5+1}x^{5+1} - \frac{2}{4+1}x^{4+1} + \frac{6}{3+1}x^{3+1} - 11x + K = \frac{1}{2}x^6 - \frac{2}{5}x^5 + \frac{3}{2}x^4 - 11x + K.$
2. $f_2(x) = 3x\sqrt{x^2-3} - 2\sqrt{x} + x^2\sqrt{11-6x^3} = 3x(x^2-3)^{\frac{1}{2}} - 2(x)^{\frac{1}{2}} + x^2(11-6x^3)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \times 2x(x^2-3)^{\frac{1}{2}} - 2(x)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{-6} \times \left[-6x^2(11-6x^3)^{\frac{1}{2}}\right] \Leftrightarrow$
$\mathrm{F}_2(x) = \frac{3}{2}\frac{(x^2-3)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - 2\frac{(x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{1}{-6}\frac{(11-6x^3)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + k = (x^2-3)^{\frac{3}{2}} - 4\frac{(x)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{1}{9}(11-6x^3)^{\frac{3}{2}} + k = (x^2-3)\sqrt{x^2-3} - \frac{4}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{9}(11-6x^3)\sqrt{11-6x^3} + k.$
3. $\mathrm{F}_3(x) = 7\frac{\sin^{6+1}(x)}{6+1} + 6\frac{\cos^{5+1}(x)}{5+1} = \sin^7(x) + \cos^6(x) + k.$

<u>Exercice 2 :</u> Application de $\frac{u'}{u^n}$, $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ et $\frac{u'}{u}$

Déterminer les primitives de chacune des fonctions :

1. $\boldsymbol{f_1(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{x+1}{x^2+2x-4} - \frac{2x^3-3x^2+1}{x^4-2x^3+2x-8}.}$
2. $\boldsymbol{f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} + \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-4}} - \frac{2x^3-3x^2+1}{\sqrt{x^4-2x^3+2x-8}}.}$
3. $\boldsymbol{f_3(x) = \frac{1}{(1-x)^3} + \frac{x+1}{(x^2+2x-4)^7} - \frac{2x^3-3x^2+1}{(x^4-2x^3+2x-8)^8}}$
4. $\boldsymbol{f_4(x) = \tan x - \tan(3-2x)}$
5. $\boldsymbol{f_5(x) = \frac{\cos(2x)}{\sin(-2x)} - \frac{\cos(x)-\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}}$
6. $\boldsymbol{f_6(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}} - \frac{\cos(x)-\sin(x)}{\sqrt{\sin(x)+\cos(x)}}}$
7. $\boldsymbol{f_7(x) = \frac{\cos(x)}{\sin^6(x)} - \frac{\cos(x)-\sin(x)}{[\sin(x)+\cos(x)]^7}}$
8. $\boldsymbol{f_8(x) = \frac{2-\ln x}{x\ln x-3x+5} - \frac{2\ln x+2x}{x(\ln x)^2+2x^2-x}}$
9. $\boldsymbol{f_9(x) = \frac{2-\ln x}{\sqrt{x\ln x-3x+5}} - \frac{2\ln x+2x}{x\sqrt{(\ln x)^2+2x-1}}}$
10. $\boldsymbol{f_{10}(x) = \frac{2-\ln x}{(x\ln x-3x+5)^3} - \frac{2\ln x+2x}{x[(\ln x)^2+2x-1]^5}}$
11. $\boldsymbol{f_{11}(x) = \frac{e^x}{1-e^x} - \frac{e^{3x}-e^x}{e^{3x}-3e^x-2} + \frac{-5x^3+e^x}{4e^x-5x^4}}$
12. $\boldsymbol{f_{12}(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^x}} - \frac{e^{3x}-e^x}{\sqrt{e^{3x}-3e^x-2}} + \frac{-5x^3+e^x}{\sqrt{4e^x+-5x^4}}}$
13. $\boldsymbol{f_{13}(x) = \frac{e^x}{(1-e^x)^4} - \frac{e^{3x}-e^x}{(e^{3x}-3e^x-2)^6} + \frac{-5x^3+e^x}{(4e^x-5x^4)^7}}$

<u>Correction :</u> Application de $\frac{u'}{u^n}$, $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ et $\frac{u'}{u}$

1. $f_1(x) = -\frac{-1}{1-x} + \frac{1}{2}.\frac{2x+2}{x^2+2x-4} - \frac{1}{2}.\frac{4x^3-6x^2+2}{x^4-2x^3+2x-8} \Leftrightarrow$ $\mathrm{F}_1(x) = -\ln|1-x| + \frac{1}{2}\ln|x^2+2x-4| - \frac{1}{2}\ln|x^4-2x^3+2x-8| + k.$
2. $f_2(x) = -\frac{-1}{\sqrt{1-x}} + \frac{1}{2}.\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x-4}} - \frac{1}{2}.\frac{4x^3-6x^2+2}{\sqrt{x^4-2x^3+2x-8}} \Leftrightarrow \mathrm{F}_2(x) = -2\sqrt{1-x} + \sqrt{x^2+2x-4} - \sqrt{x^4-2x^3+2x-8}.$
3. $f_3(x) = -\frac{-1}{(1-x)^3} + \frac{1}{2}.\frac{2x+2}{(x^2+2x-4)^7} - \frac{1}{2}.\frac{4x^3-6x^2+2}{(x^4-2x^3+2x-8)^8} \Leftrightarrow$ $\mathrm{F}_3(x) = \frac{1}{(3-1)(1-x)^{3-1}} - \frac{1}{2}.\frac{1}{(7-1)(x^2+2x-4)^{7-1}} + \frac{1}{2}.\frac{1}{(8-1)(x^4-2x^3+2x-8)^{8-1}} + k = \frac{1}{2(1-x)^2} - \frac{1}{12(x^2+2x-4)^6} + \frac{1}{14(x^4-2x^3+2x-8)^7} + k$
4. $f_4(x) = \tan x - \tan(3-2x) = -\frac{-\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{1}{2}.\frac{2\cos(3-2x)}{\sin(3-2x)} \Leftrightarrow \mathrm{F}_4(x) = -\ln|\cos(x)| - \frac{1}{2}\ln|\cos(3-$ *2x+k*
5. $f_5(x) = \frac{\cos(2x)}{\sin(-2x)} - \frac{\cos(x)-\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)} = \frac{1}{-2}.\frac{-2\cos(-2x)}{\sin(-2x)} - \frac{\cos(x)-\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)} \Leftrightarrow \mathrm{F}_5(x) = -\frac{1}{2}.\ln|\sin(-2x)| - \ln|\sin(x)+\cos(x)| + k$
6. $f_6(x) = -\frac{-\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}} - \frac{\cos(x)-\sin(x)}{\sqrt{\sin(x)+\cos(x)}} \Leftrightarrow \mathrm{F}_6(x) = -2\sqrt{\sin(x)} - 2\sqrt{\sin(x)+\cos(x)} + k$
7. $f_7(x) = -\frac{-\cos(x)}{\sin^6(x)} - \frac{\cos(x)-\sin(x)}{[\sin(x)+\cos(x)]^7} \Leftrightarrow \mathrm{F}_7(x) = -\frac{-1}{(6-1)\sin^{6-1}(x)} - \frac{-1}{(7-1)[\sin(x)+\cos(x)]^{7-1}} + k = \frac{1}{5\sin^{6-1}(x)} + \frac{1}{6[\sin(x)+\cos(x)]^6} + k.$
8. $f_8(x) = \frac{2-\ln x}{x\ln x-3x+5} - \frac{2\ln x+2x}{x(\ln x)^2+2x^2-x} = -\frac{\ln x+1-3}{x\ln x-3x+5} - \frac{2\frac{\ln x}{x}+2}{(\ln x)^2+2x-1} \Leftrightarrow \mathrm{F}_8(x) = -\ln|x\ln x -$ *3x+5*−lnln*x2+2x*−*1+k*

9. $f_9(x) = \frac{2-\ln x}{\sqrt{x\ln x-3x+5}} - \frac{2\ln x+2x}{x\sqrt{(\ln x)^2+2x-1}} =$
$-\frac{\ln x+1-3}{\sqrt{x\ln x-3x+5}} - \frac{2\frac{\ln x}{x}+2}{\sqrt{(\ln x)^2+2x-1}} \Leftrightarrow \mathrm{F}_9(x) =$
$-2\sqrt{x\ln x-3x+5} - 2\sqrt{(\ln x)^2+2x-1} + k.$

10. $f_{10}(x) = \frac{2-\ln x}{(x\ln x-3x+5)^3} - \frac{2\ln x+2x}{x[(\ln x)^2+2x-1]^5} =$
$-\frac{\ln x+1-3}{(x\ln x-3x+5)^3} - \frac{2\frac{\ln x}{x}+2}{[(\ln x)^2+2x-1]^5} \Leftrightarrow \mathrm{F}_{10}(x) =$
$-\frac{-1}{(3-1)(x\ln x-3x+5)^{3-1}} - \frac{-1}{(5-1)[(\ln x)^2+2x-1]^{5-1}} + k =$
$\frac{1}{2(x\ln x-3x+5)^2} + \frac{1}{4[(\ln x)^2+2x-1]^4} + k$

11. $f_{11}(x) = \frac{e^x}{1-e^x} - \frac{e^{3x}-e^x}{e^{3x}-3e^x-2} + \frac{-5x^3+e^x}{4e^x-5x^4} =$
$-\frac{-e^x}{1-e^x} - \frac{1}{3}.\frac{3e^{3x}-3e^x}{e^{3x}-3e^x-2} + \frac{1}{4}.\frac{4e^x-20x^3}{4e^x-5x^4} \Leftrightarrow \mathrm{F}_{11}(x) =$
$-\ln|1-e^x| - \frac{1}{3}.\ln|e^{3x}-3e^x-2| + \frac{1}{4}.\ln|4e^x -$
$5x4+k$

12. $f_{12}(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^x}} - \frac{e^{3x}-e^x}{\sqrt{e^{3x}-3e^x-2}} + \frac{-5x^3+e^x}{\sqrt{4e^x-5x^4}} =$
$\frac{-e^x}{\sqrt{1-e^x}} - \frac{1}{3}.\frac{3e^{3x}-3e^x}{\sqrt{e^{3x}-3e^x-2}} + \frac{1}{4}.\frac{4e^x-20x^3}{\sqrt{4e^x-5x^4}} \Leftrightarrow \mathrm{F}_{12}(x) =$
$-2\sqrt{1-e^x} - \frac{2}{3}.\sqrt{e^{3x}-3e^x-2} + \frac{1}{2}\sqrt{4e^x-5x^4}.$

13. $f_{13}(x) = \frac{e^x}{(1-e^x)^4} - \frac{e^{3x}-e^x}{(e^{3x}-3e^x-2)^6} + \frac{-5x^3+e^x}{(4e^x-5x^4)^7} =$
$-\frac{-e^x}{(1-e^x)^4} - \frac{1}{3}.\frac{3e^{3x}-3e^x}{(e^{3x}-3e^x-2)^6} + \frac{1}{4}.\frac{4e^x-20x^3}{(4e^x-5x^4)^7} \Leftrightarrow \mathrm{F}_{13}(x) =$
$-\frac{-1}{(4-1)(1-e^x)^{4-1}} - \frac{1}{3}.\frac{-1}{(6-1)(e^{3x}-3e^x-2)^{6-1}} +$
$\frac{1}{4}.\frac{-1}{(7-1)[4e^x-5x^4]^{7-1}} + k = \frac{1}{3(1-e^x)^3} + \frac{1}{15(e^{3x}-3e^x-2)^5} -$
$\frac{1}{24[4e^x-5x^4]^6} + k.$

Exercice 3 : **Application de $u'\cos u$ et $u'\sin u$**

Déterminer les primitives de chacune des fonctions :

1. $\boldsymbol{f_1(x) = \cos(-3x) - x\cos(x^2-3)}$.
2. $\boldsymbol{f_2(x) = (x^2+x)\sin(2x^3+3x^2-11)}$.
3. $\boldsymbol{f_3(x) = \sin(x)\cos(1-2\cos x)}$
4. $\boldsymbol{f_4(x) = -2\frac{\ln x}{x}\sin[1+(\ln x)^2]}$
5. $\boldsymbol{f_5(x) = -2xe^{x^2-5}\sin\left[1+e^{x^2-5}\right]}$

Correction : **Application de $u'\cos u$ et $u'\sin u$**

1. $f_1(x) = \cos(-3x) - x\cos(x^2-3) = \frac{1}{-3}\times$
$(-3)\cos(-3x) - \frac{1}{2}\times 2x\cos(x^2-3) \Leftrightarrow \mathrm{F}_1(x) =$
$\frac{1}{3}\sin(-3x) + \frac{1}{2}\sin(x^2-3) + k.$

2. $f_2(x) = (x^2+x)\sin(2x^3+3x^2-11) = \frac{1}{6}\times$
$(6x^2+6x)\sin(2x^3+3x-11) \Leftrightarrow \mathrm{F}_2(x) = \frac{1}{6}\times$
$\cos(2x^3+3x-11) + k.$

3. $f_3(x) = \sin(x)\cos(1-2\cos x) = \frac{1}{2}\times$
$2\sin(x)\cos(1-2\cos x) \Leftrightarrow \mathrm{F}_3(x) = -\frac{1}{2}.\sin(1-$
$2\cos x)$

4. $f_4(x) = -2\frac{\ln x}{x}\sin[1+(\ln x)^2] \Leftrightarrow \mathrm{F}_4(x) =$
$\cos[1+(\ln x)^2] + k.$

5. $f_5(x) = -2xe^{x^2-5}\sin\left[1+e^{x^2-5}\right] \Leftrightarrow \mathrm{F}_5(x) =$
$\cos\left[1+e^{x^2-5}\right] + k.$

Exercice 4 : **Application de $\frac{u'}{u}.\ln u$ et $u'e^u$**

Déterminer les primitives de chacune des fonctions :

1. $\boldsymbol{f_1(x) = \frac{3\ln(x)}{x} - \frac{(x^1+1)}{x^3+3x-2}\ln(x^3+3x-2)}$.
2. $\boldsymbol{f_2(x) = xe^{x^2-1} + (8x^3-9x^2)e^{-2x^4+3x^3-5}}$.
3. $\boldsymbol{f_3(x) = [1-\sin(2-3x)]e^{\cos(2-3x)-3x+1}}$
4. $\boldsymbol{f_4(x) = x(3x+2)\sin(x^3+x^2-}$
2ecosx3+x2−2.

Correction : **Application de $\frac{u'}{u}.\ln u$ et $u'e^u$**

1. $f_1(x) = \frac{3}{x}\ln(x) - \frac{1}{3}.\frac{3x^3+3}{x^3+3x-2}\ln(x^3+3x-$
3⟺F1x=32lnx2−16lnx3+x−32+k.

2. $f_2(x) = xe^{x^2-1} - (x^3+x^2)e^{x^4+3x^3-5} =$
$\frac{1}{2}.2xe^{x^2-1} - \left[-(8x^3-9x^2)e^{-2x^4+3x^3-5}\right] \Leftrightarrow$
$\mathrm{F}_2(x) = \frac{1}{2}e^{x^2-1} - e^{-2x^4+3x^3-5} + k$

3. $f_3(x) = [1-\sin(x)]e^{\cos(2-3x)-3x+1} = \frac{1}{-3}\times$
$[3\sin(x)-3]e^{\cos(2-3x)-3x+1} \Leftrightarrow \mathrm{F}_3(x) =$
$-\frac{1}{3}e^{\cos(2-3x)-3x+1} + k.$

4. $f_4(x) =$
$x(3x+2)\sin(x^3+x^2-2)\,e^{\cos(x^3+x^2-2)} =$
$-\left[-(3x^2+2x)\sin(x^3+x^2-2)\,e^{\cos(x^3+x^2-2)}\right] \Leftrightarrow$
$\mathrm{F}_4(x) = e^{\cos(x^3+x^2-2)} + k.$

Exercice 5 : **Intégrations par primitives**

On applique $\int_a^b f(x)dx = [\mathrm{F}(x)]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$

$A = \int_0^2\left(\frac{x^2+2x+3}{x+1}\right)dx$	$G = \int_0^x \sin\left(-3t+\frac{\pi}{2}\right)dt$
$B = \int_{-1}^2\left(\frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}\right)dx$	$H = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\tan(x)\,dx$
$C = \int_{-1}^1\left(\frac{-4}{x^2-4}\right)dx$	$I = \int_0^{\pi}[\sin(3x)\cos(x)]dx$
$D = \int_0^3\left(\frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x+7}}\right)dx$	$J = \int_0^x \frac{1}{e^{-2t}}dt$
$E = \int_0^1(3x^2-2x+6)dx$	$K = \int_{-3}^3 e^{\frac{x}{4}}dx$
$F = \int_{-2}^2\lvert t^2-1\rvert dt$	

Correction :

$\boldsymbol{A} = \int_0^2 \left(\frac{x^2+2x+3}{x+1}\right) dx = \int_0^2 \left(x+1+\frac{2}{x+1}\right) dx =$
$\left[\frac{x^2}{2} + x + 2\ln(x+1)\right]_0^2 = 4 + 2\ln 3.$

$\boldsymbol{B} = \int_{-1}^2 \left(\frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}\right) dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^2 \left(\frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+1}}\right) dx =$
$\left[\frac{1}{2} \times (x^4+1)^{\frac{1}{2}}\right]_{-1}^2 = \left[\frac{1}{2} \times \sqrt{x^4+1}\right]_{-1}^2 = \frac{\sqrt{17}-\sqrt{2}}{2}$

$\boldsymbol{C} = -\int_{-1}^1 \left(\frac{4}{x^2-4}\right) dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{-1}{x-2} + \frac{1}{x+2}\right) dx =$
$[-\ln|x-2| + \ln|x+2|]_{-1}^1 = 2\ln 3.$

$\boldsymbol{D} = \int_0^3 \left(\frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x+7}}\right) dx = \int_0^3 \left(\frac{2x+6}{2\sqrt{x^2+6x+7}}\right) dx =$
$\left[\sqrt{x^2+6x+7}\right]_0^3 = \sqrt{34} - \sqrt{7}.$

$\boldsymbol{E} = \int_0^1 (3x^2 - 2x + 6) dx = \left[3.\frac{x^3}{3} - 2.\frac{x^2}{2} + 6x\right]_0^1 = 6.$

$\boldsymbol{F} = \int_{-2}^2 |t^2-1| dt = \int_{-2}^{-1} (t^2-1) dt + \int_{-1}^1 (1-$
t2dt+12t2−1dt=4.

$\boldsymbol{G} = \int_0^x \sin\left(-3t + \frac{\pi}{2}\right) dt = \frac{-1}{3}\int_0^x -3\sin\left(-3t + \right.$
*π2dt=13*cos*−3t+π20x=13*cos*−3x+π2.*

$\boldsymbol{H} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan(x)\, dx = [-\ln|\cos x|]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}\ln 2.$

$\boldsymbol{I} = \int_0^\pi [\sin(3x)\cos(x)] dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{4}\cos(4x) + \right.$
*12*cos*2x0π=0*⟸ **Linéarisation**

$\boldsymbol{J} = \int_0^x \frac{1}{e^{-2t}} dt = \int_0^x e^{2t} dt = \left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_0^x = \frac{1}{2}(e^{2x} - 1).$

$\boldsymbol{K} = \int_{-3}^3 e^{\frac{x}{4}} dx = \left[4e^{\frac{x}{4}}\right]_3^{-3} = 4\left(e^{\frac{3}{4}} - e^{-\frac{3}{4}}\right).$

<u>Exercice 6 :</u> Intégrations par parties.

Application de $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b (u.v')dx = [u.v]_a^b - \int_a^b (u'.v)dx = [\mathrm{F}(x)]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$

$\boldsymbol{A = \int_1^x \ln(t)\, dt}$	$\boldsymbol{B = \int_1^x \ln\left(1+\frac{1}{t}\right) dt}$

Application de $\int_a^b p(x)e^{|s|}dx$**, on dérive toujours** $p(x)$**.**

$\boldsymbol{C = \int_0^{\ln(2)} (x+2)e^{-x} dx}$	$\boldsymbol{D = \int_0^1 (x^2+1)e^x dx}$
$\boldsymbol{E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\, dx}$	$\boldsymbol{F = \int_0^\pi x^2\cos(x)\, dx}$
$\boldsymbol{G = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{4}}} x\tan(x^2)\, dx}$	

<u>Correction :</u>

$A = \int_1^x \ln(t)\, dt = [t\ln(t)]_1^x - \int_1^x dt = [t\ln(t) -$
*t1x=x*ln*x−x+1.*

$B = \int_1^x \ln\left(1+\frac{1}{t}\right) dt = \left[(t+1)\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t} dt = \left[(t+1)\ln\left(1+\frac{1}{t}\right) - \ln(t)\right]_1^x = (x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \ln(x) - 2\ln 2$

$B = (x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \ln(x) - 2\ln(2)$

$C = \int_0^{\ln(2)} (x+2)e^{-x} dx = [-(x+3)e^{-x}]_0^{\ln(2)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\ln(2).$

$D = \int_0^1 (x^2+1)e^x dx = [(x^2+1)e^x]_0^1 - \int_0^1 2e^x dx = 2e - 3.$

$E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\, dx =$
$[x[-\cos(x)]]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-\cos(x)] dx = 1.$

$F = \int_0^\pi x^2\cos(x)\, dx =$
$[x^2\sin(x)]_0^\pi - \int_0^\pi 2x\sin(x)\, dx = -2\pi.$

$G = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{4}}} x\tan(x^2)\, dx = \frac{1}{2}[x\tan(x^2) - x^2]_0^{\sqrt{\frac{\pi}{4}}} = \frac{4-\pi}{8}.$

<u>Exercice 7 :</u> Soit la fonction $\boldsymbol{f}$ définie sur IR $-\{\boldsymbol{-1}\}$ par : $\boldsymbol{f(x) = \frac{2x-1}{(x+1)^2}}$.

1. **Déterminer les réels $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ tels que $\boldsymbol{f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}}$.**
2. **En déduire de $\mathbf{I} = \int \boldsymbol{f(t)dt}$.**

<u>Correction :</u> $\forall\, \boldsymbol{x} \in$ **IR** $-\{\boldsymbol{-1}\}$ **,** $\boldsymbol{f(x) = \frac{2x-1}{(x+1)^2}}$.

1. $f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} = \frac{2x-1}{(x+1)^2}$. $a = 2$, $b = -3$
2. $\mathrm{I} = \int f(t)dt = \int \left[\frac{2}{t+1} - \frac{3}{(t+1)^2}\right] dt =$

$\mathrm{I} = 2\ln|t+1| + \frac{3}{t+1}.$

<u>Exercice 8 :</u> Soit la fonction $\boldsymbol{f}$ définie sur IR $-\{\boldsymbol{-1},\boldsymbol{1}\}$ par : $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^3+3x}{(x^2-1)^3}}$.

1. **Déterminer les réels $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ tels que $\boldsymbol{f(x) = \frac{a}{(x+1)^3} + \frac{b}{(x-1)^3}}$.**
2. **En déduire de $\mathbf{I} = \int_0^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{f(t)dt}$.**

<u>Correction :</u> $\forall\, \boldsymbol{x} \in$ **IR** $-\{\boldsymbol{-1},\boldsymbol{1}\}$ $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^3+3x}{(x^2-1)^3}}$.

1. $f(x)=\frac{a}{(x+1)^3}+\frac{b}{(x-1)^3}=\frac{(a+b)x^3+3(-a+b)x^2+3(a+b)x+b-a}{(x^2-1)^3}=\frac{x^3+3x}{(x^2-1)^3}$. On identifie que $\begin{cases}a+b=1\\b-a=0\\a+b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\b=\frac{1}{2}\end{cases}$.

2. $\mathrm{I}=\int_0^{\frac{1}{2}}f(t)dt$ $\mathrm{I}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{(t+1)^3}+\frac{1}{(t-1)^3}\right]dt=\frac{1}{2}\left[\frac{-1}{2(t+1)^2}-\frac{1}{2(t-1)^2}\right]_0^{\frac{1}{2}}=-\frac{11}{18}$.

<u>Exercice 9 :</u> Soit la fonction f définie sur IR $-\{-1,1\}$ par : $f(x)=\frac{x^2+x+1}{(x^2-1)^2}$.

1. **Déterminer les réels a, b, c et d tels que $f(x)=\frac{a}{(x+1)^2}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{(x-1)^2}+\frac{d}{x-1}$.**
2. **En déduire de $\mathrm{I}=\int_2^x f(t)dt, x>2$.**

<u>Correction :</u> IR $-\{-1,1\}$ par : $f(x)=\frac{x^2+x+1}{(x^2-1)^2}$.

1. $f(x)=\frac{a}{(x+1)^2}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{(x-1)^2}+\frac{d}{x-1}=\frac{(b+d)x^3+(a-b+c+d)x^2+(-2a-b+2c-d)x+a+b+c-d}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2+x+1}{(x^2-1)^2}$. On identifie que $\begin{cases}b+d=0\\a-b+c+d=1\\-2a-b+2c-d=1\\a+b+c-d=1\end{cases}\Leftrightarrow$ $\begin{cases}d=-b\\a-2b+c=1\\-2a+2c-d=1\\a+2b+c=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{4}\\b=0\\c=\frac{3}{4}\\d=0\end{cases}$

2. $f(x)=\frac{1}{4(x+1)^2}+\frac{3}{4(x-1)^2}$.

$\mathrm{I}=\int_2^x f(t)dt=\frac{1}{4}\int_2^x\left[\frac{1}{(t+1)^2}+\frac{3}{(t-1)^2}\right]dt$

$\mathbf{I}=-\frac{1}{4}\left[\frac{1}{t+1}+\frac{3}{t-1}\right]_2^x=\frac{5}{6}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{3}{x-1}\right)$.

<u>Exercice 10 :</u> Soient les fonction f et g définies sur IR respectivement par $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ et $g(x)=\frac{x^3}{1+x^2}$.

1. **Calculer $I_1=\int_0^1 f(x)dx$.**
2. **Soit $I_2=\int_0^1 g(x)dx$ .Calculer I_1+I_2 et en déduire la valeur de I_2.**

<u>Correction :</u>

1. $I_1=\int_0^1 f(x)dx=\left[\frac{1}{2}\ln|1+x^2|\right]_0^1=\frac{1}{2}\ln 2$.

2. $I_1+I_2=\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1\frac{x+x^3}{1+x^2}dx=\int_0^1\frac{x(1+x^2)}{1+x^2}dx=\int_0^1 xdx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}$

$I_1+I_2=\frac{1}{2}\Leftrightarrow I_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2=\frac{1}{2}(1-\ln 2)$.

<u>Exercice 11 :</u> Soit la fonction f définie sur IR $-\{-1,0\}$ par : $f(x)=\frac{x^2+1}{x(x+1)^3}$.

1. **Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x)=\frac{a}{x}+\frac{b}{(x+1)^3}+\frac{c}{x+1}$.**
2. **En déduire de $\mathrm{I}=\int_1^x f(t)dt, x>1$.**

<u>Correction :</u> IR $-\{-1,0\}$ par : $f(x)=\frac{x^2+1}{x(x+1)^3}$.

1. $f(x)=\frac{a}{x}+\frac{b}{(x+1)^3}+\frac{c}{x+1}=\frac{(a+c)x^3+(3a+2c)x^2+(3a+b+c)x+a}{x(x+1)^3}=\frac{x^2+1}{x(x+1)^3}$. On identifie que $\begin{cases}a+c=0\\3a+2c=1\\3a+b+c=1\\a=1\end{cases}\Leftrightarrow a=1, b=-2$ et $c=-1$.

2. $\mathrm{I}=\int_1^x f(t)dt=\int_1^x\left[\frac{1}{t}-\frac{2}{(t+1)^3}-\frac{1}{t+1}\right]dt=\left[\ln t+\frac{1}{(t+1)^2}-\ln(t+1)\right]_1^x=\ln x+\frac{1}{(x+1)^2}-\ln(x+1)+\ln 2-\frac{1}{4}$,

$\forall\, x>1\quad \mathrm{I}=\ln x+\frac{1}{(x+1)^2}-\ln(x+1)+\ln 2-\frac{1}{4}$.

<u>Exercice 12 :</u> Soit la fonction f définie sur IR $-\{-1,1\}$ par : $f(x)=\frac{x^3-2x^2-x-2}{x^4-1}$.

1. **Déterminer les réels a, b, c et d tels que $f(x)=\frac{ax+b}{x^2+1}+\frac{c}{x+1}+\frac{d}{x-1}$.**
2. **En déduire de $\mathrm{I}=\int_2^x f(t)dt, x>2$.**

<u>Correction :</u> IR $-\{-1,1\}$ par : $f(x)=\frac{x^3-2x^2-x-2}{x^4-1}$.

1. $f(x)=\frac{ax+b}{x^2+1}+\frac{c}{x+1}+\frac{d}{x-1}=\frac{(a+c+d)x^3+(b-c+d)x^2+(-a+c+d)x-b-c+d}{x^4-1}=\frac{x^3-2x^2-x-2}{x^4-1}$

$\begin{cases}a+c+d=1\\b-c+d=-2\\-a+c+d=-1\\-b-c+d=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+c+d=1\\b-c+d=-2\\-a+c+d=-1\\d=b+c-2\end{cases}\Leftrightarrow$

$a=1, b=0, c=1$ et $d=-1$.

2. $f(x)=\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}$

$I = \int_2^x f(t)dt = \int_2^x \left[\frac{1}{2}.\frac{2t}{t^2+1} + \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1}\right] dt =$
$\left[\frac{1}{2}\ln(t^2+1) + \ln|t+1| - \ln|t-1|\right]_2^x =$
$I = \left[\frac{1}{2}\ln(t^2+1) + \ln\left(\frac{t+1}{t-1}\right)\right]_2^x,$
$\forall\, x > 2 \quad I = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - \frac{1}{2}\ln 5 - \ln 3.$

Exercice 13 : **Soit la fonction f définie sur IR* par : $f(x) = \frac{1}{x(x^2+1)}$.**

1. **Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$.**
2. **En déduire de $I = \int_1^x f(t)dt, x > 1$.**

Correction : $f(x) = \frac{1}{x(x^2+1)}$.

1. $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1} = \frac{(a+b)x^2+cx+a}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x(x^2+1)}$. On identifie que $a = 1$, $b = -1$ et $c = 0$.
2. $I = \int_1^x f(t)dt = \int_1^x \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{2}.\frac{2t}{t^2+1}\right] dt =$
$\left[\ln|t| - \frac{1}{2}\ln|t^2+1|\right]_1^x = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\ln 2.$

Exercice 14 : **Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \frac{x^3+3x}{x^4+3x^2+2}$.**

1. **Déterminer les réels a et b tels que $f(x) = \frac{ax}{x^2+1} + \frac{bx}{x^2+2}$.**
2. **En déduire de $I = \int_0^x f(t)dt, x > 0$.**

Correction : $f(x) = \frac{x^3+3x}{x^4+3x^2+2}$.

1. $f(x) = \frac{ax}{x^2+1} + \frac{bx}{x^2+2} = \frac{(a+b)x^3+(2a+b)x}{x^4+3x^2+2} = \frac{x^3+3x}{x^4+3x^2+2}$. On identifie que $\begin{cases} a+b=1 \\ 2a+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow a = 2$ et $b = -1$.
Donc $f(x) = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+2} = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{2}.\frac{2x}{x^2+2}$
2. $I = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \left[\frac{2t}{x^2+1} - \frac{1}{2}.\frac{2t}{x^2+2}\right] dt =$
$\left[\ln|t^2+1| - \frac{1}{2}\ln|t^2+2|\right]_0^x = \ln(x^2+1) -$
$\frac{1}{2}\ln(x^2+2) + \frac{1}{2}\ln(2).$

Exercice 15 : **Soit la fonction f définie sur $]-1;1[$ par : $f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$.**

1. **Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = a + \frac{b}{1-x} + \frac{c}{1+x}$.**
2. **En déduire de $I = \int_0^x f(t)dt, x \in]-1;1[$.**

Correction : $]-1;1[$ par : $f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$.

1. $f(x) = a + \frac{b}{1-x} + \frac{c}{1+x} = \frac{-ax^2+(b-c)x+a+b+c}{1-x^2} = \frac{x^2}{1-x^2}$. Par identification on a : $a = -1$,
$\begin{cases} b-c=0 \\ a+b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$ et $c = \frac{1}{2}$.
2. $I = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \left[-1 + \frac{1}{2(1-t)} + \frac{1}{2(1+t)}\right] dt =$
$\left[-t + \frac{1}{2}\ln(1-t) + \frac{1}{2}\ln(1+t)\right]_0^x = -x + \frac{1}{2}\ln(1-x^2)$

Exercice 16 :

1. **Calculer la dérivé de la fonction : $h(x) = (ax^2+bx+c)\sqrt{x^2+2}$, avec a, b et c étant des constances.**
2. **En déduire par le calcul de l'intégrale : $A = \int_1^2 \left(\frac{6x^3+2x^2+9x+2}{\sqrt{x^2+2}}\right) dx$.**

Correction :

1. $h(x) = (ax^2+bx+c)\sqrt{x^2+2} \Leftrightarrow h'(x) = (2ax+b)\sqrt{x^2+2} + \frac{ax^3+bx^2+cx}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{3ax^3+2bx^2+(4a+c)x+2b}{\sqrt{x^2+2}}$, avec a, b et c étant des constances.
2. $h'(x) = \frac{3ax^3+2bx^2+(4a+c)x+2b}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{6x^3+2x^2+9x+2}{\sqrt{x^2+2}} \Leftrightarrow a = 2; b = 1$ *et* $c = 1$ alors
$A = \int_1^2 \left(\frac{6x^3+2x^2+9x+2}{\sqrt{x^2+2}}\right) dx = \left[(2x^2 + x +\right.$
1x2+212.

$A = \left[(2x^2+x+1)\sqrt{x^2+2}\right]_1^2 = 11\sqrt{6} - 4\sqrt{3}.$

Exercice 17 : **Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \frac{e^x-2}{e^x+1}$.**

1. **Montrer que pour tout réel x, $f(x) = 1 - \frac{3e^{-x}}{e^{-x}+1}$.**
2. **En déduire de $I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} f(t)dt$.**

Correction : $f(x) = \frac{e^x-2}{e^x+1}$.

1. $f(x)=\frac{e^x-2}{e^x+1}\times\frac{e^{-x}}{e^{-x}}=\frac{1-2e^{-x}}{1+e^{-x}}=\frac{1+e^{-x}-3e^{-x}}{1+e^{-x}}=\frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}}+\frac{-3e^{-x}}{1+e^{-x}}=1-\frac{3e^{-x}}{e^{-x}+1}$.

2. $\mathrm{I}=\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(t)dt=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\left[1+\frac{-3e^{-t}}{e^{-t}+1}\right]dt=[x+3\ln(e^{-x}+1)]_{\ln 2}^{\ln 3}=\ln\left(\frac{3}{2}\right)+3\ln\left(\frac{8}{9}\right)$.

<u>Exercice 18 :</u> Soient $A=\int_0^{\pi}(xcos^2x)dx$ et $B=\int_0^{\pi}(xsin^2x)dx.$

a) Calculer $A+B$ et calculer à l'aide d'une intégration par partie $A-B$.

b) En déduire A et B

<u>Reprendre les mêmes questions si :</u>

Soient $A=\int_0^{\pi}[(2x+1)cos^2x]dx$ et $B=\int_0^{\pi}[(2x+1)sin^2x]dx.$

<u>Correction :</u> Soient $A=\int_0^{\pi}(xcos^2x)dx$ et $B=\int_0^{\pi}(xsin^2x)dx$.

a) $A+B=\int_0^{\pi}(x[cos^2x+sin^2x])dx=\int_0^{\pi}xdx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\pi}=\frac{1}{2}\pi^2$ et $A-B=\int_0^{\pi}(x[cos^2x-$ *sin2xdx=0πxcos2xdx=x2sin2x0π−120πsin2xdx=* $\left[\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\pi}=0$.

b) $\begin{cases}A+B=\frac{1}{2}\pi^2\\ A-B=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=\frac{1}{4}\pi^2\\ B=\frac{-1}{4}\pi^2\end{cases}$.

<u>Reprendre les questions si :</u>

Soient $A=\int_0^{\pi}[(2x+1)cos^2x]dx$ et $B=\int_0^{\pi}[(2x+$ *1sin2xdx.*

a) $A+B=\int_0^{\pi}\left((2x+1)[cos^2x+sin^2x]\right)dx=\int_0^{\pi}(2x+1)dx=[x^2+x]_0^{\pi}=\pi^2+\pi$ et

$A-B=\int_0^{\pi}\left((2x+1)[cos^2x-sin^2x]\right)dx=\int_0^{\pi}(2x+1)\cos 2x\,dx=\left[\frac{2x+1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin 2x\,dx=\left[\frac{2x+1}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\pi}=0$.

b) $\begin{cases}A+B=\pi^2+\pi\\ A-B=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=\frac{\pi^2+\pi}{2}\\ B=-\frac{\pi^2+\pi}{2}\end{cases}$.

<u>Exercice 20 :</u> Soient $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x^2cos^2x)dx$ et $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x^2sin^2x)dx.$

a) Calculer $I+J$ et calculer à l'aide d'une intégration par partie $I-J$.

b) En déduire I et J.

<u>Correction :</u>

a) $I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x^2[cos^2x+sin^2x])dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{24}\pi^3$ et $I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x^2[cos^2x-sin^2x])dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos 2x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\sin 2x+\frac{1}{2}x\cos 2x-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{-\pi}{4}$.

b) $\begin{cases}\mathrm{I}+\mathrm{J}=\frac{1}{24}\pi^3\\ \mathrm{I}-\mathrm{J}=\frac{-\pi}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mathrm{I}=\frac{1}{48}\pi^3-\frac{\pi}{8}\\ \mathrm{J}=\frac{1}{48}\pi^3+\frac{\pi}{8}\end{cases}$.

<u>Exercice 21 :</u> Soient A, B et C les intégrales suivantes : $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sin^4x)dx$, $B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(cos^4x)dx$ et $C=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sin^2xcos^2x)dx.$

1. **Linéariser cos^4x et sin^4x.**
2. **Calculer A, B et C.**
3. **Vérifier les égalités : A = B et $A+C=\frac{\pi}{4}$.**

<u>Correction :</u>

1. **Linéariser cos^4x et sin^4x :**

$cos^4x=\frac{1}{2^4}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^4=\frac{1}{16}\left(e^{4ix}+4e^{2ix}+6e^0+\right.$ *4e−2ix+e−4ix=18cos4x+4cos2x+3*

$sin^4x=\frac{1}{(2i)^4}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^4=\frac{1}{16}\left(e^{4ix}-4e^{2ix}+\right.$ *6e0−4e−2ix+e−4ix=18cos4x−4cos2x+3.*

2. $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sin^4x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{8}(\cos 4x-4\cos 2x+$ *3dx=1814sin4x−2sin2x+3x0π2=3π16,*

$B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(cos^4x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{8}(\cos 4x+4\cos 2x+3)dx=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}\sin 4x+2\sin 2x+3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3\pi}{16}$ et

$C=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sin^2xcos^2x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(cos^2x-cos^4x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(cos^2x)dx-A=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2x+1)dx-A$

$C=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2x+1)dx-A=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2x+x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{3\pi}{16}=\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{16}=\frac{\pi}{16}$.

3. $A=B=\frac{3\pi}{16}$ et $A+C=\frac{3\pi}{16}+\frac{\pi}{16}=\frac{4\pi}{16}=\frac{\pi}{4}$.

<u>Exercice 22 :</u> On considère les intégrales suivantes : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(cos^4x)dx$, $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sin^4x)dx$ et $K=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sin^2xcos^2x)dx.$

1. **Justifier l'existence des intégrales I, J et K.**
2. **Calculer $I+J+K$.**

3. **Calculer $I - J$.**

4. **Exprimer $\cos 4x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.**

5. **Calculer $I + J - 3K$.**

6. **En déduire la valeur exacte de I, J et de K.**

<u>Correction :</u> $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos^4 x)dx, J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin^4 x)dx$ **et** $K = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin^2 x cos^2 x)dx.$

1. **Justifier l'existence des intégrales I, J et K.**

Les fonctions $x \to cos^4 x$, $x \to sin^4 x$ et $x \to sin^2 x cos^2 x$ sont dérivable et continue sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

D'où les **intégrales I, J et K** existent.

2. $I + J + K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos^4 x + 2sin^2 x cos^2 x +$ *sin4xdx=0π2cos2x+sin2x2dx=0π2dx=x0π2*

$I + J + K = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$.

3. $I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos^4 x - sin^4 x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(cos^2 x)^2 -$ *sin2x2dx=0π2cos2x−sin2xcos2x+sin2xdx=0π2cos2x−sin2xdx=0π2*cos *2xdx=*

$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \, dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0.$

4. $(\cos x + i \sin x)^4 = cos^4 x + 4\, i \sin x \,.\, cos^3 x - 6\sin^2 x \,.\, cos^2 x - 4\, i \cos x \,.\, sin^3 x + sin^4 x$ par identification on a :

$\cos 4x = cos^4 x - 6\sin^2 x \,.\, cos^2 x + sin^4 x.$

5. $I + J - 3K =$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos^4 x + sin^4 x - 6sin^2 x cos^2 x)dx =$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4x \, dx = \left[\frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0.$

6. On sait que $I - J = 0 \Leftrightarrow I = J$, donc

$$\begin{cases} I + J + K = \frac{\pi}{2} \\ I + J - 3K = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2I + K = \frac{\pi}{2} \\ 2I - 3K = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} K = \frac{\pi}{8} \\ I = J = \frac{3}{2}K = \frac{3\pi}{16} \end{cases}$$

<u>Exercice 23 :</u> Soient $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x}{\cos x + \sin x}\right) dx$ **et** $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{\cos x + \sin x}\right) dx.$

1. **Calculer A + B et calculer à l'aide d'une intégration par parties A − B.**

2. **En déduire A et B.**

<u>Correction :</u>

1. $A + B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x}{\cos x + \sin x}\right) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{\cos x + \sin x}\right) dx$

$A + B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x + \sin x}{\cos x + \sin x}\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$ et

$A - B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x}{\cos x + \sin x}\right) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{\cos x + \sin x}\right) dx =$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right) dx = [\ln(\cos x + \sin x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0.$

2. $\begin{cases} A + B = \frac{\pi}{2} \\ A - B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{\pi}{4} \\ B = \frac{\pi}{4} \end{cases}.$

<u>Exercice 24 :</u> Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n dx$.

1. **Calculer I_1 et I_2.**

2.

a) **En utilisant l'intégration par parties, montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.**

b) **Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.**

c) **En déduire I_3, I_4, I_5 et I_6.**

<u>Correction :</u>

1. **Calculer I_1 et I_2 :**

$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^1 dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1;$

$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^2 dx = [\cos x \,.\, \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^2 dx =$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 - (\cos x)^2] dx = \frac{1}{2}[x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$

2.

a) $I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{n+2} dx =$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, (\cos x)^{n+1} dx = [(\cos x)^{n+1} .\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} +$

$(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^2 (\cos x)^n dx = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 -$ *cos2x*cos*xndx=n+10π2*cos*xndx−n+10π2*cos*xn+2dx=***n+1In−n+1In+2**

$I_{n+2} = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2} \Leftrightarrow (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2} \Leftrightarrow (n+1+1)I_{n+2} = (n+1)I_n \Leftrightarrow (n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n \Leftrightarrow I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$

b) $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos x\, (\cos x)^{n-1}] dx =$

$[\sin x \,.\, (\cos x)^{n-1}]_0^{\frac{\pi}{2}} +$

$(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin^2 x\, (\cos x)^{n-2}] dx =$

$(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin^2 x\, (\cos x)^{n-2}] dx = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} [[1 -$ cos*x2*cos*xn−2dx=n−10π2*cos*xn−2dx−n−10π2*cos*xndx* en transposant on aura :

$(n-1+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} [(\cos x)^n] dx = nI_n = (n-1)I_{n-2}$.

c) $3I_3 = (3-1)I_{3-2} \Leftrightarrow I_3 = \frac{2}{3}I_1 = \frac{2}{3}$,
$4I_4 = (4-1)I_{4-2} \Leftrightarrow I_4 = \frac{3}{4}I_2 = \frac{3\pi}{16}$,
$5I_5 = (5-1)I_{5-2} \Leftrightarrow I_5 = \frac{4}{5}I_3 = \frac{8}{15}$ et
$6I_6 = (6-1)I_{6-2} \Leftrightarrow I_6 = \frac{5}{6}I_4 = \frac{5\pi}{32}$.

<u>Exercice 25 :</u> Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'intégrale définie par : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^n \cos t\, dt$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2.
a) En utilisant l'intégration par parties, montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $I_n = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n(n-1)I_{n-2}$.
b) En déduire I_2 puis I_3.

<u>Correction :</u> $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^n \cos t\, dt$.

1. $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^0 \cos t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, dt = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

et $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^1 \cos t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t\, dt = [t \sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin t\, dt = [t\sin t + \cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$.

2.
a) $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^n \cos t\, dt = [t^n \sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} - n\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n-1}\sin t\, dt = [t^n \sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} + n[t^{n-1}\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} - n(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n-2}\sin t\, dt = [t^n \sin t + nt^{n-1}\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} - n(n-1)I_{n-2} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n(n-1)I_{n-2}$.

b) $I_2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 2I_0 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 2$ **puis** $I_3 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - 6I_1 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - 6\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - 3\pi + 6$.

<u>Exercice 26 :</u> On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n dx$ où n est un entier naturel non nul.

1. Calculer $I_n + I_{n+2}$ en fonction de n.
2. Calculer I_3 et I_5.
3. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $nI_n = 1 - (n-1)I_{n-2}$.

<u>Correction :</u> $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n dx$

1. $I_n + I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{n+2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [(\tan x)^n (1 + \tan^2 x)] dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{(\cos x)^2}(\tan x)^n\right] dx = \left[\frac{1}{n+1}(\tan x)^{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+1}$.

2. $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^1 dx = [1 + \tan^2 x]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1$;
$I_1 + I_3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow I_3 = \frac{1}{2} - I_1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$ et
$I_3 + I_5 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow I_5 = \frac{1}{4} - I_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

3. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\tan x\, (\tan x)^{n-1}] dx = [(1 + \tan^2 x).(\tan x)^{n-1}]_0^{\frac{\pi}{4}} - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{4}} [(1 +$ tan2*x*tan*xn−2dx=1−n−10π41+*tan2*x*tan*xn−2dx=* $1 - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{4}} [(\tan x)^{n-2}] dx -$
$(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{4}} [(\tan x)^n] dx$ en transposant on aura : $(n -$ *1+10π4*tan*xndx=nIn=1−n−1In−2* .

<u>Exercice 27 :</u> Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^n}{\cos x} dx$.

1. Justifier l'existence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Calculer $A = \int_0^{\frac{\pi}{3}} [(\sin x)^n \cos x]\, dx$ en fonction de n.
3. En déduire $I_{n+2} - I_n$ en fonction de n.
4. Calculer I_1 et en déduire I_3 et I_5.

<u>Correction :</u>

1. Justifions l'existence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
La fonction cos est définie sur IR$-\{2\pi k\}$; or $\left[0; \frac{\pi}{3}\right] \subset$ IR$-\{2\pi k\}$, donc $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est continue et strictement croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ d'où $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe.

2. $A = \int_0^{\frac{\pi}{3}} [(\sin x)^n \cos x]\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{n+1}{n+1}.[(\sin x)^n \cos x]\, dx$
$A = \left[\frac{(\sin x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$.

3. $I_{n+2} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^{n+2}}{\cos x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^n}{\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^n (sin^2 x - 1)}{\cos x} dx = -\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^n cos^2 x}{\cos x} dx =$
$I_{n+2} - I_n = -\int_0^{\frac{\pi}{3}} ((\sin x)^n \cos x) dx = -A$
$\boldsymbol{I_{n+2} - I_n = -\frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}}$.

4. $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^1}{\cos x} dx = -[\ln|\cos x|]_0^{\frac{\pi}{3}} = \ln(2)$.

$I_3 - I_1 = -\frac{1}{1+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow I_3 = \ln(2) - \frac{3}{8}$;

$I_5 - I_3 = -\frac{1}{3+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 \Leftrightarrow I_5 = \ln(2) - \frac{33}{64}$.

Exercice 28 : **Soit $(I_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par : $\forall\, p \in \mathbb{N}^*$ $I_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\cos(2px)\, dx$.**

1. **Justifier l'existence de la suite $(I_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$.**
2. **Calculer I_p en fonction de p. (discuter)**
3. **En déduire I_{2p} et I_{2p+1} en fonction de p.**
4. **Calculer I_1 et I_5.**

Correction :

1. **Justifions l'existence de la suite $(I_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$:**

La composée de la fonction cos et celle du polynôme x est définie sur IR$-\{2\pi k\}$; or$\left[0;\frac{\pi}{2}\right] \subset$ IR$-\{2\pi k\}$, donc $(I_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est continue sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

2. $I_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\cos(2px)\, dx = \left[\frac{x}{p}\sin(2px)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{p}\sin(2px)\right] dx = \left[\frac{x}{p}\sin(2px) + \frac{1}{2p^2}\cos(2px)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$I_p = \frac{1}{2p^2}[\cos(p\pi) - 1]$:

- Si p est pair alors $I_p = 0$;
- Si p est impair alors $I_p = -\frac{1}{p^2}$ c'est cela la réponse à la question posée.

3. $I_{2p} = -\frac{1}{4p^2}$ **et** $I_{2p+1} = -\frac{1}{(2p+1)^2}$.
4. $I_1 = -\frac{1}{1^2} = -1$ et $I_5 = -\frac{1}{25}$.

Exercice 29 : **Soit la fonction f définie sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ par : $f(x) = \tan(x^2)$.**

3. **Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel de $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$**
4. **Calculer $\mathrm{I} = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{4}}} x\tan(x^2)\, dx$.**

Correction : **f définie sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ / $f(x) = \tan(x^2)$.**

1. $\forall\, x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ $f'(x) = 2x[1 + \tan^2(x^2)]$

$\forall\, x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ $f'(x) = 2x + 2x\tan^2(x^2)$.

2. **On sait que** $f'(x) = 2x + 2x\tan^2(x^2) \Leftrightarrow 2x\tan^2(x^2) = f'(x) - 2x \Leftrightarrow x\tan^2(x^2) = \frac{f'(x)}{2} - x$

$\mathrm{I} = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{4}}} x\tan(x^2)\, dx = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{4}}} \left[\frac{f'(x)}{2} - x\right] dx =$

$\mathrm{I} = \left[\frac{1}{2}\tan(x^2) - \frac{1}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{\frac{\pi}{4}}} = \frac{4-\pi}{8}$.

Exercice 30 : **Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\mathrm{I}_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx$ et $\mathrm{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^n}{\cos x} dx$**

1. **Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x)^n \cos x\, dx$.**
2. **En déduire $\mathrm{I}_{n+2} - \mathrm{I}_n$ en fonction de n.**
3. **Montrer que la fonction f définie sur $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ par $f(x) = \ln\left[\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$ est une primitive sur $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ de la fonction par $g(x) = \frac{1}{\cos x}$.**
4. **Calculer I_0. En déduire I_1 ; I_2 ; I_3 et I_4.**

Correction : Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\mathrm{I}_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx$ et $\mathrm{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^n}{\cos x} dx$

1. $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x)^n \cos x\, dx = \left[\frac{1}{n+1}(\sin x)^{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$.

2. $\mathrm{I}_{n+2} - \mathrm{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^{n+2}}{\cos x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^n}{\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^n[(\sin x)^2 - 1]}{\cos x} dx = -\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x)^n \cos x\, dx = \left[\frac{-1}{n+1}(\sin x)^{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{-1}{(n+1)2^{n+1}}$.

3. $\forall\, x \in \left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ $f'(x) = \frac{1}{2cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\times\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\times\frac{\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}} = \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\times\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\sin\left(\frac{2x}{2}+\frac{2\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\cos x}$.

4. $\mathrm{I}_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx = \left[\ln\left[\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \ln\left(\tan\frac{5\pi}{12}\right)$. $\mathrm{I}_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = [-\ln(\cos x)]_0^{\frac{\pi}{3}} = \ln 2$;

$\mathrm{I}_2 - \mathrm{I}_0 = \frac{-1}{(n+1)2^{n+1}} \Leftrightarrow \mathrm{I}_2 = \ln\left(\tan\frac{5\pi}{12}\right) - \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$;

$\mathrm{I}_3 - \mathrm{I}_1 = \frac{-1}{(n+1)2^{n+1}} \Leftrightarrow \mathrm{I}_3 = \ln(2) - \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$;

$\mathrm{I}_4 - \mathrm{I}_2 = \frac{-1}{(n+1)2^{n+1}} \Leftrightarrow \mathrm{I}_4 = 2\ln\left(\tan\frac{5\pi}{12}\right) - \frac{2}{(n+1)2^{n+1}}$.

Exercice 31 : **On considère les intégrales définies par $I=\int_0^{\pi} e^x\cos^2 x\,dx$; $J=\int_0^{\pi} e^x\sin^2 x\,dx$ et**

$K=\int_0^{\pi} e^x\cos 2x\,dx$.

1. A l'aide de deux intégrations par parties successives, démontrer que $K=\frac{e^{\pi}-1}{5}$.

2. On souhaite calculer I et J.

a) Démonter que $I+J=e^{\pi}-1$.

b) Démonter que $I-J=K$.

c) En déduire la valeur de I et celle de J.

Correction :

1. $K=\int_0^{\pi} e^x\cos 2x\,dx=[e^x\cos 2x]_0^{\pi}+2\int_0^{\pi} e^x\sin 2x\,dx=e^{\pi}-1+2[e^x\sin 2x]_0^{\pi}-4\int_0^{\pi} e^x\cos 2x\,dx=e^{\pi}-1-4K \Leftrightarrow 5K=e^{\pi}-1$

$K=\frac{e^{\pi}-1}{5}$.

2. On souhaite calculer I et J.

a) $I+J=\int_0^{\pi} e^x(\cos^2 x+\sin^2 x)dx=\int_0^{\pi} e^x dx=[e^x]_0^{\pi}=e^{\pi}-1$.

b) $I-J=\int_0^{\pi} e^x(\cos^2 x-\sin^2 x)dx=\int_0^{\pi} e^x\cos 2x\,dx=K=\frac{e^{\pi}-1}{5}$.

c) $\begin{cases} I+J=e^{\pi}-1\\ I-J=\frac{e^{\pi}-1}{5}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2I=\frac{6e^{\pi}-6}{5}\\ 2J=\frac{4e^{\pi}-4}{5}\end{cases}$ on déduit que $I=\frac{3e^{\pi}-3}{5}$ et $J=\frac{2e^{\pi}-2}{5}$.

Exercice 32 : **Pour n entier naturel, on considère les intégrales : $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(e^{-nx}\sin x)dx$ et**

$J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(e^{-nx}\cos x)dx$.

1. Calculer I_0 et J_0.

2. Soit n un entier naturel non nul.

a) En intégrant par parties I_n puis J_n, prouver I_n et J_n vérifient le système : $\begin{cases} I_n+nJ_n=1\\ -nI_n+J_n=e^{-n\frac{\pi}{2}}\end{cases}$.

b) En déduire, pour n entier naturel non nul, les expressions de I_n et J_n en fonction de n

3. Déterminer la limite de I_n et de J_n, en $+\infty$.

Correction :

1. $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)dx=[-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$ et

$J_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)dx=[\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$.

2. Soit n un entier naturel non nul.

a) $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(e^{-nx}\sin x)dx=[-\cos x\,e^{-nx}]_0^{\frac{\pi}{2}}-n\int_0^{\frac{\pi}{2}}(e^{-nx}\cos x)dx=1-nJ_n$ alors on retrouve $I_n+nJ_n=1$.

$J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(e^{-nx}\cos x)dx=[\sin x\,e^{-nx}]_0^{\frac{\pi}{2}}+n\int_0^{\frac{\pi}{2}}(e^{-nx}\sin x)dx=e^{-n\frac{\pi}{2}}+nI_n \Leftrightarrow$ on retrouve aisément $-nI_n+J_n=e^{-n\frac{\pi}{2}}$.

b) $\begin{cases} nI_n+n^2J_n=n\\ -nI_n+J_n=e^{-n\frac{\pi}{2}}\end{cases}$ donc $\begin{cases} J_n=\frac{n+e^{-n\frac{\pi}{2}}}{n^2+1}\\ I_n=1-nJ_n\end{cases}$ d'où

$\begin{cases} J_n=\frac{n+e^{-n\frac{\pi}{2}}}{n^2+1}\\ I_n=\frac{1-ne^{-n\frac{\pi}{2}}}{n^2+1}\end{cases}$

3. $\lim_{n\mapsto+\infty} e^{-n\frac{\pi}{2}}=0$, alors $\lim_{n\mapsto+\infty} J_n=0$ et $\lim_{n\mapsto+\infty} I_n=0$.

Exercice 33 : **Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $I_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin x\,dx$.**

1. En utilisant la technique d'intégration par parties, exprimer I_n en fonction de n. (discuter)

2. Pour n est pair.

a) Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et son premier terme.

b) Exprimer $S_{0,n}=I_0+I_1+I_2+\cdots+I_n$ en fonction de n.

c) Calculer la limite de $S_{0,n}$.

Correction :

1. $I_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin x\,dx=[-e^{-x}\sin x]_{n\pi}^{(n+1)\pi}+\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\cos x\,e^{-x}dx$,

$I_n=[-e^{-x}\cos x]_{n\pi}^{(n+1)\pi}-\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin x\,dx \Leftrightarrow$

$2I_n=[-e^{-x}\cos x]_{n\pi}^{(n+1)\pi} \Leftrightarrow$

- Si n est pair alors $n+1$ est impair, donc $I_n=\frac{1}{2}[-e^{-x}\cos x]_{n\pi}^{(n+1)\pi}=\frac{e^{-n\pi}}{2}(e^{-\pi}+1)$.
- Si n est impair alors $n+1$ est pair, donc $I_n=\frac{1}{2}[-e^{-x}\cos x]_{n\pi}^{(n+1)\pi}=-\frac{e^{-n\pi}}{2}(e^{-\pi}+1)$.
- Si $n=0 \Leftrightarrow I_0=\frac{1}{2}[-e^{-x}\cos x]_0^{\pi}=e^{-\pi}+1$

2. Pour n est pair

a) $I_{n+1}=\frac{e^{-(n+1)\pi}}{2}(e^{-\pi}+1)=\frac{e^{-\pi}}{2}.\frac{e^{-n\pi}}{2}(e^{-\pi}+$ 1=e−π2In alors Inn∈ℕ est une suite géométrique de raison $q=\frac{e^{-\pi}}{2}$ et de premier terme $I_0=\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)$.

b) $S_{0,n} = I_0 + I_1 + I_2 + \cdots + I_n = \frac{1}{2}(e^{-\pi}+1) \times \frac{1-\left(\frac{e^{-\pi}}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{e^{-\pi}}{2}} = (e^{-\pi}+1) \times \frac{1-\left(\frac{e^{-\pi}}{2}\right)^{n+1}}{2-e^{-\pi}}$.

c) $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \left(\frac{e^{-\pi}}{2}\right)^{n+1} = 0$ alors $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} I_n = \frac{e^{-\pi}+1}{2-e^{-\pi}}$.

Exercice 34 : On pose $\mathrm{I}_n = \int_0^1 [x^n\sqrt{1-x}]dx$ où n est un entier naturel.

1. **Calculer I_0 et I_1.**
2. **Vérifier que $\mathrm{I}_n = \frac{2n}{2n+3}\mathrm{I}_{n-1}$.**
3. **Déduisez-en I_2 , puis I_3.**

Correction : $\mathrm{I}_n = \int_0^1 [x^n\sqrt{1-x}]dx$.

1. $\mathrm{I}_0 = \int_0^1 [x^0\sqrt{1-x}]dx = \left[-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$ et

$\mathrm{I}_1 = \int_0^1 [x^1\sqrt{1-x}]dx = \left[-\frac{2x}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 + \int_0^1 \left[\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]dx = \left[-\frac{4}{15}(1-x)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{4}{15}$.

2. $\mathrm{I}_1 = \frac{2}{2+3}\mathrm{I}_{1-1} = \frac{2}{5}\mathrm{I}_0 = \frac{2}{5}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{15}$.
3. $\mathrm{I}_2 = \frac{4}{7}\mathrm{I}_1 = \frac{16}{105}$ puis $\mathrm{I}_3 = \frac{2}{3}\mathrm{I}_2 = \frac{32}{315}$.

Exercice 35 : On pose $\mathrm{I}_{p,n} = \int_0^1 x^p(1-x)^n dx$ où n est un entier naturel.

1. **Calculer $\mathrm{I}_{p,0}$ et $\mathrm{I}_{p,1}$.**
2. **Calculer $\mathrm{I}_{0,n}$ et en déduire $\mathrm{I}_{1,n}$.**
3. **Etablir pour $n \geq 0$, la relation :**

$\mathrm{I}_{p,n} = \frac{n}{p+1}\mathrm{I}_{p+1,n-1}$. <u>NB</u> $x^0 = (1-x)^0 = 1$.

Correction :

1. $\mathrm{I}_{p,0} = \int_0^1 x^p(1-x)^0 dx = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+1}$ et

$\mathrm{I}_{p,1} = \int_0^1 x^p(1-x)^1 dx = \int_0^1 [x^p - x^{p+1}]dx = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1} - \frac{x^{p+2}}{p+2}\right]_0^1 = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2} = \frac{1}{(p+1)(p+2)}$.

2. $\mathrm{I}_{0,n} = \int_0^1 x^0(1-x)^n dx = \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = 1$ et

$\mathrm{I}_{1,n} = \int_0^1 x^1(1-x)^n dx = \int_0^1 x(1-x)^n dx = \left[-x\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 + \frac{1}{n+1}\int_0^1 (1-x)^{n+1}dx = \left[-x\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} - \frac{(1-x)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}\right]_0^1 = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

3. $\mathrm{I}_{p+1,n-1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^{p+1}(1-x)^{n-1}dx = \left[-\frac{x^{p+1}(1-x)^n}{n}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{p+1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^p(1-x)^n dx$ en multipliant par $\frac{n}{p+1}$, on aura $\mathrm{I}_{p,n} = \frac{n}{p+1}\mathrm{I}_{p+1,n-1}$.

Exercice 36 : On pose $\mathrm{I}_{m,n} = \int_\alpha^\beta (t-\alpha)^m(t-\beta)^n dt$ où $(m;n) \in \mathrm{IN}^2$ et $(\alpha;\beta) \in \mathrm{IR}^2$

Etablir une relation entre $\mathrm{I}_{m,n}$ et $\mathrm{I}_{m-1,n+1}$.

Correction : Etablir une relation entre $\mathrm{I}_{m,n}$ et $\mathrm{I}_{m-1,n+1}$.

$\mathrm{I}_{m,n} = \left[-\frac{(t-\alpha)^m(t-\beta)^{n+1}}{n+1}\right]_\alpha^\beta - \frac{m}{n+1}\int_\alpha^\beta [(t-\alpha)^{m-1}(t-$
*βn+1dx=−mn+1*I*m−1,n+1.*

Exercice 37 : On pose $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$;

$J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx$ et $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}dx$.

1. **Soit la fonction f définie sur $[0;1]$ par : $f(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)$. Calculer la dérivée f' de f. En déduire la valeur de I.**
2.

a) Sans calculer explicitement I et K, vérifier que $J + 2I = K$.

b) A l'aide d'une intégration par parties portant sur l'intégrale K, démontrer que $K = \sqrt{3} - J$.

c) En déduire les valeurs de J et de K.

Correction :

1. $\forall\, x \in [0;1]\ f'(x) = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}}{x+\sqrt{x^2+2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$

$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} = [f(x)]_0^1 = \left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)\right]_0^1 = \ln\left(1+\sqrt{3}\right) - \ln\left(\sqrt{2}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)$.

2.

a) $J + 2I = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx + 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} = \int_0^1 \frac{(x^2+2)dx}{\sqrt{x^2+2}} = \int_0^1 \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}.\frac{\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+2}}dx = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}dx = K$

b) $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}dx = \left[x\sqrt{x^2+2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx = \sqrt{3} - J$.

c) $\begin{cases} K = \sqrt{3} - J \\ J + 2I = K \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} J = \frac{\sqrt{3}}{2} - I \\ K = \sqrt{3} - J \end{cases}$

Donc $J = \frac{\sqrt{3}}{2} - \ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)$ et $K = \frac{\sqrt{3}}{2} + \ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)$.

Exercice 38 : **L'objectif est d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier *n* par :**

$\boldsymbol{u_0=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx}$ **pour tout entier $n\geq 1$,**

$\boldsymbol{u_n=\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}dx}$**.**

1. Soit la fonction f définie sur $[0;1]$ par :
$\boldsymbol{f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}$**.**

a) Calculer la dérivée f' de f. En déduire la valeur de u_0.

b) Calculer u_1.

2.

a) Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

b) Montrer que pour tout nombre *x* appartenant à l'intervalle [0 ; 1] on a : $1\leq\sqrt{x^2+1}\leq 2$. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Pour tout entier *n* supérieur ou égal à 3, on pose : $I_n=\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{x^2+1}dx$.

a) Vérifier que pour tout entier *n* supérieur ou égal à 3, on a : $u_n+u_{n-2}=I_n$. Par une intégration par parties portant sur I_n, montrer que pour tout entier $n\geq 3$, on a : $nu_n+(n-1)u_{n-2}=\sqrt{2}$.

a) En déduire que pour tout entier *n* supérieur ou égal à 3, on a : $(2n-1)u_n\leq\sqrt{2}$.

b) Montrer que la suite (nu_n) est convergente et calculer sa limite.

Correction :

1. $\boldsymbol{f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}$.

a) $\forall\, x\in[0;1]\ f'(x)=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

f est une primitive de $x\longmapsto\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ d'où

$u_0=f(1)-f(0)=\ln(1+\sqrt{2})$.

b) $u_1=\int_0^1\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}dx=\left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1=\sqrt{2}-1$.

2.

a) $x^{n+1}\leq x^n\Leftrightarrow\frac{x^{n+1}}{\sqrt{x^2+1}}\leq\frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}$ d'où
$\int_0^1\frac{x^{n+1}}{\sqrt{x^2+1}}dx\leq\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}dx\Leftrightarrow u_{n+1}\leq u_n$. Cette suite est donc décroissante et minorée par 0. Elle admet donc une limite L positive.

b) pour tout *x* dans [0 ; 1], $0\leq x^2\leq 1$ donc $1\leq 1+x^2\leq 2$ donc $1\leq\sqrt{x^2+1}\leq\sqrt{2}$ soit $\frac{1}{\sqrt{2}}\leq\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\leq 1$ or pour tout *x* dans [0 ; 1] $x^n\geq 0$ donc $\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 x^n dx\leq$ $\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}dx\leq\int_0^1 x^n dx$ or $\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{(n+1)}$ donc
$\frac{1}{\sqrt{2}(n+1)}\leq\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}dx\leq\frac{1}{(n+1)}$. $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\frac{1}{(n+1)}=0$ donc d'après le t. des gendarmes $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}dx=0$.

3. $\boldsymbol{I_n=\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{x^2+1}dx}$ **:**

a) $u_n+u_{n-2}=I_n$ et montrons que pour tout entier $n\geq 3$, on a : $u_n+(n-1)u_n=\sqrt{2}$:
$u_n+u_{n-2}=\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}dx+\int_0^1\frac{x^{n-2}}{\sqrt{x^2+1}}dx=$
$\int_0^1\frac{x^{n-2}(1+x^2)}{\sqrt{x^2+1}}dx$. D'où
$u_n+u_{n-2}=\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{x^2+1}dx=I_n$. Avec une intégration par parties sur I_n, on obtient : $I_n=\left[\frac{x^{n-1}}{n-1}\sqrt{x^2+1}\right]_0^1-\int_0^1\frac{x^{n-1}}{n-1}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\frac{1}{n-1}\left(\sqrt{2}-u_n\right)$.
En utilisant que $I_n=u_n+u_{n-2}=\frac{1}{n-1}\left(\sqrt{2}-u_n\right)$ ce qui conduit à : $nu_n+(n-1)u_{n-2}=\sqrt{2}$.

b) $(2n-1)u_n\leq\sqrt{2}$:La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et donc $u_n\leq u_{n+1}$ or $nu_n+(n-1)u_{n-2}=\sqrt{2}$ donc $(2n-1)u_n\leq\sqrt{2}$.

c) D'après les résultats obtenus précédemment : pour tout *n* , on a : $\frac{1}{\sqrt{2}(n+1)}\leq u_n\leq\frac{1}{(n+1)}$ et $(2n-1)u_n\leq\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{2}(n+1)}\leq nu_n\leq\frac{1}{(n+1)}$. Or $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\frac{n}{(n+1)}=1$ et $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}(u_n)=0$, donc $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}(n\,u_n)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, d'après le théorème des gendarmes.

Exercice 39 : **On définit la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{1+x^2}dx$. On ne cherchera pas tout de suite à calculer cette intégrale.**

1. Démontrer que, pour tout $x\in[0\,;1]$, on a $\frac{1}{2}x^n\leq\frac{x^n}{1+x^2}\leq x^n$.

2. En déduire un encadrement de I_n, pour tout entier $n\geq 1$, puis la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. En étudiant le signe de $I_{n+1}-I_n$, démontrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

4. Etablir que, pour tout entier $n\geq 1$, $I_n+I_{n+2}=\frac{1}{n+1}$.

5. Déduire des questions précédentes que, pour tout entier $n\geq 3$, $\frac{1}{2(n+1)}\leq I_n\leq\frac{1}{2(n-1)}$. Déterminer alors la limite de nI_n.

6. Calculer I_1, puis en utilisant la question 4, déterminer I_3 et I_5.

Correction :

1. Démontrons que, pour tout $x \in [0 ; 1]$, on a $\frac{1}{2}x^n \leq \frac{x^n}{1+x^2} \leq x^n$: Pour tout $x \in [0 ; 1]$, $0 \leq x^2 \leq 1$ donc $1 \leq 1 + x^2 \leq 2$ donc $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$. Pour tout $x \in [0 ; 1]$, $x^n \geq 0$ donc en multipliant l'inégalité précédente par x^n :

pour tout $x \in [0 ; 1]$, on a : $\frac{1}{2}x^n \leq \frac{x^n}{1+x^2} \leq x^n$.

2. Les fonctions $x \rightarrow \frac{1}{2}x^n$; $x \rightarrow \frac{x^n}{1+x^2}$ et $x \rightarrow \frac{1}{2}x^n$ sont définies continues sur $[0 ; 1]$ et pour tout $x \in [0 ; 1]$, on a : $\frac{1}{2}x^n \leq \frac{x^n}{1+x^2} \leq x^n$, donc $\frac{1}{2}\int_0^1 x^n dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx \leq \int_0^1 x^n dx$ or $\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$. D'où pour tout entier $n \geq 1$, $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{(n-1)}$. $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \frac{1}{2(n+1)} = \lim\limits_{n \mapsto +\infty} \frac{1}{(n+1)} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} I_n = 0$.

3. $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2} dx - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x^2} dx$; pour tout $x \in [0 ; 1]$, $\frac{x^n(x-1)}{1+x^2} \leq 0$ et la fonction $\frac{x^n(x-1)}{1+x^2}$ est continue sur $[0 ; 1]$, donc $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x^2} dx \leq 0$, donc $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

4. Pour tout entier $n \geq 1$,

$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n(x^2+1)}{1+x^2} dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$.

5. Pour tout entier $n \geq 1$, $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{(n-1)}$ donc en remplaçant n par $n - 2$: pour tout entier $n \geq 3$, on a : $\frac{1}{2(n-1)} \leq I_{n-2} \leq \frac{1}{2(n-1)}$ or $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$ donc $I_n + \frac{1}{2(n-1)} \leq I_n + I_{n-2} \leq I_n + \frac{1}{2(n-1)}$ soit $I_n + \frac{1}{2(n-1)} \leq \frac{1}{n+1} \leq I_n + \frac{1}{2(n-1)}$ donc en ne considérant que la première partie de l'inégalité : $I_n + \frac{1}{2(n-1)} \leq \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow I_n \leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n-1)}$ donc pour tout entier $n \geq 3$, $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$.

Déterminons alors la limite de nI_n :

Pour tout entier $n \geq 3$, $\frac{n}{2(n+1)} \leq nI_n \leq \frac{n}{2(n-1)}$ or $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \frac{1}{2(n+1)} = \lim\limits_{n \mapsto +\infty} \frac{1}{(n+1)} = \frac{1}{2}$ donc d'après le théorème des gendarmes appliqués aux suites $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} nI_n = \frac{1}{2}$.

6. $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$, pour tout entier $n \geq 1$, $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ donc en appliquant cette relation à $n = 1$:

$I_1 + I_3 = \frac{1}{1+1} \Leftrightarrow I_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$; en appliquant cette relation à $n = 3$: $I_3 + I_{3+2} = \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow I_5 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$.

Exercice 40 : Pour $n \in$ IN, on pose $\mathrm{I}_n = \int_1^x (\ln t)^n dt$.

1. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $n \in$ IN,
$\mathrm{I}_n = x(\ln x)^n - n\mathrm{I}_{n-1}$.

2. En déduire I_1, I_2, I_3 et I_4.

Correction : $n \in$ IN, / $\mathrm{I}_n = \int_1^x (\ln t)^n dt$

1. $\mathrm{I}_n = \int_1^x (\ln t)^n dt =$
$[t(\ln t)^n]_1^x - n\int_1^x (\ln t)^{n-1} dt = x(\ln x)^n - n\mathrm{I}_{n-1}$.

2. $\mathrm{I}_0 = \int_1^x (\ln t)^0 dt = \int_1^x dt = [t]_1^x = x - 1$.

$\mathrm{I}_1 = x(\ln x)^1 - \mathrm{I}_{1-1} = x(\ln x)^1 - x + 1$,

$\mathrm{I}_2 = x(\ln x)^2 - 2\mathrm{I}_1 = x(\ln x)^2 - 2[x(\ln x)^1 - x + 1]$

$\mathrm{I}_3 = x(\ln x)^3 - 3\mathrm{I}_2 = x(\ln x)^3 - 3[x(\ln x)^2 -$
$2x\ln x1 - x + 1$ et

$\mathrm{I}_4 = x(\ln x)^4 - 4\mathrm{I}_3 = x(\ln x)^4 - 4\left[x(\ln x)^3 -\right.$
$3x\ln x2 - 2x\ln x1 - x + 1$.

Exercice 41 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $\mathrm{I}_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$.

1.

a) Démontrer que, pour tout x dans l'intervalle $]1; e[$ et pour tout n entier naturel, on a : $(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} > 0$.

b) En déduire que la suite (I_n) est décroissante.

2.

a) Calculer I_1 à l'aide d'une intégration par parties.

b) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.

c) En déduire I_2, I_3 et I_4.

3.

a) Démontrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geq 0$.

b) Démontrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)I_n \leq e$.

c) En déduire la limite de I_n.

d) Déterminer la valeur de $nI_n + (I_n + I_{n+1})$ et en déduire la limite de nI_n.

Correction :

1.

a) $\mathbf{1} < x < e \Leftrightarrow 0 < \ln x < 1 \Leftrightarrow 0 < (\ln x)^n < 1$ et d'autre part $0 < (\ln x)^{n+1} < 1 \Leftrightarrow -1 < -(\ln x)^{n+1} < 0$. En ajoutant membre à membre : $-1 < (\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} < 1 \Leftrightarrow 0 < (\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} < 2$. Pour tout $x \in]1; e[$ et pour tout $n \in$ IN, on a : $(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} > 0$.

b) Déduisons que la suite (I_n) est décroissante : on sait que la fonction ln est croissante sur $]0; +\infty[$, or $[1; e] \subset]0; +\infty[$, donc ln est croissante sur $[1; e]$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$, or $0 < (\ln x)^n < 1 \Leftrightarrow \int_1^e 0dx < \int_1^e (\ln x)^n < \int_1^e 1dx \Leftrightarrow 0 < \int_1^e (\ln x)^n dx < e - 1$; de ce fait on pourra avoir $(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} > 0 \Leftrightarrow \int_1^e (\ln x)^n dx - \int_1^e (\ln x)^{n+1} dx > 0$.

La suite (I_n) est décroissante.

2.

a) $I_1 = \int_1^e (\ln x)^1 dx = [x \ln x - x]_1^e = 1$

b) $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*, \boldsymbol{I_{n+1} = e - (n+1)I_n}$ **:**

$I_{n+1} = \int_1^e (\ln x)^{n+1} dx = [x(\ln x)^{n+1}]_1^e - (n+1)\int_1^e (\ln x)^n dx$, on déduit que : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.

c) Déduisons $\boldsymbol{I_2}$, $\boldsymbol{I_3}$ et $\boldsymbol{I_4}$:

$I_{1+1} = e - (1+1)I_1 = I_2 = e - 2$,

$I_3 = e - (1+2)I_2 = -2e + 6$.

$I_{3+1} = e - (1+3)I_3 = I_4 = 9e - 24$.

3.

a) Démontrons que, pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$, $\boldsymbol{I_n \geq 0}$:

<u>Initialisation :</u> $I_1 = 1 > 0$, vraie

<u>Hérédité :</u> supposons que $\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ I_k \geq 0$ est vraie montrer que $\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ I_{k+1} \geq 0$: $\int_1^e (\ln x)^k dx \geq 0 \Leftrightarrow (k+1)\int_1^e (\ln x)^k dx \geq 0 \Leftrightarrow e - (k+1)\int_1^e (\ln x)^k dx \leq e \Leftrightarrow e - (k+1)\int_1^e (\ln x)^k dx = I_{k+1} \geq 0$.

<u>Conclusion :</u> $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ I_n \geq 0$.

b) Démontrons que, $\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$, $\boldsymbol{(n+1)I_n \leq e}$:

On sait que $I_n \geq 0$ et $(n+1) \geq 2$, donc $(n+1)I_n \geq 0$ ou $0 \leq (n+1)I_n$.Or $1 < x < e \Leftrightarrow 0 < I_n < e - 1 \Leftrightarrow 0 < (n+1)I_n < (n+1)(e-1) \Leftrightarrow (n+1)I_n \leq e$

La meilleure méthode est de passer par celle de récurrence. **Vous pouvez continuer !**

c) $(n+1)I_n \leq e \Leftrightarrow I_n \leq \frac{e}{n+1}$ alors

$\lim\limits_{n \mapsto +\infty} (\mathrm{I}_n) = \lim\limits_{n \mapsto +\infty} \left(\frac{e}{n+1}\right) = 0$, d'où I_n converge vers 0

d) $nI_n + (I_n + I_{n+1}) = (n+1)I_n + I_{n+1} = (n+1)I_n + e - (n+1)I_n = e$ et $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} (n\mathrm{I}_n) = e$.

<u>Exercice 42 :</u> **On pose $\mathbf{I}_{\boldsymbol{n}} = \int_1^e x(\ln x)^n dx$ où $\boldsymbol{n}$ est un entier naturel.**

1. **Calculer $\mathbf{I_0}$ et $\mathbf{I_1}$.**
2. **Montrer que pour tout entier naturel non nul $\mathbf{2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2}$.**
3. **Déduisez-en $\mathbf{I_2}$, puis $\mathbf{I_3}$.**
4. **En déduire l'encadrement de $\mathbf{0 \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}}$**
5. **On considère la suite $(\mathbf{I}_{\boldsymbol{n}})_{n\in\mathbb{N}}$, $\boldsymbol{n}$ entier ≥ 0.**

a) Montrer que cette suite est décroissante.

b) Calculer $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} (\mathbf{I_n}) =$ et $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} (n\mathbf{I_n}) =$.

<u>**Correction :**</u> $\mathrm{I}_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$.

1. $\mathrm{I}_0 = \int_1^e x(\ln x)^0 dx = \int_1^e x dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e = \frac{e^2-1}{2}$

et $\mathrm{I}_1 = \int_1^e x(\ln x)^1 dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2+1}{4}$.

2. $\mathrm{I}_{n+1} = \int_1^e x(\ln x)^{n+1} dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln^{n+1} x\right]_1^e - \frac{n+1}{2}\int_1^e x(\ln x)^n dx = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2}\mathrm{I}_n \Leftrightarrow 2\mathrm{I}_{n+1} + (n+1)\mathrm{I}_n = e^2$, donc $2\mathrm{I}_{n+1} + (n+1)\mathrm{I}_n = e^2$.

3. $2\mathrm{I}_2 + 2\mathrm{I}_1 = e^2 \Leftrightarrow \mathrm{I}_2 = \frac{e^2}{2} - 2\mathrm{I}_1 = -\frac{1}{4}$;

$2\mathrm{I}_3 + 3\mathrm{I}_2 = e^2 \Leftrightarrow \mathrm{I}_3 = \frac{e^2}{2} - 3\mathrm{I}_2 = \frac{e^2}{2} + \frac{3}{4}$.

4. $1 \leq x \leq e \Leftrightarrow 0 \leq \ln x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq (\ln x)^n \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x(\ln x)^n \leq x \Leftrightarrow 0 \leq \int_1^e x(\ln x)^n dx \leq \int_1^e x dx \Leftrightarrow 0 \leq \mathrm{I}_n \leq \frac{e^2-1}{2}$ or $\frac{e^2}{n+2} \leq \frac{e^2-1}{2}$

donc $\mathbf{0 \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}}$.

5. On considère la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, n entier ≥ 0.

a) Montrer que cette suite est décroissante.

$\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n = \int_1^e x(\ln x)^{n+1} dx - \int_1^e x(\ln x)^n dx = \int_1^e x(\ln x)^n(\ln x - 1)dx$ or $\forall\, x \in [1; e]$, $x(\ln x)^n \geq 0$ et $\forall\, x \in [1; e]$, $(\ln x - 1) \leq 0$; donc $\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n \leq 0 \Leftrightarrow \mathrm{I}_{n+1} \leq \mathrm{I}_n$ alors $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b) D'après le théorème de gendarme on déduit $0 \leq \mathrm{I}_n \leq \frac{e^2}{n+2}$. On sait que $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \left(\frac{e^2}{n+2}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} (\mathrm{I}_n) = 0$ et $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} (n\mathrm{I}_n) = \lim\limits_{n \mapsto +\infty} \left(\frac{n}{n+2} \times e^2\right) = e^2$.

<u>Exercice 43 :</u> **On pose $\boldsymbol{I_p} = \int_1^e \boldsymbol{x^2(\ln x)^p}$ d où $\boldsymbol{p}$ est un entier naturel non nul.**

1.

a) Calculer $\boldsymbol{I_1}$ (On pourra faire une intégration par parties)

b) Montrer que pour tout entier naturel non nul : $I_{p+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{p+1}{3} I_p$

c) Déduisez-en I_2 , puis I_3.

2. On considère la suite $(I_p)_{p\in\mathbb{N}}$, p entier ≥ 0.

a) Montrer que cette suite est décroissante.

b) Etablir la convergence de cette suite vers une limite $L \geq 0$.

3.

a) Montrer qu'il y a contradiction entre le fait que L soit strictement positive et la relation obtenue dans 1 : b).

b) Déduisez-en alors la limite de la suite $(I_p)_{p\in\mathbb{N}}$

Correction :

1.

a) $I_1 = \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3} dx = \frac{1}{9} - \frac{2e^3}{9}$.

b) $I_{p+1} = \int_1^e x^2 (\ln x)^{p+1} = \left[\frac{x^3}{3}(\ln x)^p\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3}(p+1)\frac{1}{x}(\ln x)^p dx = \left[\frac{x^3}{3}(\ln x)^p\right]_1^e - \frac{p+1}{3}\int_1^e x^2(\ln x)^p dx$

$I_{p+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{p+1}{3} I_p$.

c) $I_2 = \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3} I_1 = \frac{5}{27}e^3 - \frac{2}{27}$ et $I_3 = \frac{4}{27}e^3 + \frac{2}{27}$.

2. $(I_p)_{p\in\mathbb{N}}$, **p entier ≥ 0.**

a) il suffit de remarquer que pour tout x compris entre 1 et e, ln x est compris entre 0 et 1. Donc, pour tout x compris entre 1 et e, on a : $x^2(\ln x)^{p+1} \leq x^2(\ln x)^p$. Comme l'intégrale sur [1 ; e] est une forme linéaire positive, on a bien $I_{p+1} \leq I_p$ si p est un entier positif. **Cette suite est décroissante .**

b) Le fait que I_p soit ≥ 0 est clair. C'est donc une suite $(n+1)I_p$ décroissante et minorée par 0.

Elle converge donc vers une limite L ≥ 0.

3.

a) Si L est > 0 , alors en particulier, la suite $(n+1)I_p$ tend vers + ∞. Mais d'après la relation obtenue en 1 : b , on a : $I_{p+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{p+1}{3} I_p$. Ce qui n'est pas possible si on considère le passage à la limite (p tend vers + ∞). Donc on ne peut pas avoir L > 0.

b) Comme L est un réel ≥ 0, on n'en déduit que L = 0. La suite converge donc vers 0.

Exercice 44 : On pose, pour $x > 0$, $f(x) = \frac{ex+\ln x}{x^2}$.

Soit $I_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{\ln t}{t^2} dt$ et $A_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} f(t) dt$ pour $n \in$ IN.

a) Montrer que que : $I_n = \frac{n+1}{e^n} - \frac{n+2}{e^{n+1}}$.

b) Montrer que $A_n = I_n + e$.

c) Calculer I_0 et A_0.

d) Montrer que la suite (A_n) converge vers e.

Correction :

1. **Montrons que que : $I_n = \frac{n+1}{e^n} - \frac{n+2}{e^{n+1}}$:**

$I_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{\ln t}{t^2} dt = \left[-\frac{\ln t}{t}\right]_{e^n}^{e^{n+1}} + \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t}(1+\ln t)\right]_{e^n}^{e^{n+1}}$, donc $I_n = \frac{n+1}{e^n} - \frac{n+2}{e^{n+1}}$.

2. **Montrons que $A_n = I_n + e$:**

$A_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} f(t)dt = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \left(\frac{et+\ln t}{t^2}\right) dt = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{\ln t}{t^2} dt + \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{e}{t} dt$, $A_n = I_n + \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{e}{t} dt = I_n + [e \ln t]_{e^n}^{e^{n+1}} = I_n + ne + e - ne = I_n + e$.

3. $I_0 = \frac{1}{e^0} - \frac{2}{e^1} = 1 - \frac{2}{e}$; $A_0 = I_0 + e = \frac{e^2+e-2}{e}$.

4. $I_n = \frac{n+1}{e^n} - \frac{n+2}{e^{n+1}} = \frac{1}{\frac{e^n}{n+1}} - \frac{1}{\frac{e^{n+1}}{n+2}}$

$\lim_{n\mapsto+\infty} A_n = \lim_{n\mapsto+\infty}(I_n + e) = e$ alors la suite (A_n) converge vers e car $\lim_{n\mapsto+\infty} I_n = \lim_{n\mapsto+\infty}\left[\frac{1}{\frac{e^n}{n+1}} - \frac{1}{\frac{e^{n+1}}{n+2}}\right] = 0$.

Exercice 45 : Soit f la fonction de ℝ vers ℝ définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x\ln(x)}{(x^2+1)^2} & si\ x > 0 \\ 0\ si\ x = 0 \end{cases}$. Soit un réel $a > 0$ et $\mathrm{I}(a) = \int_a^1 f(x)\,dx$.

Montrer que $\forall a > 0$, $\mathrm{I}(a) = \frac{\ln a}{2(a^2+1)} - \frac{1}{4}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln a + \frac{1}{4}\ln(a^2+1)$.

Correction : Soit un réel $a > 0$ et $\mathrm{I}(a) = \int_a^1 f(x)dx$.

$\mathrm{I}(a) = \int_a^1 f(x)\,dx = \int_a^1 \left[\frac{x\ln(x)}{(x^2+1)^2}\right] dx = \left[-\frac{\ln(x)}{2(x^2+1)}\right]_a^1 + \frac{1}{2}\int_a^1 \left[\frac{1}{x(x^2+1)}\right] dx = \left[-\frac{\ln(x)}{2(x^2+1)}\right]_a^1 + \frac{1}{2}\int_a^1 \left[\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right] dx = \left[-\frac{\ln(x)}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{4}\ln(x^2+1)\right]_a^1 = \frac{\ln a}{2(a^2+1)} - \frac{1}{4}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln a + \frac{1}{4}\ln(a^2+1)$.

Exercice 46 : Soit n un entier naturel non nul.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $u_n = \int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} e^{2x}dx$

1. Calculer u_n en fonction de n.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.
3. Calculer $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_{2n}$.
4. On pose $v_n = e^{u_n}$ pour $n \geq 1$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) La suite (v_n) est-elle convergente ?

c) Calculer $p_n = \prod_{k=1}^{2n} v_k$ et $S'_n = \sum_{k=1}^{2n} v_k$.

Correction : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $u_n = \int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} e^{2x}dx$.

1. $u_n = \int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} e^{2x}dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{\ln(n)}^{\ln(n+1)}$

$u_n = \frac{1}{2}[(n+1)^2 - n^2] = n + \frac{1}{2}$.

2. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}[2(n+1) + 1 - 2n - 1] = 1$

donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique de raison et du premier terme $u_1 = \frac{3}{2}$.

3. $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_{2n} = \frac{2n(u_1+u_n)}{2} = n(u_1 + u_n) = \frac{n}{2}(3 + 2n + 1) = n^2 + 2n$.

4. **On pose $v_n = e^{u_n}$ pour $n \geq 1$.**

a) $v_{n+1} = e^{u_{n+1}} = e^{n+\frac{1}{2}+1} = e \times e^{n+\frac{1}{2}} = e \times e^{u_n}$

donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = e$ et du premier terme $v_1 = e^{u_1} = e^{\frac{3}{2}}$.

$v_n = e^{\frac{3}{2}} \times e^{n-1} = e^{n+\frac{1}{2}}$.

b) $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n = \lim\limits_{n\mapsto+\infty} e^{n+\frac{1}{2}} = +\infty$ alors la suite (v_n) diverge vers $+\infty$.

c) $p'_n = \prod_{k=1}^{n} v_k = e^{u_1} \times e^{u_2} \times e^{u_3} \times \ldots \times e^{u_n}$

$p'_n = e^{1+\frac{1}{2}} \times e^{2+\frac{1}{2}} \times e^{3+\frac{1}{2}} \times \ldots \times e^{n+\frac{1}{2}} = e^{1+2+3+\cdots+n} \times e^{n\times\frac{1}{2}} = e^{\frac{n(n+1)}{2}} \times e^{n\times\frac{1}{2}}$.

Donc $p_n = \prod_{k=1}^{2n} v_k = e^{n(n+1)} \times e^n = e^{n^2+2n}$.

et $s'_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = v_1 + v_2 + \cdots + v_n = v_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$

$s'_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = e^{\frac{3}{2}} \times \frac{1-e^n}{1-e}$, donc

$S'_n = \sum_{k=1}^{2n} v_k = e^{\frac{3}{2}} \times \frac{1-e^{2n}}{1-e}$.

Exercice 47 :

1. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_0^n xe^{-x}dx$.

a) Calculer u_n.

b) Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \int_0^n x^2e^{-x}dx$.

a) Démontrer que : $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = 2u_n - n^2e^{-n}$.

b) Déterminer la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction :

1. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_0^n xe^{-x}dx$:

a) $u_n = \int_0^n xe^{-x}dx = [-xe^{-x}]_0^n + \int_0^n e^{-x}dx = [-(x+1)e^{-x}]_0^n = 1 - e^{-n}(1+n)$.

b) on sait que $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} e^{-n} = 0$ et $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} ne^{-n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = \lim\limits_{n\mapsto+\infty} [1 - e^{-n}(1+n)] = 1$.

2. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \int_0^n x^2e^{-x}dx$.

a) $v_n = \int_0^n x^2e^{-x}dx = [-x^2e^{-x}]_0^n + 2\int_0^n xe^{-x}dx = 2u_n - n^2e^{-n}$.

b) Comme $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} 2u_n = 2$ et $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} n^2e^{-n} = \lim\limits_{n\mapsto+\infty} \frac{n^2}{e^n} = 0$ alors $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n = 2$.

Exercice 48 :

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathrm{IN}}$ la suite numérique définie par : $u_n = \int_n^{n+1} 2e^{-2x}\,dx$.

a) Justifier les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathrm{IN}}$.

b) Calculer u_0.

c) Montrer que, $\forall\, n \in \mathrm{IN}$, $u_n = e^{-2n}(1 - e^{-2})$.

2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathrm{IN}}$ est une suite géométrique dont on calculera la raison et le premier terme.
3. On désigne par $S_{0,n}$ la somme définie par $S_{0,n} = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

a) Calculer $S_{0,n}$ en fonction de n.

b) Calculer la limite de $S_{0,n}$.

Correction :

1. $(u_n)_{n\in\mathrm{IN}}$ / $u_n = \int_n^{n+1} 2e^{-2x}\,dx = [-e^{-2x}]_n^{n+1}$.

a) posons $f(x) = (x+1)e^{-x}$

On sait que $\forall\, x \in \mathrm{IR}$, $f(x) = 2e^{-2x} > 0$. Par ailleurs $f(n) = 2e^{-2n}$ et $f(n+1) = 2e^{-2n-2}$ sont des nombres finis; donc f est continue sur IR. D'où les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathrm{IN}}$ existent.

b) $u_0 = \int_n^{n+1} 2e^0 = [2x]_n^{n+1} = 2.$

c) $u_n = \int_n^{n+1} 2e^{-2x}\,dx = [-e^{-2x}]_n^{n+1} = -e^{-2(n+1)} + e^{-2n} = e^{-2n} - e^{-2n-2} = e^{-2n}(1-e^{-2})$

2. $u_{n+1} = e^{-2n-2}(1-e^{-2}) = e^{-2} \times e^{-2n}(1-e^{-2}) = e^{-2}u_n$. Donc $(u_n)_{n\in\mathrm{IN}}$ est une suite géométrique de raison $q = e^{-2}$et de $u_0 = 2$.

3.

a) $S_{0,n} = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 2.\frac{1-e^{-2n-2}}{1-e^{-2}}$.

b) Comme $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} (e^{-2n-2}) = 0$ alors et $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} S_{0,n} = \frac{2}{1-e^{-2}}$.

<u>Exercice 49 :</u>

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathrm{IN}}$ la suite numérique définie par : $u_n = \int_n^{n+1}(x+1)e^{-x}\,dx$.

a) Justifier les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathrm{IN}}$.

b) Calculer u_n en fonction de n.

2. On désigne par $P_{1,n}$ le produit définie par $P_{1,n} = u_1 \times u_2 \times u_3 \times \ldots \times u_n$.

Calculer $P_{1,n}$ en fonction de n.

<u>Correction :</u>

1. $(u_n)_{n\in\mathrm{IN}}$ / $u_n = \int_n^{n+1}(x+1)e^{-x}\,dx$.

a) On sait que $\forall\, x > 0, f(x) = (x+1)e^{-x} > 0$. Par ailleurs $f(n) = (n+1)e^{-n}$ et $f(n+1) = (n+2)e^{-n-1}$ sont des nombres finis; donc f est continue sur IR. D'où les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathrm{IN}}$ existent.

b) $u_n = \int_n^{n+1}(x+1)e^{-x}\,dx = [-(x+$ *2e−xnn+1=−n+3e−n−1+n+2e−n=e−nn×1−e−1+2−3e−1.*

2. $P_{1,n} = u_1 \times u_2 \times u_3 \times \ldots \times u_n$.

$u_1 = e^{-1}[1 \times (1-e^{-1}) + 2 - 3e^{-1}]$

$u_2 = e^{-1}[2 \times (1-e^{-1}) + 2 - 3e^{-1}]$

$u_3 = e^{-3}[3 \times (1-e^{-1}) + 2 - 3e^{-1}]\ldots.$

$u_n = e^{-n}[n \times (1-e^{-1}) + 2 - 3e^{-1}]$. En multipliant membre à membre on aura :

$P_{1,n} = e^{-(1+2+3+..+n)}[(1+2+3+..+n) \times$ *1−e−1+n2−3e−1*

or $1+2+3+..+n = \frac{n(n+1)}{2}$ donc

$P_{1,n} = e^{-\frac{n(n+1)}{2}}\left[\frac{n(n+1)}{2}(1-e^{-1}) + n(2-3e^{-1})\right]$.

<u>Exercice 50 :</u> Soit n un entier naturel non nul.

On définit la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}dx$.

1. Démontrer que I_n est bien défini et positif pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Calculer I_1.

3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = \frac{1}{e} - (n+1)I_n$.

4. Calculer I_2 et I_3.

5. En déduire $K = \int_0^1(-x^3 + 2x^2 - x)e^{-x}dx$.

<u>Correction :</u>

1. La fonction $x \to x^n e^{-x}$ est continue (produit de fonctions continues) et positive sur [0 ; 1] donc I_n est bien défini et positif pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. $I_1 = \int_0^1 x^1 e^{-x}dx = \int_0^1 xe^{-x}dx = [-xe^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}dx = [-(x+1)e^{-x}]_0^1 = 1 - \frac{2}{e}$.

3. Démontrons que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = \frac{1}{e} - (n+1)I_n$: $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}e^{-x}dx = [-x^{n+1}e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)x^n e^{-x}dx$; $I_{n+1} = \frac{1}{e} - (n+1)I_n$.

4. $I_2 = \frac{1}{e} - (1+1)I_1 = \frac{1}{e} - 2\left(1 - \frac{2}{e}\right) = 2 - \frac{5}{e}$; $I_3 = 6 - \frac{16}{e}$.

5. Déduisons $K = \int_0^1(-x^3 + 2x^2 - x)e^{-x}dx$:

$K = -\int_0^1 x^3e^{-x}dx + 2\int_0^1 x^2e^{-x}dx - \int_0^1 xe^{-x}dx = -I_3 + 2I_2 - I_1$ $\quad K = \frac{8}{e} - 3$.

<u>Exercice 51 :</u> Soit n un entier naturel non nul.

On définit la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $\mathrm{I}_n = \int_0^3 x^n e^{-x}dx$.

1. Démontrer que I_n est bien défini et positif pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Calculer I_1.

3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{I}_n = n\mathrm{I}_{n-1} - \frac{3^n}{e^3}$.

4. Calculer I_2 et I_3.

5. En déduire $\mathrm{I} = \int_0^1(x^3 + 2x^2 - 2x)e^{-x}dx$.

<u>Correction :</u> $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $\mathrm{I}_n = \int_0^3 x^n e^{-x}dx$.

1. Démontrer que I_n est bien défini et positif pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\forall\, x \in [0,3]$ $x^n e^{-x} \geq 0$ alors $\forall\, x \in [0,3]$, $\mathrm{I}_n = \int_0^3 x^n e^{x-}dx \geq 0$.

2. $\mathrm{I}_1 = \int_0^3 x^1 e^{-x}dx = [-xe^{-x}]_0^1 + \int_0^3 e^{-x}dx = [(-x-1)e^{-x}]_0^3 = 1 - \frac{4}{e^3}$.

3. $\mathrm{I}_n = \int_0^3 x^n e^x dx =$
$[-x^n e^{-x}]_0^3 + n\int_0^1 x^{n-1}e^{-x}dx = n\mathrm{I}_{n-1} - \frac{3^n}{e^3}$.

4. $\mathrm{I}_2 = 2\mathrm{I}_1 - \frac{3^2}{e^3} = 2 - \frac{8}{e^3} - \frac{3^2}{e^3} = 2 - \frac{17}{e^3}$ et $\mathrm{I}_3 = 3\mathrm{I}_2 - \frac{3^3}{e^3} = 6 - \frac{51}{e^3} - \frac{3^3}{e^3} = 6 - \frac{78}{e^3}$.

5. $\mathrm{I} = \int_0^3 (x^3 + 2x^2 - 2x)e^{-x}dx = \int_0^3 x^3 e^{-x}dx + 2\int_0^3 x^2 e^{-x}dx - 2\int_0^3 xe^{-x}dx = \mathrm{I}_3 + 2\mathrm{I}_2 - 2\mathrm{I}_1 =$
$\mathrm{I} = 8 - \frac{104}{e^3}$.

<u>Exercice 52 :</u> Soit *n* un entier naturel non nul.

On définit la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $\mathrm{I}_n = \int_0^1 x^n e^x dx$.

1. **Démontrer que I_n est bien défini et positif pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.**
2. **Calculer I_1.**
3. **Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,**
$\mathrm{I}_{n+1} = e - (n+1)\mathrm{I}_n$.
4. **Calculer I_2 et I_3.**
5. **En déduire $\mathrm{I} = \int_0^1 (x^3 + 2x^2 - 2x)e^x dx$.**

<u>Correction :</u> $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $\mathrm{I}_n = \int_0^1 x^n e^x dx$.

1. Comme $\forall\, x \in [0,1]\ x^n e^x \geq 0$ alors $\forall\, x \in [0,1]$,
$\mathrm{I}_n = \int_0^1 x^n e^x dx \geq 0$.

2. $\mathrm{I}_1 = \int_0^1 x^1 e^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx =$
$[(x-1)e^x]_0^1 = 1$.

3. $\mathrm{I}_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}e^x dx = [x^{n+1}e^x]_0^1 -$
$(n+1)\int_0^1 x^n e^x dx = e - (n+1)\mathrm{I}_n$.

4. $\mathrm{I}_2 = e - 2\mathrm{I}_1 = e - 2$ et
$\mathrm{I}_3 = e - 3\mathrm{I}_2 = e - 3e + 6 = 6 - 2e$.

5. $\mathrm{I} = \int_0^1 (x^3 + 2x^2 - 2x)e^x dx = \int_0^1 x^3 e^x dx + 2\int_0^1 x^2 e^x dx - 2\int_0^1 xe^x dx = \mathrm{I}_3 + 2\mathrm{I}_2 - 2\mathrm{I}_1 = 0$.

<u>Exercice 53 :</u> On considère $\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^2}dx$ et $\mathrm{J} = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx$.

1. **Déterminer une primitive de la fonction g définie par $g(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$.**
2. **Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $\mathrm{I} = -\frac{1}{1+e} + \mathrm{J}$.**
3. **Montrer que pour tout *x* réel : $\frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$.**
4. **En déduire que $\mathrm{J} = \ln 2 - \ln(1 + e^{-1})$.**
Déterminer I.

<u>Correction :</u>

1. $g(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \Leftrightarrow G(x) = -\frac{1}{1+e^x}$

2. **Montrons que $\mathrm{I} = \frac{-1}{1+e} + \mathrm{J}$:**
$\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^2}dx = \left[\frac{-x}{1+e^x}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx = \frac{-1}{1+e} + \mathrm{J}$

3. **Montrer que pour tout *x* réel : $\frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$:**
$\frac{1}{1+e^x} = \frac{1\times e^{-x}}{(1+e^x)e^{-x}} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

4. **Déduisons que $\mathrm{J} = \ln 2 - \ln(1 + e^{-1})$:**
$x \longmapsto \frac{1}{1+e^x}$ admet pour primitive $-\ln(1 + e^{-x})$, alors
$\mathrm{J} = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx = [-\ln(1 + e^{-x})]_0^1 =$
$\mathrm{J} = \ln 2 - \ln(1 + e^{-1}) = \ln\left(\frac{2}{1+e^{-1}}\right)$.
$\mathrm{I} = \frac{-1}{1+e} + \mathrm{J} = \frac{-1}{1+e} + \ln 2 - \ln(1 + e^{-1}) =$
$\mathrm{I} = \frac{-1}{1+e} + \ln\left(\frac{2}{1+e^{-1}}\right)$.

<u>Exercice 54 :</u> On se propose de calculer l'intégrale : $J = \int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^3}dx$

1. **Calculer $A = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx$ et $B = \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$.**
2. **Déterminer trois nombres réels a, b et c tels que, pour tout nombre réel t positif ou nul, on ait :**
$\frac{1}{(1+t)^2} = a + \frac{bt}{1+t} + \frac{ct}{(1+t)^2}$ (1).
3. **En posant $t = e^x$ dans l'égalité (1), calculer l'intégrale : $I = \int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2}dx$**
4.
a) **A l'aide d'une intégration par parties, exprimer J en fonction de I.**
b) **En déduire la valeur de J. Donner une valeur approchée de J à 10^{-2}.**

<u>Correction :</u> $J = \int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^3}dx$

1. $A = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx = [\ln(1+e^x)]_0^1 = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$
et $B = \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx = \left[\frac{-1}{1+e^x}\right]_0^1 = \frac{-1}{1+e} + \frac{1}{2}$.

2. $\frac{1}{(1+t)^2} = a + \frac{bt}{1+t} + \frac{ct}{(1+t)^2} =$
$\frac{(a+b)t^2 + (2a+b+c)t + a}{(1+t)^2}$.
On identifie $a = 1$, $b = -1$ et $c = -1$.

3. $I = \int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2}dx =$
$\int_0^1 \left[1 - \frac{e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\right]dx = \left[x - \ln(1+e^x) + \frac{1}{1+e^x}\right]_0^1$
$I = \frac{1}{1+e} + \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{2}{1+e}\right)$.

4.

a) $J=\int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^3}dx=\left[\frac{-x}{2(1+e^x)^2}\right]_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{(1+e^x)^2}dx$

$J=\frac{-1}{1+e}+\frac{1}{2}I.$

b) $J=\frac{-1}{1+e}+\frac{1}{2(1+e)}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{1+e}\right).$

Exercice 55 : Pour n entier naturel non nul, soit g_n la fonction définie sur $I=[0;+\infty[$ par :

$g_n(x)=\frac{x^n}{n!}e^{-x}$. Soit a un élémnt non nul fixé dans I.
Pour tout entier naturel n, on pose :
$I_n(a)=\int_0^a g_n(x)dx.$

a) Calculer $I_0(a)$.

b) Montrer que, pour tout x de I et pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $g_n(0)=0$ et $g'_n(x)=g_{n-1}(x)-g_n(x)$.

c) En déduire que, pour tout $n\geq 1$:
$I_n(a)-I_{n-1}(a)=\frac{a^n}{n!}e^{-a}$.

Correction : $g_n(x)=\frac{x^n}{n!}e^{-x}$ et $I_n(a)=\int_0^a g_n(x)dx$

a) $I_0(a)=\int_0^a g_0(x)dx=\int_0^a\left(\frac{x^0}{0!}e^{-x}\right)dx=\int_0^a\left(\frac{x^0}{0!}e^{-x}\right)dx=[-e^{-x}]_0^a=1-e^{-a}.$

b) $\forall\, x\in I=[0;+\infty[,\ g'_n(x)=n\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-x}-\frac{x^n}{n!}e^{-x}=\frac{x^n}{(n-1)!}e^{-x}-\frac{x^n}{n!}e^{-x}$, on déduit que $\forall\, x\in I=[0;+\infty[,\ g'_n(x)=g_{n-1}(x)-g_n(x)$ et $g_n(0)=\frac{0^n}{n!}e^{-0}=0.$

c) On sait que $g'_n(x)=g_{n-1}(x)-g_n(x)\Leftrightarrow \int_0^a g'_n(x)dx=\int_0^a g_{n-1}(x)dx-\int_0^a g_n(x)dx\Leftrightarrow \left[-\frac{x^n}{n!}e^{-x}\right]_0^a=\int_0^a g_{n-1}(x)dx-\int_0^a g_n(x)dx$, alors cela se déduit aisément $I_n(a)-I_{n-1}(a)=\frac{a^n}{n!}e^{-a}$.

Exercice 56 :

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par : $u_n=\int_{n-1}^n 2^x\,dx$.

a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique dont on calculera la raison et le premier terme.

b) Interpréter graphiquement ce résultat.

2. On désigne par $S_{1,n}$ la somme $u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$. Calculer $S_{1,n}$ en fonction de n :

3. Calculer la limite de $S_{1,n}$ et interpréter graphiquement le résultats obtenu.

Correction :

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}/\ u_n=\int_{n-1}^n 2^x\,dx=\int_{n-1}^n e^{x\ln x}\,dx.$

a) $u_n=\int_{n-1}^n 2^x\,dx=\left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_{n-1}^n=\frac{2^n-2^{n-1}}{\ln 2}$ et $u_{n+1}=\int_n^{n+1}2^x\,dx=\left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_n^{n+1}=\frac{2^{n+1}-2^n}{\ln 2}=\frac{2(2^n-2^{n-1})}{\ln 2}=\frac{2}{\ln 2}u_n$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $q=\frac{2}{\ln 2}$ et du premier terme $u_1=\frac{1}{\ln 2}$. Donc $u_n=\frac{1}{\ln 2}\left(\frac{2}{\ln 2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2^{1-n}(\ln 2)^n}$.

b) $u_n=\frac{1}{\ln 2}\left(\frac{2}{\ln 2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2^{1-n}(\ln 2)^n}>0$ et
$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2^{-n}(\ln 2)^{n+1}}-\frac{1}{2^{1-n}(\ln 2)^n}=$
$u_{n+1}-u_n=\frac{2-\ln 2}{2^{1-n}(\ln 2)^{n+1}}>0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

2. $S_{1,n}=\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{1-\left(\frac{2}{\ln 2}\right)^n}{1-\frac{2}{\ln 2}}=\frac{1}{\ln 2-2}\left[1-\left(\frac{2}{\ln 2}\right)^n\right].$

3. $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{2}{\ln 2}\right)^n=+\infty$ alors $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}S_{1,n}=+\infty$ donc $(S_{1,n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est divergente.

Exercice 57 : On pose $\mathrm{I}_n=\int_0^1\frac{e^{nx}}{1+e^x}dx$, où n est un entier naturel.

1. Calculer I_1 et $\mathrm{I}_0+\mathrm{I}_1$ en déduire I_0.

2. Calculer $\mathrm{I}_n+\mathrm{I}_{n+1}$ en fonction de n, $n\in\mathbb{N}^*$.

3. Montrer que sans calcul que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

4.

a) Prouver pour tout élément x de $[0;1]$, $\frac{e^{nx}}{e+1}\leq\frac{e^{nx}}{e^x+1}\leq\frac{1}{2}e^{nx}$.

b) En déduire l'encadrement de I_n.

c) Calculer $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}(\mathrm{I}_n)=$ et $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{\mathrm{I}_n}{e^n}\right)=$.

Correction : $\mathrm{I}_n=\int_0^1\frac{e^{nx}}{1+e^x}dx$,.

1. $\mathrm{I}_1=\int_0^1\frac{e^x}{1+e^x}dx=[\ln(1+e^x)]_0^1=\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$;
$\mathrm{I}_0+\mathrm{I}_1=\int_0^1\frac{1+e^x}{1+e^x}dx=\int_0^1 dx=[x]_0^1=1$ et
$\mathrm{I}_0+\mathrm{I}_1=\int_0^1\frac{1+e^x}{1+e^x}dx=1\Leftrightarrow\mathrm{I}_0=1-\ln\left(\frac{1+e}{2}\right).$

2. $\mathrm{I}_n+\mathrm{I}_{n+1}=\int_0^1\frac{e^{nx+x}+e^{nx}}{1+e^x}dx=\int_0^1\frac{e^{nx}(1+e^x)}{1+e^x}dx=\int_0^1 e^{nx}dx=\left[\frac{1}{n}e^{nx}\right]_0^1=\frac{1}{n}(e^n-1)$ avec $n\in\mathbb{N}^*$.

3. Comme $\mathrm{I}_0>0$ et $\mathrm{I}_0+\mathrm{I}_1=1>0$ alors la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

4.

a) $0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq e^x \leq e \Leftrightarrow\ 2 \leq e^x + 1 \leq$
$e + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{e+1} \leq \frac{1}{e^x+1} \leq \frac{1}{2}$ en multipliant par e^{nx} on aura
$\frac{e^{nx}}{e+1} \leq \frac{e^{nx}}{e^x+1} \leq \frac{1}{2}e^{nx}$.

b) $\frac{e^{nx}}{e+1} \leq \frac{e^{nx}}{e^x+1} \leq \frac{1}{2}e^{nx} \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{e^{nx}}{e+1}dx \leq$
$\int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x+1}dx \leq \int_0^1 \frac{1}{2}e^{nx}dx$ or
$\int_0^1 \frac{e^{nx}}{e+1}dx = \frac{1}{e+1}\int_0^1 e^{nx}\,dx = \frac{1}{e+1}\left[\frac{1}{n}e^{nx}\right]_0^1 = \frac{e^n-1}{ne+n}$ et
$\frac{1}{2}\int_0^1 e^{nx}\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n}e^{nx}\right]_0^1 = \frac{1}{2n}(e^n - 1)$.
$\Leftrightarrow \frac{e^n}{ne+n} \leq \mathrm{I}_n \leq \frac{e^n-1}{2n}$.

c) Selon le Théorème de gendarme
$\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \left(\frac{e^n}{ne+n}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \left(\frac{e^n-1}{2n}\right) = +\infty$ alors
$\lim\limits_{n \mapsto +\infty} (\mathrm{I}_n) = +\infty$ et $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \left(\frac{\mathrm{I}_n}{e^n}\right) = \lim\limits_{n \mapsto +\infty} \left(\frac{\frac{1}{2}e^n}{e^n}\right) = \frac{1}{2}$.

Equations différentielles

Louange à Allah et que la prière et le salut soient sur le serviteur et Messager d'Allah, Muhammad, le meilleur que l'humanité est porté (malheur à ceux qui l'ont insultés et mentis sur lui.), sa famille et ses Compagnons.
Gloire à Dieu, mon Maitre Qui m'a tout donné et continue à me donner. Je n'ai de savoir de ce qu'Allah (soub hana wat tala), Le Tout Miséricordieux m'avait offert.
Seigneur pardonne nos péchés, fais-nous miséricorde, accepte nos bonnes œuvres et bénit nos actions. Ta parole est véridique.
Louange à Allah, Qui de Sa Grace, j'avais pu proposer cette œuvre Qui sans Lui, je ne serais pas à ce niveau. « Gloire et pureté à Toi, ô Allah, et à Toi la louange. Que ton Nom soit béni et Ta Majesté soit élevée, et il n'y a pas d'autre divinité [digne d'adoration] en dehors de Toi »

ALLAH MERCI

Auteur Moussa Abdoulaye Diallo

SMS 90 10 89 59

Exercices sur les équations différentielles

<u>Exercice 1 :</u> **Résoudre chacune des équations différentielles suivantes, en cherchant une solution particulière de l'´equation du même type que le second membre :**

1. $\boldsymbol{y' - 3y = 2}$
2. $\boldsymbol{y' + 2y = e^{2x}}$
3. $\boldsymbol{y' - 5y = e^{5x}}$
4. $\boldsymbol{y' - y = \sin x}$

<u>Correction 1 :</u> Pour les équations de cet exercice, on cherche tout d'abord les solutions de **l'équation homogène** en utilisant la suite des opérations usuelles conduisant au résultat, puis on cherche **une solution particulière** de l'´equation complète qui est du même type que le second membre. Les solutions sont obtenues dans IR.

1. $\boldsymbol{y' - 3y = 2}$

- **L'équation homogène s'écrit :** $y = \mathrm{C}e^{3x}$.
- L'équation possède **une solution constante** $\boldsymbol{y_0 = k}$, qui vérifie $-3K = 2$ soit $y_0 = -\frac{2}{3}$
- **Les solutions de l'équation** sont : $y = \mathrm{C}e^{3x} - \frac{2}{3}$, où **C** est une constante quelconque.

2. $\boldsymbol{y' + 2y = e^{2x}}$

- **L'équation homogène s'écrit :** $y = \mathrm{C}e^{-2x}$.
- L'équation possède **une solution de la forme** $\boldsymbol{y_0 = ke^{2x}}$, qui vérifie $2ke^{2x} + 2ke^{2x} = e^{2x}$ soit $y = \frac{1}{4}e^{2x}$
- **Les solutions de l'équation** sont : $y = \mathrm{C}e^{-2x} + \frac{1}{4}e^{2x}$, où **C** est une constante quelconque.

3. $\boldsymbol{y' - 5y = e^{5x}}$

- **L'équation homogène s'écrit :** $y = \mathrm{C}e^{5x}$.
- L'équation possède **une solution de la forme** $\boldsymbol{y_0 = kxe^{5x}}$, qui vérifie $ke^{5x} + 5kxe^{5x} - 5kxe^{5x} = e^{5x}$ soit $y = xe^{5x}$
- **Les solutions de l'équation** sont : $y = \mathrm{C}e^{5x} + xe^{5x}$, où **C** est une constante quelconque.

4. $\boldsymbol{y' - y = \sin x}$

- **L'équation homogène s'écrit :** $y = \mathrm{C}e^{x}$.
- L'équation possède **une solution de la forme** $\boldsymbol{y_0 = A\cos x + B\sin x}$, qui vérifie $\boldsymbol{-A\sin x + B\cos x - A\cos x - B\sin x = \sin x}$ soit $y = -\frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$
- **Les solutions de l'équation** sont : $y = \mathrm{C}e^{x} - \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$, où **C** est une constante quelconque.

<u>Exercice 2 :</u> **Résoudre chacune des équations différentielles :**

1. $\boldsymbol{y'' - 5y' + 6y = 0}$
2. $\boldsymbol{y'' - 3y' = 0}$
3. $\boldsymbol{y'' - 2y' + 2y = 0}$

<u>Correction 2 :</u>

1. $\boldsymbol{y'' - 5y' + 6y = 0}$

L'équation caractéristique $r^2 - 5r + 6 = 0$ a pour racines 2 et 3. Les solutions de l'équation sont donc $y = Ae^{2x} + Be^{3x}$, où A et B sont des constantes réelles quelconques.

2. $\boldsymbol{y'' - 3y' = 0}$

L'équation caractéristique $r^2 - 3r = 0$ a pour racines 0 et 3. Les solutions de l'équation sont donc $y = A + Be^{3x}$, où A et B sont des constantes réelles quelconques.

3. $\boldsymbol{y'' - 2y' + 2y = 0}$

L'équation caractéristique $r^2 - 2r + 2 = 0$ a pour racines complexes $1 + i$ et $1 - i$. Les solutions de l'équation sont donc $y = Ae^{x}\cos x + Be^{3x}\sin x$, où A et B sont des constantes réelles quelconques.

<u>Exercice 3 :</u> **Résoudre chacune des équations différentielles :**

1. $\boldsymbol{y'' + 2y' - 8y = e^{3x}}$
2. $\boldsymbol{y'' - 3y' - 18y = xe^{4x}}$
3. $\boldsymbol{y'' - 10y' + 41y = \sin x}$
4. $\boldsymbol{y'' + 2y' - 3y = (x+1)e^{x}}$
5. $\boldsymbol{y'' + 4y = \cos 2x}$
6. $\boldsymbol{y'' - 2y' + y = (x+1)e^{x}}$

<u>Correction 3 :</u>

1. **E :** $\boldsymbol{y'' + 2y' - 8y = e^{3x}}$

- **L'équation caractéristique** $r^2 + 2r - 8 = 0$ a pour racines -4 et 2. Les solutions de l'équation homogène sont donc $y = Ae^{-4x} + Be^{2x}$, où A et B sont des constantes réelles quelconques.
- On cherche une solution particulière de l'´equation complète. Comme 3 n'est pas racine du polynôme caractéristique, il en existe une de la forme $\boldsymbol{y_0 = ke^{3x}}$.

En remplaçant dans l'équation **E**, on obtient $y_0 = \frac{1}{7}e^{3x}$

- **Les solutions de l'équation E** sont : $y = Ae^{-4x} + Be^{2x} + \frac{1}{7}e^{3x}$, où A et B sont des constantes réelles quelconques.

2. **E :** $\boldsymbol{y'' - 3y' - 18y = xe^{4x}}$

- **L'équation caractéristique** $r^2 - 3r - 18 = 0$ a pour racines -3 et 6. Les solutions de l'équation homogène sont donc $y = Ae^{-3x} + Be^{6x}$, où A et B sont des constantes réelles quelconques.
- On cherche une solution particulière de l'´equation complète. Comme 4 n'est pas racine du polynôme caractéristique, il en existe une de la forme $\boldsymbol{y_0 = (kx + H)e^{4x}}$. En remplaçant dans l'équation **E**, on obtient $y_0 = -\frac{1}{196}(14x + 5)e^{4x}$
- **Les solutions de l'équation E** sont : $y = Ae^{-3x} + Be^{6x} - \frac{1}{196}(14x + 5)e^{4x}$, où A et B sont des constantes réelles quelconques.

3. E : $\boldsymbol{y'' - 10y' + 41y = \sin x}$

- **L'équation caractéristique** $r^2 - 10r + 41 = 0$ a pour racines complexes $5 + 4i$ et $5 - 4i$. Les solutions de l'équation homogène sont donc $y = Ae^{5x}\cos 4x + Be^{5x}\sin 4x$, où A et B sont des constantes réelles quelconques.
- On cherche une solution particulière de l'équation complète. Le second membre $\sin x$ est la partie imaginaire de e^{xi}. Comme i n'est pas racine du polynôme caractéristique, il existe une solution particulière de la forme, $\boldsymbol{y_0 = k\cos x + H\sin x}$. En remplaçant dans l'équation **E**, on obtient $y_0 = \frac{1}{170}\cos x + \frac{2}{85}\sin x$
- **Les solutions de l'équation E** sont : $y = Ae^{5x}\cos 4x + Be^{5x}\sin 4x + \frac{1}{170}\cos x + \frac{2}{85}\sin x$, où A et B sont des constantes réelles quelconques.

4. E : $\boldsymbol{y'' + 2y' - 3y = (x + 1)e^x}$

- **L'équation caractéristique** $r^2 + 2r - 3 = 0$ a pour racines 1 et -3. Les solutions de l'équation homogène sont donc $y = Ae^x + Be^{-3x}$, où A et B sont des constantes réelles quelconques.
- On cherche une solution particulière de l'équation complète. Comme 1 n'est pas racine du polynôme caractéristique, il existe une solution particulière de la forme, $\boldsymbol{y_0 = (kx^2 + Hx)e^x}$. En remplaçant dans l'équation **E**, on obtient $y_0 = \frac{1}{16}(2x^2 + 3x)e^x$
- **Les solutions de l'équation E** sont : $y = Ae^x + Be^{-3x} + \frac{1}{16}(2x^2 + 3x)e^x$, où A et B sont des constantes réelles quelconques.

5. E : $\boldsymbol{y'' + 4y = \cos 2x}$

- **L'équation caractéristique** $r^2 + 4 = 0$ a pour racines complexes $2i$ et $-2i$. Les solutions de l'équation homogène sont donc $y = A\cos 2x + B\sin 2x$, où A et B sont des constantes réelles quelconques.
- On cherche une solution particulière de l'équation complète. Le second membre $\cos x$ et que $2i$ est racine du polynôme caractéristique, il existe une solution particulière de la forme, $\boldsymbol{y_0 = kx\cos 2x + Hx\sin 2x}$. En remplaçant dans l'équation **E**, on obtient $y_0 = \frac{1}{4}x\sin x$.
- **Les solutions de l'équation E** sont : $y = A\cos 2x + B\sin 2x + \frac{1}{4}x\sin x$, où A et B sont des constantes réelles quelconques.

6. E : $\boldsymbol{y'' - 2y' + y = (x + 1)e^x}$

- **L'équation caractéristique** $r^2 - 2r + 1 = 0$ a pour racine double 1. Les solutions de l'équation homogène sont donc $y = (Ax + B)e^x$, où A et B sont des constantes réelles quelconques.
- On cherche une solution particulière de l'équation complète. Comme 1 est racine double du polynôme caractéristique, il existe une solution particulière de la forme, $\boldsymbol{y_0 = (kx^3 + Hx^2)e^x}$. En remplaçant dans l'équation **E**, on obtient $y_0 = \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)e^x$.
- **Les solutions de l'équation E** sont : $y = \left(Ax + B + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)e^x$, où A et B sont des constantes réelles quelconques.

<u>**Exercice 4 :**</u> **Résoudre chacune des équations différentielles :**

1. $\boldsymbol{y'' - 2y' + 2y = 1}$
2. $\boldsymbol{y'' - 2y' + 2y = \cos 2x}$
3. $\boldsymbol{y'' - 2y' + 2y = \sin^2 x}$

<u>**Correction 4 :**</u> **L'équation caractéristique** $r^2 - 2r + 2 = 0$ a pour racines complexes $1 + i$ et $1 - i$. Les solutions de l'équation homogène sont donc $y = Ae^x\cos x + Be^x\sin x$, où A et B sont des constantes réelles quelconques.

1. E : $\boldsymbol{y'' - 2y' + 2y = 1}$. L'équation possède une solution constante $y_0 = \frac{1}{2}$. Donc **Les solutions de l'équation E** sont : $y = Ae^x\cos x + Be^x\sin x + \frac{1}{2}$, où A et B sont des constantes réelles quelconques.

2. E : $\boldsymbol{y'' - 2y' + 2y = \cos 2x}$. Le second membre $\cos 2x$ est la partie réelle de e^{2xi} et que $2i$ n'est pas racine du polynôme caractéristique, il existe une solution particulière de la forme, $\boldsymbol{y_0 = k\cos 2x + H\sin 2x}$. L'équation possède une solution $y_0 = -\frac{1}{10}\cos 2x - \frac{1}{5}\sin 2x$. **Les solutions de l'équation E** sont : $y = Ae^x\cos x + Be^x\sin x - \frac{1}{10}\cos 2x - \frac{1}{5}\sin 2x$, où A et B sont des constantes réelles quelconques.

3. E : $\boldsymbol{y'' - 2y' + 2y = \sin^2 x}$, on aura $\boldsymbol{\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x}$. D'après le principe de superposition des solutions, une solution particulière est donnée par

$y_0 = \frac{1}{2}\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{10}\cos 2x - \frac{1}{5}\sin 2x\right)$. **Les solutions de l'équation E** sont : $y = Ae^x \cos x + Be^x \sin x + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{10}\cos 2x - \frac{1}{5}\sin 2x\right)$, où A et B sont des constantes réelles quelconques.

<u>Exercice 5 :</u> Soit (E) l'équation différentielle : $\boldsymbol{y'' - 2y' + y = -xe^x}$.

Déterminer la solution générale de (E).

<u>Correction 5 :</u>

$(\boldsymbol{E})$ **:** $\boldsymbol{y'' - 2y' + y = -xe^x}$.
Déterminer la solution générale de (E).
L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = (r-1)(r-1)$, les solutions de l'équation homogène sont $y(x) = (\mathrm{A}x + \mathrm{B})e^x$. On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 1 : $y(x) = (ax+b)e^x$. On remplace dans l'équation différentielle et on trouve $a = 1$ et $b = 0$; d'où $y(x) = xe^x$. En résumé les solutions sur R sont de la forme $y(x) = (\mathrm{A}x + \mathrm{B})e^x + xe^x$.

<u>Exercice 6 :</u> Soit (E) l'équation différentielle : $\boldsymbol{y'' + y' - 2y = 9e^x - 2}$.

Déterminer la solution générale de (E).

<u>Correction 6 :</u>

$(\boldsymbol{E})$ **:** $\boldsymbol{y'' + y' - 2y = 9e^x - 2}$.
Déterminer la solution générale de (E).

L'équation caractéristique est $r^2 + r - 2 = (r+2)(r-1)$, les solutions de l'équation homogène sont $y(x) = \mathrm{A}e^x + \mathrm{B}e^{-2x}$. On cherche une solution particulière. On applique le principe de superposition. Il est clair que $y_1(x) = 1$ est solution de $y'' + y' - 2y = -2$. Et on sait qu'une solution particulière de $y'' + y' - 2y = 9e^x$est sous la forme d'un polynôme de degré 2 : $y(x) = axe^x$. On remplace dans l'équation différentielle et on trouve $a = 3$ d'où $y_2(x) = 3xe^x$. En résumé les solutions sur R sont de la forme $y(x) = \mathrm{A}e^x + \mathrm{B}e^{-2x} + 3xe^x + 1$.

<u>Exercice 7 :</u> On considère (E) l'équation différentielle: $\boldsymbol{y'' - 2y' + y = -x + 3}$.

1. **Vérifier que la fonction g définie sur IR par $g(x) = -x + 1$ est une solution de (E).**
2.
a) **Démontrer qu'une fonction h deux fois dérivable sur IR est solution de (E) si et seulement si la fonction $h - g$ est solution de l'équation différentielle (F) : $y'' - 2y' + y = 0$.**
b) **Résoudre l'équation (F) dans IR.**
c) **En déduire l'ensemble des solutions de (E).**
d) **Déterminer la solution particulière de (E) vérifiant les conditions $h(0) = 0$ et $h'(0) = -1$.**

<u>Correction :</u> (E) : $\boldsymbol{y'' - 2y' + y = -x + 3}$.

1. $\forall\, x \in$ IR, $g(x) = -x + 1 \Leftrightarrow g'(x) = -1 \Leftrightarrow g''(x) = 0$.
$g \in S_{(\mathrm{E})} \Leftrightarrow g''(x) - 2g'(x) + g(x) = -x + 3 \Leftrightarrow 0 + 2 - x + 1 = -x + 3 \Leftrightarrow 0 = 0$, d'où $\forall\, x \in$ IR $g(x) = -x + 1$ est une solution de (E).
2.
a) $h \in S_{(\mathrm{E})} \Leftrightarrow h''(x) - 2h'(x) + h(x) = -x + 3$
Or cette hypothèse sera vérifier à partir de :
$(\boldsymbol{h} - \boldsymbol{g}) \in S_{(\mathbf{F})} \Leftrightarrow (h-g)''(x) - 2(h-g)'(x) + (h-g)(x) = 0$ ce qui donne
$h''(x) - 2h'(x) + h(x) = g''(x) - 2g'(x) + g(x)$
Or $g \in S_{(\mathrm{E})} \Leftrightarrow g''(x) - 2g'(x) + g(x) = -x + 3$
donc $h''(x) - 2h'(x) + h(x) = -x + 3$ ce qui prouve que h est une solution de l'équation **(E).**
b) $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2 = 0$, a pour racine double 1. Les solutions de l'équation (F) sont de la forme donc $y = (\mathrm{A} + x\mathrm{B})e^x$, où A et B sont des constantes réelles quelconques.
c) Les solutions de l'équation (E) sont de la forme $h(x) = (\mathrm{A} + x\mathrm{B})e^x - x + 1$, où A et B sont des constantes réelles quelconques.
d) $\forall\, x \in$ IR, $h(x) = (\mathrm{A} + x\mathrm{B})e^x - x + 1$
$\forall\, x \in$ IR, $h'(x) = (\mathrm{A} + x\mathrm{B} + \mathrm{B})e^x - 1$
la solution particulière de (E) vérifiant les conditions
$\begin{cases} h(0) = 0 \\ h'(0) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{A} + 1 = 0 \\ \mathrm{A} + \mathrm{B} - 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{A} = -1 \\ \mathrm{B} = 1 \end{cases}$
$\forall\, x \in$ IR, $h(x) = (-1 + x)e^x - x + 1$
$\forall\, x \in$ IR, $h(x) = -(1-x)e^x + (1-x)$
$\forall\, x \in$ IR, $h(x) = (1-x)(1-e^x)$

<u>Exercice 8 :</u> On considère (E) l'équation différentielle: $\boldsymbol{y'' + y' - 2y = -3e^x}$.

1. **Déterminer le réel a pour que la fonction g définie sur IR par $g(x) = axe^x$ soit solution de (E), l'équation différentielle.**
2. **Démontrer qu'une fonction h deux fois dérivable sur IR est solution de (E) si et seulement si la fonction $h - g$ est solution de l'équation différentielle (F) : $y'' + y' - 2y = 0$.**
3. **Résoudre l'équation (F) dans IR.**
4. **En déduire l'ensemble des solutions de (E).**

5. Déterminer la solution particulière de (E) vérifiant les conditions $h(0) = 1$ et $h'(0) = 0$.

Correction : (E) : $y'' + y' - 2y = -3e^x$.

(F) : $y'' + y' - 2y = 0$.

3. $\forall\, x \in$ IR, $g(x) = axe^x \Leftrightarrow g'(x) = a(x+1)e^x \Leftrightarrow g''(x) = a(x+2)e^x$.

$g \in S_{(E)} \Leftrightarrow g''(x) + g'(x) - 2g(x) = a(x+1)e^x + a(x+2)e^x - 2axe^x = -3e^x \Leftrightarrow a(2x+3-2x) = -3 \Leftrightarrow a = -1$, d'où $\forall\, x \in$ IR $g(x) = -xe^x$.

4. $h \in S_{(E)} \Leftrightarrow h''(x) + h'(x) - 2h(x) = -3e^x$

Or cette hypothèse sera vérifier à partir de :

$(h-g) \in S_{(F)} \Leftrightarrow (h-g)''(x) + (h-g)'(x) - 2(h-g)(x) = 0$ ce qui donne

$h''(x) + h'(x) - 2h(x) = g''(x) + g'(x) - 2g(x)$

Or $g \in S_{(E)} \Leftrightarrow g''(x) + g'(x) - 2g(x) = -3e^x$

donc $h''(x) + h'(x) - 2h(x) = -3e^x$ ce qui prouve que h est une solution de l'équation (**E**).

5. Résoudre l'équation (F) dans IR.

L'équation caractéristique $r^2 + r - 2 = 0$, $\Delta = 9$, a pour racines -2 et 1. Les solutions de l'équation (F) sont donc $y = \mathrm{A}e^x + \mathrm{B}e^{-2x}$, où A et B sont des constantes réelles quelconques.

4. l'ensemble des solutions de (E) :

Les solutions de l'équation (E) sont de la forme $h(x) = (\mathrm{A} - x)e^x + \mathrm{B}e^{-2x}$, où A et B sont des constantes réelles quelconques.

$\forall\, x \in$ IR, $h(x) = (\mathrm{A} - x)e^x + \mathrm{B}e^{-2x}$

$\forall\, x \in$ IR, $h'(x) = (\mathrm{A} - x - 1)e^x - 2\mathrm{B}e^{-2x}$

5. la solution particulière de (E) vérifiant les conditions $\begin{cases} h(0) = 1 \\ h'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{A} + \mathrm{B} = 1 \\ \mathrm{A} - 2\mathrm{B} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{A} = 1 \\ \mathrm{B} = 0 \end{cases}$ est :

$\forall\, x \in$ IR, $h(x) = (1 - x)e^x$.

Exercice 9 :

2. Résoudre (E) l'équation différentielle du second ordre : $y'' - 6y' + 5y = 0$.

3. On lance trois (3) fois un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On appelle a, b et c les résultats des premier, deuxième et troisième jets du dé. Quelle est la probabilité pour que les solutions de l'équation différentielle:(F) $ay'' + by' + cy = 0$ soient les fonctions de la forme :

$x \mapsto (\mathrm{A} + \mathrm{B}x)e^{rx}$;

$x \mapsto \mathrm{A}e^{r_1 x} + \mathrm{B}e^{r_2 x}$;

$x \mapsto [\mathrm{A}\cos(\beta x) + \mathrm{B}\sin(\beta x)]e^{\alpha x}$.

Correction :

1. (E) $y'' - 6y' + 5y = 0$

$\mathrm{E_c}$: $r^2 - 6r + 5 = 0$

$\Delta = 36 - 20 = 16 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} = 4$; $\begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = 5 \end{cases}$ les solutions de générale(E) sont de la forme : $y = \mathrm{A}e^x + \mathrm{B}e^{5x}$.

2. la probabilité pour que les solutions de:(F) $ay'' + by' + cy = 0$ soient les fonctions de la forme : triplet $(a,\ b, c)$

$\mathrm{E_c}$: $ar^2 + br + c = 0$, $\Delta = b^2 - 4ac$, $card(\Omega) = 6^3$

Les différentes valeurs de $4ac$:

$4a$ \ c	1	2	3	4	5	6
4	4	8	12	16	20	24
8	8	16	24	32	40	48
12	12	24	36	48	60	72
16	16	32	48	64	80	96
20	20	40	60	80	100	120
24	24	48	72	96	120	144

Les différentes valeurs de b^2:

b^2	1	4	9	16	25	36

Nous aurons $\mathrm{card}(\Omega) = 6^3 = 216$ triplets.

$x \mapsto (\mathrm{A} + \mathrm{B}x)e^{rx}$: soit A cet événement :

$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Leftrightarrow b^2 = 4ac$,

Pour $b^2 = 1$ il ya 0 triplet

Pour $b^2 = 4$ il ya 1 triplet

Pour $b^2 = 9$ il ya 0 triplet

Pour $b^2 = 16$ il ya 3 triplets

Pour $b^2 = 25$ il ya 0 triplet

Pour $b^2 = 36$ il ya 1 triplet

$\mathrm{card(A)} = 5 \Leftrightarrow p(\mathrm{A}) = \frac{\mathrm{card(A)}}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{5}{216} = 0{,}0231$.

$x \mapsto \mathrm{A}e^{r_1 x} + \mathrm{B}e^{r_2 x}$ soit B cet événement :

$\Delta = b^2 - 4ac > 0 \Leftrightarrow b^2 > 4ac$,

Pour $b^2 = 1$ il ya 0 triplet

Pour $b^2 = 4$ il ya 0 triplet

Pour $b^2 = 9$ il ya 3 triplets

Pour $b^2 = 16$ il ya 5 triplets

Pour $b^2 = 25$ il ya 14 triplets

Pour $b^2 = 36$ il ya 16 triplets

$\mathrm{card(B)} = 38 \Leftrightarrow p(\mathrm{B}) = \frac{\mathrm{card(B)}}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{38}{216} = 0{,}1759$.

$x \mapsto [\mathrm{A}\cos(\beta x) + \mathrm{B}\sin(\beta x)]e^{\alpha x}$ soit C cet événement : $\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Leftrightarrow b^2 < 4ac$,

Pour $b^2 = 1$ il ya 36 triplets

Pour $b^2 = 4$ il ya 35 triplets

Pour $b^2 = 9$ il ya 33 triplets

Pour $b^2 = 16$ il ya 28 triplets

Pour $b^2 = 25$ il ya 22 triplets

Pour $b^2 = 36$ il ya 19 triplets

$\text{card}(C) = 173 \Leftrightarrow p(C) = \frac{\text{card}(C)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{173}{216} = 0{,}80.$

$\boldsymbol{f(x) = |1+x|e^{-3x}}$.

Exercice 10 :

1. Résoudre (E) l'équation différentielle du second ordre : $y'' + 2y' + y = 0$.

2. Déterminer la solution particulière de (E) vérifiant $h(0) = 1$ et $h(1) = 2e^{-1}$.

Correction :

1. (E) $y'' + 2y' + y = 0$

$E_c : r^2 + 2r + 1 = 0$, $\Delta = 4 - 4 = 4 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} = 0$;

$r_1 = -1$ les solutions de générale(E) sont de la forme : $y = (Ax + B)e^{-x}$

2. $h \in S_{(E)} \Leftrightarrow \boldsymbol{h(x)} = (Ax + B)e^{-x}$

$\boldsymbol{h(0)} = B = 1$ et $\boldsymbol{h(1)} = (A + B)e^{-1} = \boldsymbol{2e^{-1}} \Leftrightarrow A + B = 2 \Leftrightarrow A = 1$. D'où $\boldsymbol{h(x)} = (x + 1)e^{-x}$.

Exercice 11 : Soit (E) l'équation différentielle du second ordre : $ay'' + by' + cy = 3e^{-2x}$ où a, b et c sont des nombres réels tels que :

$a, 4b, -3c - 1$ sont des termes consécutifs d'une suite géométrique ;

$-c, a, b$ sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique à termes positifs ;

1. Déterminer les réels a, b et c pour que la fonction g définie sur IR par $g(x) = e^{-2x}$ soit solution de (E).

2. Soit (E_0) : $2y'' + y' - 3y = 0$.

Montrer que si f est une solution de (E_0) alors $h = |f|$ est aussi solution de (E_0).

3. Résoudre l'équation différentielle (E_0).

4. Déterminer la solution f de cette équation, définie sur IR et qui vérifie les conditions $f(0) = -\frac{2}{3}$ et $f'(0) = 1$.

5. Montrer que $h(x) = \frac{2}{3}e^{-3x/2}$.

Correction : (E) : **$ay'' + by' + cy = 3e^{-2x}$ où a, b et c sont des nombres réels tels que :**

1. $a, 4b, -c - 1$ sont des termes consécutifs d'une suite géométrique $\Leftrightarrow \frac{4b}{a} = \frac{-c-1}{4b} \Leftrightarrow 16b^2 = -3ac - a$

$-c, a, b$ sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique à termes positifs $\Leftrightarrow b - a = a + c \Leftrightarrow 2a = b - c$; $\forall\, x \in$ IR, $g(x) = \boldsymbol{e^{-2x}} \Leftrightarrow$ $g'(x) = -2\boldsymbol{e^{-2x}} \Leftrightarrow g''(x) = 4\boldsymbol{e^{-2x}}$.

$g \in S_{(E)} \Leftrightarrow ag''(x) + bg'(x) + cg(x) = 3\boldsymbol{e^{-2x}} \Leftrightarrow$ $4a - 2b + c = 3$.

$$\begin{cases} 16b^2 = -3ac - a \\ 2a = b - c \\ 4a - 2b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16b^2 = -3ac - a \\ 4a - 2b = -2c \\ 4a - 2b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 16b^2 = -3ac - a \\ 4a - 2b = -2c \\ -2c + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16b^2 = 9a - a \\ 4a - 2b = 6 \\ c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -3 \end{cases}$$

2. Soit (E_0) : $2y'' + y' - 3y = 0$.

$f \in S_{(E_0)} \Leftrightarrow 2f''(x) + f'(x) - 3f(x) = 0 \Leftrightarrow$ $-2f''(x) - f'(x) + 3f(x) = 0 \Leftrightarrow 2(-f)''(x) + (-f)'(x) - 3(-f)(x) = 0$ d'où $(-f) \in S_{(E_0)}$.

Comme

$$\boldsymbol{h = |f|} = \begin{cases} \boldsymbol{f \text{ sur tout intervalle où }} f(x) \geq 0 \\ \boldsymbol{-f \text{ sur tout intervalle où }} f(x) \leq 0 \end{cases}.$$

On en déduit que $h = |f|$ est aussi solution de (E_0).

3. Résoudre l'équation différentielle (E_0) :

$E_c : 2r^2 + r - 3 = 0$

$\Delta = 1 + 24 = 25 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} = 5$; $\begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = -\frac{3}{2} \end{cases}$ les solutions de générale(E) sont de la forme : $y = Ae^{x} + Be^{-3x/2}$

4. $y = Ae^{x} + Be^{-(3/2)x} \Leftrightarrow y' = Ae^{x} - \frac{3}{2}Be^{-(3/2)x}$, la solution particulière de $(\mathbf{E_0})$ vérifiant les conditions $\begin{cases} f(0) = -\frac{2}{3} \\ f'(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = -\frac{2}{3} \\ 2A - 3B = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 3A + 3B = -2 \\ 2A - 3B = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = -\frac{2}{3} \end{cases}$,

donc $f(x) = -\frac{2}{3}e^{-(3/2)x}$.

5. Comme $\boldsymbol{h = |f| \Leftrightarrow h(x) = |f(x)|} =$ $\left|-\frac{2}{3}e^{-(3/2)x}\right| = \left|\frac{2}{3}\right|e^{-3x/2} = \frac{2}{3}e^{-3x/2}$.

Exercice 12 :

Résoudre dans IR l'équation différentielle (E_0) $y'' - 2y' + y = 0$.

Soit l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + y = x^2 - 4x + 2$. Vérifier que le polynôme h défini sur IR par $h(x) = x^2$ est une solution particulière de (E), c'est-à-dire que, pour tout x de R, $h''(x) - 2h'(x) + h(x) = x^2 - 4x + 2$.

Montrer que si f est solution de (E), c'est-à-dire, si pour tout x réel, $f''(x) - 2f'(x) + f(x) = x^2 - 4x + 2$, alors la fonction g, telle que $g = f - h$, est solution de (E_0).

Réciproquement, montrer que si g est solution de (E_0) alors la fonction f, telle que $f = g + h$, est solution de (E).

En déduire la forme générale des solutions de (E) sur IR.

En déduire une solution ϕ de (E) satisfaisant à $\phi(1) = 1$ et $\phi'(1) = 0$.

Correction :

(E_0) $y'' - 2y' + y = 0.$

E_c : $r^2 - 2r + 1 = 0$, $\Delta = 4 - 4 = 4 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} = 0$;

$r_1 = 1$ les solutions de générale(E_0) sont de la forme : $y = (Ax + B)e^x$.

(E) : $y'' - 2y' + y = x^2 - 4x + 2.$

$\forall x \in IR$ $h(x) = x^2 \Leftrightarrow h'(x) = 2x \Leftrightarrow h''(x) = 2$

$h \in S_{(E)} \Leftrightarrow h''(x) - 2h'(x) + h(x) = 2 - 4x + x^2 = x^2 - 4x + 2$ alors h définie sur IR par $h(x) = x^2$ est une solution particulière de (E).

Si $f \in S_{(E)} \Leftrightarrow f''(x) - 2f'(x) + f(x) = x^2 - 4x + 2$

or $h \in S_{(E)} \Leftrightarrow h''(x) - 2h'(x) + h(x) = x^2 - 4x + 2$

en soustrayant on aura : $f''(x) - 2f'(x) + f(x) - [h''(x) - 2h'(x) + h(x)] = x^2 - 4x + 2 - (x^2 - 4x + 2)$

$[f''(x) - h''(x)] - 2[f'(x) - h'(x)] + [f(x) - h(x)] = 0 \Leftrightarrow (f-h)''(x) - 2(f-h)'(x) + (f-h)(x) = 0$ or $g \in S_{(E_0)} \Leftrightarrow g''(x) - 2g'(x) + g(x) = 0$ c'est-à-dire $(g = f - h) \in S_{(E_0)} \Leftrightarrow (f-h)''(x) - 2(f-h)'(x) + (f-h)(x) = 0$ d'où $g = f - h$, est solution de (E_0).

$f \in S_{(E)} \Leftrightarrow f''(x) - 2f'(x) + f(x) = x^2 - 4x + 2$ c'est-à-dire $(g+h) \in S_{(E)} \Leftrightarrow (g+h)''(x) - 2(g+h)'(x) + (g+h)(x) = x^2 - 4x + 2$ en développant on aura : $g''(x) - 2g'(x) + g(x) + h''(x) - 2h'(x) + h(x) = x^2 - 4x + 2$ or $h''(x) - 2h'(x) + h(x) = x^2 - 4x + 2$ donc $g''(x) - 2g'(x) + g(x) + x^2 - 4x + 2 = x^2 - 4x + 2$ c'est-à-dire $g''(x) - 2g'(x) + g(x) = 0$ d'où g est solution de (E_0)**.**

Comme $f = g + h$ est solution de (E) alors $f(x) = g(x) + h(x)$ les solutions de générale (E) sont de la forme : $f(x) = (Ax + B)e^x + x^2$**.**

$\phi(x) = (Ax + B)e^x + x^2 \Leftrightarrow \phi'(x) = (A + Ax + B$*ex+2x***.**

la solution particulière de (E) vérifiant les conditions

$\begin{cases} \phi(1) = 1 \\ \phi'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A+B)e + 1 = 1 \\ (2A+B)e + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -2e^{-1} \\ B = 2e^{-1} \end{cases}$

$\forall x \in IR$ $\phi(x) = (2e^{-1} - 2e^{-1}x)e^x + x^2$

$\forall x \in IR$ $\phi(x) = 2(1-x)e^x e^{-1} + x^2$

$\forall x \in IR$ $\phi(x) = 2(1-x)e^{x-1} + x^2$

$\forall x \in IR$ $\phi(x) = x^2 - 2(x-1)e^{x-1}$

__Exercice 13 :__ **On considère (E) l'équation différentielle : $y'' - 2y' + y = x^2 - 11$.**

Vérifier que la fonction g définie sur IR par $x^2 + 4x - 5$ est une solution de (E).

Démontrer qu'une fonction h deux fois dérivable sur IR est solution de (E) si et seulement si la fonction $h - g$ est solution de l'équation différentielle (F) : $y'' - 2y' + y = 0$.

Résoudre l'équation (F) dans IR.

En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Déterminer la solution particulière de (E) vérifiant les conditions $h(0) = -5$ et $h'(0) = 5$.

__Correction :__ **(E) : $y'' - 2y' + y = x^2 - 11$.**

$\forall x \in IR, g(x) = x^2 + 4x - 5 \Leftrightarrow$

$g'(x) = 2x + 4 \Leftrightarrow g''(x) = 2$.

$g \in S_{(E)} \Leftrightarrow g''(x) - 2g'(x) + g(x) = x^2 - 11 \Leftrightarrow$

$2 + 2 - 4x - 8 + x^2 + 4x - 5 = x^2 - 11 \Leftrightarrow 0 = 0$,

d'où $\forall x \in IR$ $g(x) = x^2 + 4x - 5$ est solution de (E)

$h \in S_{(E)} \Leftrightarrow h''(x) - 2h'(x) + h(x) = x^2 + 4x - 5$

Or cette hypothèse sera vérifier à partir de :

$(h - g) \in S_{(F)} \Leftrightarrow (h-g)''(x) - 2(h-g)'(x) + (h-g)(x) = 0$ ce qui donne

$h''(x) - 2h'(x) + h(x) = g''(x) - 2g'(x) + g(x)$

Or $g \in S_{(E)} \Leftrightarrow g''(x) - 2g'(x) + g(x) = x^2 + 4x - 5$ donc $h''(x) - 2h'(x) + h(x) = x^2 + 4x - 5$

ce qui prouve que h est une solution de l'équation **(E).**

$r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2 = 0$, a pour racine double 1.

Les solutions de l'équation (F) sont de la forme donc $y = (A + xB)e^x$, où A et B sont des constantes réelles quelconques.

Les solutions de l'équation (E) sont de la forme $h(x) = (A + xB)e^x + x^2 + 4x - 5$, où A et B sont des constantes réelles quelconques.

$\forall x \in IR$, $h(x) = (A + xB)e^x + x^2 + 4x - 5$

$\forall x \in IR$, $h'(x) = (A + xB + B)e^x + 2x + 4$

la solution particulière de (E) vérifiant les conditions

$\begin{cases} h(0) = -5 \\ h'(0) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + 1 = -5 \\ A + B + 4 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \end{cases}$

$\forall x \in IR, h(x) = xe^x + x^2 + 4x - 5$

__Exercice 14 :__ **On considère (E) l'équation différentielle: $y'' - y' - 2y = x - 2$**

Déterminer les réels a et b pour que la fonction g définie sur IR par $g(x) = ax + b$ soit solution de (E), l'équation différentielle.

Démontrer qu'une fonction h deux fois dérivable sur IR est solution de (E) si et seulement si la fonction $h - g$ est solution de l'équation différentielle (F) : $y'' - y' - 2y = 0$.

Résoudre l'équation (F) dans IR.

En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Déterminer la solution particulière de (E) vérifiant les conditions $h(0) = 1$ et $h'(0) = 6$.

__Correction :__ **(E) : $y'' - y' - 2y = x - 2$.**

(F) : $y'' + y' - 2y = 0$.

Déterminons le réel a pour que g définie sur IR par $g(x) = ax + b$ soit solution de (E) : $\forall x \in$ IR, $g(x) = ax + b \Leftrightarrow g'(x) = a \Leftrightarrow g''(x) = 0$.

$g \in S_{(E)} \Leftrightarrow g''(x) + g'(x) - 2g(x) = 0 + a - ax - b = x - 1 \Leftrightarrow -ax + a - b = x - 2 \Leftrightarrow a = -1$ ou $b = 1$, d'où $\forall x \in g(x) = -x + 1$.

$h \in S_{(E)} \Leftrightarrow h''(x) - h'(x) - 2h(x) = x - 2$ Or cette hypothèse sera vérifier à partir de :

$(h - g) \in S_{(F)} \Leftrightarrow (h - g)''(x) + (h - g)'(x) - 2(h - g)(x) = 0$ ce qui donne

$h''(x) - h'(x) - 2h(x) = g''(x) - g'(x) - 2g(x)$

Or $g \in S_{(E)} \Leftrightarrow g''(x) - g'(x) - 2g(x) = x - 2$

donc $h''(x) - h'(x) - 2h(x) = x - 2$ ce qui prouve que h est une solution de l'équation **(E).**

Résoudre l'équation (F) dans IR.

L'équation caractéristique $r^2 - r - 2 = 0$, $\Delta = 9$, a pour racines -1 et 2. Les solutions de l'équation (F) sont donc $y = \mathrm{A}e^{2x} + \mathrm{B}e^{-x}$, où A et B sont des constantes réelles quelconques.

l'ensemble des solutions de (E) : Les solutions de l'équation (E) sont de la forme $h(x) = \mathrm{A}e^{2x} + \mathrm{B}e^{-x} + x - 2$, où A et B sont des constantes réelles quelconques.

$\forall x \in$ IR, $h(x) = \mathrm{A}e^{2x} + \mathrm{B}e^{-x} + x - 2$

$\forall x \in$ IR, $h'(x) = 2\mathrm{A}e^{2x} - \mathrm{B}e^{-x} + 1$

la solution particulière de (E) vérifiant les conditions $\begin{cases} h(0) = 1 \\ h'(0) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{A} + \mathrm{B} = 3 \\ 2\mathrm{A} - \mathrm{B} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{A} = 3 \\ \mathrm{B} = 0 \end{cases}$ est : $\forall x \in$ IR, $h(x) = 3e^{2x} + x - 2$.

<u>Exercice 15 :</u> **On considère (E) l'équation différentielle du second ordre : $y' + y = x - 1$.**

A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^x e^t(t-1)dt$.

Soit u une fonction dérivable sur IR, on pose $g(x) = u(x)e^{-x}$. Montrer que la fonction g est solution de (E) si et seulement si, pour tout x de IR, $u'(x) = (x-1)e^x$.

A l'aide de la question n°2 a), déterminer toutes les fonctions u vérifiant, pour tout x de IR, $u'(x) = (x-1)e^x$.

En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Déterminer la solution particulière de (E) pour laquelle l'image de 1est 0.

<u>**Correction ::**</u>

(E) : $y' + y = x - 1$.

$\int_1^x e^t(t-1)dt = [e^t(t-1)]_1^x - \int_1^x e^t dt = [e^t(t-2)]_1^x = e^x(x-2) + e$.

$$u'(x) = (x-1)e^x \Leftrightarrow u(x) = \int_1^x e^t(t-1)dt$$

$u(x) = e^x(x-2) + e$ donc $g(x) = u(x)e^{-x} = g(x) = x - 2 + e^{1-x} \Leftrightarrow g'(x) = 1 - e^{1-x}$ vérifions cette hypothèse : g est solution de (E) ssi

$g'(x) + g(x) = 1 + e^{1-x} + x - 2 - e^{1-x} = x - 1$

ainsi la fonction g est solution de (E) si et seulement si, pour tout x de IR, $u'(x) = (x-1)e^x$.

On sait $g'(x) + g(x) = x - 1$

$g(x) = u(x)e^{-x} \Leftrightarrow g'(x) = u'(x)e^{-x} - u(x)e^{-x}$

$g'(x) + g(x) = u'(x)e^{-x} - u(x)e^{-x} + u(x)e^{-x} = u'(x)e^{-x} = x - 1 \Leftrightarrow u'(x) = (x-1)e^x$.

l'ensemble des solutions de (E).

Comme g est solution de (E) avec $g(x) = u(x)e^{-x} = e^{-x}[e^x(x-2) + k_1] = (x-2) + k_1e^{-x}$ où k_1 est une constante réelle quelconque ($k_1 = k + e$). Donc les solutions de (E) dont les fonctions $x \mapsto (x-2) + k_1e^{-x}$.

la solution particulière de (E) pour laquelle l'image de 1est 0 : $g(1) = 0$

$g(1) = (1-2) + k_1e^{-1} = 0 \Leftrightarrow k_1 = e$. Donc la solution particulière de (E) pour laquelle l'image de 1 est 0 est $x \mapsto (x-2) + e^{-x+1}$.

<u>Exercice 16 :</u> **On considère (E) l'équation différentielle: $2y' + y = x^2 + 2x - 2$.**

Déterminer les réels a, b et c pour que la fonction g définie sur IR par $g(x) = ax^2 + bx + c$ soit solution de (E), l'équation différentielle.

Démontrer qu'une fonction h une fois dérivable sur IR est solution de (E) si et seulement si la fonction $h - g$ est solution de l'équation différentielle (F) : $2y' + y = 0$.

Résoudre l'équation (F) dans IR.

En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Déterminer la solution particulière de (E) vérifiant $z(0) = 0$.

<u>**Correction :**</u>

(E) : $2y' + y = x^2 + 2x - 2$.

(F) : $2y' + y = 0$.

Déterminons les réels a, b et c pour que g définie sur IR par $g(x) = ax^2 + bx + c$ soit solution de (E) : $\forall x \in$ IR, $g(x) = ax^2 + bx + c \Leftrightarrow g'(x) = 2ax + b$.

$g \in S_{(E)} \Leftrightarrow\ 2g' + g = 4ax + 2b + ax^2 + bx + c = x^2 + 2x - 2 \Leftrightarrow a = 1$, $b = -2$ et $c = 2$ d'où $\forall\, x \in$ IR, $g(x) = x^2 - 2x + 2$.

Démontrons que h 1 fois dérivable sur IR est solution de (E) $\Leftrightarrow$ $h - g$ est solution de (F) :

$h \in S_{(E)} \Leftrightarrow 2h' + h = x^2 + 2x - 2$; $g \in S_{(E)} \Leftrightarrow$ $2g' + g = x^2 + 2x - 2$. En soustrayant membre à membre, on a $2(h-g)' + (h-g) = 0$, or $(h-g) \in S_{(F)} \Leftrightarrow 2(h-g)' + (h-g) = 0$, alors $h \in S_{(E)}$.

Résoudre l'équation (F) dans IR.

Les solutions de l'équation (F) sont donc $y = Ae^{-\frac{x}{2}}$, où A est constante réelle quelconque.

l'ensemble des solutions de (E) :

Les solutions de l'équation (E) sont de la forme $z(x) = Ae^{-\frac{x}{2}} + x^2 - 2x + 2$, où A est constante réelle quelconque.

$\forall\, x \in$ IR, $z(x) = Ae^{-\frac{x}{2}} + x^2 - 2x + 2$

$z(0) = Ae^{-\frac{0}{2}} + 0^2 - 2 \times 0 + 2 = 0 \Leftrightarrow A = -2$.

$\forall\, x \in$ IR, $z(x) = -2e^{-\frac{x}{2}} + x^2 - 2x + 2$.

<u>**Exercice 17 :**</u> **Soit (E) l'équation différentielle du second ordre : $4f'' + 4f' + f = 0$.**

Résoudre l'équation (E) dans IR.
Déterminer la solution particulière dont la courbe représentative, tracée dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, passe par le point A(0 ;4) et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -1.

<u>**Correction :**</u>

(E) : $4f'' + 4f' + f = 0$.
Résoudre l'équation (E) dans IR.
L'équation caractéristique $4r^2 + 4r + 1 = 0$, $\Delta = 0$ a pour racine $-\frac{1}{2}$. Les solutions de l'équation (E) sont donc $y = (Ax + B)e^{-\frac{1}{2}x}$, où A et B sont des constantes réelles quelconques.

solution particulière g : Au point A(0 ;4) on a :
$g(0) = (A \times 0 + B)e^{-\frac{1}{2}0} = 4 \Leftrightarrow B = 4$.
$g(x) = (Ax + B)e^{-\frac{1}{2}x} \Leftrightarrow g'(x) = \left(-\frac{1}{2}Ax - \frac{1}{2}B + A\right)e^{-\frac{1}{2}x}$. **Tangente au point A :** on a : $g'(0) = \left(-\frac{1}{2}A \times 0 - \frac{1}{2}B + A\right)e^{-\frac{1}{2}0} = -1 \Leftrightarrow A = 1$. On a la solution particulière : $g(x) = (x + 4)e^{-\frac{1}{2}x}$.

<u>**Exercice 18 :**</u> **On donne l'équation différentielle (E) : $f'' + 2f' + f = 0$. on pose : pour tout nombre x réel : $g(x) = e^x k(x)$.**

Démontrer que k est solution de (E) si et seulement si, pour tout nombre réel x, $g''(x) = 0$.
Résoudre l'équation différentielle : $g'' = 0$.
En déduire les solutions (E).
Déterminer la solution particulière dont la courbe représentative, tracée dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, passe par le point A(0 ;2) et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -1.

<u>**Correction :**</u>

(E) : $f'' + 2f' + f = 0$ / $g(x) = e^x k(x)$.
Démontrons que k est solution de (E) ssi, pour tout nombre réel x, $g''(x) = 0$: $\forall\, x \in$ IR,
$g(x) = e^x k(x) \Leftrightarrow g'(x) = e^x[k'(x) + k(x)]$
$g'(x) = e^x[k'(x) + k(x)] \Leftrightarrow g''(x) = e^x[k''(x) + 2k'x + kx$ or $g''x = 0$ alors $k''x + 2k'x + kx = 0$ et k est solution de (E), alors $k'' + 2k' + k = 0 \Leftrightarrow k''(x) + 2k'(x) + k(x) = 0$
alors k est solution de (E).
Résoudre $g'' = 0$.
L'équation caractéristique $r^2 = 0 \Leftrightarrow r = 0$. Les solutions de l'équation $g'' = 0$ sont donc $g(x) = (Ax + B)$, où A et B sont des constantes réelles quelconques.
$g(x) = e^x k(x) \Leftrightarrow k(x) = g(x)e^{-x}$. Comme $k \in S_E$ **et** $g(x) = (Ax + B)$ alors les solutions de (E) sont de la forme $k(x) = (Ax + B)e^{-x}$ ou $f(x) = (Ax + B)e^{-x}$ où A et B sont des constantes réelles quelconques.
solution particulière f : Au point A(0 ;2) on a :
$f(0) = (A \times 0 + B)e^{-0} = 2 \Leftrightarrow B = 2$.
$f(x) = (Ax + B)e^{-x} \Leftrightarrow g'(x) = (-Ax - B + A)e^{-x}$.
Tangente au point A : on a : $f'(0) = (-A \times 0 - B + A)e^{-0} = -1 \Leftrightarrow A = 1$. On a la solution particulière : $f(x) = (x + 2)e^{x}$.

<u>**Exercice 19:**</u> **Soit (E) l'équation différentielle du second ordre : $f'' + 2f' + f = 0$.**

Résoudre l'équation (E) dans IR.
Déterminer la solution particulière dont la courbe représentative, tracée dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, passe par le point A(0 ;2) et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -1.

<u>**Correction :**</u>

(E) : $f'' + 2f' + f = 0$.

Résoudre l'équation (E) dans IR.

L'équation caractéristique $r^2 + 2r + 1 = 0$, $\Delta = 0$ a pour racine -1. Les solutions de l'équation (E) sont donc $y = (Ax + B)e^{-x}$, où A et B sont des constantes réelles quelconques.

solution particulière g : Au point A(0 ;2) on a : $g(0) = (A \times 0 + B)e^{-0} = 2 \Leftrightarrow$ B = 2.

$g(x) = (Ax + B)e^{-x} \Leftrightarrow g'(x) = (-Ax - B + A)e^{-x}$.

Tangente au point A : on a : $g'(0) = (-A \times 0 - B + A)e^{-0} = -1 \Leftrightarrow A = 1$. On a la solution particulière : $g(x) = (x + 2)e^{x}$.

<u>Exercice 20 :</u> **Déterminer la solution de f de l'équation différentielle $f'' - f' + \frac{1}{4}f = 0$ sachant que sa représentation graphique passe par le point A de $\lim_{x \mapsto 0} f(x) = 4$ et la tangente à cette courbe au point d'abscisse 2 est parallèle à l'axe des abscisses.**

<u>**Correction :**</u>

(E) : $f'' - f' + \frac{1}{4}f = 0$.

Résoudre l'équation (E) dans IR.

L'équation caractéristique $r^2 - r + \frac{1}{4} = 0$, $\Delta = 0$ a pour racine $\frac{1}{2}$. Les solutions de l'équation (E) sont donc $f(x) = (Ax + B)e^{\frac{1}{2}x}$, où A et B sont des constantes réelles quelconques.

solution particulière g : Au point A(0 ;4) on a :

$g(0) = (A \times 0 + B)e^{\frac{1}{2}0} = 4 \Leftrightarrow$ B = 4.

$g(x) = (Ax + B)e^{\frac{1}{2}x} \Leftrightarrow g'(x) = \left(\frac{1}{2}Ax + \frac{1}{2}B + A\right)e^{\frac{1}{2}x}$. **Tangente d'abscisse 2 parallèle à (Ox) :** on a :

$g'(2) = \left(\frac{1}{2}A \times 2 + \frac{1}{2}B + A\right)e^{\frac{2}{2}} = 0 \Leftrightarrow A = -1$. On a la solution particulière : $g(x) = (-x + 4)e^{\frac{1}{2}x}$.

<u>Exercice 21 :</u> **On considère (E) l'équation différentielle : $y'' + 2y' - 3y = -4e^{-3x}$.**

Démontrer que la fonction g définie sur IR par $g(x) = xe^{-3x}$ soit solution de (E).

Démontrer qu'une fonction f deux fois dérivable sur IR est solution de (E) si et seulement si la fonction $h = f - g$ est solution de l'équation différentielle (F) : $y'' + 2y' - 3y = 0$.

Réciproquement, montrer que si une fonction h est solution de (F) alors la fonction $f = g + h$ est solution de (E).

Résoudre l'équation (F) dans IR.

En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Déterminer la solution particulière de (E) vérifiant $f(0) = \frac{1}{3}$ et $\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = 0$.

<u>**Correction :**</u> **(E) : $y'' + 2y' - 3y = -4e^{-3x}$.**

(F) : $y'' + 2y' - 3y = 0$.

$\forall x \in$ IR, $g(x) = xe^{-3x} \Leftrightarrow g'(x) = (1 - 3x)e^{-3x} \Leftrightarrow g''(x) = (9x - 6)e^{-3x}$. $g \in S_{(E)} \Leftrightarrow g''(x) + 2g'(x) - 3g(x) = (9x - 6 + 2 - 6x - 3x)e^{-3x} = -4e^{-3x} = 0$.

Donc $g \in S_{(E)}$.

$f \in S_{(E)} \Leftrightarrow f''(x) + 2f'(x) - 3f(x) = -4e^{-3x}$; $g \in S_{(E)} \Leftrightarrow g''(x) + 2g'(x) - 3g(x) = -4e^{-3x}$. En soustrayant membre à membre, on a $(f - g)''(x) + 2(f - g)'(x) - 3(f - g)(x) = 0$, or $h = (f - g) \in S_{(F)} \Leftrightarrow h''(x) + 2h'(x) - 3h(x) = 0$, alors $f \in S_{(E)}$.

$h \in S_{(F)} \Leftrightarrow h''(x) + 2h'(x) - 3h(x) = 0$ et $g \in S_{(E)} \Leftrightarrow g''(x) + 2g'(x) - 3g(x) = -4e^{-3x}$. En ajoutant membre à membre, on a $(g + h)''(x) + 2(g + h)'(x) - 3(g + h)(x) = -4e^{-3x}$, or $f = (g + h) \in S_{(E)} \Leftrightarrow f''(x) + 2f'(x) - 3f(x) = -4e^{-3x}$, alors $h \in S_{(F)}$.

Résoudre l'équation (F) dans IR.

L'équation caractéristique est $r^2 + 2r - 3 = (r + 3)(r - 1) = 0$, les solutions de l'équation homogène sont $h(x) = \mathrm{A}e^{x} + \mathrm{B}e^{-3x}$.

l'ensemble des solutions de (E) :

Les solutions de l'équation (E) sont de la forme $f(x) = g(x) + h(x) = xe^{-3x} + \mathrm{A}e^{x} + \mathrm{B}e^{-3x}$, où A est constante réelle quelconque.

$\forall x \in$ IR, $f(x) = xe^{-3x} + \mathrm{A}e^{x} + \mathrm{B}e^{-3x}$,

$f(0) = 0 \times e^{0} + \mathrm{A}e^{0} + \mathrm{B}e^{0} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \mathrm{A} + \mathrm{B} = \frac{1}{3}$.

$\forall x \in$ IR, $f'(x) = e^{-3x} - 3xe^{-3x} + \mathrm{A}e^{x} - 3\mathrm{B}e^{-3x}$.

$\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim_{x \mapsto +\infty}[xe^{-3x} + \mathrm{A}e^{x} + \mathrm{B}e^{-3x}] = 0$, on a :

$\mathrm{A} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{B} = \frac{1}{3}$. $\forall x \in$ IR, $f(x) = \left(x + \frac{1}{3}\right)e^{-3x}$.

<u>Exercice 22 :</u> **On considère (E) et (E') les équations différentielles du 1er ordre respectivement définies par : $\begin{cases} 2y' + y = 0, (\mathrm{E}) \\ 2y' + y = e^{\frac{-x}{2}}(x + 1) \quad (\mathrm{E}') \end{cases}$.**

Résoudre l'équation différentielle (E) dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur IR. Déterminer les réels a et b pour que la fonction f définie sur IR par :

$f(x) = e^{\frac{-x}{2}}(ax^2 + bx)$ soit solution de (E').
Soit g une fonction définie et dérivable sur IR.
Montrer que g est solution de l'équation (E') si et seulement si $g - f$ est solution de l'équation (E).
Résoudre l'équation (E').
<u>Correction :</u>

$$\begin{cases} 2y' + y = 0, (E) \\ 2y' + y = e^{\frac{-x}{2}}(x+1) \quad (E') \end{cases}.$$

Résoudre l'équation différentielle (E) :
Cette équation peut se mettre sous la forme : $y' = \frac{-1}{2}y$, qui admet comme ensemble solution dans IR, l'ensemble des fonctions : $x \longmapsto Ce^{\frac{-x}{2}}$ où C est une constante réelle quelconque.
Déterminer les réels a et b pour que la fonction f définie sur IR par : $f(x) = e^{\frac{-x}{2}}(ax^2 + bx)$ soit solution de (E').
$\forall\, x \in$ IR, $f(x) = e^{\frac{-x}{2}}(ax^2 + bx) \Leftrightarrow 2f'(x) = [-ax^2 + (4a - b)x + 2b]e^{\frac{-x}{2}}$.
$f \in S_{(E')} \Leftrightarrow\ 2f' + f = [-ax^2 + (4a - b)x +$
2be−x2+e−x2ax2+bx=e−x24ax+2b=e−x2x+1⇔
$a = \frac{1}{4} \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$, d'où $\forall\, x \in f(x) = e^{\frac{-x}{2}}\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x\right)$.

$g \in S_{(E')} \Leftrightarrow 2g' + g = e^{\frac{-x}{2}}(x + 1)$; $f \in S_{(E')} \Leftrightarrow 2f'(x) + f(x) = e^{\frac{-x}{2}}(x + 1)$. En soustrayant membre à membre, on a $2(g - f)'(x) + (g - f)(x) = 0$, or $(g - f) \in S_{(E)} \Leftrightarrow 2(g - f)'(x) + (g - f)(x) = 0$, alors $g \in S_{(E')}$.
Résoudre l'équation (E') :
$g(x) = f(x) + Ce^{\frac{-x}{2}} = e^{\frac{-x}{2}}\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + C\right)$.
<u>Exercice 23 :</u> On considère l'équation différentielle E : $y'(x) - y(x) = x + 2$.

Déterminer une fonction affine p solution de E.
Montrer que si y est solution de E, alors $y - P$ est solution d'une équation différentielle homogène du premier ordre. La résoudre.
Déterminer toutes les solutions de E.

<u>Correction :</u>

E : $y'(x) - y(x) = x + 2$.
fonction affine p solution de E. soit $p(x) = ax + b \Leftrightarrow p'(x) = a$. En remplaçant dans E, on a : $p'(x) - p(x) = -ax - b + a = x + 2$, on en déduit que $a = -1$ et $b = -3$.
$\forall\, x \in$ IR, $p(x) = -x - 3$.
$y \in S_E \Leftrightarrow 2y'(x) - y(x) = x + 2$; $p \in S_E \Leftrightarrow p'(x) + p(x) = x + 2$. En soustrayant membre à membre, on a $(y - p)'(x) - (y - p)(x) = 0$, or $(y - p) \in S_{(E)} \Leftrightarrow (y - p)'(x) + (y - p)(x) = 0$, alors $y \in S_{(E)}$.
Résoudre l'équation $y - p$: $y(x) - p(x) = Ce^x$.
toutes les solutions de E.
$y(x) = p(x) + Ce^x = Ce^x - x - 3$.
$f(x) = e^x - x - 3$.

<u>Exercice 24 :</u> Soit (E) l'équation différentielle :
$y'' + y' - 2y = 2x + 1$.

Déterminer la solution générale de (E).
Déterminer l'unique solution f telle que $f(0) = 0$ et la courbe représentative de f admet une asymptote oblique en $+\infty$.

<u>Correction :</u> (E) : $y'' + y' - 2y = 2x + 1$.

Déterminer la solution générale de (E).
L'équation caractéristique est $r^2 + r - 2 = (r + 2)(r - 1)$, les solutions de l'équation homogène sont $y(x) = Ae^x + Be^{-2x}$. On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 1 : $y(x) = ax + b$. On remplace dans l'équation différentielle et on trouve $a - 2ax - 2b = 2x + 1$ d'où $y(x) = -x - 1$. En résumé les solutions sur R sont de la forme $y(x) = Ae^x + Be^{-2x} - x - 1$.
Déterminer l'unique solution f telle que $f(0) = 0$ et la courbe représentative de f admet une asymptote oblique en $+\infty$.
$f(0) = A + B - 1 = 0 \Leftrightarrow A = -B + 1$ et
$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[A\frac{e^x}{x} + B\frac{e^{-2x}}{x} - 1 - \frac{1}{x}\right]$ or
$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[B\frac{e^{-2x}}{x} - 1 - \frac{1}{x}\right] = -1$ et $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} A\frac{e^x}{x} = \infty$, donc $B = 1$ et $A = 0$. $\forall\, x \in$ IR, $f(x) = e^{-2x} - x - 1$.

<u>Exercice 25 :</u> Soit (E) l'équation différentielle :

$y'' - 3y' + 2y = x^2 - 3x$.
Déterminer la solution générale de (E).
Déterminer l'unique solution f telle que $f(0) = -\frac{1}{2}$ et $f'(0) = 1$.

<u>Correction :</u> (E) : $y'' - 3y' + 2y = x^2 - 3x$.

Déterminer la solution générale de (E).
L'équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = (r - 2)(r - 1) = 0$, les solutions de l'équation homogène sont $y(x) = Ae^x + Be^{2x}$. On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 2 : $y(x) = ax^2 + bx + c$. On remplace dans

l'équation différentielle et on trouve $a = \frac{1}{2}$; $b = 0$ et $c = -\frac{1}{2}$ d'où $y(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$. En résumé les solutions sur R sont de la forme $y(x) = \mathrm{A}e^{x} + \mathrm{B}e^{2x} + \frac{1}{2}(x^2 - 1)$.

Déterminer l'unique solution f telle que $f(0) = \mathrm{A} + \mathrm{B} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \mathrm{A} + \mathrm{B} = 0$

$f'(x) = \mathrm{A}e^{x} + 2\mathrm{B}e^{2x} + x$, on a : $f'(0) = \mathrm{A} + 2\mathrm{B} = 1$; $\begin{cases} \mathrm{A} + \mathrm{B} = 0 \\ \mathrm{A} + 2\mathrm{B} = 1 \end{cases}$, donc $\mathrm{B} = 1$ et $\mathrm{A} = -1$.

$\forall\, x \in \mathrm{IR},\ f(x) = -e^{x} + e^{2x} + \frac{1}{2}(x^2 - 1)$.

<u>Exercice 26:</u> Soit (E) l'équation différentielle :

$$\boldsymbol{y'' + 4y' - 5y = 2e^{x}}.$$

Déterminer la solution générale de (E).

Déterminer l'unique solution f telle que $f(0) = \frac{1}{3}$ et $f'(0) = \frac{19}{3}$.

<u>Correction :</u> (E) : $\boldsymbol{y'' + 4y' - 5y = 2e^{x}}$.

Déterminer la solution générale de (E).

L'équation caractéristique est $r^2 + 4r - 5 = (r - 2)(r - 1)$, les solutions de l'équation homogène sont $y(x) = \mathrm{A}e^{x} + \mathrm{B}e^{-5x}$. On cherche une solution particulière sous la forme: $y(x) = axe^{x}$. On remplace dans l'équation différentielle et on trouve $a = \frac{1}{3}$; d'où $y(x) = \frac{1}{3}xe^{x}$. En résumé les solutions sur R sont de la forme $y(x) = \mathrm{A}e^{x} + \mathrm{B}e^{-5x} + \frac{1}{3}xe^{x}$.

Déterminer l'unique solution f telle que :

$f(0) = \mathrm{A} + \mathrm{B} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \mathrm{A} + \mathrm{B} = 0$

$f'(x) = \mathrm{A}e^{x} - 5\mathrm{B}e^{-5x} + \frac{1}{3}e^{x} + \frac{1}{3}xe^{x}$, on a : $f'(0) = \mathrm{A} - 5\mathrm{B} + \frac{1}{3} = \frac{19}{3}$; $\begin{cases} \mathrm{A} + \mathrm{B} = 0 \\ \mathrm{A} - 5\mathrm{B} = 6 \end{cases}$, donc $\mathrm{B} = 1$ et $\mathrm{A} = -1$.

$\forall\, x \in \mathrm{IR},\ f(x) = -e^{x} + e^{-5x} + \frac{1}{3}xe^{x}$.

<u>Exercice 27 :</u> On considère (E) l'équation différentielle du second ordre : $4y' + y = x + 6$.

Déterminer les réels a et b pour que la fonction g définie sur IR par $g(x) = ax + b$ soit solution de (E), l'équation différentielle.

Démontrer qu'une fonction f une fois dérivable sur IR est solution de (E) si et seulement si la fonction $h = f - g$ est solution de l'équation différentielle (F) : $4y' + y = 0$.

Réciproquement, montrer que si une fonction h est solution de (F) alors la fonction $f = g + h$ est solution de (E).

Résoudre l'équation (F) dans IR.

En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Déterminer la solution particulière de (E) vérifiant $f(0) = 4$.

<u>Correction :</u>

(E) : $4y' + y = x + 6$.

(F) : $4y' + y = 0$.

Déterminons les réels a et b pour que g définie sur IR par $g(x) = ax + b$ soit solution de (E) :

$\forall\, x \in \mathrm{IR}, g(x) = ax + b \Leftrightarrow g'(x) = a$.

$g \in S_{(\mathrm{E})} \Leftrightarrow 4g'(x) + g(x) = 4a + ax + b = x + 6 \Leftrightarrow a = 1, b = 2$ d'où $\forall\, x \in \mathrm{IR},\ g(x) = x + 2$.

Démontrons que f 1 fois dérivable sur IR est solution de (E) $\Leftrightarrow h = f - g$ est solution de (F) :

$f \in S_{(\mathrm{E})} \Leftrightarrow 4f'(x) + f(x) = x + 6$; $g \in S_{(\mathrm{E})} \Leftrightarrow 4g'(x) + g(x) = x + 6$. En soustrayant membre à membre, on a $4(f - g)'(x) + (f - g)(x) = 0$, or $h = (f - g) \in S_{(\mathrm{F})} \Leftrightarrow 4h'(x) + h(x) = 0$, alors $f \in S_{(\mathrm{E})}$.

Réciproquement, montrer que si une fonction h est solution de (F) alors la fonction $f = g + h$ est solution de (E). $h \in S_{(\mathrm{F})} \Leftrightarrow 4h'(x) + h(x) = 0$ et $g \in S_{(\mathrm{E})} \Leftrightarrow 4g'(x) + g(x) = x + 6$. En ajoutant membre à membre, on a $4(g + h)'(x) + (g + h)(x) = x + 6$, or $f = (g + h) \in S_{(\mathrm{E})} \Leftrightarrow 4f'(x) + f(x) = x + 6$, alors $h \in S_{(\mathrm{F})}$.

Résoudre l'équation (F) dans IR.

Les solutions de l'équation (F) sont donc $h(x) = \mathrm{A}e^{-\frac{x}{4}}$, où A est constante réelle quelconque.

l'ensemble des solutions de (E) :

Les solutions de l'équation (E) sont de la forme $f(x) = \mathrm{A}e^{-\frac{x}{4}} + x + 2$, où A est constante réelle quelconque.

$\forall\, x \in \mathrm{IR},\ f(x) = \mathrm{A}e^{-\frac{x}{4}} + x + 2$

$f(0) = \mathrm{A}e^{-\frac{0}{4}} + 0 + 2 = 4 \Leftrightarrow \mathrm{A} = 2$.

$\forall\, x \in \mathrm{IR}, f(x) = 2e^{-\frac{x}{4}} + x + 2$.

<u>Exercice 28 :</u> On considère (E) l'équation différentielle du second ordre : $y' - 2y = xe^{x}$.

Déterminer les réels a et b pour que la fonction g définie sur IR par $g(x) = (ax + b)e^{x}$ soit solution de (E), l'équation différentielle.

Démontrer qu'une fonction f une fois dérivable sur IR est solution de (E) si et seulement si la fonction $h = f - g$ est solution de l'équation différentielle (F) : $y' - 2y = 0$.
Réciproquement, montrer que si une fonction h est solution de (F) alors la fonction $f = g + h$ est solution de (E).
Résoudre l'équation (F) dans IR.
En déduire l'ensemble des solutions de (E).
Déterminer la solution particulière de (E) vérifiant $f(0) = 0$.

Correction :

(E) : $y' - 2y = xe^x$.
(F) : $y' - 2y = 0$.
Déterminons les réels a et b pour que g définie sur IR par $g(x) = (ax+b)e^x$ soit solution de (E) :
$\forall\, x \in \text{IR}, g(x) = (ax+b)e^x \Leftrightarrow g'(x) = (ax+b+a)e^x$.
$g \in S_{(\text{E})} \Leftrightarrow g' - 2g = [-ax - 2a - b]e^x = xe^x \Leftrightarrow a = -1, b = 2$ d'où $\forall\, x \in \text{IR}, g(x) = (-x+2)e^x$.
Démontrons que f 1 fois dérivable sur IR est solution de (E) $\Leftrightarrow h = f - g$ est solution de (F) :
$f \in S_{(\text{E})} \Leftrightarrow f'(x) - 2f(x) = xe^x$; $g \in S_{(\text{E})} \Leftrightarrow g'(x) - 2g(x) = xe^x$. En soustrayant membre à membre, on a $(f-g)'(x) - 2(f-g)(x) = 0$, or $h = (f-g) \in S_{(\text{F})} \Leftrightarrow h'(x) - 2h(x) = 0$, alors $f \in S_{(\text{E})}$.
Réciproquement, montrer que si une fonction h est solution de (F) alors la fonction $f = g + h$ est solution de (E). $h \in S_{(\text{F})} \Leftrightarrow h'(x) - 2h(x) = 0$ et $g \in S_{(\text{E})} \Leftrightarrow g'(x) - 2g(x) = x + 6$. En ajoutant membre à membre, on a $(g+h)'(x) - 2(g+h)(x) = xe^x$, or $f = (g+h) \in S_{(\text{E})} \Leftrightarrow f'(x) - 2f(x) = xe^x$, alors $h \in S_{(\text{F})}$.
Résoudre l'équation (F) dans IR.
Les solutions de l'équation (F) sont donc $h(x) = \text{A}e^{2x}$, où A est constante réelle quelconque.
l'ensemble des solutions de (E) :
Les solutions de l'équation (E) sont de la forme $f(x) = \text{A}e^{2x} + (-x+2)e^x$, où A est constante réelle quelconque.
$\forall\, x \in \text{IR}, f(x) = \text{A}e^{2x} + (-x+2)e^x$
$f(0) = \text{A}e^0 + (-0+2)e^0 = 0 \Leftrightarrow \text{A} = -2$.
$\forall\, x \in \text{IR}, f(x) = -2e^{2x} + (-x+2)e^x$.

Exercice 29 : **On considère (E) l'équation différentielle du premier ordre : $y' - 2y = e^{2x}$.**
Démontrer que la fonction g définie sur IR par $g(x) = xe^{2x}$ soit solution de (E).
Démontrer qu'une fonction f une fois dérivable sur IR est solution de (E) si et seulement si la fonction $h = f - g$ est solution de l'équation différentielle (F) : $y' - 2y = 0$.
Réciproquement, montrer que si une fonction h est solution de (F) alors la fonction $f = g + h$ est solution de (E).
Résoudre l'équation (F) dans IR.
En déduire l'ensemble des solutions de (E).
Déterminer la solution particulière de (E) vérifiant $f(0) = 1$.

Correction :

(E) : $y' - 2y = e^{2x}$.
(F) : $y' - 2y = 0$.
$\forall\, x \in \text{IR}, g(x) = xe^{2x} \Leftrightarrow g'(x) = (2x+1)e^{2x}$.
$g \in S_{(\text{E})} \Leftrightarrow g'(x) - 2g(x) = (2x+1)e^{2x} - 2xe^{2x} = e^{2x} = 0$.
Donc $g \in S_{(\text{E})}$.
Démontrons que f 1 fois dérivable sur IR est solution de (E) $\Leftrightarrow h = f - g$ est solution de (F) :
$f \in S_{(\text{E})} \Leftrightarrow f'(x) - 2f(x) = e^{2x}$; $g \in S_{(\text{E})} \Leftrightarrow g'(x) - 2g(x) = e^{2x}$. En soustrayant membre à membre, on a $(f-g)'(x) - 2(f-g)(x) = 0$, or $h = (f-g) \in S_{(\text{F})} \Leftrightarrow h'(x) - 2h(x) = 0$, alors $f \in S_{(\text{E})}$.
Réciproquement, montrer que si une fonction h est solution de (F) alors la fonction $f = g + h$ est solution de (E). $h \in S_{(\text{F})} \Leftrightarrow h'(x) - 2h(x) = 0$ et $g \in S_{(\text{E})} \Leftrightarrow g'(x) - 2g(x) = x + 6$. En ajoutant membre à membre, on a $(g+h)'(x) - 2(g+h)(x) = e^{2x}$, or $f = (g+h) \in S_{(\text{E})} \Leftrightarrow f'(x) - 2f(x) = e^{2x}$, alors $h \in S_{(\text{F})}$.
Résoudre l'équation (F) dans IR.
Les solutions de l'équation (F) sont donc $h(x) = \text{A}e^{2x}$, où A est constante réelle quelconque.
l'ensemble des solutions de (E) :
Les solutions de l'équation (E) sont de la forme $f(x) = \text{A}e^{2x} + xe^{2x}$, où A est constante réelle quelconque.
$\forall\, x \in \text{IR}, f(x) = \text{A}e^{2x} + xe^{2x}$
$f(0) = \text{A}e^0 + 0 \times e^0 = 1 \Leftrightarrow \text{A} = 1$.
$\forall\, x \in \text{IR}, f(x) = (x+1)e^{2x}$.

Exercice 30 : **On considère (E) l'équation différentielle du premier ordre : $y' - y = \frac{e^x}{x^2}$.**

Démontrer que la fonction g définie sur $]0;\ +\infty[$ par $g(x) = \frac{e^x}{x}$ soit solution de (E).
Démontrer qu'une fonction f une fois dérivable sur $]0;\ +\infty[$ est solution de (E) si et seulement si la fonction $h = f - g$ est solution de l'équation différentielle (F) : $y' - y = 0$.
Résoudre l'équation (F) dans IR.
En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Correction : (E) : $y' - 2y = e^{2x}$.

(F) : $y' - 2y = 0$.
$\forall\, x \in$ IR, $g(x) = xe^{2x} \Leftrightarrow g'(x) = (2x+1)e^{2x}$.
$g \in S_{(E)} \Leftrightarrow\ g'(x) - 2g(x) = (2x+1)e^{2x} - 2xe^{2x} = e^{2x} = 0$. Donc $g \in S_{(E)}$.
Démontrons que f 1 fois dérivable sur IR est solution de (E) $\Leftrightarrow$ $h = f - g$ est solution de (F) :
$f \in S_{(E)} \Leftrightarrow f'(x) - 2f(x) = e^{2x}$; $g \in S_{(E)} \Leftrightarrow g'(x) - 2g(x) = e^{2x}$. En soustrayant membre à membre, on a $(f-g)'(x) - 2(f-g)(x) = 0$, or $h = (f-g) \in S_{(F)} \Leftrightarrow h'(x) - 2h(x) = 0$, alors $f \in S_{(E)}$.
Réciproquement, montrer que si une fonction h est solution de (F) alors la fonction $f = g + h$ est solution de (E). $h \in S_{(F)} \Leftrightarrow h'(x) - 2h(x) = 0$ et $g \in S_{(E)} \Leftrightarrow\ g'(x) - 2g(x) = x + 6$. En ajoutant membre à membre, on a $(g+h)'(x) - 2(g+h)(x) = e^{2x}$, or $f = (g+h) \in S_{(E)} \Leftrightarrow f'(x) - 2f(x) = e^{2x}$ alors $h \in S_{(F)}$.
Résoudre l'équation (F) dans IR.
Les solutions de l'équation (F) sont donc $h(x) = \mathrm{A}e^{2x}$, où A est constante réelle quelconque.
l'ensemble des solutions de (E) :
Les solutions de l'équation (E) sont de la forme $f(x) = \mathrm{A}e^{2x} + xe^{2x}$, où A est constante réelle quelconque.
$\forall\, x \in$ IR, $f(x) = \mathrm{A}e^{2x} + xe^{2x}$
$f(0) = \mathrm{A}e^0 + 0 \times e^0 = 1 \Leftrightarrow \mathrm{A} = 1$.
$\forall\, x \in$ IR, $f(x) = (x+1)e^{2x}$.

Exercice 31 : **On considère (E) l'équation différentielle: $y'' - 3y' + 2y = 2e^{3x}$.**

Démontrer que la fonction g définie sur IR par $g(x) = e^{3x}$ soit solution de (E).
Démontrer qu'une fonction f deux fois dérivable sur IR est solution de (E) si et seulement si la fonction $h = f - g$ est solution de l'équation différentielle (F) : $y'' - 3y' + 2y = 0$.
Réciproquement, montrer que si une fonction h est solution de (F) alors la fonction $f = g + h$ est solution de (E).
Résoudre l'équation (F) dans IR.
En déduire l'ensemble des solutions de (E).
Déterminer la solution particulière de (E) dont $\mathcal{C}_f$ passe par le point A(0; 3) et admet une tangente en cet point de coefficient directeur 2.

Correction :

(E) : $y'' - 3y' + 2y = 2e^{3x}$.
(F) : $y'' - 3y' + 2y = 0$.
$\forall\, x \in$ IR, $g(x) = e^{3x} \Leftrightarrow g'(x) = 3e^{3x} \Leftrightarrow g''(x) = 9e^{3x}$. $g \in S_{(E)} \Leftrightarrow g'' - 3\,g' + 2g = (9 - 3 \times$ *3e3x+2e3x=2e3x=0*. Donc *g∈S*E.
$f \in S_{(E)} \Leftrightarrow f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 2e^{3x}$;
$g \in S_{(E)} \Leftrightarrow g''(x) - 3\,g'(x) + 2g(x) = 2e^{3x}$. En soustrayant membre à membre, on a $(f-g)''(x) - 3(f-g)'(x) + 2(f-g)(x) = 0$, or $h = (f-g) \in S_{(F)} \Leftrightarrow h''(x) - 3h'(x) + 2h(x) = 0$, alors $f \in S_{(E)}$.
$h \in S_{(F)} \Leftrightarrow h''(x) - 3h'(x) + 2h(x) = 0$ et $g \in S_{(E)} \Leftrightarrow\ g''(x) - 3g'(x) + 2g(x) = 2e^{3x}$. En ajoutant membre à membre, on a $(g+h)''(x) - 3(g+h)'(x) + 2(g+h)(x) = 2e^{3x}$, or $f = (g+h) \in S_{(E)} \Leftrightarrow f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 2e^{3x}$, alors $h \in S_{(F)}$.
Résoudre l'équation (F) dans IR.
L'équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = (r-2)(r-1) = 0$, les solutions de l'équation homogène sont $h(x) = \mathrm{A}e^{x} + \mathrm{B}e^{2x}$.
l'ensemble des solutions de (E) :
Les solutions de l'équation (E) sont de la forme $f(x) = g(x) + h(x) = e^{3x} + \mathrm{A}e^{x} + \mathrm{B}e^{2x}$, où A est constante réelle quelconque.
$\forall\, x \in$ IR, $f(x) = e^{3x} + \mathrm{A}e^{x} + \mathrm{B}e^{2x}$,
Au point A(0; 3) on a : $f(0) = e^0 + \mathrm{A}e^0 + \mathrm{B}e^0 = 3 \Leftrightarrow \mathrm{A} + \mathrm{B} = 2$.
$\forall\, x \in$ IR, $f'(x) = 3e^{3x} + \mathrm{A}e^{x} + 2\mathrm{B}e^{2x}$.
Tangente au point A : $f'(0) = 3e^0 + \mathrm{A}e^0 + 2\mathrm{B}e^0 = 2 \Leftrightarrow \mathrm{A} + 2\mathrm{B} = -1$; enfin on aura : $\begin{cases} \mathrm{A} + \mathrm{B} = 2 \\ \mathrm{A} + 2\mathrm{B} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{A} = 5 \\ \mathrm{B} = -3 \end{cases}$ $\forall\, x \in$ IR, $f(x) = e^{3x} + 5e^{x} - 3e^{2x}$.

<u>Exercice 32 :</u> On considère (E) l'équation différentielle : $y'' + 2y' + y = x^2 + 2x - 2$.

Déterminer les réels a, b et c pour que la fonction g définie sur IR par $g(x) = ax^2 + bx + c$ soit solution de (E).
Démontrer qu'une fonction f deux fois dérivable sur IR est solution de (E) si et seulement si la fonction $h = f - g$ est solution de l'équation différentielle (F) : $y'' + 2y' + y = 0$.
Résoudre l'équation (F) dans IR.
En déduire l'ensemble des solutions de (E).
Déterminer la solution particulière de (E) dont $\mathcal{C}_f$ passe par le point O et admet comme tangente en O la droite (Ox).

<u>Correction :</u>

(E) : $y'' + 2y' + y = x^2 + 2x - 2$.
(F) : $y'' + 2y' + y = 0$.
$\forall x \in$ IR, $g(x) = ax^2 + bx + c \Leftrightarrow g'(x) = 2ax + b \Leftrightarrow g''(x) = 2a$.
$g \in S_{(E)} \Leftrightarrow g''(x) + 2g'(x) + g(x) = 2a + 4ax + 2b + ax^2 + bx + c = x^2 + 2x - 2 \Leftrightarrow a = 1$, $b = -2$ et $c = 0$ d'où $\forall x \in$ IR, $g(x) = x^2 - 2x$.

$h \in S_{(E)} \Leftrightarrow h''(x) + 2h'(x) + h(x) = x^2 + 2x - 2$;
$g \in S_{(E)} \Leftrightarrow g''(x) + 2g'(x) + g(x) = x^2 + 2x - 2$.
En soustrayant membre à membre, on a $(h - g)''(x) + 2(h - g)'(x) + (h - g)(x) = 0$, or $(h - g) \in S_{(F)} \Leftrightarrow (h - g)''(x) + 2(h - g)'(x) + (h - g)(x) = 0$, alors $h \in S_{(E)}$.
Résoudre l'équation (F) dans IR.
Les solutions de l'équation (F) sont donc $y = (\mathrm{A}x + \mathrm{B})e^x$.
l'ensemble des solutions de (E) :
Les solutions de l'équation (E) sont de la forme $h(x) = (\mathrm{A}x + \mathrm{B})e^x + x^2 - 2x$.
$\forall x \in$ IR, $h(x) = (\mathrm{A}x + \mathrm{B})e^x + x^2 - 2x$
$h(0) = (\mathrm{A} \times 0 + \mathrm{B})e^0 + 0^2 - 2 \times 0 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{B} = 0$.
$\forall x \in$ IR, $h'(x) = (\mathrm{A}x + \mathrm{B} + \mathrm{A})e^x + 2x - 2$.
$h'(0) = (\mathrm{A} \times 0 + \mathrm{B} + \mathrm{A})e^0 + 2 \times 0 - 2 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{B} + \mathrm{A} = 2$; donc $\mathrm{A} = 2$
<u>Exercice 33 :</u> Soit (E) l'équation différentielle du second ordre : $y'' - 3y' + 2y = 0$.
1. **Quelles sont les solutions de (E) ?**
2. **Quelle est la solution de (E) dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ admet au point d'abscisse $x = 0$ la même tangente que la courbe $\mathcal{C}'$ représentative de $y = e^{3x}$? on dit que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}'$ sont tangentes.**

<u>Correction :</u> (E) : $\boldsymbol{y'' - 3y' + 2y = 0}$.

1. **L'équation caractéristique** $r^2 - 3r + 2 = 0$, $\Delta = 1$. Les solutions de l'équation (E) sont donc $f(x) = \mathrm{A}e^x + \mathrm{B}e^{2x}$ où A et B sont des constantes réelles quelconques.

2. $y(x) = e^{3x} \Leftrightarrow y'(x) = 3e^{3x} \Leftrightarrow y(0) = 1$ et $y'(0) = 3$, donc la tangente est d'équation $y = 3x + 1$ on en déduit que $f(0) = \mathrm{A} + \mathrm{B} = 1$ et $f'(0) = \mathrm{A} + 2\mathrm{B} = 3$, ce qui fait un système :
$\begin{cases} \mathrm{A} + \mathrm{B} = 1 \\ \mathrm{A} + 2\mathrm{B} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{A} = -1 \\ \mathrm{B} = 2 \end{cases}$, $f(x) = -e^x + 2e^{2x}$