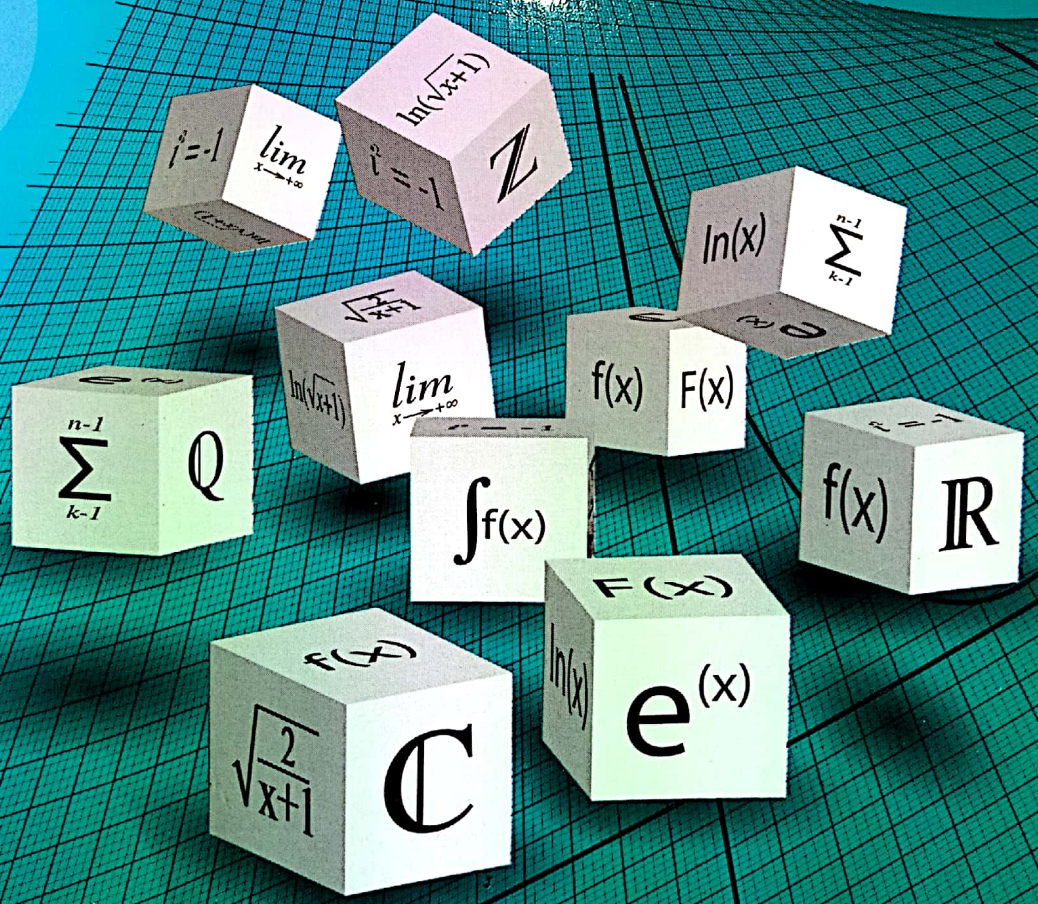
COLLECTION

AVOMATHS

ANNALES

TERMINALE D

- Résumés de cours
- Exercices et Problèmes
- Corrigés



Les Classiques Ivoiriens

Collection AVOMATHS

MATHEMATIQUES

Terminale D

Par

BOUA PHILIPPE — *Professeur certifié au Lycée Scientifique de Yamoussoukro*

CIV 294

Les Classiques ivoiriens

10 B.P. 1034 Abidjan 10 • Tél : 21 56 50 63 • Fax : 21 36 56 57
info@classiquesivoiriens.com

Remerciements à

GUEHI AMBROISE	*Enseignant à l'Ecole Normale Supérieure d'Abidjan*
GNIN Kouassi	*Professeur Certifié au Lycée Mixte de Yamoussoukro*
YAO James Nicaise	*Professeur Certifié au Lycée Scientifique de Yamoussoukro*
GANOU Adama	*Professeur Licencié au Lycée Scientifique de Yamoussoukro*
BAGATE Aboulaye	*Professeur Certifié au Lycée Scientifique de Yamoussoukro*
DIABATE Zoumana	*Professeur Certifié au Lycée Mixte de Yamoussoukro*

AVANT-PROPOS

Ce document est un recueil d'exercices et de problèmes suivis de leurs corrigés. Les sujets abordés portent sur l'ensemble des chapitres vus en classe de Terminale D. Ils ont tous été corrigés de façon détaillée. Les procédures de résolutions utilisées sont rigoureusement basées sur les définitions et propriétés vues au cours.

Ces travaux aideront à mieux appréhender les notions qui ont été présentées aux élèves. Les professeurs trouveront dans cet ouvrage des sujets répondant aux exigences du programme. Ils pourront adapter les énoncés au niveau de leurs classes.

Il est conseillé aux élèves de ne pas se précipiter sur les corrigés. Ils gagneront en effet à consacrer un temps de réflexion personnelle aux énoncés proposés avant de se reporter aux corrigés.

Un apercu du cours précède chaque chapitre. L'élève pourra s'y référer avant de s'exercer ou en cas de difficulté.

Nous espérons que ce document répondra aux attentes des utilisateurs. Afin d'améliorer les prochaines publications nous attendons les remarques, les critiques et les suggestions.

L'auteur

SOMMAIRE

LIMITES et CONTINUITE

ÉNONCÉS

LIMITES et CONTINUITE

L'essentiel du cours sur les limites et continuité

I- LIMITES

1) Tableau récapitulatif pour le calcul de limites

lim f	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
lim g	l'	l'	l'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
lim (f + g)	l + l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

lim f	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
lim g	l'	l';(l' > 0)	l';(l' < 0)	$+\infty$	$-\infty$	0
lim fg	ll'	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?

lim f	l;($l \neq 0$)	$+\infty$ou $-\infty$	0 et f(x) > 0	0 et f(x) < 0
lim $\frac{1}{f}$	$\frac{1}{l}$	0	$+\infty$	$-\infty$

2) Limite d'une fonction composée

Propriété : Soit f et g deux fonctions. Si $\lim\limits_{x \mapsto a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x \mapsto b} g(x) = l$ alors $\lim\limits_{x \mapsto a} g(f(x)) = l$.

3) Asymptotes

Propriété : Soit f une fonction.

Si $\lim\limits_{x \mapsto a} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$) alors la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à (C_f).

Si $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = b$ alors la droite d'équation $y = b$ est asymptote horizontale à (C_f) en $+\infty$.

Si $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$.

Les deux derniers résultats sont également valables lorsque x tend vers $-\infty$.

4) Branches paraboliques

Propriété : Soit f une fonction telle que : $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = +\infty (ou -\infty)$.

- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ alors (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses en $+\infty$.
- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty (ou -\infty)$ alors (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées en $+\infty$.

Les deux derniers résultats sont également valables lorsque x tend vers $-\infty$.

II- CONTINUITE

1) Définition de la continuité en un nombre réel

On dit qu'une fonction f est continue en a si $\lim\limits_{x \mapsto a} f(x) = f(a)$.

2) Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle K et, a et b pris dans K. Tout nombre réel compris entre f(a) et f(b) admet au moins un antécédent par f compris entre a et b.

3) Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone

Tableau présentant les images d'intervalles par une fonction continue et strictement monotone.

Intervalles	f est strictement croissante	f est strictement décroissante
$[a;b]$	$[f(a);f(b)]$	$[f(b);f(a)]$
$[a;b[$	$[f(a);\lim\limits_{\substack{x \to b\\<}} f(x)[$	$]\lim\limits_{\substack{x \to b\\<}} f(x);f(a)]$
$]a;b[$	$]\lim\limits_{\substack{x \to a\\>}} f(x);\lim\limits_{\substack{x \to b\\<}} f(x)[$	$]\lim\limits_{\substack{x \to b\\<}} f(x);\lim\limits_{\substack{x \to a\\>}} f(x)[$
$[a;+\infty[$	$[f(a);\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)[$	$]\lim\limits_{x \to +\infty} f(x);f(a)]$
$]-\infty;b[$	$]\lim\limits_{x \to -\infty} f(x);\lim\limits_{\substack{x \to b\\<}} f(x)[$	$]\lim\limits_{\substack{x \to b\\<}} f(x);\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)[$

4) Fonction continue strictement monotone et bijection

Propriété : Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle K. Alors :

- f réalise une bijection de K sur f(K).
- La réciproque de f est continue sur f(K) et son sens de variation est celui de f.

1

Calculer les limites suivantes

1. a) $\lim\limits_{x \to -3} (x^2 + x + 2)$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - x + 2)$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^2 + x + 3)$

2. a) $\lim\limits_{x \to -\infty} x(1 - x)$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - 1 + 2(x + 2))$ c) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x(x + 1) - x^2)$

3. a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 2}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + x + 1}{x(x - 2)}$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + 1}{x^2 - x}$

4. a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x + 1 - \dfrac{x^2}{x - 3}\right)$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x + 1 - \dfrac{x^2}{x + 1}\right)$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x}(x^2 + 1)$

5. a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x(x+1)})$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x+1})$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{2x-1} - \sqrt{x+1})$

6. a) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^3}\right)$ b) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + x - 4}{x^2}$.

7. a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{x^2 + x}$ b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$ c) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x^2 + x - 1}{-x^3 + 8x + 7}$.

8. a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}$ b) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{3x + 1} - 4}{x - 5}$ c) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt{x + 6}}{x + 2}$.

2

Démontrer que la fonction f admet dans chacun des cas suivants un prolongement par continuité en x_0 que l'on définira.

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$, $x_0 = 0$ b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$, $x_0 = 1$

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2-x}-2}{x+2}$, $x_0 = -2$.

3

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x+2}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

1. Déterminer la limite de f à droite en – 2. Interpréter ce résultat graphiquement.
2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement ce résultat.

4

Soit f une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x + \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+x}}$.

1. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à (C_f) en $+\infty$.
2. Déterminer les positions relatives de (C_f) et de (Δ) sur $]0; +\infty[$.

5

Démontrer que la courbe (C_f) de la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x-\sqrt{x}}{x+1}$ admet une asymptote en $+\infty$ à préciser.

6

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = 0$ est asymptote à (C_f) en $+\infty$.

2. **a)** Démontrer que la droite (Δ') d'équation $y = -2x$ est asymptote à (C_f) en $-\infty$.

b) Déterminer les positions relatives de (C_f) et de la droite (Δ').

7

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

On suppose que f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$.

1. Déterminer l'image de l'intervalle $]0;+\infty[$ par f.

2. Démontrer que l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0;+\infty[$.

8

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^*$. On suppose que :

- f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;0[$.
- f est strictement croissante sur l'intervalle $]0;1[$.
- f est strictement décroissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$.
- $f(1) = 3$, $f(4) = -2$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$.

1. Déterminer les images de chacun des intervalles $]-\infty;0[$, $]0;1[$ et $[1;+\infty[$ par f.

2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]1;4[$.

9

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^3 - x^2 + 1$.

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]-\infty ; 0]$.
2. Vérifier que : $-0,76 < \alpha < -0,75$.

10

Soit f une fonction continue sur $]0 ; +\infty[$ dont le tableau de variation est dressé ci-dessous :

x	0		$+\infty$
f '(x)	‖	+	
f (x)	‖ -1	↗	2

1. Démontrer que f admet une bijection réciproque que l'on notera f^{-1}.
2. a) Donner le sens de variation de f^{-1}.

   b) Dresser le tableau de variation de f^{-1}.

DERIVATION-
ETUDE de FONCTIONS

L'essentiel du cours sur la dérivation

1) Dérivabilité en un nombre réel a.

éfinition : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert K et $a \in K$.

n dit que f est dérivable en a si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = L$, où L est un nombre réel.

2) Equation de la tangente au point d'abscisse a

$y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

3) Calculs de dérivées

f(x)		k	x	$x^r ; r \in \mathbb{Q}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{x}$	e^x	lnx	sinx	tanx
f'(x)		0	1	rx^{r-1}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$-\frac{1}{x^2}$	e^x	$\frac{1}{x}$	cosx	$\frac{1}{\cos^2 x}$

u	v	u+v	uv	$\frac{1}{v}$	$\frac{u}{v}$	$u^r ; r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{1\}$	$\sqrt{u}$	e^u	$\ln\lvert u \rvert$
u'	v'	$u' + v$	$u'v + uv'$	$-\frac{v'}{v^2}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$ru'u^{r-1}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u'e^u$	$\frac{u'}{u}$

ropriété : Soit u une fonction dérivable en a et v une fonction dérivable en $u(a)$.

- La fonction $h = v o u$ est dérivable en a.
- $h'(a) = u'(a) \times v'(u(a))$.

4) Dérivation et fonction strictement monotones

ropriété : Soit f dérivable et strictement monotone sur un intervalle K telle que : $\forall x \in K, f'(x) \neq 0$.

- La fonction f réalise une bijection de K sur f (K)
- La bijection réciproque f^{-1} est dérivable sur f (K) et: $\forall\ b \in f(K), (f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.

1

Calculer la dérivée de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1. a) $f(x) = x^2 - x + 10$ b) $f(x) = -3x^2 + 4x$ c) $f(x) = \frac{7}{30}(-5x^6 + x^5 + 2)$

   d) $f(x) = (1-x)(x+3)$ e) $f(x) = 7x(2x-1) + 11(x+10)$

2. a) $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$ b) $f(x) = \frac{3}{4x^4}$ c) $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2}$

3. a) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ b) $f(x) = \frac{2x+7}{x+5}$ c) $f(x) = \frac{3}{x+5} - \frac{x}{x+2}$

4. a) $f(x) = (2x-1)^4$ b) $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ c) $f(x) = \frac{5-x}{(x+1)^3}$

   d) $f(x) = \frac{5x^2+3x+12}{x^2-x+10}$.

2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (1-2x)^2 + \frac{1}{x^2-x+10}$.

Vérifier que pour tout nombre réel x, $f'(x) = \frac{(2x^2-2x+21)(2x^2-2x+19)(2x-1)}{(x^2-x+10)^2}$.

3

Calculer f '(x), pour tout nombre réel x strictement positif dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x+1}$; b) $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$; c) $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x^2+1}$.

4

Calculer la dérivée f ' de la fonction f dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = \sin x - \cos x$ b) $f(x) = \cos(2x + \pi)$ c) $f(x) = \sin x \cos x$.

5

Déterminer sur l'intervalle $]0 ; \frac{\pi}{2}[$ la dérivée f ' de la fonction f dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = \sin^2 x$ b) $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ c) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$.

6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos x\sqrt{1 + \sin^2 x}$.

Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{-2\sin^3 x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}$.

7

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^2 + bx + c$.

Déterminer b et c pour que $f(0) = -1$ et $f'(2) = 5$.

8

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x + a}{x^2 + b}$ où a est un nombre réel et b est un nombre réel strictement positif.

1. Vérifier que pour tout nombre réel x, $f'(x) = \frac{-x^2 - 2ax + b}{(x^2 + b)^2}$.

2. a) Déterminer a et b pour que : $f(\frac{1}{2}) = -\frac{2}{7}$ et $f'(-1) = 0$.

   b) Vérifier alors que : $f'(5) = 0$.

9

Soit h la fonction définie sur $]-1\,;+\infty[$ par : $h(x)=\dfrac{x^2-2}{x+1}$.

1. Calculer les limites de h aux bornes de son ensemble de définition.
2. a) Calculer $h'(x)$.

   b) Déterminer le sens de variation de h.
3. Démontrer que h est une bijection de $]-1\,;+\infty[$ sur un intervalle J à déterminer.
4. a) Calculer $h(1)$ et $h'(1)$.

   b) On note h^{-1} la bijection réciproque de h.

   Démontrer que h^{-1} est dérivable en $-\dfrac{1}{2}$ et calculer $(h^{-1})'(-\dfrac{1}{2})$.

10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par : $f(x)=\dfrac{2x^2+x-6}{(x+1)^2}$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J).

(Unité graphique:1 cm)

1. Calculer la limite de f en -1. Interpréter graphiquement ce résultat.
2. a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

   b) Interpréter graphiquement ces résultats.
3. a) Démontrer que pour tout nombre réel x différent de -1, $f'(x)=\dfrac{3x+13}{(x+1)^3}$.

   b) Déterminer le sens de variation de f.

   c) Dresser le tableau de variation de f.
4. Résoudre l'équation $f(x)=0$.
5. Tracer (C).

11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + x + 1$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

Démontrer que le point I(0 ; 1) est centre de symétrie de (C).

12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2x + 2}$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

(*Unité graphique:1 cm)*

1. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
2. Démontrer que la droite d'équation $x = -1$ est axe de symétrie de (C).
3. a) Démontrer que $f'(x) = \dfrac{-2(x+1)}{(x^2 + 2x + 2)^2}$.

   b) Dresser le tableau de variation de f.
4. Tracer (C).

13

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x\left|x - 1\right| + 2$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O ,I ,J) .

Unité graphique : On prendra 2cm en abscisse et 1cm en ordonnée.

1. Exprimer $f(x)$ sans les barres de valeurs absolues.
2. a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

   b) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.
3. Interpréter graphiquement la question 2).

4. a) Calculer $\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ et $\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

b) La fonction f est-elle dérivable en 1 ?

c) Interpréter graphiquement ce résultat.

5. a) Déterminer la dérivée f ' de la fonction f.

b) Déterminer le sens de variation de la fonction f.

c) Dresser le tableau variation de f.

6. Tracer (C).

14

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 - x + 1}$.

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. a) Vérifier que pour tout nombre réel x, $\frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 - x + 1} = x + 2 + \frac{x-1}{x^2 - x + 1}$.

b) En déduire que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est asymptote à (C).

3. Déterminer les positions relatives de (C) et de (D).

4. Démontrer que pour tout nombre réel x, $f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 2x + 2) + 1}{(x^2 - x + 1)^2}$.

5. a) Justifier que pour tout nombre réel x, $x^2 - 2x + 2 > 0$.

b) En déduire le sens de variation de f.

c) Dresser le tableau de variation de f.

6. a) Déterminer une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 0.

b) Tracer la courbe représentative (C) de f dans le plan muni du repère orthonormé direct (O, I, J). (*Unité graphique : 1cm*).

15

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{x-1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

On désigne par (C) la courbe de f dans le plan muni du repère orthonormé direct (O, I, J).

(Unité graphique : 2cm).

1. Calculer la limite de f en 0. En donner une interprétation graphique.
2. a) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

   b) Déterminer les positions relatives de (C) et de (Δ).
3. *On suppose que f est dérivable sur $]0;+\infty[$.*

   a) Vérifier que : $\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{2-\sqrt{x}}{2x^2}$.

   b) Démontrer que f est strictement croissante sur $]0;4[$ et que f est strictement décroissante sur $]4;+\infty[$.

   c) Dresser le tableau de variation de f.
4. a) Démontrer que f réalise une bijection de $]0;4]$ sur l'intervalle $]0;\frac{5}{4}]$.

   b) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0;4]$.

   c) Vérifier que : $0,38 < \alpha < 0,39$.
5. Tracer de la courbe (C).
6. On note h la restriction de f à $]0;4]$ et on désigne par h^{-1} la bijection réciproque de h.

   a) Calculer $h(3)$ et $h'(3)$.

   b) Justifier que h^{-1} est dérivable en $\frac{2+\sqrt{3}}{3}$ puis calculer. $(h^{-1})'(\frac{2+\sqrt{3}}{3})$.

16

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1} - x}$.

Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O,I,J).

(Unité graphique: 2 cm).

1. a) Démontrer que pour tout nombre réel x, $\sqrt{x^2+1} - x > 0$.

   b) Démontrer que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

2. Calculer la limite de f en $-\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

3. a) Justifier que pour tout nombre réel x, $f(x) = x(\sqrt{x^2+1} + x)$.

   b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, et en donner une interprétation graphique.

4. a) Démontrer que pour tout nombre réel x, $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1} - x)^2}$.

   b) En déduire le sens de variation de f.

   c) Dresser le tableau de variation de f.

5. a) Démontrer que $y = x$ est une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

b) Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à déterminer.

6. On note (Γ) la courbe de la bijection réciproque de f.

   Tracer (T) et (C) dans le repère (O, I, J).

PRIMITIVES

L'essentiel du cours sur les primitives

1) Primitive d'une fonction

Définition : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle K. On appelle primitive de f sur K toute fonction F telle : $\forall x \in K, F'(x) = f(x)$.

2) Ensemble des primitives d'une fonction.

Propriété : Soit F une primitive de la fonction f sur un intervalle K. Alors les primitives de f sur K sont les fonctions $x \mapsto F(x)+c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

3) Primitives de fonctions élémentaires.

f '(x)	a	$x^r ; r \in \mathbb{Q}\setminus\{-1\}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{x}$	e^x	$\cos x$	$\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
f (x)	a x +c	$\frac{x^{r+1}}{r+1} + c$	$2\sqrt{x} + c$	$\ln x + c$	$e^x + c$	$\sin x + c$	$-\cos x + c$	$\tan x + c$

4) Primitives et opération sur les fonctions.

fonction	u	v	u + v	$ku ; k \in \mathbb{R}$	$u'u^n ; r \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\}$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$-\frac{u'}{u^2}$	u'sinu
primitive	U	V	U+V	kU	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + c$	$2\sqrt{u} + c$	$\frac{1}{u}$	−cosu

1

Vérifier que la fonction g est une primitive de la fonction f sur l'intervalle K dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = 3x^2 + 10x + 3$

$g(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 4$

$K = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \cos x \left(1 - 6\sin^2 x\right)$

$g(x) = \sin x \cos(2x)$

$K = \mathbb{R}$.

2

Déterminer une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$ dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = x^3 - x$ **b)** $f(x) = 36x^8$ **c)** $f(x) = \dfrac{5x^4 + 8x^3}{12}$.

3

Reprendre l'exercice précédent dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = 21x^2 + x - 2$ **b)** $f(x) = (x-2)(3-x)$ **c)** $f(x) = 3(x+1)(x^2+2x+3)$.

4

Déterminer une primitive F sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction f dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x}$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{x}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$ **c)** $f(x) = \dfrac{x^2}{x^{100}}$

d) $f(x) = \sqrt{x}\left(x - \dfrac{1}{x^{50}}\right)$.

5

Déterminer une primitive sur $]-\infty\,;-1[$ de la fonction f dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = (x-17)^4$ **b)** $f(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3}$ **c)** $f(x) = \dfrac{4}{(2x+2)^6}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$.

6

Déterminer une primitive F sur $\mathbb{R}$ de la fonction f dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^4}$ **b)** $f(x) = \dfrac{2x-2}{(-x^2+2x-3)^2}$.

7

Reprendre l'exercice précédent dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = \cos x \sin x$ **b)** $f(x) = \sin^2 x\ \cos^2 x$ **c)** $f(x) = \cos x \cos(\sin x)$.

8

Soit h la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $h(x) = x + \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{18}{7x^4}$.

Déterminer la primitive H de la fonction h sur $]0\,;+\infty[$ telle que : $H(1) = \dfrac{19}{14}$.

9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin x + \cos(2x)$.

1. Déterminer une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer la primitive G de la fonction f sur $\mathbb{R}$ telle que $G\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

LOGARITHME NEPERIEN

L'essentiel du cours sur Logarithme népérien

1) Définition et propriétés

Définition :On appelle fonction logarithme népérien et on note ln la primitive sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1 de la fonction inverse.

Propriété: Soit a et b deux nombres réels strictement positifs et $r \in \mathbb{Q}$.

$\ln a + \ln b = \ln(ab)$ $\quad \ln\frac{1}{a} = -\ln a$ $\quad \ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$ $\quad \ln a^r = r\ln a$

Propriété : (Limites remarquables)

$\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Pour tout $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to 0} x^{\alpha}\ln x = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} = 0$.

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

2) Dérivée et primitive d'une fonction comportant ln.

Propriété : Soit u une fonction dérivable ne s'annulant pas sur un intervalle K.

La fonction $h = \ln o|u|$ est dérivable sur K et pour tout x appartenant à K, $h'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Propriété: Soit u une fonction dérivable et ne s'annulant pas sur un intervalle K.

La fonction $\frac{u'}{u}$ admet pour primitive sur K la fonction $\ln o|u|$.

1

Simplifier les expressions suivantes :

a) $\ln 64$ b) $\ln(2^4 \times 5^3)$ c) $\ln\left(\frac{2025}{135}\right)$ d) $\ln(\frac{153}{17})$

2

Simplifier les expressions suivantes :

a) $\ln(2e) - 1$ b) $\ln(e^3) + (\ln e)^2$ c) $\ln(\frac{1}{e}) - \ln(e^2 + e) + \ln(1 + \frac{1}{e})$

3

Déterminer les ensembles de définition de chacune des fonctions f, g , h et k définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telles que :

a) $f(x) = \ln(x+1)$ b) $g(x) = \ln(x^2 - 1)$ c) $h(x) = \ln\frac{x+1}{1-x}$

d) $k(x) = \ln\left(\left|\frac{x^2 - 4}{x}\right|\right)$.

4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. a) $\ln x = 3$ b) $\ln x = -4$ c) $-\ln x = \frac{1}{2}$ d) $-4\ln x = -16$.

2. a) $\ln x - 2 = 0$ b) $\ln x + 2 = 0$ c) $2\ln x + 3 = 0$ d) $-2\ln x + 4 = 0$.

5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\ln(x+1) = 0$ b) $\ln(2x + 8) = 2\ln x$ c) $\ln x + \ln(x-1) = \ln(x^2 + 2x - 3)$ (E).

6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. a) $\ln x > 3$ b) $\ln x < -2$ c) $-\ln x \geq 1$ d) $-4\ln x \leq 2$.
2. a) $\ln x - 2 > 0$ b) $\ln x + 4 < 0$ c) $-4\ln x - 8 \geq 0$ d) $-\ln(2x) + 4 \leq 0$.

1

Simplifier les expressions suivantes :

a) $\ln 64$ b) $\ln(2^4 \times 5^3)$ c) $\ln\left(\frac{2025}{135}\right)$ d) $\ln(\frac{153}{17})$

2

Simplifier les expressions suivantes :

a) $\ln(2e) - 1$ b) $\ln(e^3) + (\ln e)^2$ c) $\ln(\frac{1}{e}) - \ln(e^2 + e) + \ln(1 + \frac{1}{e})$

3

Déterminer les ensembles de définition de chacune des fonctions f, g, h et k définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telles que :

a) $f(x) = \ln(x+1)$ b) $g(x) = \ln(x^2 - 1)$ c) $h(x) = \ln\frac{x+1}{1-x}$

d) $k(x) = \ln\left(\left|\frac{x^2 - 4}{x}\right|\right)$.

4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. a) $\ln x = 3$ b) $\ln x = -4$ c) $-\ln x = \frac{1}{2}$ d) $-4\ln x = -16$.

2. a) $\ln x - 2 = 0$ b) $\ln x + 2 = 0$ c) $2\ln x + 3 = 0$ d) $-2\ln x + 4 = 0$.

5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\ln(x+1) = 0$ b) $\ln(2x + 8) = 2\ln x$ c) $\ln x + \ln(x-1) = \ln(x^2 + 2x - 3)$ (E).

6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. a) $\ln x > 3$ b) $\ln x < -2$ c) $-\ln x \geq 1$ d) $-4\ln x \leq 2$.
2. a) $\ln x - 2 > 0$ b) $\ln x + 4 < 0$ c) $-4\ln x - 8 \geq 0$ d) $-\ln(2x) + 4 \leq 0$.

7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. a) $\ln(x+1) > \ln 3$ b) $\ln x \leq 3\ln 2$ c) $\ln x > 10$ d) $\ln(x^2+x+1) \leq 0$

2. a) $\ln(-x) + \ln(x+4) > \ln 3$ b) $\ln(x^2 - 2x + e) \geq 1$.

8

1. Développer $(x^2 + x - 2)(x-3)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 + x - 2 = 0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E): $\ln^3 x - 2\ln^2 x - 5\ln x + 6 = 0$.

9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I) : $\ln^2 x - 5\ln x + 6 \leq 0$.

10

Calculer chacune des limites suivantes : a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x)}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x^2-1}$.

11

Calculer la limite de la fonction f en 0 et en $+\infty$ dans chacun des cas suivants :

1. a) $f(x) = (\ln x - 1)\ln^2 x$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x$ c) $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+\ln x}$.

2. a) $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ b) $f(x) = x^3 \ln x$ c) $f(x) = \sqrt{x}\,\ln x$.

12

Soit la fonction f définie par : $\forall x \in]0;+\infty[\setminus\{1\}$, $f(x) = \dfrac{x\ln x}{x-1}$ et $f(1) = 1$.

Démontrer que f est continue en 1.

13

Soit f la fonction définie par : $\forall x \in]0;+\infty[$, $f(x) = x\ln x$ et $f(0) = 0$.

1. Démontrer que la fonction f est continue en 0.

2. La fonction f est –elle dérivable à droite en 0 ? Interpréter graphiquement ce résultat.

14

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J).

1. Justifier que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}\setminus\{-1\ ;\ 1\}$.

2. a) Calculer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

   b) Calculer les limites de f à droite en 1 et à droite en -1.

3. Démontrer que la fonction f est paire. Interpréter graphiquement le résultat

4. *On suppose que f est dérivable sur $]-\infty;-1[\ \cup\ ]1;+\infty[$.*

   Démontrer que : $\forall x \in]-\infty\ ;-1[\ \cup\ ]1\ ;+\infty[$,

   $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x^2-1)^2}$ où $g(x) = (x^2+1)\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| + 2x$.

15

Déterminer la dérivée f ' de la fonction f définie sur l'intervalle K dans chacun des cas suivants :

1. a) $f(x) = x + \ln x$, $K =]0;+\infty[$ b) $f(x) = \ln(2x)$, $K =]0;+\infty[$ c) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $K =]0\ ;+\infty[$.

2. a) $f(x) = \ln^2 x$, $K =]0;+\infty[$ b) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$, $K =]0\ ;1[$ c) $f(x) = \dfrac{\ln x + 1}{\ln x - 1}$, $K =]0\ ;e[$.

3. a) $f(x) = x\ln(1-x)$, $K =]-\infty\ ;1[$ b) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$, $K =]-\infty\ ;0[$

c) $f(x) = \frac{x}{x+1}\ln(x)$, $K =]0;+\infty[$.

4. a) $f(x) = \frac{x+1}{x} + \ln x$, $K =]0;+\infty[$ **b)** $f(x) = x^2\ln(x^2+1)$, $K = \mathbb{R}$.

16

Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle K dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ et $K =]-1;+\infty[$ **b)** $f(x) = \frac{1}{x}\ln x$ et $K =]0;+\infty[$

c) $f(x) = \frac{1}{x\ln^2 x}$ et $K =]0;1[$ **d)** $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ et $K = \mathbb{R}$.

17

Soit f une fonction dérivable et strictement positive sur l'intervalle $]0;+\infty[$ telle que :

$$xf'(x) = \frac{f(x)}{x^2+1} \quad \text{et} \quad f(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

1. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que pour tout nombre réel x non nul,

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}.$$

2. Expliciter $f(x)$.

18

On désigne par g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

1. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$.
2. Déterminer les positions relatives de (C) et de (Δ).

19

Soit f fonction définie sur] 0 ; +∞ [par :

$$f(x) = \frac{4x - 2\ln x - 1}{2x}.$$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal (O, I, J).

Unité graphique : 2 cm en abscisses et 1 cm en ordonnées.

1. Calculer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat

2. Calculer la limite de f en +∞. Interpréter graphiquement ce résultat.

3. *On admet que la fonction f est dérivable sur] 0 ; +∞[.*

a) Démontrer que pour tout nombre réel x strictement positif, $f'(x) = \frac{2\ln x - 1}{2x^2}$.

b) Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

c) En déduire le sens de variation de f.

4. Dresser le tableau de variation de f.

5. Construire la courbe (C).

20

<u>Partie A</u>

Soit la fonction g définie sur] 0 ; +∞ [par :

$g(x) = 1 - x - 2\ln x.$

1. Déterminer le signe de g ' (x) suivant les valeurs de x.

2. Dresser le tableau de variation de g (sans les limites).

3. Calculer g (1). Déterminer le signe de g

Partie B

On considère la fonction f définie sur] 0 ; +∞ [par : $f(x) = \frac{x + \ln x}{x^2}$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J). *Unité : 2cm.*

1. Démontrer que la limite de f en 0 est $-\infty$ .Interpréter graphiquement ce résultat
2. Démontrer que la limite de f en $+\infty$ est 0. Interpréter graphiquement ce résultat
3. a) Démontrer que pour tout nombre réel strictement positif x, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.

   b) Déterminer le sens de variation de f.

   c) Dresser le tableau de variation de f.
4. a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans$]0;1[$.

   b) Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près.
5. Tracer (C).

EXPONENTIELLE

L'essentiel du cours sur exponentielle

1) Définition et propriétés

Définition : On appelle fonction exponentielle et on note exp la bijection réciproque de la fonction ln.

$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) = e^x$.

Propriétés : (limites remarquables)

- $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$; $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$; $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
- Pour tout $\alpha > 0$, $\lim_{x \to -\infty} x^\alpha e^x = 0$; $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$
- $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

2) Fonction comportant exp.

Propriété : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle K.

- La fonction $h = \exp \circ u$ est dérivable sur K
- $h'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

Propriété : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle K.

La fonction h telle que : $\forall x \in K$, $h(x) = u'(x)e^{u(x)}$ admet pour primitive sur K la fonction $\exp \circ u$.

1

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1. a) $f(x) = e^{2x}$ b) $f(x) = e^{\frac{1}{x-1}}$ c) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ d) $f(x) = e^{x\ln x}$.

2. a) $f(x) = \dfrac{x^2}{1+e^x}$ b) $f(x) = \dfrac{e^x+1}{e^x-e}$ c) $f(x) = \ln\left|e^x - 1\right|$.

2

Soit f, g et h les fonctions définies par : $f(x) = x^2e^x + \dfrac{2x}{x-2}$, $g(x) = (x-2)e^x$ et $h(x) = e^x + e^{-x}$.

On admet qu'il existe un nombre réel α tel que $g(\alpha) = -1$ avec $\alpha \in [1{,}841\ ;\ 1{,}842]$.

1. Justifier que : $f(\alpha) = -\alpha$ et $h(\alpha) = -\alpha + 2 + \dfrac{1}{-\alpha+2}$.

2. En déduire un encadrement de $h(\alpha)$ à 10^{-1} près.

3

Calculer la limite de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = e^{2x}$ b) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$ c) $f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}}$ d) $f(x) = x^2e^x$.

4

Reprendre l'exercice précédant pour les limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

a) $f(x) = e^x + x - 1$ b) $e^x - x + 1$ c) $f(x) = \dfrac{x\,e^x}{x^2-1}$ d) $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$.

5

Calculer les limites suivantes : a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x(x-1)} - 1}{x}$ et b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$.

6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. a) $e^x = e^2$ b) $e^{2x} = 1$ c) $2e^x = 1$ d) $(e^x)^2 = e^{x+1}$.

2. a) $e^x - 2 = 0$ b) $4e^{2x} - 1 = 0$ c) $-e^x + 2 = 0$ d) $3e^{-x} - 4 = 0$.

3. a) $e^{\frac{1}{x}} = e^{-x+2}$ b) $3e^{2x} - 2e^x - 1 = 0$.

7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :

1. **a)** $e^{x} - 4 > 0$ **b)** $e^{x} - 3 \leq 0$ **c)** $-e^{x} + 4 \geq 0$ **d)** $e^{2x} - 5e^{x} + 6 > 0$.

2. **a)** $e^{2x} - 5 > 0$ **b)** $3e^{x+1} - 6 \leq 0$ **c)** $-e^{-x} + 2 < 0$ **d)** $3e^{\frac{x}{2}} - 4 \geq 0$

e) $(e^{x} - 1)(2 - e^{x}) \geq 0$.

8

Déterminer la dérivée f ' de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) **a)** $f(x) = 2e^{x}$ **b)** $f(x) = xe^{x}$ **c)** $f(x) = (x-1)e^{x}$ **d)** $f(x) = (e^{x} - 1)(e^{x} + 3)$.

2) **a)** $f(x) = e^{-x}$ **b)** $f(x) = 4e^{\frac{1}{2}x}$ **c)** $f(x) = e^{-2x+3}$ **d)** $f(x) = (1-x)e^{-3x}$

e) $f(x) = x(e^{-x} + x)$.

3) **a)** $f(x) = x(e^{x} - e^{-x})$ **b)** $f(x) = \dfrac{e^{x}}{e^{x} + 1}$ **c)** $f(x) = \dfrac{e^{x}}{x + 1}$.

4. **a)** $f(x) = e^{x}\ln(x)$ **b)** $f(x) = (1-x)e^{\sqrt{x}}$ **c)** $f(x) = \dfrac{x^{2}e^{-x}}{x - 1}$.

9

Déterminer une primitive F sur $\mathbb{R}$ de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1. **a)** $f(x) = e^{2x}$; **b)** $f(x) = e^{x} + e^{-x}$. **c)** $f(x) = 35x\,e^{5x^{2}}$.

2. **a)** $f(x) = 1 + e^{x} + \dfrac{1}{e^{x}}$; **b)** $f(x) = (2e^{x} + 1)(e^{x} + 2)$; **c)** $f(x) = (e^{2x} + 1)e^{-2x}$.

3. **a)** $f(x) = \dfrac{e^{x}}{e^{x} + 1}$; **b)** $f(x) = \dfrac{e^{x}}{(e^{x} + 1)^{2}}$; **c)** $f(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$; **d)** $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{e^{-x} + 3}}$.

10

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 - x + 3)e^{2x}$

11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x(e^{-x} - 1)$.
On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J).
(Unité graphique 2cm).

I)

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (1 - x)\ e^{-x} - 1$.

1. Calculer la limite de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. a) Vérifier que pour tout nombre réel x, $g'(x) = (x - 2)\ e^{-x}$.

   b) Déterminer le sens de variation de g. Dresser le tableau de variation de g.

3. Vérifier que : $g(0) = 0$ puis déterminer le signe de la fonction g.

II)

1. Calculer la limite de f en $-\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement ce résultat.

2. Calculer la limite de f en $+\infty$.

3. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = -x$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

4. Déterminer les positions relatives de (C) et (Δ).

5. a) Démontrer que pour tout nombre réel x, $f'(x) = g(x)$.

   b) Dresser le tableau de variation de f.

6. Tracer (Δ) et (C).

12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1} - \frac{1}{2}x + 1$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J).
(Unité graphique 2cm).

1. a) Calculer la limite de f en $-\infty$.

   b) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 1$ est asymptote à (C) en $-\infty$.

   c) Déterminer les positions relatives de (C) et de (Δ).

2. a) Justifier que pour tout nombre réel x, $f(x) = -\frac{x}{e^x + 1} + \frac{1}{2}x + 1$.

   b) Calculer les limites de f en $+\infty$.

   c) Démontrer que la droite (Δ') d'équation $y = \frac{1}{2}x + 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

   d) Déterminer les positions relatives de (C) et de (Δ').

3. *On admet que la fonction f est dérivable sur* $\mathbb{R}$.

   a) Démontrer que pour tout nombre réel x, $f'(x) = \frac{h(x)}{2(e^x+1)^2}$ où $h(x) = e^{2x} + 2xe^x - 1$

   b) Calculer h (0) et démontrer que : $\forall x < 0$, $h(x) < 0$ et $\forall x > 0$, $h(x) > 0$.

   c) Déterminer le sens de variation de h.

   d) Dresser le tableau de variation de h.

4. Construire (C).

13

Partie A

Soit f la fonction numérique à variable réelle définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{xe^x}{(e^x+1)^2}.$$

1. On désigne par G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $G(x) = \frac{x}{e^x+1}$.

   Démontrer que pour tout nombre réel x, $G'(x) + f(x) = \frac{1}{e^x+1}$.

2. Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{e^x+1} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$.
3. En s'inspirant de ce qui précède, déterminer la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0

Partie B

Soit h la fonction numérique à variable réelle définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \ln(1+e^{-x}) + \frac{x}{e^x+1}.$$

On désigne par (C) la courbe représentative de h dans un repère orthogonal direct (O,I,J).

(Unité graphique : 1 cm en abscisse et 2 cm en ordonnées).

1. Démontrer que la fonction h est paire. Interpréter graphiquement ce résultat.
2. a) Justifier que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x+1} = +\infty$.

   b) Déterminer la limite de h en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.
3. *On admet que la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$:*

   a) Démontrer que pour tout nombre réel x, $h'(x) = \frac{-xe^x}{(e^x+1)^2}$.

   b) Déterminer le sens de variation de h sur $]0;+\infty[$.
4. En considérant les questions *Partie B 1) et 3b)*, dresser le tableau de variation de h sur
5. Construire la courbe (C).

SUITES NUMERIQUES

L'essentiel du cours sur les suites numériques

1) Majoration et minoration

Propriété : Soit u une suite numérique définie sur un ensemble E.

- u est dite majorée s'il existe un nombre réel M tel que : $\forall n \in E, u_n \leq M$.
- u est dite minorée s'il existe un nombre réel m tel que : $\forall n \in E, u_n \geq m$.
- u est dite bornée si u est à la fois majorée et minorée.

2) Sens de variation d'une suite numérique

Propriété : Soit u une suite définie sur un ensemble E.

- u est dite croissante si pour tout entier naturel n élément de E, $u_n \leq u_{n+1}$.
- u est dite décroissante si pour tout entier naturel n élément de E, $u_{n+1} \leq u_n$.
- u est dite constante si pour tout entier naturel n élément de E, $u_n = u_{n+1}$.

Propriété : Soit u une suite définie par : $u_n = f(n)$ où f est une fonction.
u et f ont le même sens de variation

3) Raisonnement par récurrence

Pour démontrer q'une assertion P(n) est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à un entier naturel N donné.

- Vérifie que P(N) est vrai.
- On suppose que pour un entier naturel k supérieur à N, P(k) est vrai et on démontre que P(k+1) est vrai.
- On conclut que P(n) est vrai pour tout entier naturel n supérieur ou égal à N.

SUITES NUMERIQUES

L'essentiel du cours sur les suites numériques

1) Majoration et minoration

Propriété : Soit u une suite numérique définie sur un ensemble E.

- u est dite majorée s'il existe un nombre réel M tel que : $\forall n \in E, u_n \leq M$.
- u est dite minorée s'il existe un nombre réel m tel que : $\forall n \in E, u_n \geq m$.
- u est dite bornée si u est à la fois majorée et minorée.

2) Sens de variation d'une suite numérique

Propriété : Soit u une suite définie sur un ensemble E.

- u est dite croissante si pour tout entier naturel n élément de E, $u_n \leq u_{n+1}$.
- u est dite décroissante si pour tout entier naturel n élément de E, $u_{n+1} \leq u_n$.
- u est dite constante si pour tout entier naturel n élément de E, $u_n = u_{n+1}$.

Propriété : Soit u une suite définie par : $u_n = f(n)$ où f est une fonction.
u et f ont le même sens de variation

3) Raisonnement par récurrence

Pour démontrer q'une assertion P(n) est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à un entier naturel N donné.

- Vérifie que P(N) est vrai.
- On suppose que pour un entier naturel k supérieur à N, P(k) est vrai et on démontre que P(k+1) est vrai.
- On conclut que P(n) est vrai pour tout entier naturel n supérieur ou égal à N.

4) Suites arithmétiques et suites géométriques.

	suite arithmétique de raison r	suite géométrique de raison $q \neq 1$
premier terme	u_0	u_0
formule de récurrence	$u_{n+1} - u_n = r$	$u_{n+1} = qu_n$
formule explicite	$u_n = u_0 + nr$	$u_n = u_0 q^n$
$u_0 + u_1 + \dots + u_n$	$\frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$	$u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

5) Limite d'une suite numérique

Définition : On dit qu'une suite converge si sa limite existe et est finie sinon on dit que la suite diverge.

Si une suite admet une limite, cette limite est unique.

1

Calculer les cinq premiers termes de la suite U définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = 12n^2 - n + 5$.

2

On considère la suite U définie par : $\begin{cases} U_0 = \ln 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n e^{U_n} \end{cases}$.

Mettre sous la forme de $2^a \ln 2$ où $a \in \mathbb{N}$, les quatre premiers termes de la suite U.

3

Soit (V_n) la suite définie par : $\begin{cases} V_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = V_n - \ln(1 + V_n) \end{cases}$.

On désigne par g la fonction définie par : $g(x) = x - \ln(1 + x)$.

On note (C_g) sa courbe représentative sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$. On appelle (Δ) la droite d'équation $y = x$.

1. Construire sur l'axe des abscisses, à l'aide de la courbe (C_g) et de la droite (Δ) les quatre premiers termes de la suite (V_n).
2. Conjecturer le sens de variation de la suite (V_n).
3. a) Démontrer que : $\forall x \in [0;+\infty[, g'(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

   b) Démontrer que : $\forall x \in [0;+\infty[, g(x) > 0.$
4. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ V_n > 0$.

4

Soit la suite U définie par : $U_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = 2 - U_n$.

Démontrer que pour tout entier naturel n, $0 < U_n < 2.$

5

Soit U la suite numérique définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_n = n e^{-n}$.

Démontrer que : $0 < U_n \leq \dfrac{1}{e}$.

6

Soit V la suite numérique définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ V_n = n - \ln n$.

Démontrer que la suite V est strictement croissante.

7

Soit U la suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}^*$, de raison 3 et telle que : $U_4 = -6$.

Exprimer U_n en fonction de n.

8

Soit U la suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$, de raison $\frac{5}{2}$ et telle que $U_1 = 4$.

1. Exprimer U_n en fonction de n.
2. Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_{n+1}$.

   Exprimer S_n en fonction de n puis calculer S_{50}.

9

Soit U la suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$, de raison 2 et de premier terme U_0 donné.

Sachant que $U_0 = -\frac{1}{2}$, exprimer U_n en fonction de n.

10

Soit V la suite géométrique définie sur $\mathbb{N}^*$, de raison 3 et de premier terme 2.

1. Exprimer V_n en fonction de n.
2. Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $S_n = V_1 + V_2 + \ldots + V_n$.

   Exprimer S_n en fonction de n.
3. Déterminer la plus petite valeur de n telle que $S_n \geq 100$.

11

Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n - 1$.

Soit (V_n) la suite définie par : $V_n = U_n + 3$.

Démontrer que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

12

Calculer la limite de la suite (U_n) dans chacun des cas suivants.

a) $U_n = n^2 - n + 2$; b) $U_n = \dfrac{n^2 - n + 2}{3n^2 + 1}$; c) $U_n = (1 - n)\ln\left(\dfrac{n}{n-1}\right)$.

d) $U_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$; e) $U_n = (2\ln 2)^n$; f) $U_n = (-3)^{2n+1}$.

13

On considère les suites numériques U et V définies par :

$U_0 = -1$ et $\forall\, n \in IN$, $U_{n+1} = \dfrac{U_n + 6}{U_n + 2}$ et $V_n = \dfrac{2 - U_n}{3 + U_n}$.

1. **a)** Calculer les quatre premiers termes de la suite U

b) Justifier que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = 1 + \dfrac{4}{U_n + 2}$.

c) Démontrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq U_n \leq 5$.

2. Soit f la fonction définie sur $]-2;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x+6}{x+2}$. La courbe représentative (C_f) de f est donnée sur la **FEUILLE ANNEXE.**

a) Représenter graphiquement sur l'axe des abscisses à l'aide de (C_f) et de la droite (D) d'équation $y = x$ les quatre premiers termes de la suite U.

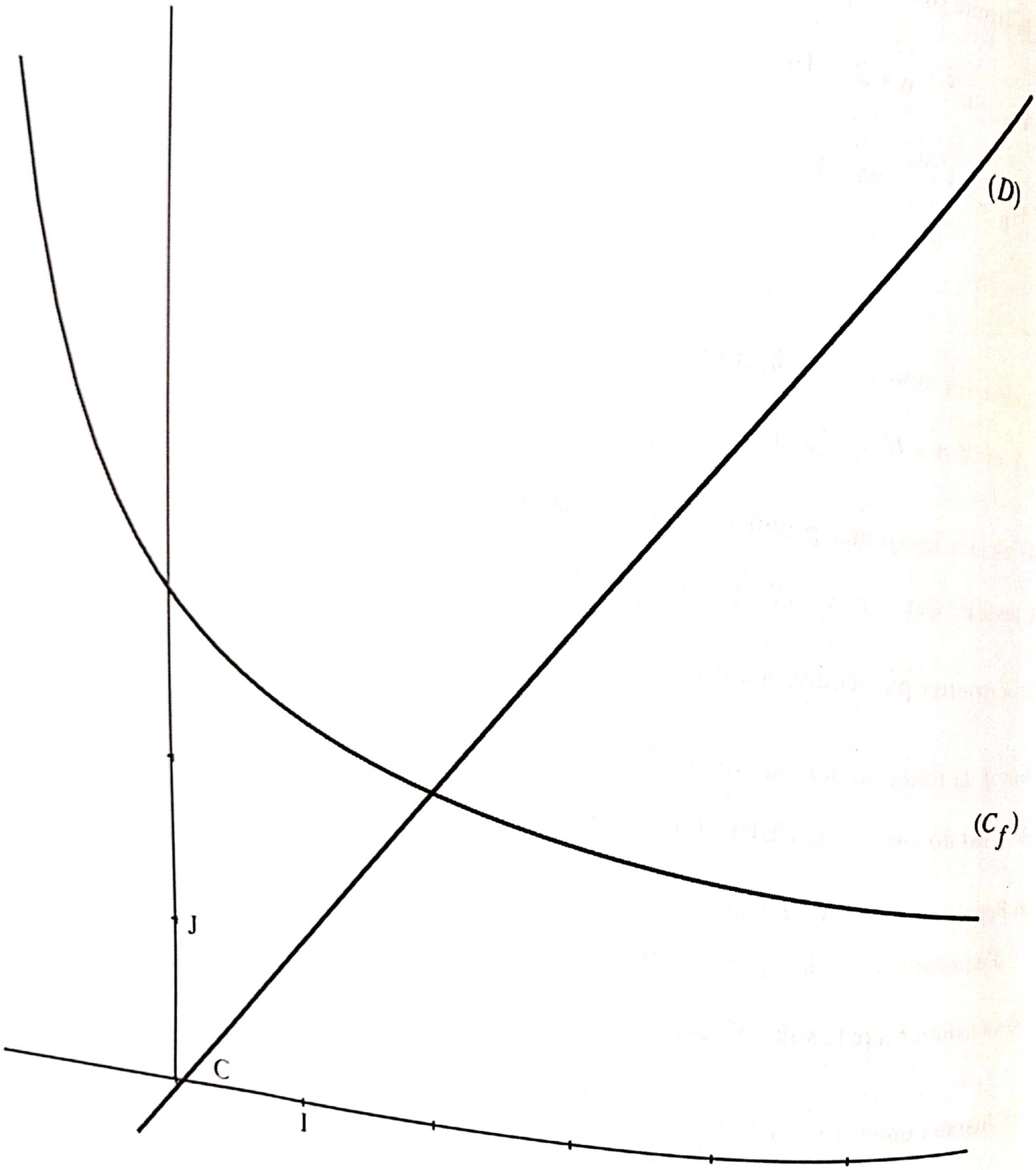
b) Démontrer que la suite V est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{4}$.

c) Justifier que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $V_n = \dfrac{3}{2}\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n$ et que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $U_n = \dfrac{2 - 3V_n}{1 + V_n}$.

d) On pose : $S_n = V_0 + V_1 + \ldots + V_n$. Justifier que $S_n = \dfrac{6}{5}(1 - (-\dfrac{1}{4})^{n+1})$.

3. Calculer les limites des suites U, V et S.

FEUILLE ANNEXE



14

Une personne loue une maison à partir du 1er Janvier 2010. Le loyer annuel initial en francs CFA étant de 1000 000, le locataire s'engage à occuper la maison pendant 12 années complètes.
Le contrat stipule en outre une augmentation annuelle de 5% du loyer de l'année précédente. On désigne par U_0 le loyer initial et par U_n le loyer payé lors de la $(n+1)^{ième}$ année ; où n est un entier naturel.

1. Calculer le loyer U_1 payé lors de la $2^{ième}$ année.
2. **a)** Justifier que la suite (U_n) définie est une suite géométrique dont on précisera la raison.

   b) Exprimer U_n en fonction de n puis calculer U_{11}.
3. Calculer la somme totale S payée au terme des 12 années de contrat.

15

Les salaires mentionnés dans l'exercice sont en francs CFA.
Monsieur DAOUDA est embauché le 1er Janvier 2010 avec un salaire de 500 000. Le contrat stipule une augmentation annuelle de 32 000 du salaire brut au 1er Janvier de chaque année.
On désigne par U_0 le salaire initial brut mensuel et U_n le salaire brut mensuel au 1er Janvier de l'année (2010 +n) où n est un entier naturel.

1. Déterminer le montant du salaire brut perçu au cours de l'année 2011, au cours de l'année 2012.
2. **a)** Justifier que la suite (U_n) définie est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

   b) Exprimer U_n en fonction de n puis calculer U_{10}.
3. Déterminer le cumul S' des salaires bruts perçus au cours des 11 premières années.

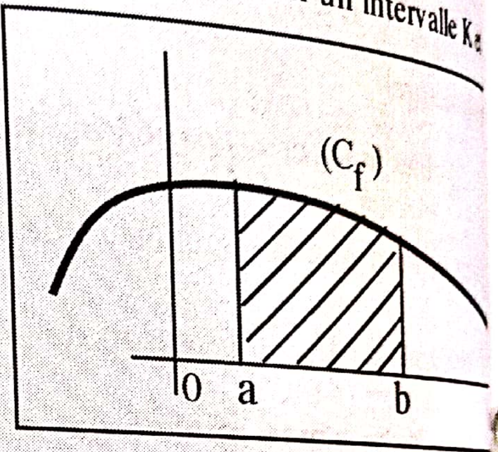
CALCUL INTEGRAL

L'essentiel du cours sur les intégrales

1) Propriété (Calcul d'aire) : Soit f ($f \geq 0$) une fonction continue sur un intervalle K ; a et b deux éléments de K avec $a < b$.

$A(D) = \left(\int_a^b f(x)dx\right)UA$ est l'aire de la partie du plan D délimitée par (C_f) et les droites d'équations $y = 0$, $x = a$ et $x = b$ où UA est l'unité.

D est la partie hachurée



2) Propriétés algébriques de l'intégrale

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle K et, a et b éléments de K.

- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ et $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$; $k \in \mathbb{R}$

3) Propriété de comparaison

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle [a ;b].
Pour tout x appartenant à [a ;b],

- $f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$
- $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

4) Intégration par parties

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle K et a et b dans K.

$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$.

1

Calculer chacune des intégrales dans chacun des cas suivants :

1. a) $\int_1^2 (3x^2 - 2x + 1)dx$ b) $\int_\pi^{-\pi} \sin(x)dx$ c) $\int_1^2 (4x - 7)(x + 11)dx$ d) $\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$.

2. a) $\int_0^{\ln 2} e^{2t}dt$ b) $\int_{-1}^{-2} (t+2)^5 dt$ c) $\int_0^1 \frac{t}{t^2+1}dt$ d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin^{45} t\, dt$.

3. a) $\int_{\sqrt{e}}^{\frac{1}{e}} \frac{\ln u}{u} du$ b) $\int_0^1 \frac{e^u}{e^u + 1} du$ c) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin u}{\cos u} du$ d) $\int_0^1 \frac{\sin u}{\cos^3 u} du$.

2

1. Vérifier que pour tout nombre réel x, $\frac{1}{e^x+1} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$.

2. Calculer $\int_0^1 \frac{1}{e^x+1} dx$.

3

Calculer les intégrales dans chacun des cas suivants :

a) $\int_0^\pi \cos^2 x dx$ b) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}} \sin^3 x dx$ c) $\int_\pi^{\frac{2\pi}{3}} (\sin^2(2x) + \sin^4 x)dx$.

4

1. Vérifier que $\int_0^{\ln 2} e^t dt = 1$.

2. On admet que : $\int_0^{\ln 2} te^t dx = 2\ln 2 - 1$. Calculer $\int_0^{\ln 2} (2-t)e^t dt$.

5

On considère les intégrales $I = \int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx$ et $J = \int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx$.

1. Calculer $I+J$ et $I-J$.
2. En déduire les valeurs exactes de I et J.

6

1. Vérifier que pour tout nombre réel x strictement supérieur à 15,
$$\frac{1}{x^2-13x-30} = \frac{1}{17}\left(\frac{1}{x-15} - \frac{1}{x+2}\right)$$
2. Calculer $\int_{16}^{79} \frac{1}{t^2-13t-30}\,dt$.

7

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}$.

1. Déterminer a et b pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$, on ait :
$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)} = \frac{ax}{x^2+1} + \frac{b}{x}.$$
2. En déduire $\int_1^e f(x)\,dx$.

8

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $A_n = \int_1^n \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - 1\right)dx$.

1. Exprimer A_n en fonction de n.
2. Calculer $\lim_{n \to +\infty} A_n$.

9

Calculer, en utilisant la relation de Chasles, les intégrales suivantes:

a) $\int_{-1}^{1} e^{|s|} ds$ **b)** $\int_{\pi}^{0} |\cos s|\, ds$.

10

A l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales dans chacun des cas suivants :

a) $\int_{e}^{e^2} x \ln x\, dx$ **b)** $\int_0^{\pi} x\cos(2x)\, dx$ **c)** $\int_0^1 (1-x)e^x dx$ **d)** $\int_1^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$.

11

A l'aide de deux intégrations par parties successives, calculer les intégrales dans chacun des cas suivants :

a) $\int_0^{\pi} e^t \cos t\, dt$ **b)** $\int_0^{\pi} t^2 \sin t\, dt$ **c)** $\int_0^1 (t+1)^2 e^{-t} dt$.

12

On considère les intégrales $I = \int_0^{\pi} x\cos^2 x\,dx$ et $J = \int_0^{\pi} x\sin^2 x\,dx$.

1. Calculer $I + J$ et J.
2. En déduire la valeur de I.

13

Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x}\,dx$.

1. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{1}{n+1}$.
2. En déduire la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

L'essentiel du cours sur les équations différentielles

1) Equation du type $y' - ay = 0$ où a est un nombre réel.

Propriété : Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - ay = 0$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{ax}$ où $k \in \mathbb{R}$

2) Equation du type $y'' - w^2 y = 0$

Propriété : Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' - w^2 y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto Ae^{wx} + Be^{-wx}$ où $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.

3) Equation du type $y'' + w^2 y = 0$

Propriété : Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + w^2 y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto A\cos(wx) + B\sin(wx)$ où $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.

1

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles dans chacun des cas suivants :

1. **a)** $f'(x) - 2f(x) = 0$ **b)** $f'(x) - f(x) = 0$ **c)** $f'(x) - \frac{1}{2}f(x) = 0.$

2. **a)** $f'(x) + 2f(x) = 0$ **b)** $f'(x) + f(x) = 0$ **c)** $f'(x) + \frac{1}{2}f(x) = 0.$

3. **a)** $f'(x) = f(x)$ **b)** $-3f'(x) + f(x) = 0$ **c)** $4f'(x) + 2f(x) = 0.$

2

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $2f'(x)-4f(x)=0$.

2. Déterminer la solution h telle que: $h(\ln 2)=1$.

3

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. a) $f''(x)-f(x)=0$ b) $f''(x)-4f(x)=0$ c) $3f''(x)-f($

2. a) $f''(x)+f(x)=0$ b) $f''(x)+4f(x)=0$ c) $12f''(x)=$

4

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $f''(x)-16f(x)=0$.

2. Déterminer la solution h telle que : $h(0)=1$ et $h'(0)=-1$.

5

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $f''(x)+9f(x)=0$.

2. Déterminer la solution h telle que $h(\frac{\pi}{6})=-1$ et $h'(\frac{\pi}{6})=3$.

6

Soit l'équation différentielle (E) : $f'(x)+f(x)=e^{-x}$.

1. Vérifier que la fonction g définie par : $g(x)=xe^{-x}$ est solution de l'équation (E).

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E') : $f'(x)+f(x)=0$.

3. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

   Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $f-g$ est solution de (E').

4. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E).

NOMBRES COMPLEXES

L'essentiel du cours sur les nombres complexes

1) Définition d'un complexe complexe

On appelle nombre complexe tout nombre $z = a + ib$ avec a et b appartenant à $\mathbb{R}$ et $i^2 = -1$.
a+ib est appelé *forme algébrique* de z.
z est appelé *affixe* du point M(a ;b)

2) Affixe d'un vecteur

Propriété : $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$ et $z_{\vec{u}+\vec{v}} = z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}}$

3) Conjugué d'un nombre complexe

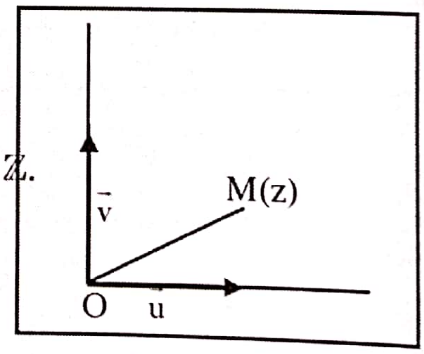
On appelle *conjugué* d'un nombre complexe $z = a + ib$ le nombre complexe noté $\bar{z}$ tel que : $\bar{z} = a - ib$.

4) Module d'un nombre complexe

Définition : On appelle *module* d'un nombre complexe $z = a + ib$ le nombre réel positif $|z|$ tel que : $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2+b^2}$.

3) Argument d'un nombre complexe non nul.

Définition : On appelle *argument* du nombre complexe $z \neq 0$ et on note arg(z) le nombre réel tel que : $\arg(z) = \text{mes}(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}) + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.
où M image de z dans le plan muni du repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$



4) Forme trigonométrique et forme exponentielle d'un nombre complexe non nul

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul de module r et d'argument α

- $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ est l'expression de z sous *forme trigonométrique*.
- $z = re^{i\alpha}$ est l'expression de z sous *forme exponentielle*.

5) Racine nième d'un nombre complexe Z non nul.

Définition : On appelle *racine n -ième* de Z tout nombre complexe z tel que : $z^n = Z$, $n \in$

Les racines n -nième de z sont au nombre de n.

6) Conjugué, module et argument et opération sur les nombres complexes.

complexe	conjugué	module	argument
$z + z'$	$\bar{z} + \bar{z'}$		
zz'	$\bar{z}\,\bar{z'}$	$\lvert z\rvert \times \lvert z'\rvert$	$\arg(z) + \arg(z') + 2k\pi$
$\frac{1}{z}$	$\frac{1}{\bar{z}}$	$\frac{1}{\lvert z\rvert}$	$-\arg(z) + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$
$\frac{z'}{z}$	$\frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$	$\frac{\lvert z'\rvert}{\lvert z\rvert}$	$\arg(z) - \arg(z') + 2k\pi$
z^n	$\bar{z}^n$	$\lvert z\rvert^n$	$n\arg(z) + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

7) Nombres complexes et configurations géométriques

ABC équilatéral de sens direct	$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$
ABC rectangle isocèle direct	$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$
A, B et C alignés	$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$
A, B, C et D Cocycliques	$\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_D - z_A}\right)\left(\dfrac{z_D - z_B}{z_C - z_B}\right) \in \mathbb{R}^*$ et trois des points non alignés

1

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

a) $2+i+5+7i$ **b)** $7(2+i) \; -i(16-7i)$ **c)** $(2+i)[\,35-7i+2i(-16+7i)\,]$

d) $(2-i)^3+(2+i)^3$.

2

Reprendre l'exercice précédent dans chacun des cas suivants :

a) $\dfrac{2-i}{3+5i}$ **b)** $\dfrac{11-8i}{23i}$ **c)** $(\dfrac{1-i}{3+4i})(\dfrac{-2+3i}{5+2i})$ **d)** $\dfrac{11-8i}{4+5i}+\dfrac{-5+9i}{1+12i}$.

3

Exprimer en fonction de des nombres réels x et y la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

a) $(ix-2)+5i(3x+iy)$ **b)** $\dfrac{ix}{x+3iy}$ **c)** $\dfrac{y-ix}{x+3i}$ **d)** $\dfrac{y}{x-i}+\dfrac{x}{x+i}$

4

Déterminer sous forme algébrique le conjugué des nombres complexes suivants :

a) $8+i$ **b)** $-2-2i$ **c)** $7i$ **d)** $(1-i)^2$ **e)** $i(-13+i)$ **f)** $\dfrac{3+i}{1-2i}$;

g) 3.

5

Calculer le module de chacun des nombres complexes qui suivent :

a) $2+7i$ **b)** $4-3i$ **c)** -4 **d)** $3i$ **e)** $\dfrac{1}{2}-3i$ **f)** $(1-\sqrt{2})i$

h) $-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ **h)** 5.

6

Reprendre l'exercice précédent dans chacun des cas suivants :

a) $2i(8-6i)$ b) $(-3+7i)^2$ c) $\dfrac{-3+2i}{2+3i}$ d) $\dfrac{(-3+5i)(4+2i)}{(8+2i)(-1+i)}$.

7

On munit le plan d'un repère orthonormé direct (O, I, J).

1. Calculer le module de chacun des nombres complexes suivants :
   $2-2i$, $\sqrt{2}+i\sqrt{6}$ et $(1+\sqrt{3})-i(1-\sqrt{3})$.
2. En déduire que les points $A(2-2i)$, $B(\sqrt{2}+i\sqrt{6})$ et $C((1+\sqrt{3})-(1-i\sqrt{3}))$ appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

8

Soit trois points $A(-i)$, $B(-3+2i)$ et $C(2+4i)$ du plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$. Unité : 1 cm.

1. Construire les points A, B et C.
2. Déterminer la nature du triangle ABC.
3. Déterminer et construire le point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

9

Déterminer un argument de chacun des nombres complexes suivants :

a) $\sqrt{3}-i$ b) -1 c) $2i$ d) $\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e) $-1+i$.

10

Reprendre l'exercice précédent dans chacun des cas suivants :

a) $(\sqrt{2}+i\sqrt{2})(1-i\sqrt{3})$ b) $(1-i)^{2008}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}$ d) $\dfrac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{3}}$.

11

Soit les nombres complexes : $z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ et $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

1. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes z_1 et z_2.
2. **a)** En déduire le module et un argument de $z_1 z_2$.

   b) Ecrire $z_1 z_2$ sous forme trigonométrique.
3. Ecrire $z_1 z_2$ sous forme algébrique.
4. Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos(-\frac{11\pi}{12})$ et $\sin(-\frac{11\pi}{12})$.

12

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes :

a) $(1-i)z = 1+i$; **b)** $(-2+i)z = 2(z+i) -3$; **c)** $\frac{z+3i}{z-i} = 4+2i$.

(*On mettra les solutions sous forme algébrique*).

13

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes :

a) $z^2 + 2iz + 1 = 0$; **b)** $iz^2 - 2z + 3i = 0$; **c)** $z^2 + 2(1+i)z + 2i = 0$.

14

1. Calculer $(6+2i)^2$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + (4+2i)z - 5 - 2i = 0$.

15

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2+z-2=0$.
2. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ des équations :

$$(E) : (z+i)^2+z+i-2=0 \text{ et } (F) : \frac{2i}{z^2}+\frac{1+i}{z}-2=0.$$

16

Déterminer l'ensemble (Γ) des points $M(z)$ dans chacun des cas suivants :

a) $|z-2i|=|z-1|$; **b)** $|z+2|=|z-1+i|$; **c)** $|iz-(1+i)|=1$; **d)** $\left|\frac{z-2i}{z}\right|=$

17

L'unité de longueur est le centimètre.

On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$.

1. Déterminer et construire l'ensemble (Δ) des points M tels que : $|z+4-2i|=|3i-$
2. Justifier que le point $K\left(-3+\frac{13}{2}i\right)$ appartient à (Δ).

18

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, I, J). Unité : 1 cm.

1. Déterminer et construire l'ensemble (C) des points M d'affixe z tels que :

   $|iz+4-i|=2$.
2. Déterminer les points d'intersection de l'ensemble (C) et de l'axe imaginaire.

19

Soit le polynôme complexe P tel que : $P(z)=z^3+iz^2-z+3i$.

1. Calculer $P(i)$.

2. Déterminer le polynôme complexe $Q(z)$ tel que : $P(z) = (z - i)\,Q(z)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

20

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, I, J). Unité : 2 cm.

Soit les points $E\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)$, $F(-2i)$ et $G(3)$.

1. Construire les points E, F et G.
2. Calculer $\dfrac{z_G - z_E}{z_F - z_E}$.
3. En déduire la nature du triangle EFG.

21

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, I, J). Unité 2cm.
Soit les points $A(2\sqrt{3})$, $B(4i)$ et $C(3\sqrt{3} + 5i)$.

1. Vérifier que $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
2. En déduire la nature du triangle ABC.

22

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Unité 2cm.

1. Placer les points $A(-1 + i)$, $B(-1)$ et $C(-i)$.
2. Construire le cercle (Γ) circonscrit au triangle ABC.
3. On pose : $\vec{u} = 2\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{BA}$. Déterminer l'affixe du vecteur $\vec{u}$.
4. Soit D l'image du point B par la translation de vecteur $\vec{u}$.
   a) Construire D.
   b) Justifier que l'affixe de D est $1 + 2i$.
5. Démontrer que le point D appartient à (Γ).

23

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O , I , J). Unité : 1 cm.

Soit A(−1 , 4) , B(−1 , 2) et C(−1 , 0) . A tout nombre complexe différent de $-1+4i$, S

associe le nombre complexe Z tel que : $Z = \dfrac{z+1}{z+1-4i}$.

On pose : $Z = X + iY$ et $z = x + iy$ avec X , Y , x et y des nombres réels.

1. Démontrer que : $X = \dfrac{(x+1)^2 + y^2 - 4y}{(x+1)^2 + (y-4)^2}$ et $Y = \dfrac{4(x+1)}{(x+1)^2 + (y-4)^2}$

2. Déterminer et représenter les ensembles de points M d'affixe z dans chacun des cas ci-dessous :

   a) Z est un nombre réel.

   b) Z est un imaginaire pur.

   c) Z est nul.

   d) Z est un nombre réel strictement positif.

   e) le module de Z est 1.

On représentera les ensembles dans des figures différentes.

24

Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants :

a) $i\,e^{i\frac{\pi}{3}}$ b) $-3e^{i\frac{\pi}{4}}$ c) $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}}$ d) $e^{-i\frac{6\pi}{7}} - e^{i\frac{6\pi}{7}}$ e) $(1-i)\,e^{-i\frac{\pi}{3}}$

f) $\dfrac{1-i}{1+i}\,e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

25

Soit trois points distincts A, B et C d'affixes respectives $-2i$, $2+2i$ et c tel que c soit un nombre complexe non nul tel que : $\frac{2+4i}{c+2i} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

1. Déterminer la nature du triangle ABC.
2. Déterminer c.
3. Construire les points A, B et C.

26

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4 = -4$. *On mettra les solutions sous forme algébrique.*

27

I – On considère le polynôme : $P(z) = z^3 - 2(\sqrt{3}+i)z^2 + 4(1+i\sqrt{3})z - 8i$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2\sqrt{3}\ z + 4 = 0$.
2. Démontrer que l'équation (E) : $P(z) = 0$ admet une unique solution qui est un nombre imaginaire pur que l'on déterminera.
3. a) Justifier que : $P(z) = (z-2i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4)$

   b) En déduire les solutions de l'équation (E).

II – Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J). On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $\sqrt{3}-i$, $\sqrt{3}+i$, $2i$ et $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

1. a) Calculer $|z_A|$, $|z_B|$ et $|z_C|$.

   En déduire que les points A, B et C appartiennent à un même cercle que l'on précisera.

   b) Justifier que les points A, C et D sont alignés.

   c) Construire les points A, B, C et D. *On prendra le centimètre pour unité.*
2. Démontrer que le quadrilatère OABC est un losange.

28

(Extrait Bac 2008, Série D)

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$.

On considère l'équation $(E) : z \in \mathbb{C}, z^3 + (6-5i)z^2 + (1-20i)z - 14 - 5i = 0$.

1. a) Vérifier que i est une solution de l'équation (E).

   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation :

   $z^2 + (6-4i)z + 5 - 14i = 0$.

   c) Démontrer que pour tout nombre complexe z,

   $z^3 + (6-5i)z^2 + (1-20i)z - 14 - 5i = (z-i)(z^2 + (6-4i)z + 5 - 14i)$.

   En déduire les solutions de (E).

2. On considère les points A, B et D d'affixes respectives $u = i$, $v = -2+3i$ et $t = -4+i$.

   a) Placer les points A, B et D dans le repère.

   b) Ecrire le nombre complexe $Z = \dfrac{u-v}{t-v}$ sous forme trigonométrique.

   c) En déduire que le triangle ABD est rectangle isocèle en B.

29

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J). Unité : 2cm.

On considère le polynôme complexe P défini par : $P(z) = z^3 + (-1+2i)z^2 - 3z - (1+2i)$

1. Démontrer que P admet une unique racine imaginaire pure que l'on déterminera
2. Déterminer le polynôme complexe Q tel que $P(z) = (z+i)Q(z)$
3. Calculer $(3-i)^2$ puis résoudre l'équation : $z \in \mathbb{C}, Q(z) = 0$.
4. Résoudre l'équation : $z \in \mathbb{C}, P(z) = 0$.
5. On considère les nombres complexes $z_A = -1$, $z_B = -i$, $z_C = 2-i$ et $z_D = 3i$.

   a) Placer les points A, B, C et D dans le repère (O, I, J).

   b) Démontrer que le triangle ACD est rectangle isocèle de sens direct.

6. On désigne par Ω le point d'affixe $1+i$.

   a) Placer Ω.

   b) Démontrer que le triangle $B\Omega D$ est isocèle.

7. Justifier que Ω est le milieu du segment [DC] puis déduire de ce qui précède que les points A, B, C et D appartiennent à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

30

On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. *Unité : 1 cm.*

On désigne par (Γ) l'ensemble des points $M(z)$ où z est un nombre complexe tel que :

$|(1+i)z+2-2i| = 4\sqrt{2}$ et on note F le point d'affixe $2i$.

1. Démontrer que $M(z) \in (\Gamma) \Leftrightarrow |z-2i| = 4$.

2. Placer le point F. Déterminer puis construire l'ensemble (Γ).

3. a) Déterminer les points d'intersection de (Γ) et de l'axe réel.

   b) Déterminer les points d'intersections de (Γ) et de l'axe imaginaire.

4. On pose : $z_A = -2\sqrt{3}$, $z_B = 2\sqrt{3}$, $z_K = -2\sqrt{3}+4i$ et $z_E = 6i$.

   a) Justifier que le point K appartient à (Γ).

   b) Placer les points E, K, A et B.

   c) Mettre sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle le nombre complexe

   $$\frac{z_B - z_E}{z_A - z_E}.$$

5. En déduire la nature du triangle ABE.

6. Démontrer que le quadrilatère $KAFE$ est un losange.

SIMILITUDES DIRECTES DU PLAN

L'essentiel du cours sur les similitudes directes.

1) Définition et premières propriétés

Définition : Une *similitude directe* est soit la composée d'une homothétie et d'une rotatio
la composée d'une homothétie et d'une translation.

Propriété : La composée de deux similitudes directes est une similitude directe.

Propriété : Soit f une similitude directe d'écriture complexe $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in$

- Si $a = 1$ alors f est une translation de vecteur d'affixe b.
- Si $a \neq 1$ alors $f = RoH$ où $R = r(\Omega, \arg(a))$ et $H = h(\Omega, |a|)$ où $\Omega(\frac{b}{1-a})$.

2) Propriété caractéristique des similitudes directes

Soit f une application, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $k > 0$. f est une similitude de rapport k et d'angle α si et se

si pour tout M et N tels que $f(M) = M'$ et $f(N) = N'$, on a $M'N' = kMN$ et $(\widehat{\overrightarrow{MN};\overrightarrow{M'N'}}) = \alpha$

3) Similitudes et configuration

- Toute similitude directe conserve l'alignement, l'orthogonalité, le parallélisme, le
orientés.
- Toute similitude directe transforme les droites en droites, les segments en segmen
demi- droites en demi-droites, les cercles en cercles.
- Toute similitude directe de rapport k multiplie les distances par k et les aires par

1

Donner les éléments caractéristiques de la similitude directe dont l'écriture complexe est donnée dans chacun des cas suivants :

a) $z' = z + 3 - i$ b) $z' = 2z + 1 + i$ c) $z' = -z + 4 + 3i$

d) $z' = (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})z + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2

Même exercice avec :

a) $z' = (-1+i)z + 1 + 2i$ b) $z' = (\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4})z + \sqrt{3} + i$

c) $z' = (3\sqrt{2} + i\sqrt{6})z + 2\sqrt{3} - i(6 - \sqrt{2})$.

3

Soit A et B deux points du plan. On pose : $h_A = h(A\ ;\ 2)$ et $r_A = r(A\ ,\ -\frac{\pi}{4})$.

1. Construire les points $O = h_A(B)$ et $C = r_A(O)$.
2. Déterminer l'image de B par la similitude S de centre A, de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

4

Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A et de sens direct. I le milieu du segment [BC].

On note S la similitude directe de centre I de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. Construire les points $A' = S(A)$, $B' = S(B)$ et $C' = S(C)$.
2. Démontrer que le triangle A'B'C' est rectangle isocèle et de sens direct.

5

Soit S une similitude directe de rapport 3, A et B deux points du plan tels que : S(A) = B.

On désigne par (C) le cercle de centre A et de rayon 4.

1. Déterminer l'image (C') du cercle (C) par S.
2. Justifier que le point D tel que la distance BD soit égale à 12 appartient à (C').

Soit S_1 la similitude directe d'écriture complexe : $z' = (1-i)z + 2 + i$ et S_2 la similitude di

d'écriture complexe : $z' = (-2-2i)z + 7 - 4i$. On désigne par A le point d'affixe $-\frac{1}{2}i$.

1. a) Calculer l'affixe du point B, image de A par S_1.

   b) Justifier que l'affixe du point C, image de B par S_2 est $5-8i$.

2. Justifier que l'affixe du centre I de la similitude S_1 est $1-2i$.

3. a) Vérifier que I est invariant par la similitude S_2.

   b) En déduire le centre de la similitude S_2.

4. a) Déterminer les angles des similitudes S_1 et S_2.

   b) En déduire l'angle de la similitude $S_1 \circ S_2$.

5. Démontrer que les points A, I et C sont alignés.

6

Soit S la similitude directe d'écriture complexe : $z' = 2iz + 1 - i$.

On considère les points A($2-3i$) et B ($-2i$). On pose: $A' = S(A)$ et $B' = S(B)$.

1. Déterminer l'angle de la similitude S.
2. On note (Δ) l'image de (AB) par S.
   a) Justifier que les droites (AB) et (Δ) sont perpendiculaires.
   b) Déterminer les affixes des points $A' = S(A)$ et $B' = S(B)$.
   c) Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ).
3. On note C le point d'affixe $-2-i$.
   a) Justifier que les points A, B et C sont alignés.
   b) En déduire que l'image C' de C par S appartient à (Δ).

7

Soit S la similitude directe d'écriture complexe : $z' = (1+i)z + 2 - 4i$

1. a) Déterminer les éléments caractéristiques de S.

   b) En déduire la forme réduite de S.

2. a) Déterminer l'image A de O par S.

   b) Construire le point A et le centre Ω de S.

3. Déterminer la nature du triangle ΩOA.

8

Soit $A(1+i)$, $B(-4)$, $C(-1+i)$ et $D(3-i)$ quatre points du plan complexe.

Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe S dans chacun des cas suivants :

a) $S(A)=B$ et $S(C)=D$.

b) $S(B)=D$ et $S(A)=C$.

9

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J). Soit (C) le cercle de centre A $(5+i)$ passant par O. On désigne par S la similitude directe de centre B $(-1+3i)$ qui transforme A en O.

1. Calculer le rapport de S.
2. Déterminer la nature et définir l'image (C') du cercle (C) par S.
3. Déterminer l'écriture complexe de S.
4. Justifier que le point $E\left(-\frac{19}{10}+\frac{17}{10}i\right)$ appartient à (C').

10

On munit le plan d'un repère orthonormé direct (O, I, J). *On prendra un centimètre pour unité.*

On donne les points A, B et C d'affixes respectives -2, $6+i$ et $-2+2i$. On désigne par S la similitude directe telle que : $S(A)=J$ et $S(C)=B$.

1. Construire les points A, B et C.
2. Déterminer le rapport de S.
3. Déterminer l'angle de S.
4. Déterminer l'écriture complexe de S.
5. On note (Δ) la droite d'équation $x=-2$.

Déterminer une équation de la droite (Δ') image de (Δ) par S.

11

Soit $A(-i)$ et $B(\sqrt{3})$ deux points du plan complexe rapporté au repère orthonormé direct (O, I, J)

Unité : 2 cm. On désigne par C le point tel que $\dfrac{Z_C + i}{\sqrt{3} + i} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

1. Justifier que le triangle ABC est équilatéral de sens direct.
2. Mettre sous forme exponentielle l'affixe du milieu K du segment [AB].
3. Construire les points A, K, B et C.
4. Justifier que $z_C = z_J$.
5. Soit S la similitude directe d'écriture complexe $z' = (-1 - i\sqrt{3})z + \sqrt{3} - 2i$.
   a) Calculer l'affixe de l'image du point A par S.
   En déduire le centre de la similitude S.
   b) Déterminer le rapport et l'angle de S.
6. Calculer l'affixe du point E image du point O par S.
7. Démontrer que le quadrilatère AEBC est un losange.

12

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O,I,J), les points A, B, C et D[...] pour affixes respectives $1 - i$, $2 + 2i$ et -2. *On prendra un centimètre pour unité.*

1. Placer les points A, B et C dans le plan complexe.
2. Justifier que : $\dfrac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = i$.
3. En déduire la nature du triangle ABC.
4. Justifier que le point J est le milieu du segment [BC].
5. On désigne par S la similitude de centre B qui transforme A en C.
   Déterminer le rapport et l'angle de la similitude S.
6. Démontrer que l'écriture complexe de S est: $z' = (1 - i)z - 2 + 2i$.

PROBABILITE

L'essentiel du cours sur la probabilité

1) Définition et propriété.

Définition : Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire et $\mathbf{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω . On appelle *probabilité* sur Ω toute application P de $\mathbf{P}(\Omega)$ dans [0 ;1] telle que :

- $P(\Omega)=1$
- $P(\phi)=0$
- $\forall A \subset \Omega$, $P(A)= P(\{a_1\}) + P(\{a_2\})+ \ldots + P(\{a_n\})$ où $A=\{a_1;a_2;\ldots;a_n\}$.

Propriété : Soit A et B deux événements d'un univers Ω

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si A et B sont incompatibles
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

2) Equiprobabilité

Définition : Une expérience aléatoire est dite *équiprobable* si tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Propriété : Soit Ω l'univers d'une expérience équiprobable et $A \subset \Omega$

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de A}}{\text{nombre d'éléments de } \Omega}.$$

3) Probabilité conditionnelle

Définition : Soit Ω l'univers d'une expérience équiprobable, $A \subset \Omega$ et $B \subset \Omega$. et $P(B) \neq 0$

La probabilité de *A sachant que B est réalisé* est définie par : $P_B(A)= \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

4) Evénements indépendants

Définition : Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire, P une probabilité sur Ω et A et B inclus dans Ω. A et B sont dits indépendants si : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

5) Schéma de Bernoulli

Définition : On appelle épreuve de Bernoulli toute expérience aléatoire à deux éventualités.

Définition : On appelle schéma de Bernoulli toute expérience consistant à répéter n fois de façon indépendante une épreuve de Bernoulli.

Propriété : Lors d'un schéma de Bernoulli à n épreuves de Bernoulli où p probabilité de succès dans une épreuve, la probabilité d'obtenir k succès est : $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$; $k \in \{0; 1; ...; n\}$.

6) Caractéristiques d'une variable aléatoire

Espérance mathématique de X : $E(X) = X_1 P(X=X_1) + X_2 P(X=X_2) + ... + X_n P(X=X_n)$

Variance de X : $V(X) = X_1^2 P(X=X_1) + X_2^2 P(X=X_2) + ... + X_n^2 P(X=X_n) - (E(X))^2$.

Ecart-type de X : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

7) Loi Binomiale de paramètres n et p : $P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$; $k \in \{0; 1; ...; n\}$.

Lors d'un schéma de Bernoulli à n épreuves de Bernoulli où p probabilité de succès.

$E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.

1

On dispose des chiffres 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 et 9.

A l'aide de ces chiffres combien peut –on obtenir de nombres :

a) de 5 chiffres.

b) de 5 chiffres deux à deux distincts.

c) de 5 chiffres deux à deux distincts et multiples de 2.

d) de 5 chiffres deux à deux distincts qui commencent par 2 et se terminent 3.

2

On tire simultanément trois cartes dans un jeu de 32 cartes.

1. Quel est le nombre total de tirage possible ?

2. Quelle est la probabilité de tirer exactement un trèfle ?

3

Une urne contient deux boules noires, trois boules rouges et cinq boules vertes.

On tire au hasard et successivement et sans remise deux boules de l'urne.

1. Calculer le nombre de tirages possibles.

2. a) Calculer la probabilité qu'on tire deux boules de même couleur.

b) Calculer la probabilité qu'on tire une boule verte.

3. Calculer la probabilité qu'on ait une boule verte uniquement au deuxième tirage.

4. On a tiré une boule verte.

Quelle est la probabilité qu'elle ait été tirée en deuxième position ?

4

Une école de la place est équipée de deux salles machines. La salle A contient trois Pentium 1 (p_1) et deux Pentium 2 (p_2). La salle B contient cinq Pentium (p_1) et trois Pentium (p_2). On choisit au hasard une salle puis dans cette salle, on choisit une machine. Les salles ont la même probabilité d'être choisie.

1. Une machine (p_1) est utilisée. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de la salle A

2. Une machine est utilisée. Quelle est la probabilité que cette machine soit un (p_1) ?

5

Un magasin vend uniquement des téléviseurs et des magnétoscopes. En raison d'une promotion pour chaque personne entrant dans le magasin, la vente est limitée à un téléviseur et à un magnétoscope.

Une enquête statistique a montré que :

- 10% des personnes qui entrent dans le magasin achètent un téléviseur.
- Parmi les personnes qui achètent un téléviseur, 80% achètent un magnétoscope.
- Parmi les personnes qui n'achètent pas de téléviseur, 10% achètent un magnétoscope.

Une personne entre dans le magasin.

On note T l'événement « la personne achète un téléviseur ».

On note M l'événement « la personne achète un magnétoscope ».

1. Traduire à l'aide d'un arbre pondéré la situation décrite ci – dessus.
2. Déterminer les probabilité suivantes : P(T) , P($\overline{T}$) , P(M/T) et P($M/\overline{T}$).
3. Démontrer que la probabilité que la personne achète un magnétoscope est égale à 0,17.
4. Quelle est la probabilité que la personne n'achète pas de téléviseur sachant qu'elle a acheté un magnétoscope ? *(On donnera un arrondi d'ordre 2 du résultat)*.

6

On donnera les résultats sous forme de fraction irréductibles.

Une classe est constituée de 30 élèves parmi lesquels 10 forment le club photo et 6 le club théâtre 2 élèves sont membres des deux clubs à la fois.

1. On interroge au hasard un élève de la classe.

   a) Soit A l'événement : « l'élève choisi fait partie du club théâtre ».

   Justifier que : $P(A) = \frac{1}{5}$.

b) Calculer la probabilité de l'événement B : « l'élève choisi fait partie du club photo ».

c) Justifier que A et B sont des événements indépendants

2. Toute la classe étant réunie, on organise une séance de photographie. On choisit au hasard, à cet effet un premier élève qui est chargé de prendre la photo à un deuxième élève qui sera lui aussi tiré au sort. On désigne par :

C l'événement : « le premier élève choisi fait partie du club théâtre ».

D l'événement : « le deuxième élève choisi fait partie du club théâtre ».

a) Justifier que la probabilité de l'événement C est $\frac{1}{5}$.

b) Justifier que la probabilité que le deuxième élève choisi fasse partie du club théâtre sachant que le premier élève choisi est du club photo est de $\frac{5}{29}$.

c) Dresser l'arbre de probabilité de la situation.

3. Justifier que la probabilité de l'événement : « l'élève photographié est du club théâtre » est $\frac{1}{5}$.

7

Une urne contient 2 boules blanches, 3 boules vertes et 5 boules rouges, toutes indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne. On marque leurs couleurs puis, on les remet dans l'urne.

1. Calculer la probabilité de tirer deux boules rouges.
2. Calculer la probabilité de tirer deux boules de même couleur.
3. On répète cinq fois de suite cette expérience.

   a) Calculer la probabilité pour qu'on ait deux boules rouges seulement au premier tirage.

   b) Calculer la probabilité pour qu'on ait deux fois deux boules rouges.

8

Aya et son amie Marie, à la suite de leur réussite au BAC, se décident d'inviter quelques amis à un repas.

La réception a lieu chez Aya qui ne dispose que de 12 assiettes pour recevoir les participants au repas. Elle demande à son amie de lui en procurer. Pour cela Marie fait venir 6 assiettes supplémentaires. Seulement 10 invités ont pu honorer l'invitation.

On admet que Aya et Marie participent au repas et que chacun a droit à une seule assiette.

1. Calculer la probabilité que seules les assiettes de Aya ont été utilisées.
2. Démontrer que la probabilité que 3 assiettes de Marie aient été utilisées est $\frac{55}{83538}$.
3. Parmi les 12 assiettes utilisées, 2 sont cassées pendant la vaisselle.
   Sachant que 3 assiettes de Marie sont utilisées pendant le repas, démontrer que la probabilité que les assiettes cassées proviennent de celles de Marie est $\frac{1}{22}$.

9

Quatre garçons et deux filles se présentent au restaurant. Ils sont servis à tour de rôle.

1. Déterminer le nombre de manières possibles pour que chacun d' entre eux soit servi.
2. Déterminer la probabilité pour qu'une fille soit servie en premier.
3. Démontrer que la probabilité pour que les filles soient servies avant les garçons est $\frac{1}{15}$.
4. Six élèves du Lycée Scientifique de Yamoussoukro dont deux filles vont participer à un concours de Mathématiques à Abidjan. Lors de leur séjour à l'hôtel qui durera une semaine ces élèves reçoivent chacun deux repas par jour.
   a) Quelle est la probabilité pour que les filles soient servies deux fois de suite avant les garçons.
   b) Quelle est la probabilité pour que les filles reçoivent exactement quatre fois leurs repas avant les garçons pendant la durée du séjour. *(On donnera le résultat au centième près*
   c) Déterminer le nombre minimal de services pour que la probabilité que les filles ne soient pas servies avant les garçons soit inférieure à 0,4.

10

On dispose de 3 pièces de monnaie : 2 pièces tout à fait normales et 1 pièce truquée avec deux faces marquées pile. On les lance simultanément.

1. Calculer la probabilité d'obtenir une fois pile et deux fois face.
2. Calculer la probabilité d'obtenir trois fois pile.
3. On appelle X la variable aléatoire associée au nombre de fois que face apparaît.
   a) Déterminer les valeurs de X.
   b) Déterminer la loi de probabilité de X.
   c) Calculer l'espérance mathématique de X.

11

Une compagnie de téléphonie vend deux types de téléphones portables :

– des téléphones portables standards ;

– des téléphones portables miniatures.

Il propose aussi deux types d'abonnements mensuels :

– l'abonnement 1 heure ;

– l'abonnement 2h30min.

Le service marketing effectue une enquête sur un échantillon de 2000 clients ayant acheté dans cette compagnie, pendant l'année en cours, un téléphone et un seul de l'un des types vendus et ayant opté pour un seul type des abonnements proposés.

Sur les 2000 clients interrogés, 1200 ont acheté le modèle standard.

Sur ces 2000 clients, 960 ont choisi l'abonnement 1 heure.

Un client est pris au hasard dans l'échantillon. On note les événements :

S : « le client achète le modèle standard ».

M : « le client achète le modèle miniature ».

A_1 : « le client choisit l'abonnement 1 heure ».

A_2 : « le client choisit l'abonnement 2h30min ».

Les résultats seront donnés sous forme décimale avec trois chiffres après la virgule.

1. Déterminer P(S), P (M) et P (A_1).

2. Parmi les clients ayant le modèle standard, 32% prennent l'abonnement A_1.

   a) Traduire cette donnée en termes de probabilité.

   b) En déduire la probabilité d'acquérir le modèle standard et d'opter pour l'abonnement A_1

   c) Justifier que la probabilité de choisir le modèle miniature et l'abonnement A_1 est égale
   0,288.

3. Le coût en francs d'un téléphone standard est de 20 000 et celui d'une miniature et de 60 00
L'abonnement A_1 revient à 3400F par mois. L'abonnement A_2 revient à 8000F par mois. On considère le coût total X occasionné sur un an par l'achat d'un téléphone et l'abonnement choisi, pour un client pris au hasard dans l'échantillon.

   a) Justifier que les valeurs prises par X sont : 60800, 100800, 116000 et 156000.

   b) Recopier et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de ce coût en expliquant votre raisonnement.

x_i	60 800		116 000	
$P(X = x_i)$		0,288		

   c) Calculer l'espérance mathématique de X et l'interpréter.

12

Pendant une distribution de prix dans une école , cinq livres (de 5 matières différentes) sont à remettre à trois élèves dont une fille (un élève pouvant recevoir 0 à 5 livres).

1. Déterminer le nombre total de distributions possibles.

2. Déterminer la probabilité des événements suivants :

   a) A : « Un seul élève reçoit deux livres exactement ».

   b) B : « Deux élèves reçoivent exactement deux livres chacun ».

3. Démontrer que la probabilité pour qu'une fille reçoive exactement 2 livres est égale à $\frac{80}{24}$

4. Une distribution de prix se passe dans les quatre écoles d'une commune. Trois élèves dont une fille sont présentés dans chacune de ces quatre écoles. Déterminer au dixième près la probabilité pour que, au terme de ces distributions, une fille ait exactement deux livres.

5. Lors d'une de ces distributions de prix, on appelle X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de livres gagnés par une fille.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'expérience mathématique de X.

13 Extrait Bac 2006, Série D

Une banque dispose de guichets automatiques où certains clients peuvent faire des retraits d'argent à l'aide d'une carte magnétique. Une carte magnétique a un code secret connu seulement du titulaire de la carte. Ce code secret est une suite de quatre chiffres du système décimal.

Les deux parties A et B suivantes sont indépendantes.

A)

1. Combien de cartes magnétiques la banque peut – elle distribuer à ses clients ?

2. Démontrer que la probabilité que le code d'une carte magnétique commence par 0 est égale à $\frac{1}{10}$.

3. Calculer la probabilité pour que le code d'une carte magnétique soit composé des chiffres 2 ; 4 ; 5 ; 7.

B) Monsieur KONE, un client de la banque, titulaire d'une carte magnétique a oublié son code. Son épouse lui rappelle que celui-ci comporte les chiffres 2 ; 4 ; 5 ; 7.

Il décide alors de tenter sa chance au guichet automatique.

Les guichets automatiques sont équipés de mémoires leur permettant de confisquer une carte après trois essais infructueux successifs. Monsieur KONE joue la prudence et s'impose deux essais au maximum.

1. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

a) E : « Monsieur KONE réussit à retirer de l'argent au premier essai ».

b) F : « Monsieur KONE échoue au premier essai et réussit au deuxième essai ».

2. Soit G l'événement : « Monsieur KONE retire de l'argent ».

Démontrer que la probabilité de G est égale à $\frac{1}{12}$.

3. De retour à la maison, Monsieur KONE annonce fièrement à son épouse qu'il a pu reti de l'argent au guichet automatique.

Calculer la probabilité qu'il ait effectué le retrait au premier essai.

4. La banque prélève une taxe pour chaque essai de retrait au guichet automatique. Cette taxe s'élève à 30 francs par essai fructueux et à 60 francs par essai infructueux. X désigne la variable aléatoire qui détermine la taxe totale à payer sur l'ensemble des retraits faits par Monsieur KONE.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Démontrer que l'espérance mathématique de X est égale à 115 francs.

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibl

14

Un commerçant vend dans son magasin deux qualités de chemises. Les chemises sont faites e lin ou en coton. Les prix des chemises dépendent de la qualité de tissu. Les prix en francs so les suivants : Lin : 7000 et Coton : 9900.

Le magasin dispose actuellement de 10 chemises en lin et 7 chemises en coton.

Un client se rend à ce magasin pour acheter 4 chemises. Il constate que les chemises sont tou de même couture.

1. Déterminer le nombre de possibilités de choix auxquels le client est confronté.
2. Calculer la probabilité que le client achète uniquement des chemises en coton.
3. Le client est informé des prix de vente mais ne possède que la somme de 34000 francs. Ap réflexion, il se rend compte qu'il lui faut au moins une chemise en lin.

   a) Démontrer que le nombre de possibilités d'achat est 1995.

   b) Démontrer que la probabilité que le client dépense 33800 est $\frac{63}{133}$.

   c) Démontrer que la probabilité qu'il s'achète uniquement des chemises en lin est $\frac{14}{133}$.

4. On désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeurs le montant que le client aur dépensé pour l'achat des quatre chemises.

a) Déterminer les différentes valeurs prises par X.

b) Compléter le tableau suivant :

x	28000		
$P(X = x)$		$\frac{56}{133}$	

5. Calculer l'espérance mathématique de X. *On donnera l'arrondi au centième près*.

STATISTIQUE

L'essentiel du cours sur les statistiques

1) Ajustement linéaire

1.1) Covariance d'une série statistique double

Définition : Soit $(x_i ; y_i)$ avec $1 \leq i \leq N$ une série à deux caractères x et y d'effectif total N.

On appelle *covariance* de la série $(x_i ; y_i)$ le nombre réel noté cov(x;y) où

$$\text{cov}(x;y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) \text{ ou } \text{cov}(x;y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \overline{x}\,\overline{y}.$$

Remarque : La série est présentée en général par un tableau comme suit :

x_i	x_1	x_2	...	x_p
y_i	y_1	y_2	...	y_p

1.2) Droite de régression de y en x

Définition : Soit $(x_i ; y_i)$ avec $1 \leq i \leq N$ une série à deux caractères x et y avec $V(x) \neq 0$.

On appelle *droite de régression* de y en x la droite passant par le point moyen et de coefficient directeur $\dfrac{\text{cov}(x;y)}{V(x)}$.

2) Coefficient de corrélation linéaire

Définition : Soit $(x_i ; y_i)$ avec $1 \leq i \leq N$ une série à deux caractères x et y avec $V(x) \neq 0$ et $V(y) \neq 0$. On appelle *coefficient de corrélation linéaire* de la série $(x_i ; y_i)$ le nombre réel r tel que : $r = \dfrac{\text{cov}(x;y)}{\sqrt{V(x)V(y)}}$.

- $|r| \leq 1$.
- si $|r|$ est proche de 1 alors il y a une forte relation linéaire entre les caractères x et y.

1

Le tableau suivant donne la taille et poids de 8 élèves en fonction de leurs âges :

Taille (cm) x_i	150	170	174	160	172	175	174	155
Poids (kg) y_i	54	68	80	60	70	77	77	65

1. Calculer les coordonnées du point moyen G puis construire G.
2. Représenter le nuage de points de coordonnées (x_i ; y_i) dans le plan muni d'un repère orthogonal.
   (*On prendra sur l'axe des abscisses 1cm pour 10 cm de taille et sur l'axe des ordonnées 1cm pour 10 kg*).

2

Le tableau suivant donne pour une année la recette d'une entreprise de fabrication de savons en fonction de la quantité de savons vendus :

Nombre de savons en (millions) x_i	5	9,2	11	13	17,5	20
Recettes (en millions) y_i	10	15	12	17	19,5	18

Démontrer qu'une équation de la droite de régression de y en fonction de x est : $y = 0,58x + 7,93$.

3

Un commerçant de la place doit vendre des lots de chemises. Les différentes estimations sont consignées dans le tableau ci – dessous :

Prix de vente (x_i)	15000	21750	28000	35000	41500
Nombre de chemises (y_i)	3	7	11	16	22

1. Représenter graphiquement le nuage de points de cette série statistique double.
   On prendra : Sur l'axe des abscisses 4cm pour 10000 francs, sur l'axe des ordonnées 1cm pour 2 chemises.
2. Calculer les coordonnées du point moyen G ; puis construire G.
3. Trouver une équation de la droite de régression (D) de y en fonction de x.
4. En déduire le prix que peut proposer ce commerçant s'il veut vendre un lot de 30 chemises

4

Des ouvriers sont proposés à la construction d'un magasin. Un salaire global leur est présenté à travers le tableau suivant :

Nombre d'ouvriers x_i	10	15	18	24	33
Salaire global y_i (en milliers de francs)	150	275	325	400	510

Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre les variables X et Y

5

Une enquête de la police donne en pourcentage la baisse de la criminalité dans les cinq dernières années en fonction de l'accroissement de son budget.

Années (z_i)	2003	2004	2005	2006	2007
Criminalité (y_i) (en pourcentage)	24	22	21	17	15
Budget (x_i) de la police (en pourcentage)	7	8,2	10	11,9	13

1. Donner une équation de la droite d'ajustement qui permet d'estimer le budget de la police à partir du rang de l'année 9. (2003 aura le rang 1, 2004 aura le rang 2, . . .).
2. Déterminer une équation de la droite de régression qui permet d'estimer l'évolution de la criminalité en fonction de l'accroissement du budget de la police.
3. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre la baisse de la criminalité et l'accroissement en pourcentage du budget de la police.
4. A l'aide des résultats précédents, prévoir la baisse de la criminalité pour l'année 2011.

6

Le tableau suivant donne l'âge X et la moyenne Y des maxima de tension artérielle en fonction de l'âge d'une population féminine.

X	36	42	48	54	60	69
Y	11,8	14,0	12,6	15,0	15,5	15,1

1. Représenter graphiquement le nuage de points dans le plan muni du repère orthogonal (O, I, J) *(0,5cm pour 1an et 3cm pour l'unité de tension artérielle).*
2. Calculer la moyenne et la variance des séries statistiques associées aux variables X et Y.
3. a) Trouver une équation de la droite de régression (D) de Y en fonction de X.
   b) Trouver une équation de la droite de régression (D') de X en fonction de Y.
   c) Représenter ces deux droites dans le même graphique que celui utilisé pour le nuage de points.
4. Une personne de 70 ans a une tension artérielle de 16,2. Cela vous paraît –il normal ?

D'après bac, Série D

PROBLEME n°1

Soit f la fonction définie sur$]0\,;+\infty[$par :

$f(x)=-\frac{1}{32}x+\frac{(x-2)\ln x}{x^2}$.

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) *Unité graphique : 4 cm en abscisses et 2cm en ordonnées.*

Partie A

Soit g la fonction définie sur$]0\,;+\infty[$par :

$g(x)=x^2+4x-16+32\ln x$.

1. Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

2. Démontrer que pour tout nombre réel x strictement positif, $g'(x)=\frac{2x^2+4x+32}{x}$.

3. a) Déterminer le sens de variation de g.

   b) Dresser le tableau de variation de g.

4. Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $]0\,;+\infty[$.

   Vérifier que : $1{,}32<\alpha<1{,}33$.

5. Démontrer que : $\begin{cases}\forall x\in]0;\alpha[,\ g(x)<0\\ \forall x\in]\alpha;+\infty[,\ g(x)>0\end{cases}$.

Partie B

1. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

2. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -\frac{1}{32}x$ est asymptote à (C_f) en $+\infty$.

3. Déterminer les positions relatives de (C_f) et (D) sur $]0;+\infty[$.

4. Démontrer que pour tout nombre réel x strictement positif, $f'(x) = \frac{(4-x)g(x)}{32x^3}$.

5. Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

6. Déterminer le sens de variation de f puis dresser le tableau de variation de f.

7. Tracer (C_f)

Partie C

On désigne par A l'aire en cm^2 de la partie délimitée par la droite (D), la courbe (C_f), et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

1. Calculer $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$.

2. En utilisant une intégration par parties, démontrer que : $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{1-\ln 2}{2}$.

3. Vérifier que : $\forall x \in]0;+\infty[$, $\frac{(x-2)\ln x}{x^2} = \frac{\ln x}{x} - 2\frac{\ln x}{x^2}$.

4. Calculer A.

PROBLEME n°2

Soit f la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = e^{2x} - 4e^{x} + 4.$

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal direct (O, I, J). Unité graphique : 1 cm.

Partie A

1. a) Calculer la limite de f en $-\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

   b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. En donner une interprétation graphique.

2. a) Démontrer que pour tout nombre réel x, $f'(x) = 2(e^{x} - 2)e^{x}$.

   b) Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

   c) En déduire le sens de variation de f.

   d) Dresser le tableau de variation de f.

3. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point A (0 ; 1).

4. On désigne par h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $h(x) = e^{2x} - 4e^{x} + 2x + 3.$

   a) Justifier que pour tout nombre réel x, $h'(x) = 2(e^{x} - 1)^{2}$.

   b) Démontrer que h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   c) Calculer $h(0)$. Démontrer que : $\forall\ x \in]-\infty\ ; 0[$, $h(x) < 0$ et $\forall x \in]\ 0; +\infty[$, $h(x) > 0$.

5. Déterminer les positions relatives de la courbe (C_f) et de la tangente (T).

6. Tracer (C_f) et (T).

Partie B

Dans cette partie, λ désigne un nombre réel inférieur ou égal à $2ln2$.

1. Déterminer le point d'intersection B de la courbe (C_f) et de la droite (D) d'équation $y = 4$.

2. On désigne par $A(\lambda)$ l'aire de la partie (E_λ) délimitée par (C_f), (D) et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 2ln2$.

Démontrer que $A(\lambda) = \frac{1}{2}e^{2\lambda} - 4e^{\lambda} + 8$.

3. **a)** Définir (E_0) puis hachurer (E_0).

b) Déduire de la question 2 Partie B) la valeur de $A(0)$.

3. Calculer $\lim_{\lambda \to -\infty} A(\lambda)$.

PROBLEME n°3

On considère la fonction numérique f à variable réelle définie par : $f(x) = \dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{e^{x} - 1}$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthonormé direct (O, I,

Unité graphique : 1 cm.

Partie A

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Démontrer que la fonction f est impaire. En déduire une interprétation graphique.
3. Calculer la limite de f à droite en 0. En déduire une interprétation graphique.
4. a) Vérifier que pour tout nombre réel strictement positif x, $f(x) = \dfrac{1}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}$.

   b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. En déduire une interprétation graphique.
5. Démontrer que pour tout nombre réel strictement positif x, $f'(x) = -\dfrac{e^{\frac{x}{2}}(e^{x}+1)}{2(e^{x}-1)^{2}}$.
6. a) Déterminer le sens de variation de la fonction f sur $]0;+\infty[$.

   b) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $]0;+\infty[$.
7. En utilisant la question 2) de la Partie A, tracer (C_f) sur son ensemble de définition.

Partie B

1. On désigne par h la restriction de f à $]0;+\infty[$.
Démontrer que la fonction h réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur un intervalle J à déterminer.

2. Calculer $h(\ln 2)$ et $h'(\ln 2)$. En déduire que h est dérivable en $\sqrt{2}$ puis calculer $(h^{-1})'(\sqrt{2})$

3. Tracer la courbe représentative (C') de h^{-1} dans le même repère que (C_f).

Partie C

Dans cette partie, α désigne un nombre réel supérieur ou égal à ln2.

1. Vérifier que pour tout nombre réel non nul x, $2\dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{e^{x}-1}=\dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}-1}-\dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}+1}$.

2. On désigne par $A(\alpha)$ l'aire de la partie (E) délimitée par (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=ln\ 2$ et $x=\alpha$.

a) Démontrer que : $A(\alpha)=\ln(1-e^{-\frac{\alpha}{2}})-\ln(1+e^{-\frac{\alpha}{2}})+\ln(3+2\sqrt{2})$.

b) Calculer $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} A(\alpha)$.

PROBLEME n°4

Soit f la fonction dérivable sur $]1;+\infty[$ et définie par :

$$f(x) = 2 + \frac{\ln(x-1)}{x^2}.$$

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J). L'unité graphique est 2cm.

Partie A

Soit g la fonction dérivable sur $]1;+\infty[$ et définie par :

$$g(x) = \frac{x}{x-1} - 2\ln(x-1).$$

1. **a)** Calculer la limite de g à droite en 1.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

2. **a)** Démontrer que pour tout nombre réel x, $g'(x) = \dfrac{1-2x}{(x-1)^2}$.

b) Déterminer le sens de variation de g.

c) Dresser le tableau de variation de g.

3. **a)** Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.

Vérifier que : $3{,}093 < \alpha < 3{,}094$.

b) Démontrer que : $\begin{cases} \forall x \in]1;\alpha[, & g(x)>0 \\ \forall x \in]\alpha;+\infty[, & g(x)<0 \end{cases}$.

Partie B

1. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = 2$ est asymptote à (C_f).
2. Déterminer les cordonnées du point B d'intersection de (C_f) et de (D).
3. Démontrer que pour tout nombre réel x strictement supérieur à 1, $f'(x) = g(x)$.
4. a)Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x et en déduire le sens de variation de f.

   b) Dresser le tableau de variation de f.
5. α étant le nombre réel défini à la question 5 de la partie A,

   a) Démontrer que : $f(\alpha) = 2 + \dfrac{1}{2\alpha(\alpha - 1)}$.

   b) En déduire une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 2×10^{-3} près par défaut.
6. Tracer la courbe (C_f).

Partie C

Soit β un nombre réel appartenant à l'intervalle] 1 ; 2 [.

On désigne par $A(\beta)$ l'aire de la partie (E) délimitée par (C_f), la droite (D) et les droites d'équations $x = \beta$ et $x = 2$.

1. Vérifier que pour tout nombre réel x différent de 0 et 1, $\dfrac{1}{x(x-1)} = \dfrac{-1}{x} + \dfrac{1}{x-1}$.
2. Exprimer $\int_{\beta}^{2} \dfrac{1}{x(x-1)}\,dx$ en fonction de β.
3. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que :

   $$A(\beta) = \frac{(\beta - 1)\ln(\beta - 1)}{\beta} - \ln\beta + \ln 2.$$
4. En déduire $\lim\limits_{\beta \to 1} A(\beta)$.

PROBLEME n°5

On considère la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par :

$f(x) = x - (x+1)e^{-2x}$.

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

Unité graphique : 2 centimètres.

Partie A

Soit g la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $g(x) = 1 + (2x+1)e^{-2x}$.

1. **a)** Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

2. **a)** Démontrer que pour tout nombre réel x, $g'(x) = -4xe^{-2x}$.

b) Déterminer le sens de variation de g .

c) Dresser le tableau de variation de g.

3. **a)** Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle [-1;0

b) Vérifier que : $-0{,}64 < \alpha < -0{,}63$.

4. **a)** Démontrer que l'image de l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par g est l'intervalle $]1 ; 2]$.

b) Démontrer que : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty;\alpha[, & g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha;+\infty[, & g(x) > 0 \end{cases}$.

Partie B

1. **a)** Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

b) En déduire une interprétation graphique.

2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3. a) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à (C_f) en $+\infty$.

   b) Déterminer les positions relatives de la courbe (C_f) et de la droite (Δ).

4. a) Démontrer que pour tout nombre réel x, $f'(x) = g(x)$.

   b) Déterminer le sens de variation de la fonction f.

   c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

5. Démontrer que : $f(\alpha) = \alpha + \frac{1}{2} + \frac{1}{4\alpha + 2}$.

6. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0.

Partie C

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :
$h(x) = f(x) - 2x + 1$.

1. a) En utilisant la question 4b) de la Partie A, démontrer que pour tout nombre réel non nul x, $h'(x) < 0$.

   b) En déduire le sens de variation de h.

2. a) Calculer $h(0)$ puis démontrer que : $\forall x \in]-\infty; 0[, h(x) > 0$ et $\forall x \in]0; +\infty[, h(x) < 0$

   b) Déduire de la question 2a) les positions relatives de la tangente (T) et de la courbe (C_f)

3. Tracer (C_f) et (T).

   On prendra : $\alpha = -0,6$, $f(\alpha) = -2$ et $f(-1,1) = f(0,51) = 0$.

Partie D

Soit t un nombre réel strictement positif.

On désigne par $A(t)$ l'aire de la partie (E) délimitée par (C_f), la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = t$.

1. Justifier que : $A(t) = \int_0^t (x+1)e^{-2x}dx$.

2. En utilisant une intégration par parties, démontrer que : $A(t) = -\frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{3}{4}e^{-2t} + \frac{3}{4}$.

3. Calculer $\lim_{t \to +\infty} A(t)$.

PROBLEME n°6

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$f(x) = (x+1)^2 - x\ln(x+1)$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, I, J$

Partie A

Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x+1} - \ln(x+1)$.

1. Démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]-1;+\infty[$, $g'(x) = \frac{x(2x+}{(x+1)}$

2. a) Déterminer le sens de variation de g.

   b) Dresser le tableau de variation de g.

   (On ne calculera pas les limites aux bornes de l'ensemble de définition de g).

   c) Justifier que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]-1;+\infty[$, $g(x) > 0$.

Partie B

1. Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x)$. En déduire une interprétation graphique.

2. a) Justifier que pour tout nombre appartenant à $]-1;+\infty[\setminus\{0\}$, $f(x) = x(x+1)\left(\frac{x+1}{x} - \frac{\ln(x+}{x+1}\right.$

   puis calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

   b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

3. Donner une interprétation graphique de la question 2).

4. a) Démontrer que pour tout nombre réel x, strictement supérieur à 1, $f'(x) = g(x)$.

   b) Déterminer le sens de variation de f.

   c) Dresser le tableau de variation de f.

5. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point $A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

6. Démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à $]-1;+\infty[$, $f(x)-(2x+1)=x(x-\ln(x+1))$.

Partie C

Soit h la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par : $h(x)=x-\ln(x+1)$.

1. Calculer $h'(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]-1;+\infty[$.
2. Déterminer le sens de variation de h .
3. Calculer $h(0)$ puis démontrer que pour tout nombre réel non nul x appartenant à $]-1;+\infty[$, $h(x)>0$.
4. En déduire les positions relatives de (T) et la courbe (C_f).
5. Tracer (T) et (C_f) . *(On prendra 2 centimètres pour unité graphique)*.

Partie D

1. Démontrer que f réalise une bijection de $]-1;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α comprise entre $-\dfrac{1}{2}$ et 0.
3. Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près .
4. On pose : $A(\alpha)=\int_{\alpha}^{0} f(x)dx$.

   a) Donner une interprétation graphique de $A(\alpha)$.

   b) Vérifier que pour tout nombre réel x différent de -1, $\dfrac{x^2}{x+1}=x-1+\dfrac{1}{x+1}$.

   c) En utilisant une intégration par parties, démontrer que :
   $\int_{\alpha}^{0} x\ln(x+1)dx=\dfrac{1}{4}(\alpha^2-2\alpha)+\dfrac{1}{2}(1-\alpha^2)\ln(\alpha+1))$.

5. Retrouver le résultat suivant : $A(\alpha)=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}(\alpha+1)^3+\dfrac{1}{4}(2\alpha-\alpha^2)+\dfrac{1}{2}(\alpha^2-1)\ln(\alpha+1))$.

PROBLEME n°7

On considère la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par :

$f(x) = x^2 - (x-1)e^{x-1}$.

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J). *Unité graphique : 2 cm.*

Partie A

Soit g la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par :

$g(x) = x - e^{x-1}$.

1. Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x.
2. Déterminer le sens de variation de g et dresser le tableau de variation de g sans les limites.
3. En déduire que pour tout nombre réel x différent de 1, $g(x) < 0$.

Partie B

1. a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$.

   b) Interpréter graphiquement ce résultat.

2. a) Vérifier que pour tout nombre réel non nul x, $f(x) = x^2\left(1 - \frac{1}{e} \times \frac{x-1}{x} \times \frac{e^x}{x}\right)$.

   b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

   c) Interpréter graphiquement ce résultat.

3. a) Démontrer que pour tout nombre réel x, $f'(x) = x(2 - e^{x-1})$

   b) Déterminer le sens de variation de la fonction f.

   c) Vérifier que : $f(1 + \ln 2) = 1 + (\ln 2)^2$. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

4. Soit h la restriction de f à l'intervalle $[0;1+\ln 2]$.

Démontrer que la fonction f réalise une bijection de $[0;1+\ln 2]$ sur $[\frac{1}{e};1+(\ln 2)^2]$.

5. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1+\ln 2;+\infty[$.

Vérifier que : $2{,}4<\alpha<2{,}41$.

6. a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point A d'abscisse 1.

b) Démontrer que pour tout nombre réel x, $f(x)-x=(x-1)g(x)$.

c) Déterminer les positions relatives de (T) et de (C_f).

7. Construire la courbe (C_f) et (T).

Partie C

On note h^{-1} la réciproque de la fonction h et on désigne (Γ) la courbe représentative de h dans le repère orthonormé (O, I, J).

1. a) Démontrer que h^{-1} est strictement croissante sur $[\frac{1}{e};1+(\ln 2)^2]$.

b) Dresser le tableau de variation de h^{-1}.

2. a) Démontrer que la fonction h^{-1} est dérivable en 1 puis calculer $(h^{-1})'(1)$

b) En déduire que (T) est la tangente à la courbe (Γ) au point A.

3. Construire (Γ) en indiquant la méthode utilisée.

PROBLEME n°8

L'objet de ce problème est l'étude de la fonction f dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie par :
$f(x) = 2x - 3 + \frac{\ln x}{x}$.
On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J).
L'unité graphique est 2 cm.

Partie A

Soit g la fonction dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie par :
$g(x) = 2x^2 + 1 - \ln x$.

1. Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variation.
(On ne demande pas de calculer les limites).
2. Justifier que : $\forall x \in]0;+\infty[, g(x) > 0$.

Partie B

1. a) Calculer la limite de f en $+\infty$.
b) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat.
2. a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = 2x - 3$ est une asymptote à (C) en $+\infty$.
b) Préciser la position de (C) par rapport à (D).
3. a) Démontrer que pour tout nombre réel strictement positif x, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
b) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.
c) Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1 est : $y = 3x$
4. a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α.
b) Justifier que : $1{,}3 < \alpha < 1{,}4$.

Partie C

On pose pour tout nombre réel x strictement positif :

$\varphi(x) = f(x) - (3x - 4)$ et $h(x) = -x^2 + 1 - \ln x$.

1. a) Déterminer le sens de variation de h sur $]0;+\infty[$.

   b) Calculer $h(1)$ puis justifier que : $\forall x \in]0;1[, h(x) > 0$ et $\forall x \in]1;+\infty[, h(x) < 0$.

2. a) Démontrer que : $\forall x \in]0;+\infty[, \varphi'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$.

   b) Etudier les variations de φ puis en déduire le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x.

   c) Déterminer la position de *(C)* par rapport à *(T)*.

Partie D

1. Tracer la courbe *(C)*, la droite *(D)* et la tangente *(T)*. *On prendra* $\alpha=1,35$.
2. Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe *(C)*, la droite *(D)* et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

(Extrait Bac 2008, Série D).

CORRIGÉS

LIMITES ET CONTINUITE

1

1.

a) $\lim\limits_{x\to -3} (x^2 + x + 2) = (-3)^2 + (-3) + 2.$

$= 8.$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^2 - x + 2) = \lim\limits_{x\to -\infty} x^2 = +\infty.$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} (-x^2 + x + 3) = \lim\limits_{x\to +\infty} (-x^2) = -\infty.$

2.

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} x(1 - x) = \lim\limits_{x\to -\infty} (-x^2) = -\infty.$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} (2x - 1 + 2(x + 2)) = \lim\limits_{x\to +\infty} 4x = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} (x(x+1) - x^2) = \lim\limits_{x\to -\infty} x = -\infty$

3.

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 2} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} x = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2 + x + 1}{x(x - 2)} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to +\infty} (1) = 1.$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x + 1}{x^2 - x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0.$

4.

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(2x + 1 - \dfrac{x^2}{x - 3}\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(2x + 1)(x - 3) - x^2}{x - 3}$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{x}$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} x$

$= +\infty.$

b) $$\lim_{x\to-\infty}\left(x+1-\frac{x^2}{x+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+1)^2-x^2}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}(2)$$

$$=2.$$

c) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}(x^2+1)=\lim_{x\to\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)=+\infty$

Par suite, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}(x^2+1)=+\infty$

5.

a) $$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x}-\sqrt{x(x+1)})=\lim_{x\to+\infty}(1-\sqrt{x+1})\sqrt{x}$$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\sqrt{x+1})=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\sqrt{x+1})\sqrt{x}=-\infty$

Par conséquent, $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x}-\sqrt{x(x+1)})=-\infty$

b) $$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$$

$$=0.$$

c) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{2x-1}-\sqrt{x+1}) = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{2-\frac{1}{x}}-\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)$

Or $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x} = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2-\frac{1}{x}} = \sqrt{2}$ et $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}} = 1$

Par suite, $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2-\frac{1}{x}}-\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) = \sqrt{2}-1$ avec $\sqrt{2}-1>0$

Donc, $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{2-\frac{1}{x}}-\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) = +\infty$

Par conséquent, $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{2x-1}-\sqrt{x+1}) = +\infty$.

6.

a) $\lim_{\substack{x\to0\\>}}\frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{\substack{x\to0\\>}}\frac{1}{x^3} = +\infty$

Donc, $\lim_{\substack{x\to0\\>}}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right) = +\infty$.

b) $\lim_{\substack{x\to0\\<}}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{\substack{x\to0\\<}}\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)$

Or $\lim_{\substack{x\to0\\<}}\frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim_{\substack{x\to0\\<}}\left(1+\frac{1}{x}\right) = -\infty$

Il s'ensuit que, $\lim_{\substack{x\to0\\<}}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = +\infty$.

c) $\lim_{x\to0}\frac{x^2+x-4}{x^2} = \lim_{x\to0}(x^2+x-4)\frac{1}{x^2}$

On a $\lim_{x\to0}(x^2+x-4) = -4$ et $\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2} = +\infty$

Par suite, $\lim_{x\to0}(x^2+x-4)\frac{1}{x^2} = -\infty$

Par conséquent, $\lim_{x\to0}\frac{x^2+x-4}{x^2} = -\infty$.

7.

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x+1} = 0.$$

b) $$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x-3}$$

$$= -4.$$

c) $$\lim_{x\to -1} \frac{2x^2+x-1}{-x^3+8x+7} = \lim_{x\to -1} \frac{(2x-1)(x+1)}{(-x^2+x+7)(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{2x-1}{-x^2+x+7}$$

$$= -\frac{3}{5}.$$

8.

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}$$

$$= 0$$

b) $$\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{3x+1}-4}{x-5} = \lim_{x\to 5} \frac{(\sqrt{3x+1}-4)(\sqrt{3x+1}+4)}{(x-5)(\sqrt{3x+1}+4)}$$

$$= \lim_{x\to 5} \frac{3x-15}{(x-5)\left(\sqrt{3x+1}+4\right)}$$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}$$

$$= \frac{3}{8}.$$

) $$\lim_{x \to -2} \frac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x+6}}{x+2} = \lim_{x \to -2} \frac{(x^2+x+2)-(x+6)}{(x+2)(\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{x+6})}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{x+6}}$$

$$= -1.$$

2

a) L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^*$ et $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = 0.$

Donc, la fonction f admet un prolongement par continuité en 0 qui est la fonction h définie par :

$$\begin{cases} h(0) = 0 \\ \forall x \in D_f, h(x) = f(x) \end{cases}.$$

b) L'ensemble de définition de f est $]0;1[\cup]1;+\infty[$ et $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{2}.$

Donc la fonction f admet un prolongement par continuité en 1 qui est la fonction h définie par :

$$\begin{cases} h(1) = \frac{1}{2} \\ \forall x \in D_f, h(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}} \end{cases}.$$

c) L'ensemble de définition de f est $]-\infty;-2[\cup]-2;2]$ et $\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \frac{-1}{2+\sqrt{2-x}} = \frac{-1}{4}.$

Donc, la fonction f admet un prolongement par continuité en -2 qui est la fonction h définie par

$$\begin{cases} h(-2) = -\dfrac{1}{4} \\ \forall x \in D_f,\ h(x) = \dfrac{1}{2+\sqrt{2-x}} \end{cases}.$$

3

1. $\displaystyle \lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{x^3 - 1}{x + 2}$

$$= \lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} (x^3 - 1)\frac{1}{x + 2}$$

On a $\displaystyle \lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} (x+2) = 0$ et pour tout $x \in]-2\,;+\infty[$, $x + 2 > 0$ donc, $\displaystyle \lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{1}{x+2} = +\infty$

De plus, $\displaystyle \lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} (x^3 - 1) = -9$

Donc, $\displaystyle \lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} (x^3 - 1)\frac{1}{x + 2} = -\infty$

Par conséquent, $\displaystyle \lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} f(x) = -\infty$.

Interprétation graphique : La droite d'équation $x = -2$ est asymptote à (C).

2. $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 1}{x + 2} = \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{x^3 - 1}{x + 2}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 1}{x(x + 2)} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

Interprétation graphique : $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

4

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x+1) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+x}}-x-1\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}}-1\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x(1+\frac{1}{x})}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}-1\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}-1\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)$$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x}) = 1$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}} = 1$ donc, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right) = 0$.

Il s'ensuit que, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x+1) = 0$.

Par conséquent, la droite d'équation $y = x+1$ est asymptote à (C_f) en $+\infty$.

2. $\forall x\in\,]0;+\infty[$, $f(x)-(x+1)=\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1$

On a : $\forall x\in\,]0;+\infty[$, $\frac{1}{x}>0$; $1+\frac{1}{x}>1$ donc, $\sqrt{1+\frac{1}{x}}>1$; $\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1>0$.

Il en découle que, $f(x)-(x+1)>0$.

On en déduit que la courbe (C_f) est en dessus de la droite (Δ) sur $]0;+\infty[$.

5

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sqrt{x}}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x(1-\frac{1}{\sqrt{x}})}{x(1+\frac{1}{x})}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{x}}.$$

Or, $\lim_{x\to+\infty}(1-\frac{1}{\sqrt{x}}) = 1$ et $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x}) = 1.$

Donc $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{x}} = 1$

Par suite, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$

Par conséquent, la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à (C_f) en $+\infty$.

6

1. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$= 0.$$

Par suite, la droite (Δ) est asymptote à (C_f) en $+\infty$.

2. **a)** $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(-2x)) = \lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}+x)$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}.$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = +\infty$

Donc, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = 0$

Par conséquent, $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(-2x)) = 0.$

Par suite, la droite (Δ') est asymptote à (C_f) en $-\infty$

b) $\forall x \in]-\infty\,;0[$, $f(x) - (-2x) = \sqrt{x^2+1}+x$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$$

$\forall x \in]-\infty\,;0[$, $\sqrt{x^2+1} > 0$ et $-x > 0$

Donc, $\sqrt{x^2+1} - x > 0$; $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} > 0$

Il s'ensuit que, $f(x) - (-2x) > 0$

On en déduit que (C_f) est au dessus de (Δ') sur $]-\infty\,;0[$.

7

1. La fonction f est continue et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$

Donc, $f(]0\,;+\infty[) = \left]\lim\limits_{x\to0} f(x)\,;\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$

$$=]-\infty\,;1[.$$

2. La fonction f est continue et strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$ et $f(]0;+\infty[) =]-\infty;1[$

Donc, f réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur $]-\infty ; 1[$

Or : $-2 \in]-\infty;1[$.

Il en résulte que l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution dans $]0 ; +\infty[$.

8

1. La fonction f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty ; 0[$.

Donc, $f(]-\infty ; 0[) =]\lim\limits_{x\to 0} f(x) ; \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)[$

$=]-\infty ; +\infty[$.

La fonction f est continue et strictement croissante sur $]0 ; 1[$.

Donc, $f(]0 ; 1[) =]\lim\limits_{x\to 0} f(x) ; f(1)[$

$=]-\infty ; 3[$.

Par ailleurs, la fonction f est continue et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$

Donc, $f([1; +\infty[) =]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) ; f(1)]$

$=]0 ; 3]$.

2. La fonction f est continue et strictement croissante sur $[1; +\infty[$, donc sur $]1 ; 4[$.

On a : $f(1) = 3$ et $f(4) = -2$ donc $f(1) \times f(4) < 0$.

On en déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]1 ; 4[$.

9

1. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = x(3x-2)$

$x(3x-2)$ est l'expression d'un polynôme du second degré dont les racines sont 0 et $\frac{2}{3}$

Par suite, $\forall x \in]-\infty ; 0]$, $f'(x) > 0$

Donc, f est strictement croissante sur $]-\infty\,;0]$.

Par ailleurs, f est continue et strictement croissante sur $]-\infty\,;0]$.

Donc, f réalise une bijection de $]-\infty\,;0]$ sur $f(]-\infty\,;0])$.

On a $f(0)=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

Il s'ensuit que $f(]-\infty\,;0])=]-\infty\,;1]$

Puisque $0\in -\infty\,;1]$ alors l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $]-\infty\,;0]$.

2. On a : $f(-0,76)\approx -0,016$ et $f(-0,75)\approx 0,015$

$f(-0,76)$ et $f(-0,75)$ sont de signes contraires.

Par conséquent, $-0,76<\alpha<-0,75$.

10

1. f est continue et strictement croissante sur $]\,0\ +\infty[$.

Donc f réalise une bijection de $]\,0\ +\infty[$ sur $J=f(]\,0\,;+\infty\,[)$.

$J=f(]\,0\,;+\infty\,[)$

$=]\lim\limits_{x\to0} f(x)\,;\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\,[$

$=]-1\,;2\,[$.

Par suite, f admet une bijection réciproque de $]-1\,;2\,[$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

2. **a)** f^{-1} a le même sens de variation que f donc f^{-1} est strictement croissante sur $]-1;\,2\,[$.

b) Tableau de variation de f^{-1}

x	-1		2
$f^{-1}{}'(x)$		$+$	
$f^{-1}(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

DERIVATION – ETUDES de FONCTIONS

1

1.

a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x - 1$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -6x + 4$.

c) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -7x^5 + \frac{7}{6}x^4$.

d) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -(x+3) + 1 - x = -2x - 2$.

e) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 14x^2 + 4x + 110$.

2.

a) $\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}$; **b)** $\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = -\frac{3}{x^5}$.

c) $\forall x \in]0;+\infty[$, $f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ donc $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}$, c'est à dire

$f'(x) = -\frac{x+2}{x^3}$.

3.

a) $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-5\}$, , $f'(x) = \frac{3}{(x+5)^2}$.

c) $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-5;-2\}$, $f(x) = -\frac{3}{(x+5)^2} - \frac{2}{(x+2)^2}$.

4.

a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 8(2x-1)^3$

b) $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $f'(x) = \dfrac{-2}{(x+1)^3}$.

c) $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $f'(x) = \dfrac{2x-16}{x+1^{\,4}}$.

d) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{(10x+3)(x^2-x+10)-(2x-1)(5x^2+3x+12)}{(x^2-x+10)^2}$

$$f'(x) = \frac{-8x^2+76x+42}{(x^2-x+10)^2}.$$

2

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -4(1-2x) - \dfrac{(2x-1)}{(x^2-x+10)^2}$

$$= \frac{((2x^2-2x+20)^2-1)(2x-1)}{(x^2-x+10)^2}$$

$$= \frac{(2x^2-2x+21)(2x^2-2x+19)(2x-1)}{(x^2-x+10)^2}$$

3

a) $\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ ou encore $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x+1}\sqrt{x}}$.

b) $\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x}-(x-1)\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$

$$= \frac{x+1}{2x\sqrt{x}}.$$

c) $\forall x \in]0;+\infty[,\ f'(x) = \dfrac{\dfrac{x^2+1}{2\sqrt{x}} - 2x(\sqrt{x}-1)}{(x^2+1)^2}$

$$= \frac{x^2+1-4x(x-\sqrt{x})}{2(x^2+1)^2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{-3x^2+4x\sqrt{x}+1}{2(x^2+1)^2\sqrt{x}}.$$

4

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \cos x + \sin x$; **b)** $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -2\sin(2x+\pi)$

c) $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x$

$= \cos^2 x - \sin^2 x$ ou encore $f'(x) = \cos(2x)$

5

a) $\forall x \in]0;\frac{\pi}{2}[,\ f'(x) = 2\sin x \cos x$ ou encore $f'(x) = \sin(2x)$.

b) $\forall x \in]0;\frac{\pi}{2}[,\ f'(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$.

c) $\forall x \in]0;\frac{\pi}{2}[,\ f'(x) = \dfrac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$

$$= \frac{-1}{\sin^2 x}$$

6

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \sin x\sqrt{1+\sin^2 x} + \cos x\ \dfrac{2\sin x \cos x}{2\sqrt{1+\sin^2 x}}$

$$f'(x) = \frac{-\sin x\,(1+\sin^2 x) + \sin x \cos^2 x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$$

$$f'(x) = \frac{\sin x\,(-1-\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$$

$$f'(x) = \frac{-\sin x\,(-1+\cos(2x))}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$$

$$f'(x) = \frac{-2\sin^3 x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$$

7

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + bx + c$ et $f'(x) = 2x + b$.

On a, $f(0) = 0^2 + b \times 0 + c = -1$ et $f'(2) = 2 \times 2 + b = 5$

Il s'ensuit que, $c = -1$ et $b = 1$.

8

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{x^2 + b - 2x(x+a)}{(x^2+b)^2}$

$$= \frac{-x^2 - 2ax + b}{(x^2+b)^2}.$$

2. a) $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{7} \Leftrightarrow \dfrac{\frac{1}{2}+a}{\frac{1}{4}+b} = -\frac{2}{7}$

$\Leftrightarrow 7a + 2b = -4.$

Par ailleurs, $f'(-1) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-1+2a+b}{(1+b)^2} = 0$

$\Leftrightarrow 2a + b = 1.$

On obtient le système $\begin{cases} 7a + 2b = -4 \\ 2a + b = 1 \end{cases}$.

Par suite, $a = -2$ et $b = 5$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{-x^2+4x+5}{(x^2+5)^2}$ donc, $f'(5) = \dfrac{-5^2+4\times5+5}{(5^2+5)^2} = 0.$

9

1. $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \dfrac{x^2-2}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} (x^2-2)\dfrac{1}{x+1}$.

On a $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} (x^2-2) = -1$,

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} (x+1) = 0$ et $\forall x > -1$, $x+1 > 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \dfrac{1}{x+1} = +\infty$.

Par suite $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} (x^2-2)\dfrac{1}{x+1} = -\infty$.

Donc $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} h(x) = -\infty$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2-2}{x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

2. a) $\forall x \in]-1\,;+\infty[$, $h'(x) = \dfrac{2x(x+1)-(x^2-2)}{(x+1)^2}$ donc, $h'(x) = \dfrac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}$.

b) Posons $P(x) = x^2 + 2x + 2$ le discriminant $\Delta = -4 < 0$ donc, $x^2 + 2x + 2 > 0$.

De plus, $\forall x \in]-1\,;+\infty[$, $(x+1)^2 > 0$.

Donc, $\dfrac{x^2+2x+2}{(x+1)^2} > 0$; $h'(x) > 0$.

On en déduit que h est strictement croissante sur $]-1\,;+\infty[$

3. h est continue et strictement croissante sur $]-1\,;+\infty[$.

Donc, h réalise une bijection de $]-1;+\infty[$ sur $J = h(]-1\,;+\infty[)$.

$$= \mathbb{R}.$$

4. a) $h(1) = -\dfrac{1}{2}$ et $h'(1) = \dfrac{5}{4}$.

b) $h'(1) \neq 0$, donc h^{-1} est dérivable en $-\dfrac{1}{2}$.

Par ailleurs, $(h^{-1})'(-\dfrac{1}{2}) = \dfrac{1}{h'(h^{-1}(-\frac{1}{2}))}$

$$= \frac{1}{h'(1)}$$

$$= \frac{4}{5}.$$

10

1. $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^2+x-6}{(x+1)^2}$

$= \lim\limits_{x\to -1} (2x^2+x-6)\dfrac{1}{(x+1)^2}$

Or $\lim\limits_{x\to -1} (2x^2+x-6) = -5$ et $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1}{(x+1)^2} = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to -1} (2x^2+x-6)\dfrac{1}{(x+1)^2} = -\infty$

Par suite, $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -\infty$

Interprétation graphique : La droite d'équation $x = -1$ est asymptote horizontale à (C).

2. a) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2$

b) La droite d'équation $y = 2$ est asymptote en $-\infty$ et en $+\infty$.

3. a) Pour tout nombre réel x,

$$f'(x) = \frac{(4x+1)(x+1)^2 - 2(x+1)(2x^2+x-6)}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{(x+1)(4x^2+4x+x+1-4x^2-2x+12)}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{3x+13}{(x+1)^3}$$

b) Déterminions d'abord le signe de f'

Pour $x \in \mathbb{R}$, $(x+1)^3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Et, $3x + 13 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{13}{3}$

Il s'ensuit le tableau de signe $f'(x)$

x	$-\infty$		$-\frac{13}{3}$		-1		$+\infty$
$(x+1)^3$		$-$		$-$	‖	$+$	
$3x+13$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

$\forall x \in \left]-\infty\,,\,-\frac{13}{3}\right[\cup \left]-1\,;+\infty\right[,\ f'(x) > 0$

Il s'ensuit que f est strictement croissante sur $\left]-\infty\,;\,-\frac{13}{3}\right[$ et $\left]-1\,;\,+\infty\right[$.

$\forall x \in \left]-\frac{13}{3}\,;-1\right[,\ f'(x) < 0$

Par conséquent, f est strictement décroissante sur $\left]-\frac{13}{3}\,;-1\right[$.

c) Tableau de variation de f

x	$-\infty$		$-\frac{13}{3}$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$\frac{49}{20}$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	2

$f\left(-\frac{13}{3}\right) = \frac{49}{20}$

4. Pour $x \in \mathbb{R}$,

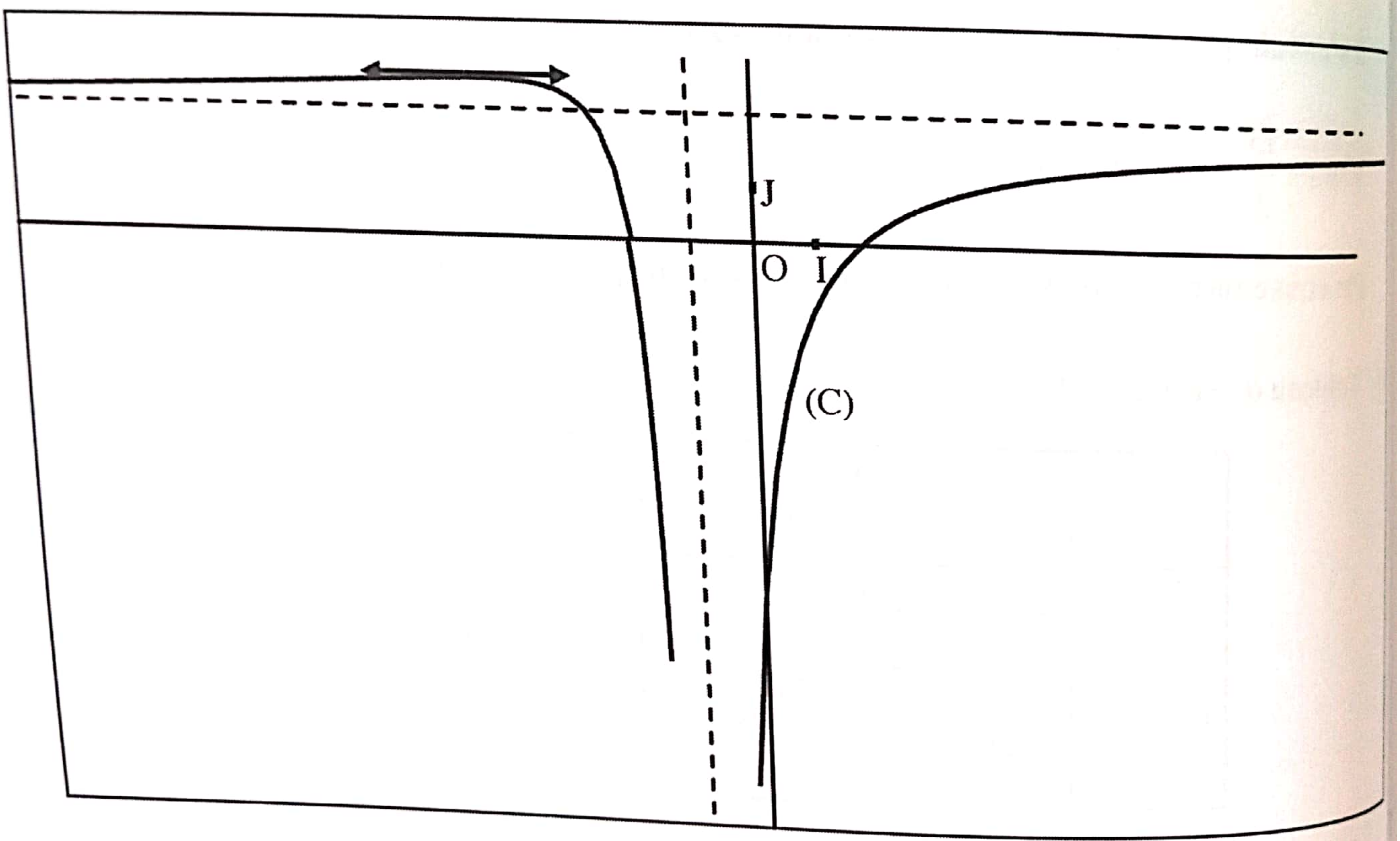
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 + x - 6}{(x+1)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = \frac{3}{2}$$

Donc, l'ensemble solution est $\{-2 ; \frac{3}{2}\}$

5. Tracé de (C)



11

L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel x tel que $0 + x \in \mathbb{R}$, $0 - x \in \mathbb{R}$.

De plus,

$$f(0 - x) = (0 - x)^3 - (0 - x) + 1$$

$$= -x^3 + x + 1$$

$$f(0 + x) = (0 + x)^3 - (0 + x) + 1$$

$$= x^3 - x + 1$$

Donc, $$\frac{f(0-x)+f(0+x)}{2} = \frac{-x^3 + x + 1 + x^3 - x + 1}{2}$$

$$= 1$$

Par conséquent le point I(0 ; 1) est centre de symétrie de (C).

12

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$

2. L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

   Pour tout nombre réel x, tel que $-1+x$ appartient à l'ensemble de définition de f, on a $-1-x$ qui appartient à $\mathbb{R}$.

   De plus, $$f(-1-x) = \frac{(-1-x)^2 + 2(-1-x) + 3}{(-1-x)^2 + 2(-1-x) + 2}$$

   $$= \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$$

$$f(-1+x)=\frac{(-1+x)^2+2(-1+x)+3}{(-1+x)^2+2(-1+x)+2}$$

$$=\frac{x^2+2}{x^2+1}$$

Il s'ensuit que, $f(-1-x)=f(-1+x)$

On en déduit que la droite d'équation $x=-1$ est axe de symétrie de (C)

3. **a)** Pour tout nombre réel x,

$$f'(x)=\frac{(2x+2)(x^2+2x+2)-(2x+2)(x^2+2x+3)}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$=\frac{-2(x+1)}{(x^2+x+1)^2}$$

b) On déduit de la question précédente que : $\forall x\in\,]-\infty\,,-1[\,,\ f'(x)>0$

$\forall x\in\,]-1\,;+\infty\,[\ f'(x)<0$

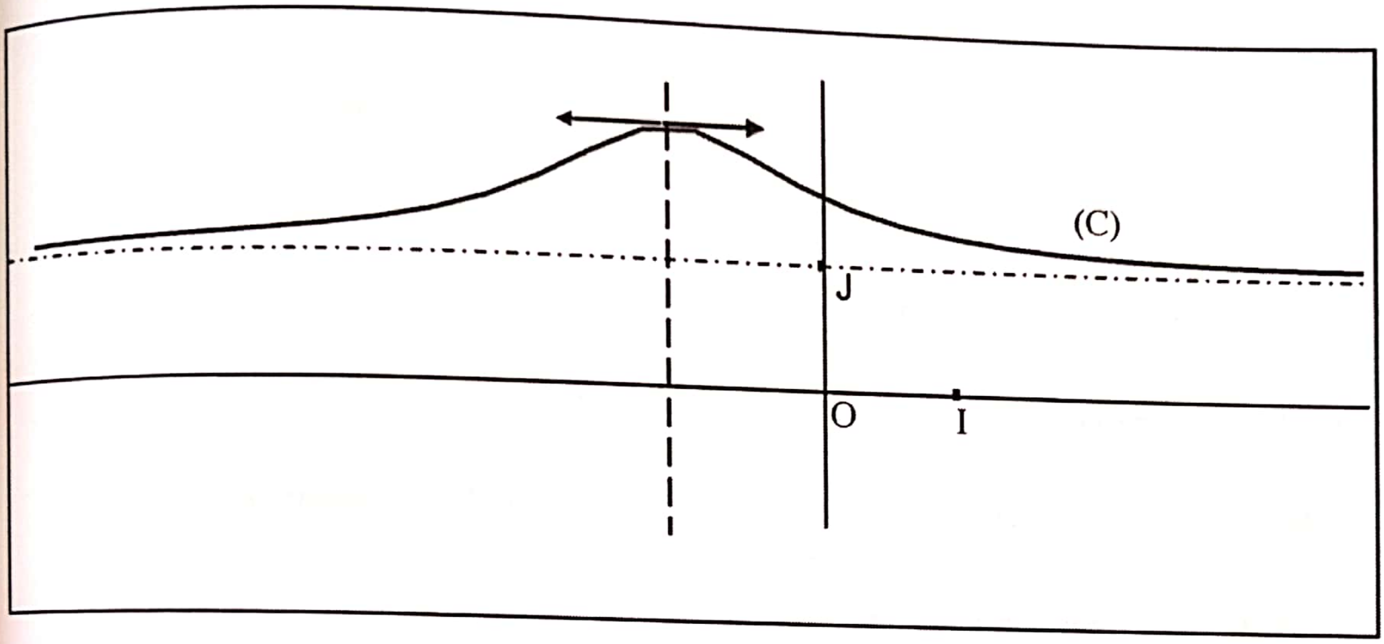
$f'(-1)=0$

Il en découle le tableau de variation de f

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

$f(-1)=2$

4. **Construction de (C)**



13

1. $\forall x \in]-\infty\,;1],\ f(x) = -x^2 + x + 2$

$\forall x \in [\,1\,;+\infty\,[,\ f(x) = x^2 - x + 2$

2. a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x^2 + x + 2)$

$= -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - x + 2)$

$= +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^2 + x + 2}{x}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^2}{x}$

$$= \lim_{x \to -\infty} (-x)$$

$$= +\infty$$

D'une manière analogue, on établit que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées en $-\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées en $+\infty$

4. a) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{-x^2 + x + 2 - 2}{x - 1}$

$$= \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{x(-x+1)}{x-1}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} (-x)$$

$$= -1$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{x^2 - x + 2 - 2}{x - 1}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{x(x-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} (x)$$

$$= 1$$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \neq \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ donc f n'est pas dérivable en 1.

c) Interprétation graphique : (C) admet une demi–tangente de coefficient directeur 1 à droite au point d'abscisse 1 et une demi–tangente de coefficient directeur -1 à gauche au point d'abscisse 1.

3. a) $\forall x \in]-\infty ; 1]$, $f'(x) = -2x+1$

$\forall x \in [1 ; +\infty[$, $f'(x) = 2x - 1$

b) Pour $x \in]-\infty ; 1]$, $-2x+1=0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Par suite, $\forall x \in]-\infty ; \frac{1}{2}[$, $f'(x) > 0$ et $\forall x \in]\frac{1}{2} ; 1[$, $f'(x) < 0$

Donc, f est strictement croissante sur $]-\infty ; \frac{1}{2}[$ et strictement décroissante sur $]\frac{1}{2} ; 1[$

Par ailleurs, pour $x \in [1 ; +\infty[$, $2x - 1=0 \Leftrightarrow x= \frac{1}{2}$

Il s'ensuit que $\forall x \in [1 ; +\infty[$, $f'(x) > 0$

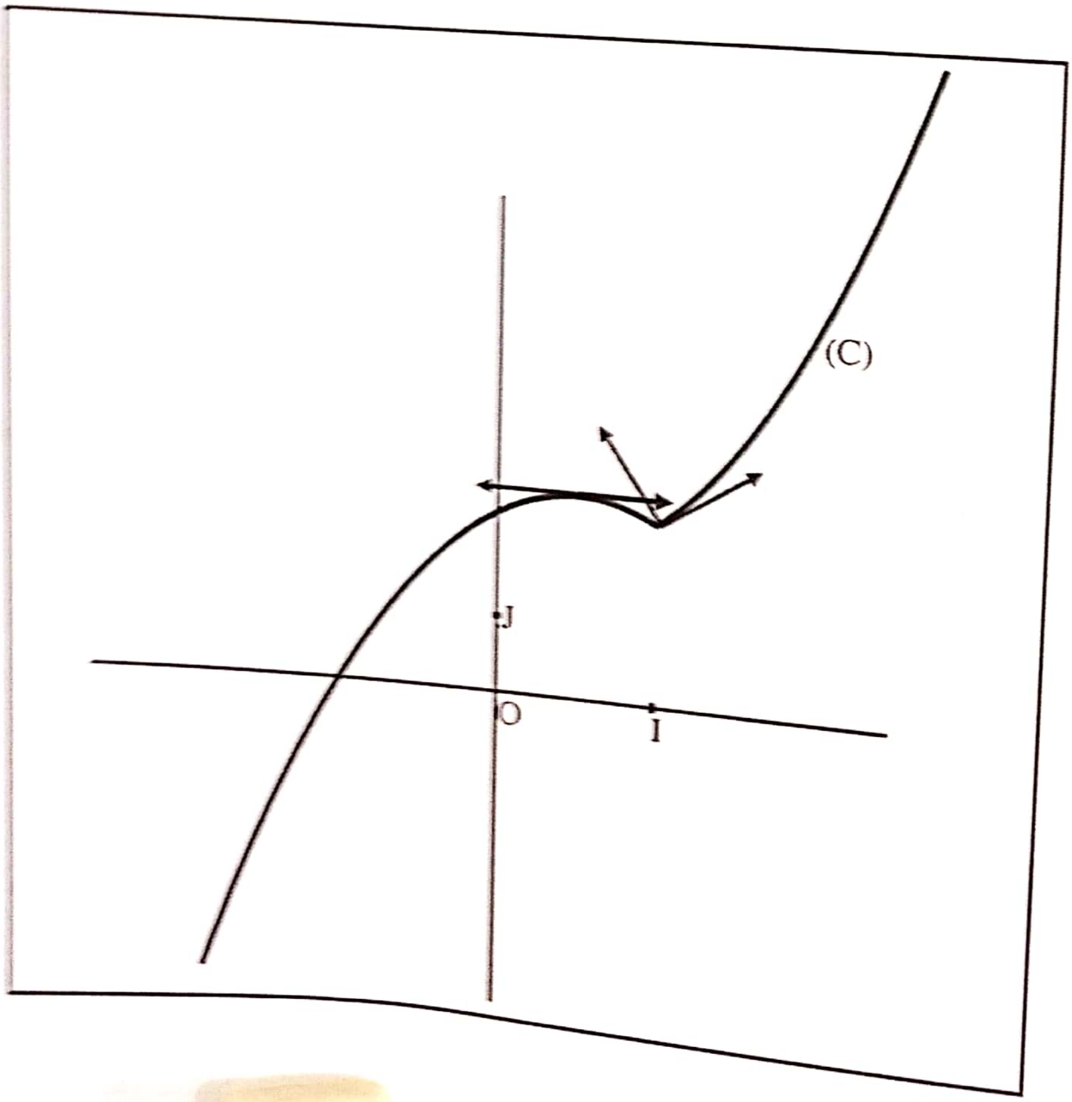
Par conséquent f est strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$

Donc, f est strictement croissante sur $]-\infty ; \frac{1}{2}[$ et sur $]1;+\infty[$ et f est strictement décroissante sur $]\frac{1}{2} ; 1[$.

c) Tableau de variation de f

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-1 \,\|\|\, 1$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

6. **Tracé de (C)**



14

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3+x^2+1}{x^2-x+1}$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x$$

$$= -\infty.$$

De même, on établit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. a) Pour tout nombre réel x,

$$x+2+\frac{x-1}{x^2-x+1} = \frac{(x+2)(x^2-x+1)+x-1}{x^2-x+1}$$

$$= \frac{x^3-x^2+x+2x^2-2x+2+x-1}{x^2-x+1}$$

$$= \frac{x^3+x^2+1}{x^2-x+1}$$

Donc, $\dfrac{x^3+x^2+1}{x^2-x+1} = x+2+\dfrac{x-1}{x^2-x+1}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(x+2)) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^3+x^2+1}{x^2-x+1}-(x+2)\right)$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x^2-x+1}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x}$$

$$= 0$$

De même, $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (x + 2)) = 0.$

Par suite, la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est asymptote à (C) en $-\infty$ et en $+\infty$.

3. Pour tout nombre réel x, $f(x) - (x + 2) = \dfrac{x - 1}{x^2 - x + 1}$.

$x^2 - x + 1 > 0$ donc le signe de $f(x) - (x + 2)$ est celui de $x - 1$.

Il s'ensuit que :

$\forall x \in \left]-\infty ; 1\right[$, $f(x) - (x + 2) < 0$ donc (C) est en dessous de (D) sur $\left]-\infty ; 1\right[$.

$\forall x \in \left]1 ; +\infty\right[$, $f(x) - (x + 2) > 0$ donc (C) est au dessus de (D) sur $\left]1 ; +\infty\right[$.

En définitive, (C) et (D) se coupent au point d'abscisse 1.

4. Pour tout nombre réel x, $f'(x) = \dfrac{(3x^2 + 2x)(x^2 - x + 1) - (2x - 1)(x^3 + x^2 + 1)}{(x^2 - x + 1)^2}$

$$= \frac{x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 1}{(x^2 - x + 1)^2}$$

$$= \frac{x^2(x^2 - 2x + 2) + 1}{(x^2 - x + 1)^2}.$$

5. a) Pour tout nombre réel x, $x^2 - 2x + 2 = x^2 - 2x + 1 + 1$

$$= (x - 1)^2 + 1$$

Or, $(x - 1)^2 \geq 0$

$(x - 1)^2 + 1 \geq 1$

$(x-1)^2+1>0$

Donc $x^2-2x+2>0$

b) $x^2(x^2-2x+2)+1>0$ et $(x^2-x+1)^2>0$ donc $\dfrac{x^2(x^2-2x+2)+1}{(x^2-x+1)^2}>0$

Par conséquent, $f'(x)>0$

On en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c) Tableau de variation de f.

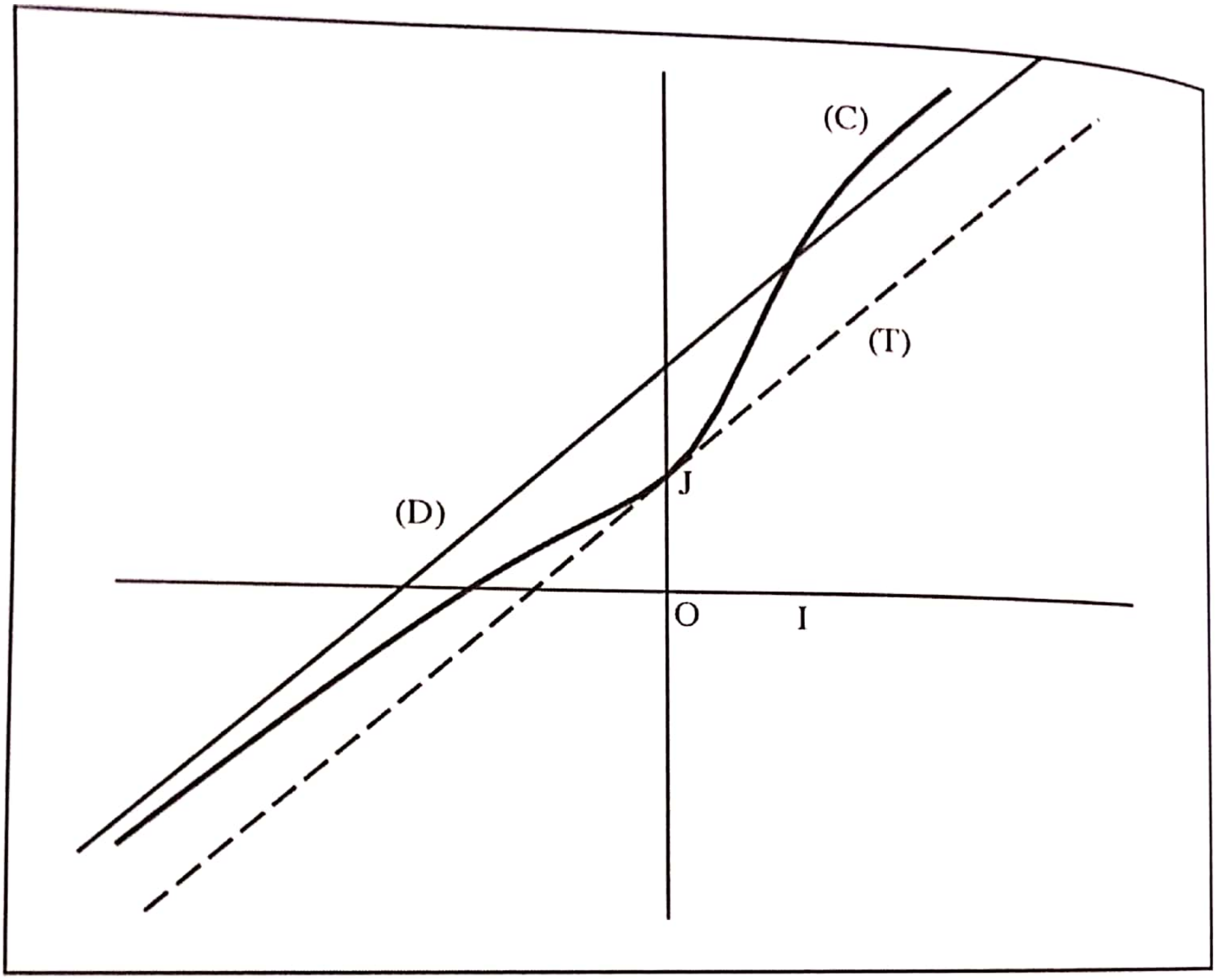
x	$-\infty$		$+\infty$
f '(x)	+	+	
f (x)	$-\infty$	↗	$+\infty$

6. a) La tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f'(0)(x-0)+f(0)$.

$f'(0)=1$ et $f(0)=1$.

Par conséquent, on a (T) : $y = x+1$.

b)



15

1. $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\frac{x-1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{x-1}{\sqrt{x}} + 1\right)$$

Or $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\frac{x-1}{\sqrt{x}} + 1\right) = -\infty$

Donc $\lim\limits_{x \to 0 \atop >} \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{x-1}{\sqrt{x}}+1\right) = -\infty$

Par conséquent $\lim\limits_{x \to 0 \atop >} f(x) = -\infty$.

Interprétation graphique : $\lim\limits_{x \to 0 \atop >} f(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à (C)

2. a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x-1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

Donc, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x-1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 1$

Par conséquent, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

Donc, la droite (Δ) est asymptote à (C) en $+\infty$.

b) $\forall x \in]0; +\infty[$, $f(x) - 1 = \frac{\sqrt{x}-1}{x}$

$\forall x \in]0 ; +\infty[$, $x > 0$ donc le signe de $f(x) - 1$ est celui de $\sqrt{x} - 1$.

On a, $\sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$\sqrt{x} - 1 < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

$\sqrt{x} - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Par conséquent,

$\forall x \in]0 ; 1[$, $f(x) - 1 < 0$ ce qui signifie que (C) est en dessous de (Δ) sur $]0 ; 1[$.

$\forall x \in]1 ; +\infty[$, $f(x) - 1 > 0$ ce qui signifie que (C) est au dessus de (Δ) sur $]1 ; +\infty[$

Enfin (C) et (Δ) se coupent au point d'abscisse 1.

3. **a)** $\forall x \in]0\,;+\infty[,\quad f'(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$

$$= \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$$= \frac{2-\sqrt{x}}{2x^2}$$

b) $\forall x \in]0\,;4[,\quad 0 < x < 4$

$$\sqrt{x} < \sqrt{4}$$

$$2 - \sqrt{x} > 0$$

En plus, $2x^2 > 0$

Donc, $\dfrac{2-\sqrt{x}}{2x^2} > 0$

Par conséquent, $f'(x) > 0$

On en déduit que f est strictement croissante sur $]0\,;4[$

D'une manière analogue, on montre que : $\forall x \in]4\,;+\infty[,\quad f'(x) < 0$

On en déduit que f est strictement décroissante sur $]4\,;+\infty[$.

c) Tableau de variation de f : $f(4) = \dfrac{4-1}{4} + \dfrac{1}{\sqrt{4}} = \dfrac{5}{4}$

x	0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{5}{4}$	↘	1

4. a) f est dérivable et strictement croissante sur] 0; 4].

$f(]0;4]) =]\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) ; f(4)]$

$=]-\infty ; \frac{5}{4}]$.

Donc, f réalise une bijection de] 0; 4] sur $]-\infty ; \frac{5}{4}]$.

b) f réalise une bijection de] 0; 4] sur $]-\infty ; \frac{5}{4}]$.

Puisque $0 \in]-\infty ; \frac{5}{4}]$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans]0; 4].

c) $f(0,38) \approx -0,093$ et $f(0,39) \approx 0,037$.

On a $f(0,38) \times f(0,39) < 0$

Donc, $0,38 < \alpha < 0,39$.

5. Voir figure.

6. a) $h(3) = \frac{2+\sqrt{3}}{3}$ et $h'(3) = = \frac{2-\sqrt{3}}{18}$.

b) Puisque $h'(3) \neq 0$ alors, h^{-1} est dérivable en $\frac{2+\sqrt{3}}{3}$.

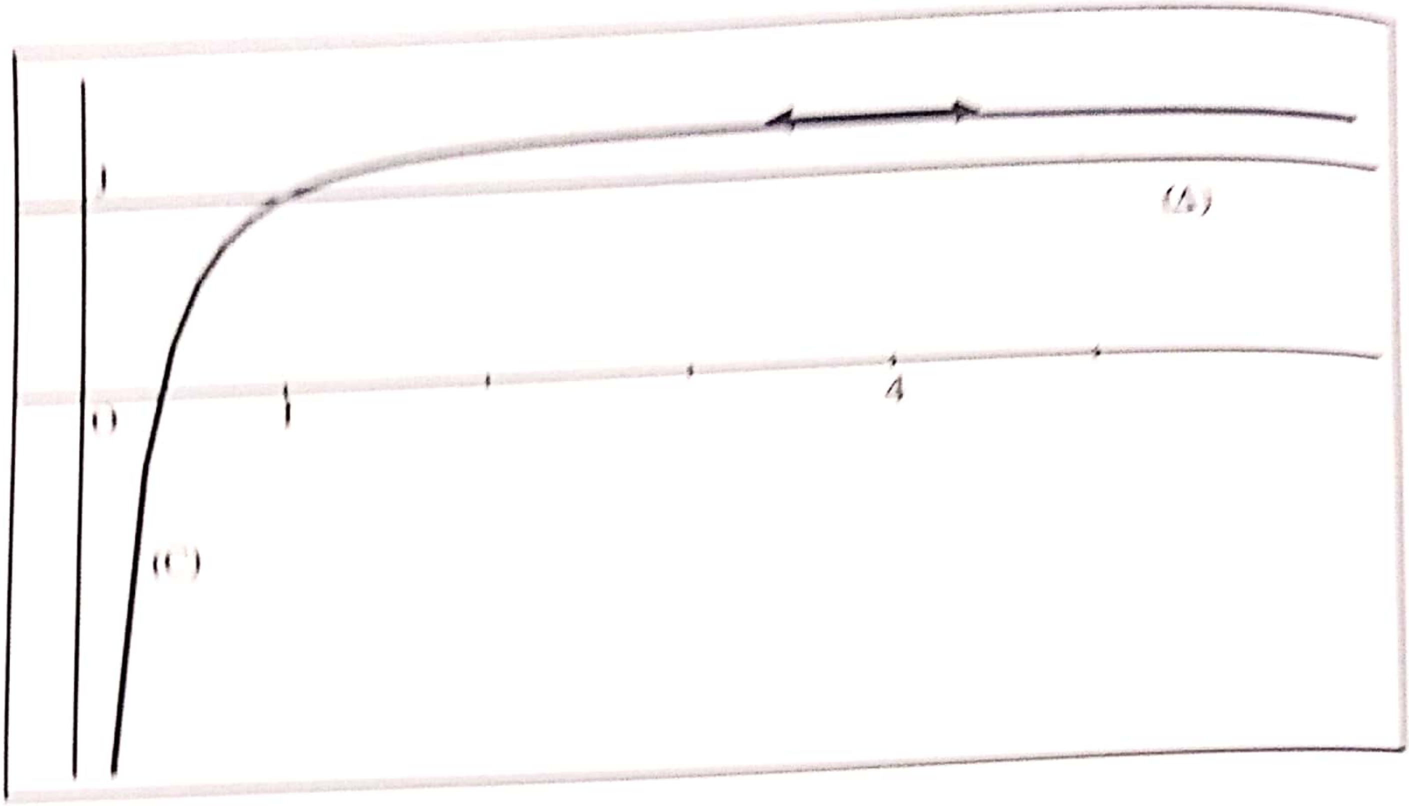
$$(h^{-1})'\left(\frac{2+\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{h'(3)}$$

$$= \frac{1}{\frac{2-\sqrt{3}}{18}}$$

$$= \frac{18}{2-\sqrt{3}}$$

$$= 36 + 18\sqrt{3}.$$

Tracé de la courbe (C)



16

1\. a) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + 1 > x^2$

$$\sqrt{x^2+1} > |x|$$

Or $|x| = -x$ ou $|x| = x$.

Par suite, $\sqrt{x^2+1} > x$

Donc, $\sqrt{x^2+1} - x > 0$.

b) $x \in D_f \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} - x \neq 0$.

D'après la question précédente, pour tout nombre réel x, $\sqrt{x^2+1} - x > 0$.

Donc, $\sqrt{x^2+1} - x \neq 0$

Par conséquent, l'ensemble de définition de la fonction f est $\mathbb{R}$.

2. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1} - x}$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}$$

$$= -\frac{1}{2}.$$

Interprétation graphique : La droite d'équation $y = -\frac{1}{2}$ est asymptote à (C) en $-\infty$.

3. a) Pour tout nombre réel x, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1} - x}$

$$= \frac{x(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}$$

b) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x(\sqrt{x^2+1}+x)$

$$= +\infty.$$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x(\sqrt{x^2+1}+x)}{x}$

$$= \lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+1}+x)$$

$$= +\infty.$$

Interprétation graphique : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

Donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

4. **a)** Pour tout nombre réel x, $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - x - x\left(\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 1\right)}{(\sqrt{x^2+1} - x)^2}$

$$= \frac{x^2+1 - x\sqrt{x^2+1} - x^2 + x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1} - x)^2}$$

Donc, $$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1} - x)^2}$$

b) Pour tout nombre réel x, $f'(x) > 0$.

Par suite, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c) Tableau de variation de f :

x	$-\infty$	$+\infty$
f'(x)	+	
f(x)	$-\frac{1}{2}$ ↗	$+\infty$

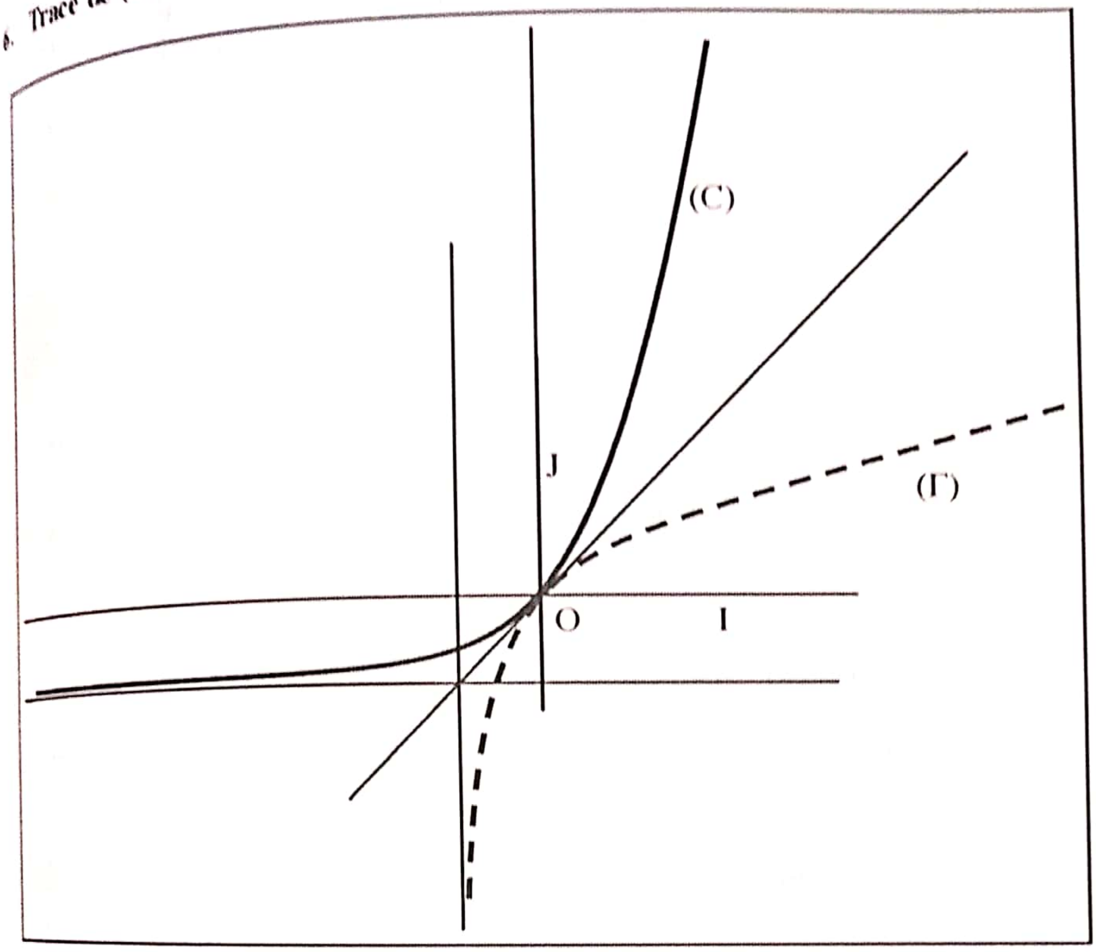
5. **a)** $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

Donc, (T) a pour équation $y = x$.

b) f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Donc, $f(\mathbb{R}) =]-\frac{1}{2} ; +\infty[$. Par conséquent, f détermine une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-\frac{1}{2} ;+\infty$

6. Tracé de (C)



PRIMITIVES

1

a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 3x^2 + 5 \times 2x + 3$

$$= 3x^2 + 10x + 3$$

Donc, $g'(x) = f(x)$

On en déduit que g est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \cos x\cos(2x) - 2\sin x\sin(2x)$

$$= \cos x\cos(2x) - 4\sin x\sin x\cos x$$

$$= \cos x(1 - 2\sin^2 x - 4\sin^2 x)$$

$$= \cos x(1 - 6\sin^2 x)$$

$= f(x)$. Donc, g est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2

a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = 4x^9 - 1$

c) $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + 2$

3

a) $\forall x \in]0; +\infty[$, $F(x) = 7x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$

b) $\forall x \in]0; +\infty[$, $f(x) = -x^2 + 3x - 6$

Donc, $F(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x$

c) $\forall x \in]0;+\infty[$, $f(x) = \frac{3}{2} \times (2x+2)(x^2+2x+3)^2$.

Donc, $F(x) = \frac{3}{2} \times \frac{1}{3}(x^2+2x+3)^3$

$F(x) = \frac{1}{2}(x^2+2x+3)^3$.

4

a) $\forall x \in]0;+\infty[$, $f(x) = x + 1$. donc : $\forall x \in]0;+\infty[$, $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$.

b) $\forall x \in]0;+\infty[$, $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$ donc : $\forall x \in]0;+\infty[$, $F(x) = x - \frac{1}{x} + 3$

c) $\forall x \in]0;+\infty[$, $f(x) = \frac{1}{x^{98}}$. Donc : $\forall x \in]0;+\infty[$, $F(x) = -\frac{1}{97x^{97}}$

d) $\forall x \in]0;+\infty[$, $f(x) = x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{x^{\frac{99}{2}}}$. Donc : $\forall x \in]0;+\infty[$, $F(x) = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{97} \times \frac{1}{x^{\frac{97}{2}}}$.

5

Notons F une primitive de f qui convient dans chacun des cas .

a) $\forall x \in]-\infty;-1[, F(x) = \frac{1}{5}(x-17)^5$

b) $\forall x \in]-\infty;-1[$, $f(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$

$= 2\frac{1}{(x+1)^3}$

Donc : $\forall x \in]-\infty;-1[, F(x) = 2\frac{-1}{2}\frac{1}{(x+1)^2}$

$= \frac{-1}{(x+1)^2}$

c) $\forall x \in]-\infty;-1[$, $f(x) = 2\dfrac{2}{(2x+2)^6}$

Par suite, $F(x) = \dfrac{-2}{5(2x+2)^5}$

d) $\forall x \in]-\infty;-1[$, $f(x) = (-\dfrac{1}{2})\dfrac{-2}{\sqrt{1-2x}}$

$$= \frac{2}{2\sqrt{1-2x}}$$

Donc : $\forall x \in]-\infty;-1[$, $F(x) = -\dfrac{1}{2} \times 2\sqrt{1-2x}$

$$= -\sqrt{1-2x}\ .$$

6

a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^4}$

Posons $u(x) = x^2 + x + 1$ donc $u'(x) = 2x + 1$

Par suite $f(x) = \dfrac{u'(x)}{[u(x)]^4}$

Par conséquent, $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = -\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{[u(x)]^3}$

$$= -\frac{1}{3}\frac{1}{(x^2+x+1)^3}\ .$$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x-2}{(-x^2+2x-3)^2}$

Posons $u(x) = -x^2 + 2x - 3$ donc $u'(x) = -2x + 2$, c'est à dire $u'(x) = -(2x-2)$.

Donc $f(x) = -\frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$

Il en résulte $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = -\frac{-1}{2-1}\frac{1}{u(x)}$

$$= \frac{1}{-x^2+2x-3} .$$

7

a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x \sin x$

Posons $u(x) = \cos x$ donc $u'(x) = -\sin x$

Donc pour tout nombre réel x, $f(x) = -u'(x)\,u(x)$.

Par suite $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = -\frac{1}{2}[u(x)]^2$

$$= -\frac{1}{2}[\cos x]^2$$

b $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^2 x \cos^2 x$

$$= \frac{1}{4}[\sin(2x)]^2 ;$$

$$= \frac{1}{8}(1-\cos(4x))$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos(4x)$$

On en déduit que pour tout nombre réel x, $F(x) = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin(4x)$.

8

Déterminons une primitive F de h sur] 0 ; +∞ [.

$\forall x \in]0;+\infty[,\ F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{x} + \frac{6}{7x^3}$

Par suite, $\forall x \in]0;+\infty[,\ H(x) = F(x) + c$ où c est un nombre réel à déterminer.

$$H(1) = \frac{9}{14} \Leftrightarrow \frac{1}{2} - 3 + \frac{6}{7} + c = \frac{9}{14}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{23}{14} + c = \frac{19}{14}$$

$$\Leftrightarrow c = 3$$

Donc, $\forall x \in]0;+\infty[,\ H(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{x} + \frac{6}{7x^3} + 3$.

9

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = -\cos x + \frac{1}{2}\sin(2x)$

2. $\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = F(x) + c$ où c est un nombre réel.

$$G\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow -\cos\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\sin\left(2\times\frac{\pi}{4}\right) + c = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} + c = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow c = -\frac{1}{2}$$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = -\cos x + \frac{1}{2}\sin(2x) - \frac{1}{2}$

LOGARITHME NEPERIEN

1

a) $\ln 64 = \ln\ 2^6$

$= 6\ln 2$

b) $\ln(2^4 \times 5^3) = \ln(2^4) + \ln(5^3)$

$= 4\ln 2 + 3\ln 5.$

c) $\dfrac{2025}{135} = 3\times 5;$

$\ln(\dfrac{2025}{135}) = \ln(3\times 5)$

$= \ln 3 + \ln 5.$

d) $\ln(\dfrac{153}{17}) = \ln 9$

$= \ln(3^2)$

$= 2\ln 3.$

2

a) $\ln(2e) - 1 = \ln 2 + \ln e - 1$

$= \ln 2$

b) $\ln(e^3) - (\ln(e))^2 = 3\ln e - 1$

$= 3 + 1$

$= 4$

c) $\ln(\frac{1}{e}) - \ln(e^2 + e) + \ln(1 + \frac{1}{e}) = -1 - \ln(e+1) - \ln e + \ln(\frac{e+1}{e})$

$= -2 + \ln(e+1) - \ln(e+1) - \ln(e)$

$= -3$

3

a) $x \in D_f \Leftrightarrow x + 1 > 0$

$\Leftrightarrow x > -1$.

Donc, l'ensemble de définition de f est $]-1\,;+\infty[$.

b) $x \in D_g \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0$

$\Leftrightarrow x^2 > 1$

$\Leftrightarrow x < -1$ ou $x > 1$.

Donc, l'ensemble de définition de g est $]-\infty\,;-1[\cup]1\,;+\infty[$

$x \in D_h \Leftrightarrow \frac{x+1}{1-x} > 0$

$\Leftrightarrow x \in]-1\,;1[$.

Donc, l'ensemble de définition de h est $]-1\,;\,1[$.

c) $x \in D_k \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4}{x} \neq 0$ et $x \neq 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 4 \neq 0$ et $x \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq -2$ ou $x \neq 2$ ou $x \neq 0$.

Donc, l'ensemble de définition de k est $\mathbb{R} \setminus \{-2\,;0\,;2\}$

4

1. a) Contrainte sur l'inconnue x : $x > 0$, c'est à dire $x \in]0;+\infty[$

Pour $x \in]0;+\infty[$, $\ln x = 3 \Leftrightarrow \ln x = 3\ln e$

$$\Leftrightarrow \ln x = \ln(e^3)$$

$\Leftrightarrow x = e^3$. Puisque $e^3 \in]0;+\infty[$ alors $S = \{e^3\}$

Dans tous les cas qui suivent, la contrainte sur x est $x \in 0;+\infty$.

b) Pour $x \in]0;+\infty[$, $\ln x = -4 \Leftrightarrow \ln x = -4\ln e$

$$\Leftrightarrow \ln x = \ln(e^{-4})$$

$\Leftrightarrow x = e^{-4}$. Puisque $e^{-4} \in]0;+\infty[$ alors $S = \{e^{-4}\}$

c) Pour $x \in]0;+\infty[$, $-\ln x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \ln x = \ln(e^{-\frac{1}{2}})$$

$\Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}$. Puisque $e^{-\frac{1}{2}} \in]0;+\infty[$ alors $S = \{e^{-\frac{1}{2}}\}$

d) Pour $x \in]0;+\infty[$, $-4\ln x = -16 \Leftrightarrow \ln x = 4$

$$\Leftrightarrow \ln x = \ln(e^4)$$

$\Leftrightarrow x = e^4$. Puisque $e^4 \in]0;+\infty[$ alors $S = \{e^4\}$

2. a) Contrainte sur l'inconnue x : $x > 0$, c'est à dire $x \in]0;+\infty[$.

Pour $x \in]0;+\infty[$, $\ln x - 2 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 2$

$$\Leftrightarrow \ln x = \ln(e^2)$$

$\Leftrightarrow x = e^2$. Puisque $e^2 \in]0;+\infty[$ alors $S = \{e^2\}$

Dans tous les cas qui suivent, la contrainte sur x est $x \in]0;+\infty[$.

b) Pour $x \in]0;+\infty[$, $\ln x + 2 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -2$

$$\Leftrightarrow \ln x = \ln(e^{-2})$$

$$\Leftrightarrow x = e^{-2}\text{. Puisque } e^{-2} \in]0;+\infty[\text{ alors } S = \{e^{-2}\}$$

c) Pour $x \in]0;+\infty[$, $2\ln x + 3 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow \ln x = \ln(e^{-\frac{3}{2}})$$

$$\Leftrightarrow x = e^{-\frac{3}{2}}\text{. Puisque } e^{-\frac{3}{2}} \in]0;+\infty[\text{ alors } S = \{e^{-\frac{3}{2}}\}$$

d) Pour $x \in]0;+\infty[$, $-2\ln x + 4 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 2$

$$\Leftrightarrow x = e^{2}\text{. Puisque } e^{2} \in]0;+\infty[\text{ alors } S = \{e^{2}\}$$

5

a) Contrainte sur l'inconnue x : $x+1 > 0$, c'est à dire $x > -1$ ou encore $x \in]-1; +\infty[$

Pour $x \in]-1;+\infty[$, $\ln(x+1) = 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) = \ln 1$

$$\Leftrightarrow x+1 = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 0.$$

Comme $0 \in]-1;+\infty[$ alors $S = \{0\}$.

b) Contrainte sur l'inconnue x : $2x+8 > 0$ et $x > 0$ c'est-à-dire à $x \in]0;+\infty[$.

Pour $x \in]0;+\infty[$, $\ln(2x+8) = 2\ln x \Leftrightarrow \ln(2x+8) = \ln(x^2)$

$$\Leftrightarrow 2x+8 = x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$$

Résolvons l'équation $x^2 - 2x - 8 = 0$.

Le discriminant $\delta = 36$

Il en résulte que les solutions de l'équation $x^2 - 2x - 8 = 0$ sont -2 et 4

Puisque $-2 \notin]0 ; +\infty[$ et $4 \in]0 ; +\infty[$

Donc $S = \{4\}$.

c) Contrainte sur l'inconnue x : $x > 0$, $x - 1 > 0$ et $x^2 + 2x - 3 > 0$

Résolvons l'inéquation $x^2 + 2x - 3 > 0$.

Soit $P(x) = x^2 + 2x - 3$. Les racines de P sont 1 et -3. Le coefficient du monôme de plus haut degré est strictement positif donc $P(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty ; -3[\cup]1 ; +\infty[$.

Par conséquent la contrainte sur x est : $x \in]1 ; +\infty[$.

Pour $x \in]1 ; +\infty[$, (E) $\Leftrightarrow \ln(x^2 - x) = \ln(x^2 + 2x - 3)$

$$\Leftrightarrow x^2 - x = x^2 + 2x - 3$$

$$\Leftrightarrow x = 1.$$

Puisque $1 \notin]1 ; +\infty[$ alors $S = \{\ \}$.

6

1. a) Contrainte sur l'inconnue x : $x > 0$, c'est à dire $x \in]0 ; +\infty[$.

Pour $x \in]0 ; +\infty[$, $\ln x > 3 \Leftrightarrow \ln x > 3 \ln e$

$$\Leftrightarrow \ln x > \ln(e^3)$$

$$\Leftrightarrow x > e^3.$$ On a $S =]0 ; +\infty[\cap]e^3 ; +\infty[$: $S = \left]e^3 ; +\infty\right[$.

Dans tous les cas qui suivent, la contrainte sur x est $x \in]0 ; +\infty[$.

b) Pour $x \in]0 ; +\infty[$, $\ln x < -2 \Leftrightarrow \ln x < \ln(e^{-2})$

$$\Leftrightarrow x < e^{-2}.$$ Donc, $S = \left]0 ; e^{-2}\right[$.

c) Pour $x \in]0;+\infty[$, $-\ln x \geq 1 \Leftrightarrow \ln x \leq -1$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{1}{e}. \quad \text{Donc, } S = \left]0;\frac{1}{e}\right].$$

d) Pour $x \in]0;+\infty[$, $-4\ln x \leq 2 \Leftrightarrow \ln x \geq -\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \ln x \geq \ln(e^{-\frac{1}{2}}).$$

$$\Leftrightarrow x \geq e^{-\frac{1}{2}}. \quad \text{Donc, } S = \left[e^{-\frac{1}{2}};+\infty\right[.$$

2. a) Pour $x \in]0;+\infty[$, $\ln x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > e^2$. Donc, $S = \left]e^2;+\infty\right[$.

b) Pour $x \in]0;+\infty[$, $\ln x + 4 < 0 \Leftrightarrow x < e^{-4}$. Donc, $S = \left]0; e^{-4}\right[$

c) Pour $x \in]0;+\infty[$, $-4\ln x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq e^2$. Donc, $S = \left]0; e^{-4}\right]$

d) Pour $x \in]0;+\infty[$, $-\ln(2x) + 4 \leq 0 \Leftrightarrow -\ln(2x) \leq -4$.

$$\Leftrightarrow \ln(2x) \geq -4$$

$$\Leftrightarrow \ln(2x) \geq \ln(e^{-4})$$

$$\Leftrightarrow 2x \geq e^{-4}$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{e^{-4}}{2}. \quad \text{Donc, } S = \left[\frac{e^{-4}}{2};+\infty\right[.$$

7

1.

a) Contrainte sur l'inconnue x : $x + 1 > 0$, c'est-à-dire $x \in]-1\ ;+\infty[$

Pour $x \in]-1\ ;+\infty[$, $\ln(x+1) > \ln 3 \Leftrightarrow x+1 > 3$

$$\Leftrightarrow x > 2.$$

Donc $S =]2\ ;+\infty[\cap]-1\ ;+\infty[$ c'est-à-dire $S =]2\ ;+\infty[$.

b) Contrainte sur l'inconnue x : $x > 0$, c'est-à-dire $x \in]0\,;+\infty[$

Pour $x \in]0\,;+\infty[$, $\ln x \leq 3\ln 2 \Leftrightarrow \ln x \leq \ln 8$

$$\Leftrightarrow x \leq 8.$$

Donc $S =]0\,;+\infty[\cap]-\infty\,;8]$ c'est à dire $S =]0\,;8]$.

c) Contrainte sur l'inconnue x : $x > 0$, c'est-à-dire $x \in]0\,;+\infty[$

Pour $x \in]0\,;+\infty[$, $\ln x > 10 \Leftrightarrow \ln x > 10\ln e$

$$\Leftrightarrow \ln x > \ln(e^{10})$$

$$\Leftrightarrow x > e^{10}.$$

Donc $S =]0\,;+\infty[\cap]e^{10}\,;+\infty[$ c'est-à-dire $S =]e^{10}\,;+\infty[$

d) Contrainte sur l'inconnue x : $x^2 + x + 1 > 0$.

Résolvons l'inéquation $x^2 + x + 1 > 0$

Soit $P(x) = x^2 + x + 1$. Le discriminant $\delta = -3$ d'où $\delta < 0$. Le coefficient du monôme de plus haut degré de $P(x)$ est strictement positif.

Donc, Il s'ensuit que pour tout nombre réel x, $x^2 + x + 1 > 0$.

On en déduit que la contrainte sur l'inconnue x est : $x \in \mathbb{R}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, $\ln(x^2 + x + 1) \leq 0 \Leftrightarrow \ln(x^2 + x + 1) \leq \ln 1$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + 1 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x \leq 0.$$

Les racines du polynôme du second $x^2 + x$ sont -1 et 0

De plus le coefficient du monôme de plus haut degré de $x^2 + x$ est strictement positif

Donc $\forall x \in [-1\,;0]$, $x^2 + x \leq 0$.

L'inéquation étant valide sur $\mathbb{R}$. Par conséquent $S = [-1;\,0]$

2. **a)** Contrainte sur l'inconnue x : $-x>0$ et $x+4>0$ c'est-à-dire $x \in]-4;0[$.

Pour $x \in]-4;0[$, $\ln(-x)+\ln(x+4)>\ln 3 \Leftrightarrow \ln(-x^2-4x)>\ln 3$

$$\Leftrightarrow -x^2-4x>3$$

$$\Leftrightarrow x^2+4x+3<0.$$

Le discriminant du polynôme du second x^2+4x+3 est 16. Il en résulte que les racines de polynôme sont -1 et -3

Donc $x^2+4x+3<0 \Leftrightarrow x \in]-3;-1[$.

Il s'ensuit que $S =]-4;0[\cap]-3;-1[$

$=]-3;-1[$.

b) Contrainte sur l'inconnue x : $x^2-2x+e>0$ c'et à dire à $x \in \mathbb{R}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, $\ln(x^2-2x+e) \geq 1 \Leftrightarrow \ln(x^2-2x+e) \geq \ln e$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+e \geq e$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty;0] \cup [2;+\infty[.$$

Par conséquent $S =]-\infty;0] \cup [2;+\infty[$.

8

1. $(x^2+x-2)(x-3) = x^3-2x^2-5x+6$
2. L'ensemble solution est $\{-2;1\}$.
3. Contrainte sur x : $x>0$, c'est à dire $x \in]0;+\infty[$.

   Pour $x \in]0;+\infty[$, posons $X = \ln x$

   Par suite,

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} X^3 - 2X^2 - 5X + 6 = 0 \\ X = \ln x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (X^2 + X - 2)(X - 3) = 0 \\ X = \ln x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X^2 + X - 2 = 0 \text{ ou } X - 3 = 0 \\ X = \ln x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X^2 + X - 2 = 0 \\ X = \ln x \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} X - 3 = 0 \\ X = \ln x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = -2 \\ X = \ln x \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} X = 1 \\ X = \ln x \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} X = 3 \\ X = \ln x \end{cases}.$$

$\Leftrightarrow \ln x = -2$ ou $\ln x = 1$ ou $\ln x = 3$

$\Leftrightarrow$ $x = e^{-2}$ ou $x = e$ ou $x = e^3$.

Puisque e^{-2}, e et e^3 sont positifs alors $S = \{ e^{-2} ; e ; e^3 \}$.

9

Contrainte sur l'inconnue x : $x > 0$, c'est à dire $x \in]0;+\infty[$.

Pour $x \in]0;+\infty[$, posons $X = \ln x$

$$(I) : \begin{cases} X^2 - 5X + 6 \leq 0 \\ X = \ln x \end{cases}.$$

Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $X^2 - 5X + 6 \leq 0$.

Déterminons le signe du polynôme P tel que : $P(X) = X^2 - 5X + 6$.

Le discriminant $\Delta = 1 > 0$. Par conséquent, les racines de P sont $X_1 = 2$ et $X_2 = 3$.

Le coefficient du monôme de plus haut degré de P est 1 $(1 > 0)$.

Il en découle le tableau de signe de P :

X	$-\infty$		2		3		$+\infty$
P(X)		+	0	−	0	+	

On déduit du tableau que : (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} X \in [2;3] \\ X = \ln x \end{cases}$

$$\Leftrightarrow 2 \le \ln x \le 3$$

$$\Leftrightarrow e^2 \le x \le e^3$$

Donc, l'ensemble solution $S = [\ e^2\ ; e^3\ ] \cap]\ 0 ; +\infty\ [$

$$= [\ e^2\ ;\ e^3\ ]$$

10

a) Posons $u = 2x$

Donc, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+2x)}{x} = \lim\limits_{u \to 0} 2\dfrac{\ln(1+u)}{u} = 2$ car $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{\ln(1+u)}{u} = 1$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{(x-1)(x+1)}$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} \times \frac{1}{x+1}$$

Or $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{2}$

Donc, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} \times \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{2}$

Il s'ensuit que, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x^2 - 1} = \dfrac{1}{2}$

11

1. a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x - 1)\ln^2 x$.

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln^2 x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x - 1) = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x - 1)\ln^2 x = +\infty$.

En définitive, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (\ln x - 1)\ln^2 x$

On a $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0} \ln^2 x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} (\ln x - 1) = -\infty$

Donc $\lim\limits_{x \to 0} (\ln x - 1)\ln^2 x = -\infty$.

Par suite $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} + \ln x\right)$.

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}(1 + x\ln x)$

Or $\lim\limits_{x \to 0} x\ln x = 0$; $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x\ln x) = 1$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{1+\ln x}$

Posons $X = \ln x$. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} X = +\infty$

Donc, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{X}{X+1} = \lim\limits_{X \to +\infty} (1) = 1.$

On conclut que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1.$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to} \frac{\ln x}{1+\ln x}$

Posons $X = \ln x$. On a $\lim\limits_{x \to 0} X = -\infty$

Donc, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{X \to -\infty} \frac{X}{1+X} = \lim\limits_{X \to -\infty} (1) = 1.$

On conclut que : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1.$

2. a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Effectuons le changement de variable : En posant $u = \sqrt{x}$.

On a : $x = u^2$ et $\lim\limits_{u \to +\infty} u = +\infty$.

Par suite, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{u \to +\infty} \frac{\ln(u^2)}{u} = \lim\limits_{u \to +\infty} 2\frac{\ln u}{u} = 0$ car $\lim\limits_{u \to +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0.$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$. Par conséquent $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln x.$$

Or $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln x = -\infty$

Il en résulte que, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 \ln x$.

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 \ln x = +\infty$.

Il en résulte que, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x^3 \ln x$

$= \lim\limits_{x \to 0} x^2 (x \ln x)$.

Puisque $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$.

Donc, $\lim\limits_{x \to 0} x^2 (x \ln x) = 0$

On en déduit que, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

12

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x \ln x}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} x \frac{\ln x}{x-1}$

On a $\lim\limits_{x \to 1} x = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ donc, $\lim\limits_{x \to 1} x \frac{\ln x}{x-1} = 1$

Par suite, $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$. Puisque $f(1) = 1$ alors, $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$

On conclut que la fonction f est continue en 1.

13

1. $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x\ln x = 0$. Comme $f(0) = 0$ alors $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$

   On en déduit que la fonction f est continue en 0

2. $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x\ln x}{x} = \lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$

   Par conséquent la fonction f n'est pas dérivable à droite en 0.

   Interprétation graphique : La courbe représentative de la fonction f admet à droite au point d'abscisse 0 une demi – tangente verticale.

14

1. f est définie $\Leftrightarrow \quad x^2 - 1 \neq 0$ et $x+1 \neq 0$ et $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| > 0.$

   $\Leftrightarrow \quad x \neq 1$ et $x \neq -1$

   L'ensemble de définition de f est donc $\mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$

2. a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2 - 1} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|.$

   On a $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

   Et, $\lim_{x \to +\infty} \ln = 0$ car $\lim_{x \to +\infty} \left|\frac{x-1}{x+1}\right| = 1.$

   Donc, $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2 - 1} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = 0.$

Par suite, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Par ailleurs, on montre que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{x}{x^2 - 1} \ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$.

Or $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{x}{x^2 - 1} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| = -\infty$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{x}{x^2 - 1} \ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| = -\infty$.

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \dfrac{x}{x^2 - 1} \ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$.

Or $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \dfrac{x}{x^2 - 1} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| = +\infty$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \dfrac{x}{x^2 - 1} \ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| = +\infty$.

Par suite $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = +\infty$

3. Pour tout nombre réel x appartenant à $\mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$

$$x \neq 1 \quad \text{et} \quad x \neq -1 .$$

$$-x \neq -1 \quad \text{et} \; -x \neq 1.$$

Donc $-x \in \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$

De plus, $f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2 - 1} \ln\left|\dfrac{-x-1}{-x+1}\right|$

$$= \frac{-x}{x^2-1} \ln \left|\frac{x+1}{x-1}\right|$$

$$= \frac{x}{x^2-1} \ln \left|\frac{x-1}{x+1}\right|$$

Donc $f(-x) = f(x)$.

Par conséquent, la fonction f est paire.

Interprétation graphique : L'axe des ordonnées est un axe de symétrie de (C).

4. Pour tout nombre réel x appartenant à $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$,

$$f'(x) = \frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} \ln \left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{x}{x^2-1} \frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$= \frac{-1-x^2}{(x^2-1)^2} \ln \left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{x}{x^2-1} \frac{2}{x^2-1}$$

$$= \frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} \ln \left|\frac{x+1}{x-1}\right| + \frac{2x}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{1}{(x^2-1)^2} \left((x^2+1) \ln \left|\frac{x+1}{x-1}\right| + 2x \right)$$

$$= \frac{g(x)}{(x^2-1)^2}.$$

15

1.

a) $\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$ ou encore $f'(x) = \frac{x+1}{x}$

b) $\forall x \in]0;+\infty[,\ f'(x) = \dfrac{2}{x}$

c) $\forall x \in]0;+\infty[,\ f'(x) = \dfrac{x \times \frac{1}{x} - \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.

2.

a) $\forall x \in]0;+\infty[,\ f'(x) = \dfrac{2}{x} \ln x$

b) $\forall x \in]0;1[,\ f'(x) = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$.

c) $\forall x \in]0;e[,\ f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}(\ln x - 1) - \frac{1}{x}(\ln x + 1)}{(\ln x - 1)^2} = \dfrac{-2}{x(\ln x - 1)^2}$

3.

a) $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \ln|x| + x\dfrac{1}{x} = \ln|x| + 1.$

b) $\forall x \in]-\infty;0[,\ f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x-1}{x}} = \dfrac{1}{x(x-1)}$.

c) $\forall x \in]0;+\infty[,\ f'(x) = \dfrac{\ln x}{(x+1)^2} - \dfrac{1}{x+1}$ ou encore $f'(x) = \dfrac{\ln(x) - x - 1}{(x+1)^2}$.

4.

a) $\forall x \in]0;+\infty[,\ f'(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$.

b) $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2x\ln(x^2+1) + x^2\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)$ ou encore $f'(x) = \dfrac{2x(x^2+1)\ln(x^2+1) + 2x^3}{x^2+1}$.

16

a) $\forall x \in]-1;+\infty[,\ F(x) = \ln(x+1)$

b) $\forall x \in]0;+\infty[,\ f(x) = u'(x)u(x)$ où $u(x) = \ln x$

Donc, $F(x) = \dfrac{1}{2}\ u(x)^2$

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln x^{2} \text{ ou encore } F(x) = \frac{1}{2}\ln^{2} x.$$

c) $\forall x \in]0;1[,\ F(x) = -\frac{1}{\ln x}.$

d) $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \ln(x^{2}+1).$

17

1. Pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0\ ;+\infty[$

$$\frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^{2}+1} = \frac{(a+b)x^{2}+cx+a}{x(x^{2}+1)}$$

Par suite, $a+b=0, c=0$ et $a=1$

Donc, $a=1, b=-1$ et $c=0$

2. Pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0\ ;+\infty[$.

$$xf'(x) = \frac{f(x)}{x^{2}+1} \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x(x^{2}+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x} + \frac{-x}{x^{2}+1}$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{2x}{x^{2}+1}$$

$\Rightarrow \ln f(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^{2}+1) + c$ où c est un nombre réel car $f(x)>$

$$\Rightarrow \ln f(x) = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^{2}+1}}\right) + c$$

$$f(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Donc, $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+1}}\right) + c$

$$\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + c$$

$$c = 0$$

En définitive, pour tout nombre réel x appartenant à $]0\ ;+\infty[$,

$$\ln f(x) = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

Donc, $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

18

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x-1) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

On en déduit que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

2. $\forall x \in]0\ ;+\infty[,\ f(x) - (x-1) = \dfrac{\ln x}{x}$

$\forall x \in]0\ ;+\infty[,\ x > 0$ donc, le signe de $f(x) - (x-1)$ est celui de $\ln(x)$.

$\forall x \in]0\ ;+\infty[,\quad \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$

$\ln x < 0 \Leftrightarrow x < 1$

Par conséquent,

$\forall x \in]0\ ;1[,\quad f(x) - (x-1) < 0$

Donc, la courbe (C) est en dessous de (Δ) sur $]0\ ;1[$.

$\forall x \in]1\ ;+\infty[,\quad f(x) - (x-1) > 0$

Donc, la courbe (C) est au dessus de (Δ) sur $]1\ ;+\infty[$.

Enfin (C) et (Δ) se coupent au point d'abscisse 1.

19

1. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x - 2\ln x - 1}{2x}$

$$= \lim_{x \to 0}\left(2 - \frac{1}{2x}(2\ln x + 1)\right)$$

On a $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2x}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 0}(2\ln x-1)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2x}(2\ln x+1)=-\infty$.

Donc, $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\frac{1}{2x}(2\ln x+1)\right)=+\infty$.

On en déduit que : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$.

Interprétation graphique : La droite d'équation $x=0$ est asymptote à (C).

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x-2\ln x-1}{(2x)}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{2x}\right)$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=0$

donc, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{2x}\right)=2$

On en déduit que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.

Interprétation graphique : La droite d'équation $y=2$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

3. **a)** $\forall x\in\,]0;+\infty[$, $f'(x)=\frac{(4-\frac{2}{x})(2x)-2(4x-2\ln x-1)}{(2x)^2}$

$$=\frac{8x-4-8x+4\ln x+2}{(2x)^2}$$

$$=\frac{4\ln x-2}{4x^2}$$

$$=\frac{2\ln x-1}{2x^2}$$

b) Signe de la dérivée f : $\forall x\in\,]0;+\infty[$, $2x^2>0$. De ce fait le signe de $f'(x)$ est celui de

$2\ln(x)-1$.

Par ailleurs, $2\ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\ln x = 1$

$$\Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{2}} ;$$

Ensuite, $2\ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow 2\ln x > 1$

$$\Leftrightarrow \ln x > \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x > e^{\frac{1}{2}} ;$$

On déduit de ce qui précède que $2\ln(x) - 1 < 0 \Leftrightarrow 0 < x < e^{\frac{1}{2}}$

Par conséquent, $\forall x \in]0 ; \sqrt{e}[, f'(x) < 0$

$\forall x \in]\sqrt{e} ; +\infty[, f'(x) > 0$

$f'(\sqrt{e}) = 0$

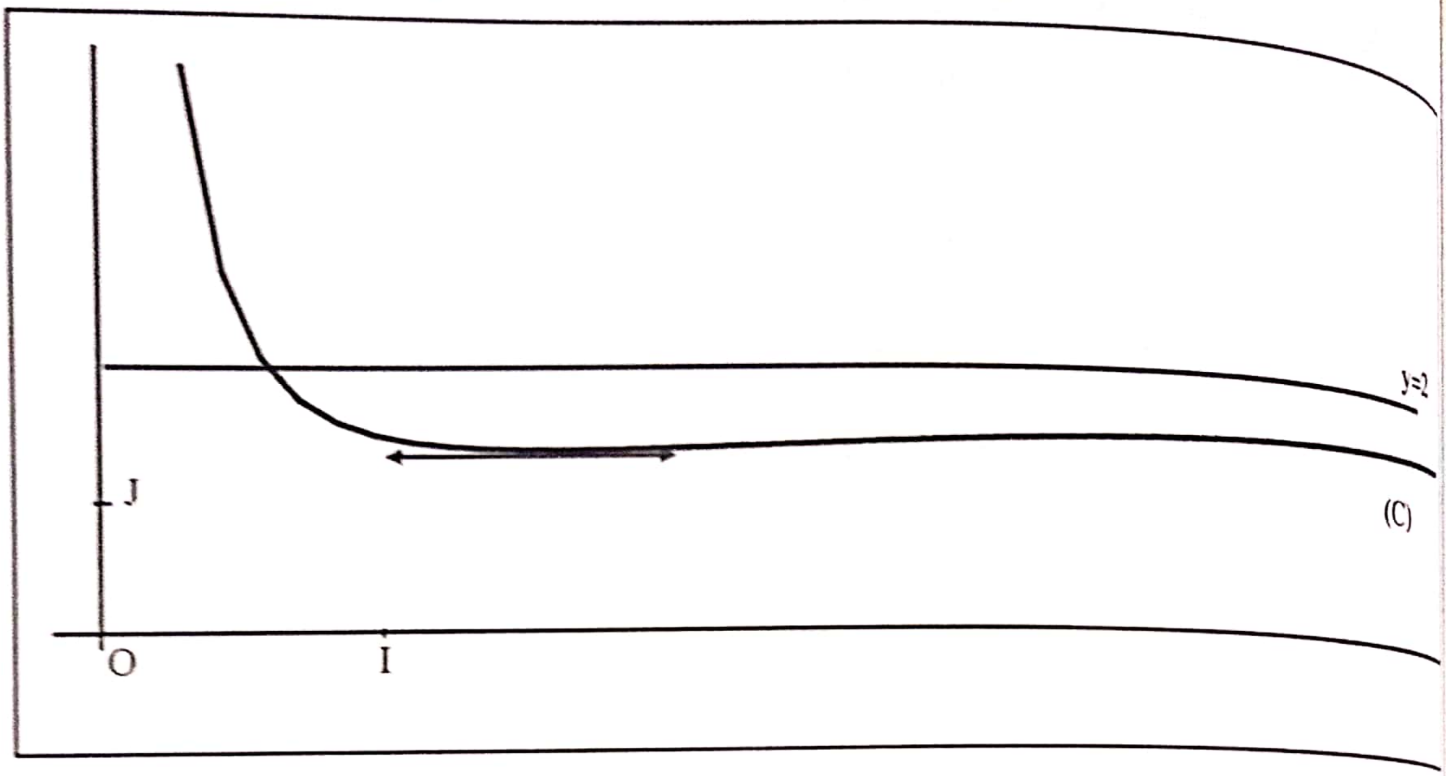
c) $\forall x \in]0 ; \sqrt{e}[, f'(x) < 0$ donc, f est strictement décroissante sur $]0 ; \sqrt{e}[$

$\forall x \in]\sqrt{e} ; +\infty[, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]\sqrt{e} ; +\infty[$.

4. Tableau de variation de f

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
f '(x)		−	0	+	
f (x)	$+\infty$	↘	$2 - e^{-\frac{1}{2}}$	↗	2

5. **Tracé de la courbe (C)**



20

Partie A

1. $\forall x \in]0;+\infty[$, $g'(x) = -1 - \frac{2}{x}$. Il s'ensuit que $g'(x) < 0$

2. Tableau de variation de g (sans les limites)

x	0	$+\infty$
g '(x)	–	
g (x)	↘	

3. $g(1) = 1 - 1 - 2\ln 1$

$= 0.$

g est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$

Donc, pour $x < 1$, $g(x) > g(1)$.

Or $g(1) = 0$ donc $g(x) > 0$

Par ailleurs, pour $x > 1$, $g(x) < g(1)$.

Or $g(1) = 0$ donc $g(x) < 0$.

On en déduit que : $\forall\ x \in]0;1[$, $g(x) > 0$, $\forall\ x \in]1;+\infty[$, $g(x) < 0$ et $g(1) = 0$.

Partie B

1. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x + \ln x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2}(x + \ln x)$.

On a $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

De plus, $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0} (x + \ln x) = -\infty$

Donc, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2}(x+\ln x) = -\infty$.

Par conséquent, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$

Interprétation graphique : la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à (C).

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x}(1 + \frac{\ln x}{x})$.

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + \frac{\ln x}{x}) = 1$, donc

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x}(1 + \frac{\ln x}{x}) = 0$.

On obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Interprétation graphique : La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à (C).

3. **a)** $\forall\ x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.

b) $\forall\ x \in]0;+\infty[$, $x^3 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$.

On a $\forall\ x \in]0;1[$, $g(x) > 0$

$\forall\ x \in\ ]1;+\infty[,\ g(x) < 0$ et $g(1) = 0$.

Par suite , $\forall\ x \in]0;1[,\ f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0;1[$.

$\forall\ x \in\ ]1;+\infty[,\ f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]1;+\infty[$.

c) Tableau de variation de f

x	0		1		$+\infty$
f '(x)		+	0	−	
f (x)	$-\infty$	↗	1	↘	0

$$f(1) = \frac{1+\ln 1}{1^2} = 1$$

4. a) f est continue et strictement croissante sur$]0\ ;\ 1[$.

Donc f est réalise bijection de$]0\ ;\ 1[$sur $f(]0\ ;\ 1[)$

$$f(\,]0\,;1[\,) = \left]\lim_{x \to 0} f(x)\ ;\ f(1)\right[$$

$$=]-\infty\ ;\ 1[\ .$$

Puisque $0 \in]-\infty\ ;1[$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0;1[$

b) Encadrement de α par **la méthode de balayage.**

Recherche d'un l'encadrement de α par deux décimaux consécutifs d'ordre 1 :

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
f (x)	−	−	−	−	−	+	+	+	+	+

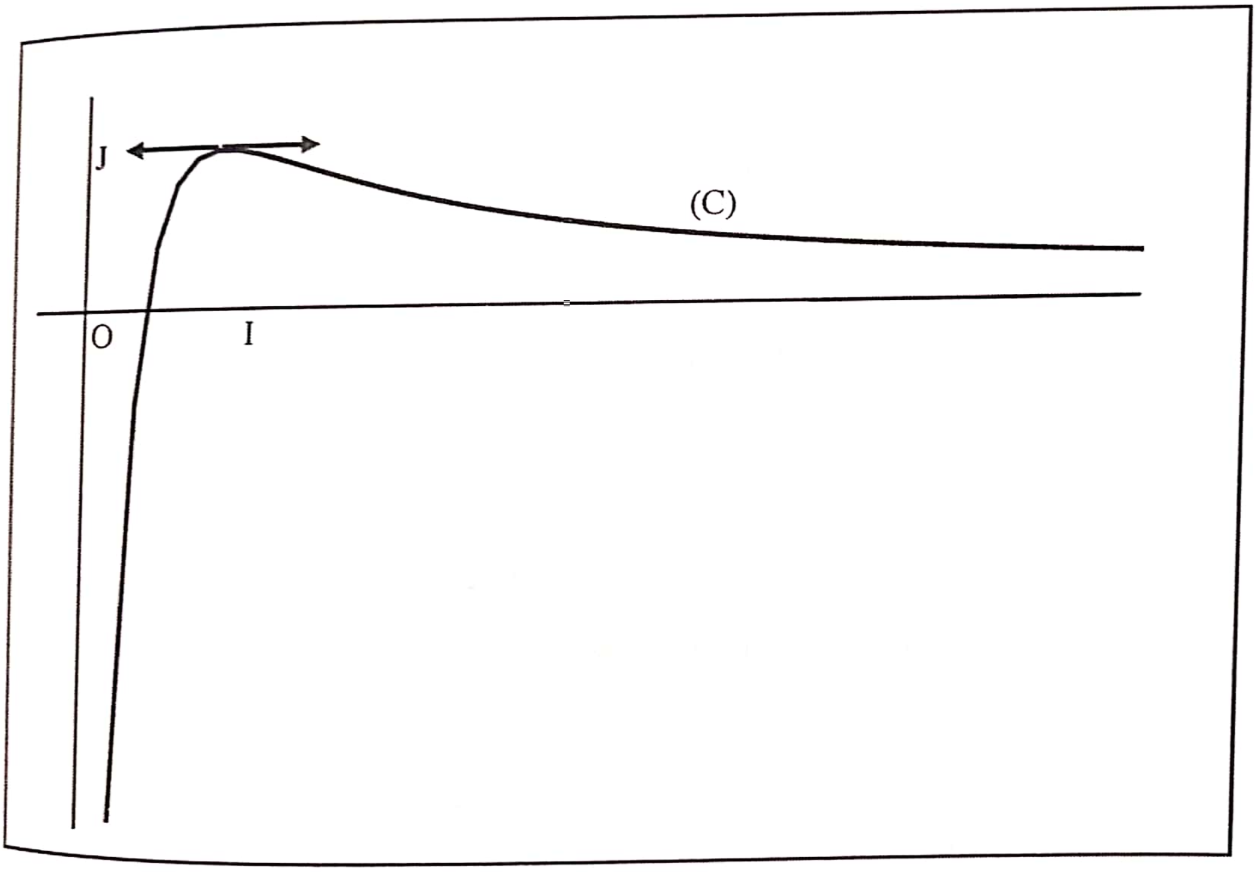
Donc, $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$

Recherche d'un l'encadrement de α par deux décimaux consécutifs d'ordre 2 :

x	0,51	0,52	0,53	0,54	0,55	0,56	0,57	0,58	0,59	0,6
f(x)	–	–	–	–	–	–	+	+	+	+

Par conséquent, $0,56 < \alpha < 0,57$ avec $0,57 - 0,56 = 0,01$.

5. Tracé de la courbe (C)



EXPONENTIELLE

1

3. a) L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

b) $x \in D_f \Leftrightarrow x - 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 1$

Donc, l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

c) $x \in D_f \Leftrightarrow x \geq 0$

Donc, l'ensemble de définition de f est $[0; +\infty[$.

d) $x \in D_f \Leftrightarrow x > 0$

Donc, l'ensemble de définition de f est $]0; +\infty[$.

4. a) $x \in D_f \Leftrightarrow 1 + e^x \neq 0$

Pour tout nombre réel x, $e^x > 0$; $1 + e^x > 0$ donc, $1 + e^x \neq 0$.

Par conséquent, l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

b) $x \in D_f \Leftrightarrow e^x - e \neq 0$

$\Leftrightarrow e^x \neq e$

$\Leftrightarrow x \neq 1$.

Donc, l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

c) $x \in D_f \Leftrightarrow \left| e^x - 1 \right| > 0$

$$\Leftrightarrow e^x - 1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow e^x \neq e^0.$$

$$\Leftrightarrow x \neq 0.$$

Donc, l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^*$.

2

1. $g(\alpha) = (\alpha - 2)e^{\alpha} = -1$ donc $e^{\alpha} = -\dfrac{1}{\alpha - 2}$

Par suite, $f(\alpha) = \alpha^2 e^{\alpha} + \dfrac{2\alpha}{\alpha - 2}$

$$= \alpha^2\left(-\frac{1}{\alpha-2}\right) + \frac{2\alpha}{\alpha - 2}$$

$$= \frac{\alpha(2-\alpha)}{\alpha - 2}$$

$$= -\alpha$$

Par ailleurs, $h(\alpha) = e^{\alpha} + \dfrac{1}{e^{\alpha}}$

$$= \frac{1}{2 - \alpha} + 2 - \alpha$$

Donc, $h(\alpha) = -\alpha + 2 + \dfrac{1}{-\alpha + 2}$

2. On a : $1{,}841 < \alpha < 1{,}842$; $-1{,}842 < -\alpha < -1{,}841$

Et, $0{,}158 < -\alpha + 2 < 0{,}159$; $\dfrac{1}{0{,}159} < \dfrac{1}{-\alpha + 2} < \dfrac{1}{0{,}158}$

Il s'ensuit que, $0{,}158 + \dfrac{1}{0{,}159} < -\alpha + 2 + \dfrac{1}{-\alpha + 2} < 0{,}159 + \dfrac{1}{0{,}158}$

On en déduit que, $6{,}44 < h(\alpha) < 6{,}49$.

Par conséquent, $6{,}4 < h(\alpha) < 6{,}5$

3

a) Calcul de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Calcul de $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$:

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$

Donc, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

b) Calcul de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{-x} + 1}.$$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$.

Par suite $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^{-x} + 1) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^{-x} + 1} = 1$.

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

Calcul de $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^{x} + 1) = 1$

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{x}}{e^{x}+1} = 0$.

On en déduit que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

c) Calcul de $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

Puisque $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{\ln x}{x}} = 0$

Par suite, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

Calcul de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = 1$

Par suite, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

d) Calcul de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

alors $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^x = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Calcul de $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

Posons $x = 2u$

Donc $u = \frac{1}{2}x$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} u = -\infty$

Par suite, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 e^x = \lim\limits_{u \to -\infty} 4u^2 e^{2u} = \lim\limits_{u \to -\infty} 4(ue^u)^2$.

Or $\lim\limits_{u \to -\infty} ue^u = 0$

Donc, $\lim\limits_{u \to -\infty} 4(ue^{u})^2 = 0$

Par suite $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 e^x = 0.$

Finalement $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0.$

4

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (e^x + x - 1) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (e^x + x - 1) = +\infty.$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (e^x - x + 1) = -\infty$

Calcul de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - 1 + \frac{1}{x}\right)$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{x} - 1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty.$

Donc, $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - 1 + \frac{1}{x}\right)$

Il s'ensuit que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$

c) Calcul de $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2 - 1} x e^x.$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0.$

Donc, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2 - 1} \times e^x = 0.$

Par suite, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0.$

Calcul de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} \times \frac{e^x}{x}.$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} (1) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty.$

Donc, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2 - 1} \times \dfrac{e^x}{x} = +\infty.$

Il s'ensuit que, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$

d) Calcul de $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

Posons $u = -x$.

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{-x}}{x} = \lim\limits_{u \to +\infty} \left(-\dfrac{e^u}{u}\right) = -\infty$ car $\lim\limits_{u \to +\infty} \dfrac{e^u}{u} = +\infty.$

On en déduit que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$

Calcul de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{xe^x}.$$

Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^x = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{xe^x}$

Par conséquent, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0.$

5

a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x(x-1)} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} (x-1)\frac{e^{x(x-1)} - 1}{x(x-1)}$

On a $\lim_{x\to 0} x(x-1) = 0$ donc $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x(x-1)} - 1}{x(x-1)} = 1.$

De plus $\lim_{x\to 0} (x-1) = -1$

donc, $\lim_{x\to 0} (x-1)\frac{e^{x(x-1)} - 1}{x(x-1)} = -1$

Par conséquent, $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x(x-1)} - 1}{x} = -1.$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x} - e^{-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1}{xe^{x}}$

$$= \lim_{x\to 0} 2\frac{e^{2x} - 1}{2x} \times \frac{1}{e^{x}}$$

Posons $u = 2x$

Il en résulte que, $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{u} - 1}{u} = 1$

De plus, $\lim_{x\to 0} \frac{1}{e^{x}} = 1$

donc, $\lim_{x\to 0} 2\frac{e^{2x} - 1}{2x} \times \frac{1}{e^{x}} = 2$

Par conséquent, $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x} - e^{-x}}{x} = 2.$

6

1.

a) Contraintes sur l'inconnue x : $x \in \mathbb{R}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, $e^{x} = e^{2} \Leftrightarrow x = 2$

Donc $S = \{2\}$.

b) Contrainte sur l'inconnue x : $x \in \mathbb{R}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, $e^{2x} = 1 \Leftrightarrow e^{2x} = e^{0}$

$\Leftrightarrow 2x = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$

Donc $S = \{0\}$.

c) Contrainte sur l'inconnue x : $x \in \mathbb{R}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, $2e^{x} = 1 \Leftrightarrow e^{x} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow e^{x} = e^{\ln\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow x = \ln\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = -\ln 2$

Donc $S = \{ -\ln 2 \}$

d) Contrainte sur l'inconnue x : $x \in \mathbb{R}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, $(e^{x})^{2} = e^{x+1} \Leftrightarrow e^{2x} = e^{x+1}$

$\Leftrightarrow 2x = x + 1$

$\Leftrightarrow x = 1.$

Donc $S = \{1\}$

2.

a) Contrainte sur l'inconnue x : $x \in \mathbb{R}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, $e^{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow e^{x} = 2$

$\Leftrightarrow x = \ln 2$. Donc $S = \{\ln 2\}$

Dans les cas qui suivent, la contrainte sur l'inconnue est $x \in \mathbb{R}$.

b) Pour $x \in \mathbb{R}$, $4e^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \quad 2x = -2\ln 2$

$\Leftrightarrow \quad x = -\ln 2$. Donc $S = \{-\ln 2\}$

c) Pour $x \in \mathbb{R}$, $-e^{x} + 2 = 0 \Leftrightarrow -e^{x} = -2$

$\Leftrightarrow \quad e^{x} = 2$

$\Leftrightarrow \quad x = \ln 2$. Donc $S = \{\ln 2\}$.

d) Pour $x \in \mathbb{R}$, $3e^{-x} - 4 = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = \frac{4}{3}$

$\Leftrightarrow \quad -x = \ln\frac{4}{3}$

$\Leftrightarrow \quad x = \ln\frac{3}{4}$. Donc $S = \{\ln\frac{3}{4}\}$.

3.

a) Contrainte sur l'inconnue x : $x \neq 0$, c'est à dire $x \in \mathbb{R}^*$.

Pour $x \in \mathbb{R}^*$, $e^{\frac{1}{x}} = e^{-x+2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} = -x+2$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 1$.

Puisque $1 \in \mathbb{R}^*$ alors, $S = \{1\}$

b) Contraintes sur l'inconnue x : $x \in \mathbb{R}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $X = e^{x}$
Par suite,

$3e^{2x} - 2e^{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow 3X^2 - 2X - 1 = 0$ et $X = e^{x}$.

Les solutions de l'équation $3X^2 - 2X - 1 = 0$ sont 1 et $-\frac{1}{3}$.

Par conséquent, $3e^{2x} - 2e^{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X=1 \\ X=e^x \end{cases}$ ou $\begin{cases} X = -\frac{1}{3} \\ X = e^x \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \quad e^x = 1 \text{ ou } e^x = -\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad e^x = 1 \text{ car } e^x > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad e^x = e^0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 0.$$

Donc $S = \{0\}$

7

1.

a) Contrainte sur l'inconnue : $x \in \mathbb{R}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, $e^x - 4 > 0 \Leftrightarrow e^x > 4$

$\Leftrightarrow e^x > e^{\ln 4}$

$\Leftrightarrow x > 2\ln 2$. L'ensemble solution est $S =]2\ln 2; +\infty[$.

Dans chacun des cas qui suivent la contrainte sur x est $x \in \mathbb{R}$.

b) Pour $x \in \mathbb{R}$, $e^x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow e^x \leq 3$

$\Leftrightarrow e^x \leq e^{\ln 3}$

$\Leftrightarrow x \leq \ln 3$. L'ensemble solution est $S =]-\infty; \ln 3]$.

c) Pour $x \in \mathbb{R}$, $-e^x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow -e^x \geq -4$

$\Leftrightarrow e^x \leq 4$

$\Leftrightarrow x \leq 2\ln 2$. L'ensemble solution est $S =]-\infty; 2\ln 2]$.

d) Pour $x \in \mathbb{R}$, posons : $X = e^x$.

$$e^{2x} - 5e^x + 6 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 - 5X + 6 > 0 \\ X = e^x \end{cases}.$$

Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $X^2 - 5X + 6 > 0$.

Déterminons le signe du polynôme P tel que : $P(X) = X^2 - 5X + 6$.

Le discriminant $\Delta = 1 > 0$. Par conséquent, les racines de P sont : $X_1 = 2$ et $X_2 = 3$.

Le coefficient du monôme de plus haut degré de P est 1 ; $(1 > 0)$. Il en découle le tableau de signe de P :

X	$-\infty$		2		3		$+\infty$
P(X)		+	0	−	0	+	

On déduit du tableau que : $e^{2x} - 5e^x + 6 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X \in]-\infty; 2[\cup]3; +\infty[\\ X = e^x \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \quad e^x < 2 \text{ ou } e^x > 3$$

$$\Leftrightarrow \quad x < \ln 2 \text{ ou } x > \ln 3.$$

Donc, l'ensemble solution $S =]-\infty; \ln 2[\cup]\ln 3; +\infty[$.

2.

a) Pour $x \in \mathbb{R}$, $e^{2x} - 5 > 0 \Leftrightarrow e^{2x} > 5$

$$\Leftrightarrow \quad 2x > \ln 5$$

$\Leftrightarrow \quad x > \dfrac{\ln 5}{2}$. L'ensemble solution est $S = \left]\dfrac{\ln 5}{2}; +\infty\right[$.

b) Pour $x \in \mathbb{R}$, $3e^{x+1} - 6 \leq 0 \Leftrightarrow e^{x+1} \leq 2$

$$\Leftrightarrow \quad x+1 \leq \ln 2$$

$\Leftrightarrow x \leq -1 + \ln 2$. L'ensemble solution est $S =]-\infty; -1 + \ln 2]$.

c) Pour $x \in \mathbb{R}$, $-e^{-x}+2<0 \Leftrightarrow -e^{-x}<-2$

$\Leftrightarrow \quad e^{-x}>2$

$\Leftrightarrow \quad -x>\ln 2$

$\Leftrightarrow \quad x<-\ln 2$. L'ensemble solution est $S=]-\infty;-\ln 2[$.

d) Pour $x \in \mathbb{R}$, $3e^{\frac{x}{2}}-4 \geq 0 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}} \geq \frac{4}{3}$

$\Leftrightarrow \quad \frac{x}{2} \geq \ln \frac{4}{3}$

$\Leftrightarrow \quad x \geq 2\ln \frac{4}{3}$. L'ensemble solution est $S=\left[2\ln\frac{4}{3};+\infty\right[$.

8

1. a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x)=2e^{x}$ b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x)=(x+1)e^{x}$ c) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x)=xe^{x}$

d) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x)=e^{x}(e^{x}-3)+e^{x}(e^{x}+1)=2e^{x}(e^{x}+1)$.

2. a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x)=-e^{-x}$; b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x)=2e^{\frac{1}{2}x}$

c) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x)=-2e^{-2x+3}$

d) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x)=(3x-4)e^{-3x}$ e) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x)=2x+e^{-x}-xe^{-x}$.

3. a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x)=(e^{x}-e^{-x})+x(e^{x}+e^{-x})$ ou encore,

$f'(x)=(x+1)e^{2x}+x-1 \ e^{-x}$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x)=\dfrac{e^{x}(e^{x}+1)-e^{x}e^{x}}{(e^{x}+1)^{2}}=\dfrac{e^{x}}{(e^{x}+1)^{2}}$

c) $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $f'(x)=\dfrac{e^{x}(x+1)-e^{x}}{(x+1)^{2}}=\dfrac{xe^{x}}{(x+1)^{2}}$

4. a) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = (\frac{1}{x} + \ln(x))e^{x}$

b) $\forall x \in]0; +\infty[, \; f'(x) = -1 + \frac{1-x}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$ ou encore $f'(x) = \frac{-2\sqrt{x}+1-x}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$

c) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f'(x) = \left(\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2} - \frac{x^2}{(x-1)}\right)e^{-x}$

$$= \frac{(x^2-2x-(x-1)x^2)e^{-x}}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x(-x^2+2x-2)e^{-x}}{(x-1)^2}.$$

9

1. a) $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$; b) $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = e^{x} - e^{-x}$; c) $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{7}{2}e^{5x^2}$

2. a) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 + e^{x} + e^{-x}$ donc, $\forall x \in \mathbb{R}, \; F(x) = x + e^{x} - e^{-x}$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2e^{2x} + 5e^{x} + 2$ donc, $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = e^{2x} + 5e^{x} + 2x$

c) $\forall x \in \mathbb{R}, \; f(x) = 1 + e^{-2x}$ donc, $\forall x \in \mathbb{R}, \; f(x) = x - \frac{1}{2}e^{-2x}$

3. a) $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \ln(e^{x}+1)$; b) $\forall x \in \mathbb{R}, \; F(x) = -\frac{1}{e^{x}+1}$;

c) $\forall x \in \mathbb{R}, \; F(x) = \ln(e^{x} + e^{-x})$ d) $\forall x \in \mathbb{R}, \; F(x) = -2\sqrt{e^{-x}+3}$.

10

Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Il existe des nombres réels a, b et c tels que : $F(x) = (ax^2+bx+c)e^{2x}$

Il en découle que : $\forall x \in \mathbb{R}, \; F'(x) = (2ax^2 + 2bx + 2c + 2ax + b)e^{2x}$

$$= (2ax^2 + (2b+2a)x + 2c + b)e^{2x}.$$

Par identification des coefficients de l'expression $x^2 - x + 3$ dans $F'(x)$:

$2a = 1$; $2b + 2a = -1$ et $2c + b = 3$

Donc, $a = \frac{1}{2}$; $b = -1$ et $c = 2$

Par conséquent : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = (\frac{1}{2}x^2 - x + 2)e^{2x}$.

11

I)

1. $\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} ((1-x)e^{-x} - 1)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (e^{-x} - xe^{-x} - 1)$$

$$= -1.$$

2. a) Pour tout nombre réel x, $g'(x) = (-1 - 1 + x)\ e^{-x}$

$$= (x - 2)\ e^{-x}$$

b) g est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 2]$ et g est strictement croissante sur $[\ 2\ ;\ +\infty\ [$

Tableau de variation : $g(2) = (1-2)e^{-2} - 1 = -1 - e^{-2}$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$-1 - e^{-2}$	↗	-1

3. $g(0) = (1-0)e^{-0} - 1$

$$= 0$$

g est strictement décroissante sur $]-\infty\,;2[$.

$\forall x \in]-\infty\,;0[$, $x < 0$ donc $g(x) > g(0)$

Or $g(0) = 0$ donc $g(x) > 0$

Par ailleurs, $\forall x \in]0\,;2[$, $x > 0$ donc $g(x) < g(0)$

Or $g(0) = 0$ donc $g(x) < 0$

g est continue et strictement croissante sur $[2\,;+\infty[$

Il en résulte que $g([2\,;-\infty[) =]-e^{-2}-1\,;-1[$

Donc, $\forall x \in [2\,;+\infty[$, $g(x) \in]-e^{-2}-1\,;-1[$, par suite, $g(x) < 0$

En définitive : $\forall x \in]-\infty\,;0[, g(x) > 0$

$\forall x \in]0\,;+\infty[, g(x) < 0$

$g(0) = 0$

II)

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x(e^{-x}-1)$

$= -\infty$

Par ailleurs $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x(e^{-x}-1)}{x}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} (e^{-x}-1)$

$= +\infty.$

Interprétation graphique : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

Donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x(e^{-x}-1).$

Posons : $u = -x$.

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^{-x}-1) = \lim\limits_{u \to -\infty} (e^{u}-1) = -1$

Il s'ensuit que, $\lim\limits_{x \to +\infty} x(e^{-x}-1) = -\infty$

Par conséquent, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (-x)) = \lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0.$

On en déduit que la droite (Δ) est asymptote à (C) en $+\infty$.

4. **a)** $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - (-x) = xe^{-x}$.

Puisque $e^{-x} > 0$ alors le signe de $f(x) - (-x)$ est celui de x.

Par suite, $\forall x \in]-\infty ; 0[$, $f(x) - (-x) < 0$.

Donc (C) est en dessous de (Δ) sur $]-\infty ; 0[$

$\forall x \in]0 ; +\infty[$, $f(x) - (-x) > 0$

Donc (C) est au dessus de (Δ) sur $]0 ; +\infty[$

(C) et (Δ) se coupent au point d'abscisse 0.

b) Laissé au soin du lecteur.

c) Le signe de f '(x) est celui de g(x).

Par conséquent $\forall x \in]-\infty ; 0[$, $f'(x) > 0$

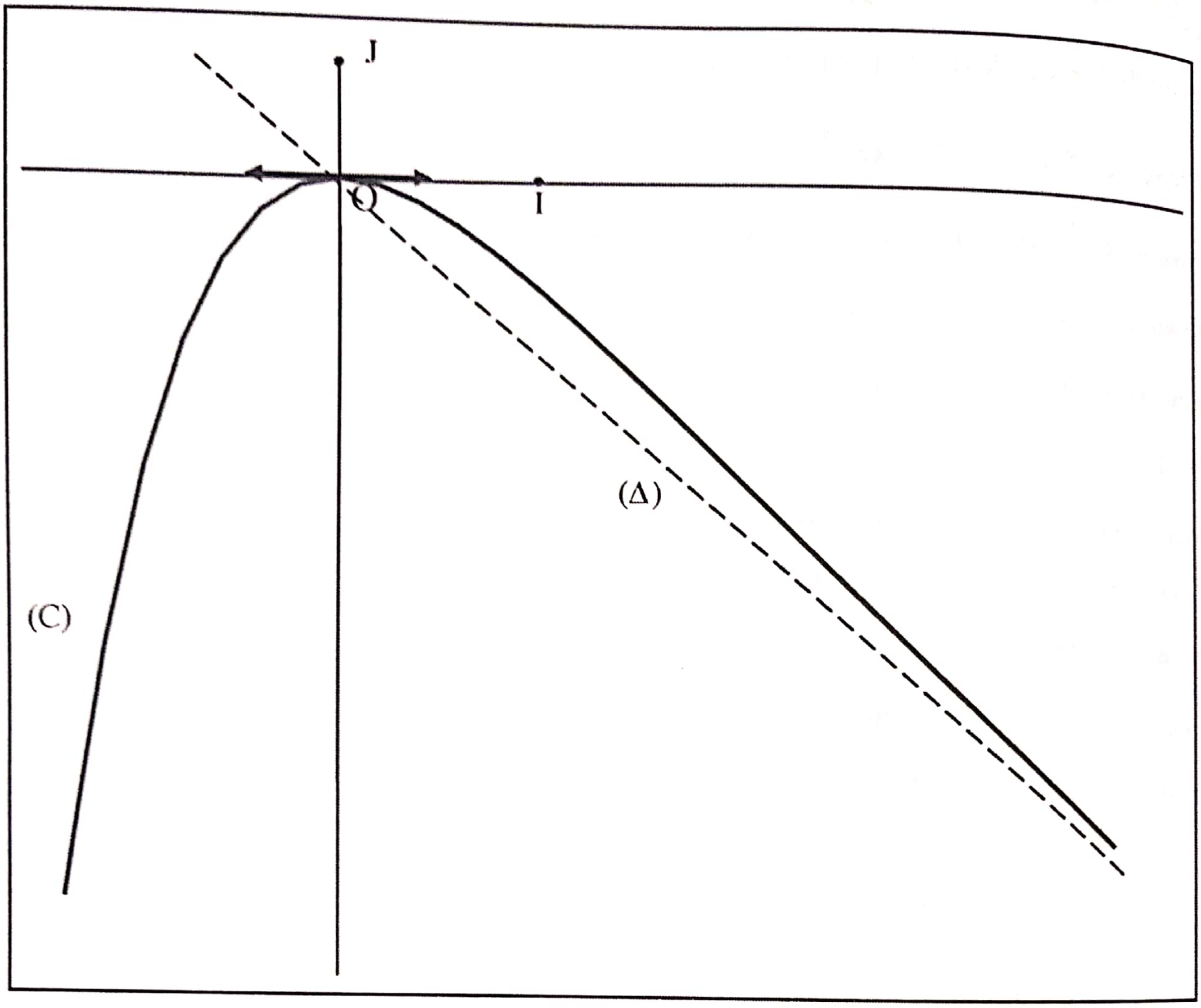
$\forall x \in]0; +\infty[$, $f'(x) < 0$

$f'(0) = 0$

Il en résulte le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	
f(x)	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

c) Tracé de (C) et (Δ)



12

1. a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{xe^x}{e^x+1} - \dfrac{1}{2}x + 1\right)$

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x + 1) = 1$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{xe^x}{e^x+1} = 0$.

De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{1}{2}x + 1\right) = +\infty$

Donc, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{xe^x}{e^x+1} - \dfrac{1}{2}x + 1\right) = +\infty$.

Par conséquent, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(-\frac{1}{2}x+1)) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{xe^{x}}{e^{x}+1} = 0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0.$

On en déduit que la droite (Δ) d'équation $y = -\frac{1}{2}x+1$ est asymptote à (C) en $-\infty$.

c) $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)-\left(-\frac{1}{2}x+1\right) = \frac{xe^{x}}{e^{x}+1}$

Pour tout nombre réel x, $e^{x}>0$; $e^{x}+1>0$. De ce fait, le signe de $f(x)-\left(-\frac{1}{2}x+1\right)$ est celui de x.

Par conséquent, $\forall x<0$, $f(x)-\left(-\frac{1}{2}x+1\right)<0$. Donc, (C) est en dessous de (Δ) sur $]-\infty;0[$.

Par ailleurs, $\forall x>0$, $f(x)-\left(-\frac{1}{2}x+1\right)>0$. Donc, (C) est au dessus de (Δ) sur $]0;+\infty[$.

Enfin, (C) et (Δ) se coupent au point d'abscisse 0.

2. a) Pour tout nombre réel x, $-\frac{x}{e^{x}+1}+\frac{1}{2}x+1 \quad -\frac{xe^{x}}{e^{x}+1}+\frac{1}{2}x-1 = \frac{-xe^{x}-x}{e^{x}+1}+x$

$$= \frac{-x+x}{e^{x}+1} = 0$$

On obtient : $-\frac{x}{e^{x}+1}+\frac{1}{2}x+1 = \frac{xe^{x}}{e^{x}+1}-\frac{1}{2}x+1$

Donc : $f(x) = -\frac{x}{e^{x}+1}+\frac{1}{2}x+1$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{x}{e^{x}+1}+\frac{1}{2}x+1\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{\frac{e^{x}}{x}+\frac{1}{x}}+\frac{1}{2}x+1\right)$$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{x}}{x}+\frac{1}{x}\right) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{\frac{e^{x}}{x}+\frac{1}{x}}\right) = 0.$

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}x+1\right) = +\infty.$

Par conséquent, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x} + \dfrac{1}{x}} + \dfrac{1}{2}x + 1 \right) = +\infty$

Donc, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (\frac{1}{2}x + 1)) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(- \dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x} + \dfrac{1}{x}}\right) = 0$

On en déduit que la droite (Δ') d'équation $y = \dfrac{1}{2}x + 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

d) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - \left(\dfrac{1}{2}x + 1\right) = \dfrac{-x}{e^x + 1}$

Pour tout nombre réel x, $e^x + 1 > 0$ donc le signe de $f(x) - \left(\dfrac{1}{2}x + 1\right)$ est celui de $-x$

$\forall x < 0$, $-x > 0$ donc $f(x) - \left(-\dfrac{1}{2}x + 1\right) > 0$.

Il en résulte que (C) est au dessus de (Δ) sur$]-\infty\,;0[$

Par ailleurs, $\forall x > 0$, $f(x) - \left(-\dfrac{1}{2}x + 1\right) < 0$. Donc, (C) est en dessous de (Δ) sur $]0;+\infty[$

Enfin, (C) et (Δ) se coupent au point d'abscisse 0.

3. **a)** Pour tout nombre réel x, $f'(x) = \dfrac{-e^x - 1 + xe^x}{(e^x + 1)^2} + \dfrac{1}{2}$

$$= \frac{-2e^x - 2 + 2xe^x + e^{2x} + 2e^x + 1}{2(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{e^{2x} + 2xe^x - 1}{2(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{h(x)}{2(e^x + 1)^2}.$$

b) $h(0) = e^{2\times 0} + 2\times 0e^{0} - 1$

$h(0) = 0.$

$\forall x < 0\ ,\ 2x < 0$

donc, $e^{x} < e^{0}$; $e^{x} < 1$; $2xe^{x} < 0$ et $e^{2x} < 1$.

Par suite, $e^{2x} + 2xe^{x} - 1 < 1 - 1$

$$h(x) < 0$$

En définitive, $\forall x < 0\ , h(x) < 0$

Par un démarche analogue, il est laissé le soin au lecteur d'établir que $\forall x > 0\ , h(x) > 0$

c) Pour tout nombre réel x, $2(e^{x} + 1)^{2} > 0$. Donc, le signe de $f'(x)$ est celui de h(x).

$\forall x < 0\ , h(x) < 0$ donc, $f'(x) < 0$

Par conséquent, f est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0[$.

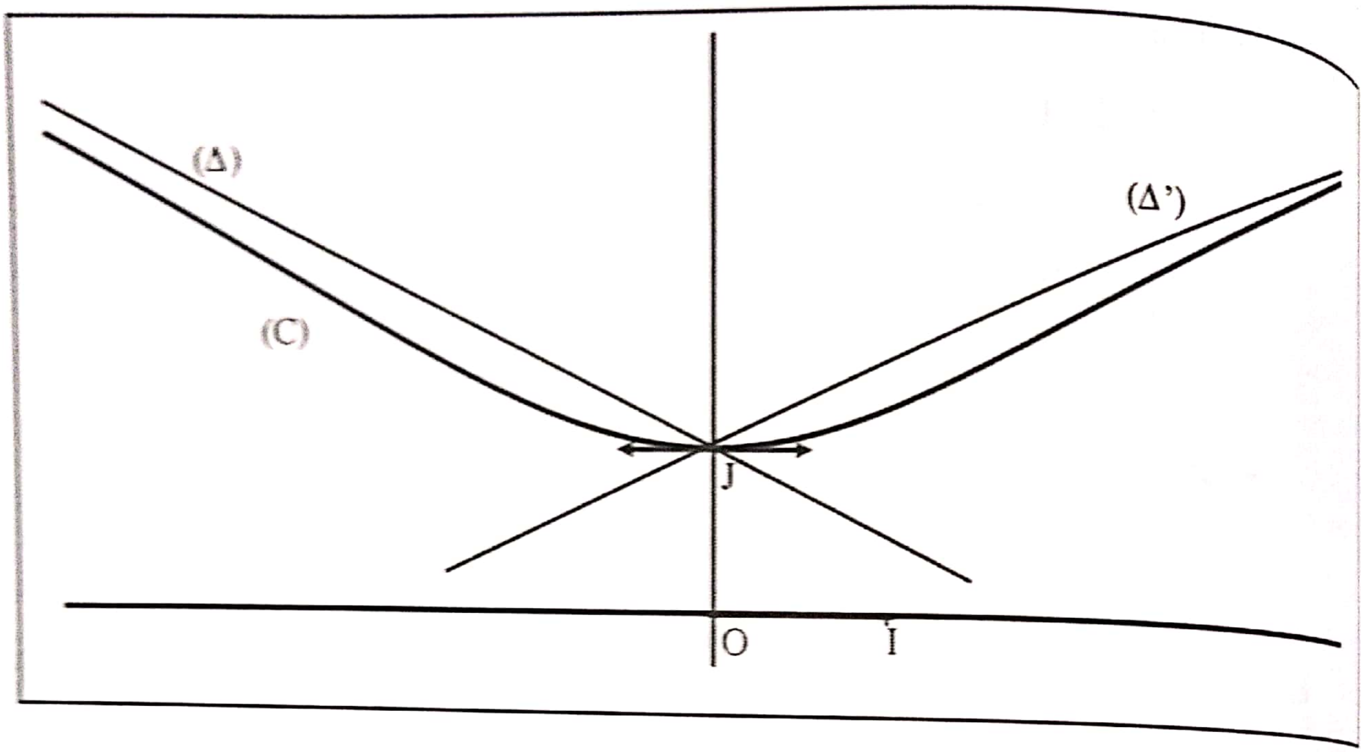
Par ailleurs, $\forall x > 0\ , h(x) > 0$ donc $f'(x) > 0$.

On en déduit que f est strictement croissante sur $]0\ ;+\infty[$.

d) Tableau de variation de f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

4. Tracé de (C), (Δ) et (Δ')



13

Partie A

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $G'(x) = \dfrac{e^x + 1 - xe^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{1}{e^x+1} - \dfrac{xe^x}{(e^x+1)^2}$

Donc, $G'(x) + f(x) = \dfrac{1}{e^x+1}$

2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1} = \dfrac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}+1} = \dfrac{\frac{1}{e^x} \times e^x}{e^x+1}$

Donc : $\dfrac{1}{e^x+1} = \dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$

3. Pour tout nombre réel x, $f(x) = \frac{1}{e^{x}+1} - G'(x)$

$$= \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} - G'(x)$$

$$= -\frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1} - G'(x)$$

Par conséquent, il existe un nombre réel c tel que : $F(x) = -\ln(1+e^{-x}) - G(x) + c$

Par suite, $F(0) = 0 \Leftrightarrow -\ln(1+e^{-0}) - G(0) + c = 0$

$$\Leftrightarrow \quad c = \ln 2.$$

On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = -\ln(1+e^{-x}) - \frac{x}{e^{x}+1} + \ln 2$

Partie B

1. $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$.

$$h(-x) = \ln(1+e^{-(-x)}) + \frac{-x}{e^{-x}+1}$$

$$= \ln(1+e^{x}) + \frac{-xe^{x}}{e^{x}+1}$$

$$= \ln(e^{x}(1+e^{-x})) + \frac{-xe^{x}}{e^{x}+1}$$

$$= \ln(1+e^{-x}) + \ln(e^{x}) + \frac{-xe^{x}}{e^{x}+1}$$

$$= \ln(1+e^{-x}) + x + \frac{-xe^{x}}{e^{x}+1}$$

$$= \ln(1+e^{-x}) + \frac{xe^{x}+x-xe^{x}}{e^{x}+1}$$

$$= \ln(1+e^{-x}) + \frac{x}{e^{x}+1} = h(x).$$

On en déduit que la fonction h est paire.

Interprétation graphique : La droite (OJ) est axe de symétrie de (C).

2. a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x}+\dfrac{1}{x}}$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{e^x}{x}+\dfrac{1}{x}\right) = +\infty$

Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x}+\dfrac{1}{x}} = 0.$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x+1} = 0.$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\ln(1+e^{-x})+\dfrac{x}{e^x+1})$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+e^{-x}) = 1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln(1+e^{-x})) = 0.$

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x+1} = 0.$

Par conséquent, $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln(1+e^{-x})+\dfrac{x}{e^x+1}) = 0$

Il s'ensuit que, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0.$

Interprétation graphique : La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

3. a) Pour tout nombre réel x, $h'(x) = \dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} + \dfrac{e^x+1-xe^x}{(e^x+1)^2}$

$$= \frac{-1}{e^x+1} + \frac{e^x+1-xe^x}{(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{-(e^x+1)+e^x+1-xe^x}{(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{-xe^x}{(e^x+1)^2}.$$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{x} > 0$ et $(e^{x}+1)^{2} > 0$ donc le signe de $h'(x)$ est celui de $-x$:

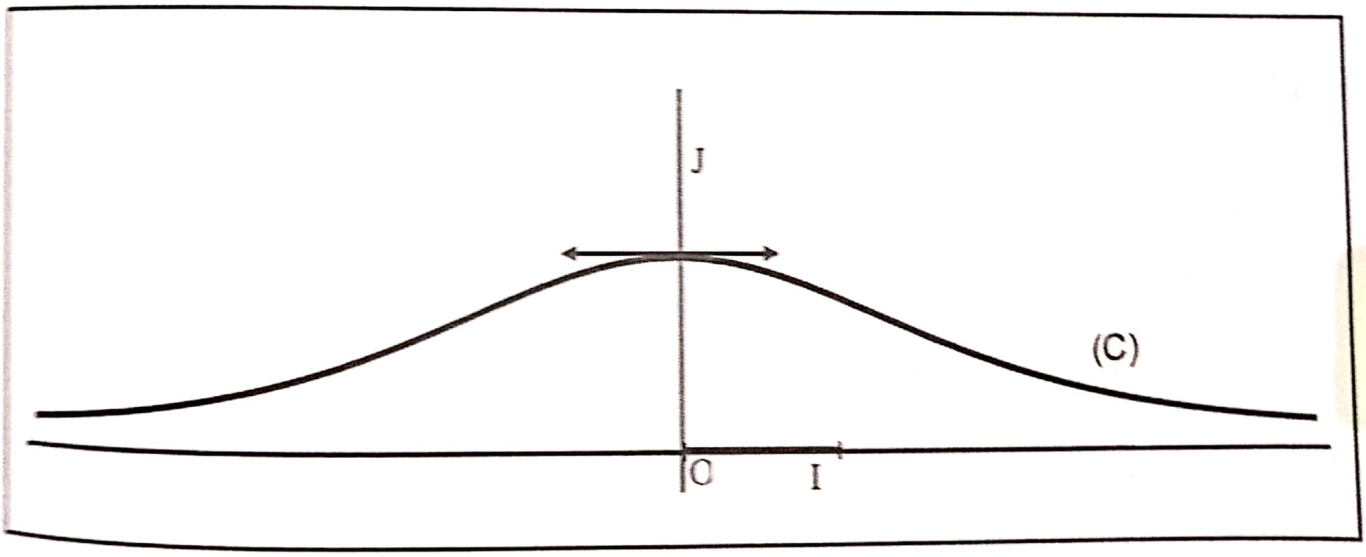
$\forall x \in]0;+\infty[$, $-x<0$ et donc, $h'(x)<0$.

Il en résulte que la fonction h est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

4. Tableau de variation de h : $h(0) = \ln 2$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	$\ln 2$	$\searrow$	0

5. Construction de la courbe (C) :



SUITES NUMERIQUES

1

$U_0 = 12 \times 0^2 - 0 + 5$, $U_0 = 5$

$U_1 = 12 \times 1^2 - 1 + 5$, $U_1 = 16$

$U_2 = 12 \times 2^2 - 2 + 5$, $U_2 = 51$

$U_3 = 12 \times 3^2 - 3 + 5$, $U_3 = 110$

$U_4 = 12 \times 4^2 - 4 + 5$, $U_4 = 193$

2

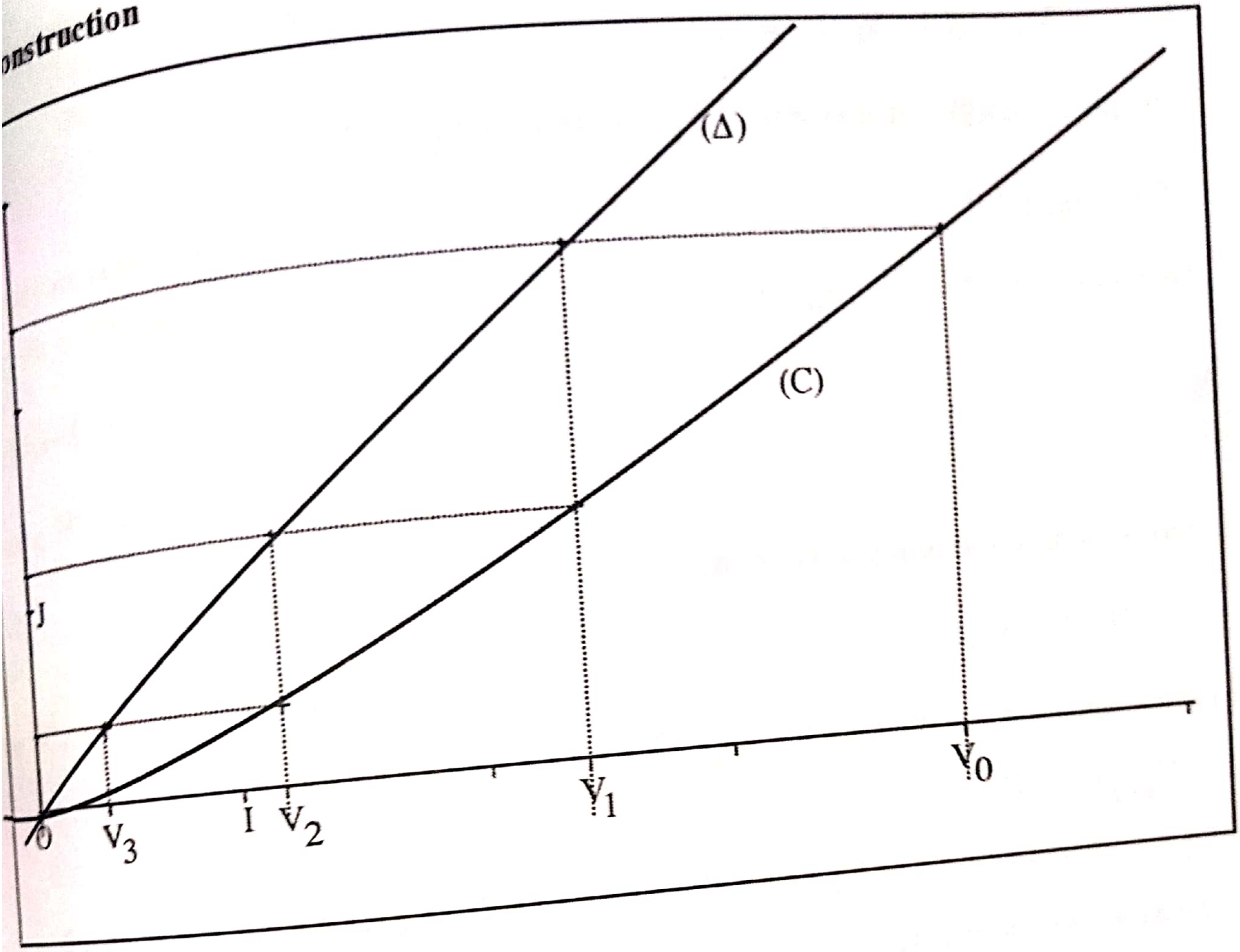
$U_0 = \ln 2$, $U_0 = 2^0 \times \ln 2$

$U_1 = U_0 e^{U_0}$, $U_1 = (\ln 2)e^{\ln 2}$, $U_1 = 2^1 \times \ln 2$

$U_2 = U_1 e^{U_1}$, $U_2 = 2^1 \times (\ln 2)e^{2\ln 2}$, $U_2 = 2^1 \times (\ln 2)e^{\ln 4}$, $U_2 = 2^3 \times \ln 2$

$U_3 = 2^{11} \times \ln 2$

onstruction



2. La suite (V_n) est décroissante.

3. a) $\forall x \in]0;+\infty[, g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$

b) g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et $g(0) = 0$

Donc, $x > 0 \Rightarrow g(x) > g(0)$

$\Rightarrow g(x) > 0$.

On en déduit que : $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) > 0$.

Scanné avec CamScanner

4. $V_0 = 4$, donc $V_0 > 0$

Supposons que pour un entier naturel k, $V_k > 0$

$V_{k+1} = V_k - \ln(1 + V_k) = g(V_k)$

Puisque : $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) > 0$ et $V_k > 0$ alors $g(V_k) > 0$

Donc, $V_{k+1} > 0$.

En conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n > 0$.

4

Effectuons un raisonnement par récurrence.

$U_0 = \frac{1}{2}$ donc $0 < U_0 < 2$.

Supposons que pour un entier k, $0 < U_k < 2$.

On a : $U_{k+1} = 2 - U_k$.

$0 < U_k < 2$ implique $-2 < -U_k < 0$. Il s'ensuit que $0 < 2 - U_k < 2$. Donc, $0 < U_{k+1} < 2$

En définitive, pour tout entier naturel n, $0 < U_n < 2$.

5

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{-x}$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = f(n)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (1-x)e^{-x}$.

Il s'ensuit que la fonction f est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.

f est continue et strictement décroissante sur $[1;+\infty[$.

Donc, $f([1; +\infty[) =]0; \frac{1}{e}]$

Or : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \in [1;+\infty[$, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) \in]0;\frac{1}{e}]$

Par conséquent, $0 < U_n \leq \frac{1}{e}$.

6

Considérons la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x - \ln(x)$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = f(n)$.

$\forall x \in]0;+\infty[$ $f'(x) = \frac{x-1}{x}$. Par suite f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \in [1;+\infty[$, d'où la suite (V_n) est strictement croissante.

7

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = U_4 + (n-4) \times (3)$.

$= -6 + 3n - 12$. Donc $U_n = 3n - 18$.

8

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = 4 + (n-1) \times \frac{5}{2}$.

$$= 4 + \frac{5n}{2} - \frac{5}{2}$$

Donc, $U_n = \frac{3}{2} + \frac{5n}{2}$.

2. U est une suite arithmétique de raison $\frac{5}{2}$.

S_n est une somme de termes consécutifs de la suite U et le nombre de termes de S_n est $n+1-1+1 = n+1$. Donc, $S_n = \frac{n+1}{2}(U_1 + U_{n+1})$.

On a : $U_{n+1} = \frac{3}{2} + \frac{5(n+1)}{2}$, soit $U_{n+1} = 4 + \frac{5n}{2}$.

Donc $S_n = \frac{n+1}{2}(4 + 4 + \frac{5n}{2})$ ou encore $S_n = (n+1)(4 + \frac{5n}{4})$

Par suite, $S_{50} = (50+1)(4 + \frac{250}{4})$, c'est à dire $S_{50} = \frac{6783}{2}$.

9

$\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = -\frac{1}{2} \times 2^n$.

Inutile de transformer cette expression.

10

1. $V_n = 2 \times 3^{n-1}$.

2. S_n est une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique dont le nombre de termes est $n-1+1$, c'est à dire n. Par conséquent, $S_n = 2 \times \frac{1-3^n}{1-3}$ car la raison 3 est différente de 1

   Par suite, $S_n = 3^n - 1$

3. $S_n \geq 100 \Rightarrow 3^n - 1 \geq 100$

   $\Rightarrow 3^n \geq 101.$

   $\Rightarrow n\ln 3 \geq \ln 101$ d'où $n \geq \frac{\ln 101}{\ln 3}$.

   On a $\frac{\ln 101}{\ln 3} \approx 4,2.$

   Par conséquent, le plus petit entier naturel est 5.

11

$n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = U_{n+1} + 3$

$$= \frac{2}{3}U_n - 1 + 3$$

$$= \frac{2}{3}U_n + 2$$

$$= \frac{2}{3}(U_n + 3)$$

$$= \frac{2}{3}V_n .$$

Donc (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

Premier terme : $V_0 = U_0 + 3$, d'où $V_0 = 4$.

12

a) Soit la fonction f telle que : $f(x) = x^2 - x + 2$.

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$.

Or $u_n = f(n)$ donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

b) Soit la fonction f telle que : $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{3x^2 + 1}$.

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{3x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}$.

Or $u_n = f(n)$ donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{1}{3}$.

c) Soit f la fonction telle que : $f(x) = (1-x)\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (1-x)\ln\left(1+\frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x-1}\right)}{\frac{1}{1-x}}$$

Posons $p = \frac{1}{x-1}$.

Donc, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{p \to 0}\left(-\frac{\ln(1+p)}{p}\right) = -1$ car $\lim_{p \to 0} \frac{\ln(1+p)}{p} = 1$.

Puisque $u_n = f(n)$ alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = -1$.

d) $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$ alors $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

Donc, $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

e) $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} (2\ln 2)^n$

Or $2\ln 2 = \ln 4$ implique $2\ln 2 > 1$

On a $2\ln 2 \approx 1{,}38$ donc $2\ln 2 > 1$, par conséquent $\lim_{n \to +\infty} (2\ln 2)^n = +\infty$

Il s'ensuit que, $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

f) $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} (-3)^{2n+1} = \lim_{n \to +\infty} (-3 \times 9^n)$

Par suite, $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

13

1\. a) $U_0=-1$; $U_1=U_{0+1}=\frac{U_0+6}{U_0+2}=\frac{-1+6}{-1+2}=5$; $U_2=U_{1+1}=\frac{U_1+6}{U_1+2}=\frac{5+6}{5+2}=\frac{11}{7}$

$$U_3=U_{2+1}=\frac{U_2+6}{U_2+2}=\frac{\frac{11}{7}+6}{\frac{11}{7}+2}=\frac{\frac{11+42}{7}}{\frac{11+14}{7}}=\frac{53}{25}$$

Les quatre premiers termes de la suite U sont : $U_0=-1$, $U_1=5$, $U_2=\frac{11}{7}$ et $U_3=\frac{53}{25}$

b) $\forall n\in\mathbb{N}$, $U_{n+1}=\frac{U_n+6}{U_n+2}$

$$=\frac{U_n+2+4}{U_n+2}$$

$$=\frac{U_n+2}{U_n+2}+\frac{4}{U_n+2}$$

$$=1+\frac{4}{U_n+2}$$

c) $U_0=-1$ donc, $-1\leq U_0\leq 5$.

Supposons que pour un entier naturel k , $-1\leq U_k\leq 5$ et

démontrons que $-1\leq U_{k+1}\leq 5$ où $U_{k+1}=1+\frac{4}{U_k+2}$

On a : $-1\leq U_k\leq 5$

$-1+2\leq U_k+2\leq 5+2$

$\frac{1}{7}\leq\frac{1}{U_k+2}\leq 1$

$$1+\frac{1}{7}\leq 1+\frac{1}{U_k+2}\leq 1+1$$

$$\frac{8}{7}\leq 1+\frac{1}{U_k+2}\leq 2.$$

Puisque $-1\leq \frac{8}{7}\leq 1+\frac{1}{U_k+2}\leq 2\leq 5$ alors, $-1\leq U_{k+1}\leq 5$

Conclusion : $\forall\, n\in N,\ -1\leq U_n\leq 5.$

2. **a)** Voir graphique.

b) $\forall\, n\in N,\ V_{n+1}=\dfrac{2-U_{n+1}}{3+U_{n+1}}$

$$=\frac{2-\dfrac{U_n+6}{U_n+2}}{3+\dfrac{U_n+6}{U_n+2}}$$

$$=\frac{\dfrac{2U_n+4-U_n-6}{U_n+2}}{\dfrac{3U_n+6+U_n+6}{U_n+2}}$$

$$=\frac{\dfrac{U_n-2}{U_n+2}}{\dfrac{4U_n+12}{U_n+2}}$$

$$=\frac{U_n-2}{4(U_n+3)}$$

$=-\dfrac{1}{4}V_n$. On en déduit que V est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{4}$

c) V est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{4}$ et de premier terme V_0.

Donc, $\forall\, n\in N,\ V_n=V_0\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n-0}$

On a $V_0 = \frac{2-U_0}{3+U_0} = \frac{2-(-1)}{3+(-1)} = \frac{3}{2}$. Il s'ensuit que $\forall\, n \in N$, $V_n = \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$

Par ailleurs, $\forall\, n \in N$, $V_n = \frac{2-U_n}{3+U_n}$ donc, $V_n(3+U_n) = 2-U_n$

$$3V_n + V_nU_n = 2 - U_n$$

$$U_n + V_nU_n = 2 - 3V_n$$

$$U_n(1+V_n) = 2 - 3V_n$$

Par conséquent, $\forall\, n \in N$, $U_n = \frac{2-3V_n}{1+V_n}$

d) S_n est une somme de $n+1$ termes consécutifs de la suite géométrique V

Donc, $S_n = V_0 \frac{1-(-\frac{1}{4})^{n+1}}{1-(-\frac{1}{4})}$

$$= \frac{3}{2}\frac{1-(-\frac{1}{4})^{n+1}}{\frac{5}{4}}$$

$$= \frac{3}{2} \times \frac{4}{5}(1-(-\frac{1}{4})^{n+1})$$

$$= \frac{6}{5}(1-(-\frac{1}{4})^{n+1})$$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$

On a $-1 < -\frac{1}{4} < 1$ donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^n = 0$

Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$

Par ailleurs, $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2-3V_n}{1+V_n}$. Comme $\lim_{n\to+\infty} V_n = 0$ alors

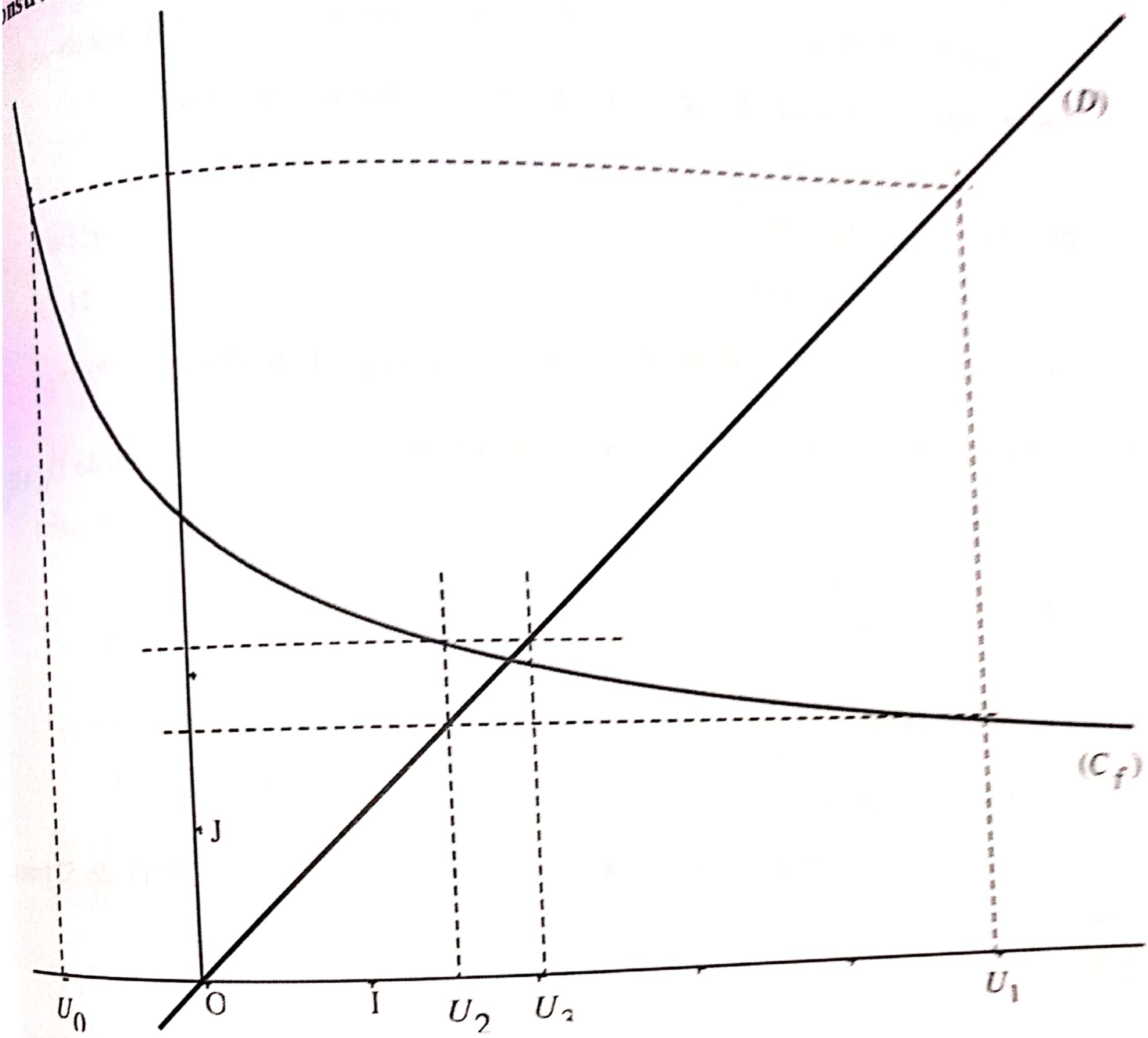
$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{2-3\times 0}{1+0} = 2$$

Enfin, $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{6}{5}(1-(-\frac{1}{4})^{n+1}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{6}{5}(1+\frac{1}{4}(-\frac{1}{4})^{n})$.

Puisque, $\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n = 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{6}{5}(1+\frac{1}{4}(-\frac{1}{4})^{n}) = \frac{6}{5}$.

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{6}{5}$.

Construction des quatre premiers termes de la suite (U_n)



14

1. $U_1 = U_0 + 5\% U_0$

$U_1 = 1{,}05 \times U_0$

$U_1 = 1050000$

Le loyer U_1 payé lors de la deuxième année s'élève à 1050000 francs.

2. **a)** $U_{n+1} = U_n + 5\%U_n$

$U_{n+1} = 1{,}05 \times U_n$.

On en déduit que la suite (U_n) est une suite géométrique de raison 1,05.

b) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0(1{,}05)^n$

$u_n = 1000000(1{,}05)^n$

Par conséquent, $u_{11} = 1000000(1{,}05)^{11}$ c'est-à-dire $u_{11} = 1710339{,}35$.

3. S est la somme de termes consécutifs de la suite géométrique (U_n) en partant de U_0 à U_{11}.

$S = u_0 + u_1 + ... + u_{11}$

Donc, $S = u_0 \times \dfrac{(1{,}05)^{12} - 1}{1{,}05 - 1}$

$S = 1000000 \times \dfrac{(1{,}05)^{12} - 1}{0{,}05}$

$S = 15917126{,}52$.

Il en résulte que la somme payée au terme des 12 années de contrat est 15917126,52 francs.

15

1. Le montant du salaire brut perçu au cours de l'année 2011 correspond à U_1.

On a $U_1 = U_0 + 32000$ c'est-à-dire $U_1 = 532000$.

Le montant du salaire perçu au cours de l'année 2011 est de 532000 francs.

De même $U_2 = U_1 + 32000$ c'est-à-dire $U_2 = 564000$

Donc, le montant du salaire perçu au cours de l'année 2012 est de 564000 francs.

2. **a)** $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n + 32000$

Par conséquent, la suite (U_n) est une suite arithmétique de raison 32000.

b) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + 32000n$

Il en résulte que : $u_{10} = 500000 + 32000 \times 10$

$$u_{10} = 820000.$$

3. $S = 12u_0 + 12u_1 + \ldots + 12u_{10}$

$S = 12 \times (u_0 + u_1 + \ldots + u_{10})$

$u_0 + u_1 + \ldots + u_{10}$ est la somme des termes consécutifs de la suite arithmétique (U_n) de U_0 à U_{10}.

Donc, $S = 12 \times 11 \times \dfrac{u_0 + u_{10}}{2}$

$$S = 12 \times 11 \times \frac{500000 + 820000}{2}$$

$$S = 12 \times 11 \times 660000.$$

$$S = 87120000.$$

On conclut que le cumul des salaires bruts perçus au cours des 11 premières années est de 8712000 francs.

CALCUL INTEGRAL

1

1.

a) $\int_1^2 (3x^2 - 2x+1)dx = [x^3 - x^2+x]_1^2$

$= 2^3 - 2^2 + 2 - (1^3 - 1^2 + 1)$

$= 5$

b) $\int_{\pi}^{-\pi} \sin x dx = [-\cos x]_{\pi}^{-\pi}$

$= [-(-1) - (-(-1))]$

$= 0$

c) $\int_1^2 (4x - 7)(x + 11)dx = \int_1^2 (4x^2 + 37x - 77)dx$

$= [\frac{4}{3}x^3 + \frac{37}{2}x^2 - 77x]_1^2$

$= \frac{4}{3} \times 2^3 + \frac{37}{2} \times 2^2 - 77 \times 2 - \frac{4}{3} \times 1^3 + \frac{37}{2} \times 1^2 - 77 \times 1$

$= -\frac{73}{6}.$

d) $\int_0^1 \frac{dx}{x+1} = [\ln(x+1)]_0^1$

$= \ln 2.$

2.

a) $\int_0^{\ln 2} e^{2t}dt = [\frac{1}{2}e^{2t}]_0^{\ln 2}$

$= 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$

b) $\int_{-1}^{-2} (t+2)^5 dx = [\frac{1}{6}(t+2)^6]_{-1}^{-2}$

$= -\frac{1}{6}.$

c) $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = [\frac{1}{2}\ln(x^2+1)]_0^1$

$= \frac{1}{2}\ln 2.$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin^{45} t dt = [\frac{1}{46}\sin^{46} t]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{1}{46}$

3.

a) $\int_{\sqrt{e}}^{\frac{1}{e}} \frac{\ln u}{u} du = [\frac{1}{2}(\ln u)^2]_{\sqrt{e}}^{\frac{1}{e}}$

$= \frac{3}{8}.$

b) $\int_{-1}^{1} \frac{e^u}{e^u+1} du = [\frac{1}{2}\ln(e^u+1)]_{-1}^{1}$

$= 1.$

c) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin u}{\cos u} du = [-\ln(\cos u)]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$

$= \frac{1}{2}\ln 2.$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin u}{\cos^3 u} du = [\frac{1}{2} \times \frac{1}{\cos^2 u}]_0^{\frac{\pi}{6}}$

$= \frac{1}{6}.$

2

1. Pour tout nombre réel x, $\dfrac{1}{e^x+1} = \dfrac{1}{e^x(1+e^{-x})}$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{e^x+1} = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^x+1}\,dx = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx$

$$= -\int_0^1 \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}dx$$

$$= -[\ln(1+e^{-x})]_0^1$$

$$= \ln(\frac{2e}{e+1}).$$

3

a) $\cos^2 x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos(2x)$

$\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx = \int_0^{\pi} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x))\,dx$

$$= [\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\sin(2x)]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\pi.$$

b) Pour tout nombre réels x, $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$; $\sin^3 x = (\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i})^3$

Donc, $\sin^3 x = -\dfrac{1}{8i}(e^{ix} - e^{-ix})^3$

$$= -\frac{1}{8i}(e^{3ix} - 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} - e^{-3ix})$$

$$= -\frac{1}{8i}(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3(e^{-ix} - e^{-3ix}))$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} - 3\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}(\sin(3x) - 3\sin x)$$

$$= \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin(3x)$$

Il s'ensuit que : $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}} \sin^3 x\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}} \left(\frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin(3x)\right)dx$

$$= \left[-\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos(3x)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}}$$

$$= -\frac{3}{4}\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{12}\cos(-\pi) + \frac{3}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{12}\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$= -\frac{3}{4}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{12}\times(-1) + \frac{3}{4}\times 0 - \frac{1}{12}\times 0$$

$$= -\frac{11}{24}.$$

4

1. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} e^t\,dt = [e^t]_0^{\ln 2}$

$$= e^{\ln 2} - e^0$$

$$= 2 - 1$$

$$= 1$$

2. $$\int_0^{\ln 2}(2-t)e^t dt = 2\int_0^{\ln 2} e^t dt - \int_0^{\ln 2} te^t dt$$

$$= 2 - 2\ln 2 - 1$$

$$= 3 - 2\ln 2.$$

5

1. $$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x + \sin^2 x \ \ dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1dx$$

$$= [\,x]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$I + J = \frac{\pi}{4}.$$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \ - \ \sin^2 x \ \ dx$$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)dx$$

$$I - J = [\ \frac{1}{2}\sin(2x)]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$I - J = \frac{1}{2}.$$

2. On obtient le système $\begin{cases} I + J = \dfrac{\pi}{4} \\ I - J = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

On en déduit que : $I = \dfrac{\pi + 2}{8}$ et $J = \dfrac{\pi - 2}{8}$.

6

1. Pour tout nombre réel x strictement supérieur à 15,

$$\frac{1}{17}\left(\frac{1}{x-15}-\frac{1}{x+2}\right)=\frac{1}{17}\times\frac{x+2-x+15}{(x-15)(x+2)}$$

$$=\frac{1}{17}\times\frac{17}{x^2-13x-30}$$

$$=\frac{1}{x^2-13x-30}$$

2. $$\int_{16}^{79}\frac{1}{x^2-13x\ -30}dx=\int_{16}^{79}\frac{1}{17}\left(\frac{1}{x-15}-\frac{1}{x+2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{17}\int_{16}^{79}\frac{1}{x-15}dx-\frac{1}{17}\int_{16}^{79}\frac{1}{x+2}dx$$

$$=\frac{1}{17}\ln([\ln\ \ x-15\ \ ]_{16}^{79}-\frac{1}{17}[\ln\ \ x+2\ \ ]_{16}^{79}$$

$$=\frac{1}{17}\ \ln64-\ln1\ \ -\frac{1}{17}\ \ln81-\ln18$$

$$=\frac{6\ln2}{17}-\frac{1}{17}\ \ 4\ln3\ -\ln2\ \ -2\ln3$$

$$=\frac{7\ln2-2\ln3}{17}.$$

7

1. Après avoir rendu au même dénominateur, on obtient $a=2$ et $b=-1$

2. On a : $\forall x\in]0\,;+\infty[,\ f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}-\dfrac{1}{x}$

Par suite, $\displaystyle\int_1^e f(x)dx=\int_1^e\frac{2x}{x^2+1}dx-\int_1^e\frac{dx}{x}$

$$=[\ln(x^2+1)]_1^e-[\ln x]_1^e\ .$$

Donc, $\displaystyle\int_1^e f(x)dx=\ln(e^2+1)-\ln2-1.$

8

1. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2,

$$A_n = [\ln x + \frac{1}{x} - x)]_1^n$$

$$= \ln n + \frac{1}{n} - n - \ln 1 - \frac{1}{1} + 1$$

$$= \ln n + \frac{1}{n} - n$$

2. $$\lim_{n \to +\infty} A_n = \lim_{n \to +\infty} (\ln n + \frac{1}{n} - n)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} n(\frac{\ln n}{n} - 1 + \frac{1}{n^2}) .$$

On obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n = -\infty$

9

a) $\int_{-1}^{1} e^{|s|} ds = \int_{-1}^{0} e^{-s} ds + \int_{0}^{1} e^{s} ds$ d'après la relation de Chasles.

$$= [-e^{-s}]_{-1}^{0} + [e^{s}]_{0}^{1}$$

$= -1 + e + e - 1$. D'où $\int_{-1}^{1} e^{|s|} ds = 2e - 2.$

b) Considérons le cercle trigonométrique,

$\cos t \geq 0$ si $t \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$ et $\cos t \leq 0$ si $t \in [\frac{\pi}{2} ; \pi]$

Donc, $|\cos t| = \cos t$ si $t \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$ et $|\cos t| = -\cos t$ si $[\frac{\pi}{2} ; \pi]$.

Par suite, $\int_{\pi}^{0} |\cos t| dt = \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} |\cos t| dt = \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} (-\cos t) dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos t\, dt$

$$= [-\sin t]_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} + [\sin t]_{\frac{\pi}{2}}^{0} = (-1+0)+(0-1)$$

$$= -2.$$

Donc, $\int_{\pi}^{0} \left|\cos t\right| dt = -2.$

10

a) Effectuons une intégration par parties. Posons : $u' = x$ et $v = \ln x$

Donc $u = \frac{x^2}{2}$ et $v' = \frac{1}{x}$

$$\int_{e}^{e^2} x\ln x dx = [\frac{x^2}{2}\ln x]_{e}^{e^2} - \int_{e}^{e^2} \frac{x^2}{2}\frac{1}{x} dx .$$

Par suite, $\int_{e}^{e^2} x\ln x dx = \frac{1}{4}(3e^4 - e^2)$.

b) Posons : $u = x$ et $v' = \cos(2x)$. Donc $u' = 1$ et $v = \frac{1}{2}\sin(2x)$.

Par suite, $\int_{0}^{\pi} x\cos(2x)\, dx = [\frac{1}{2}x\sin(2x)]_{0}^{\pi} - \int_{0}^{\pi}\frac{1}{2}\sin(2x)\, dx$

$$= -\frac{1}{2}[-\frac{1}{2}\cos(2x)]_{0}^{\pi}$$

$$= 0 .$$

c) Posons : $u = 1 - x$ et $v' = e^x$. Donc $u' = -1$ et $v = e^x$.

Par conséquent, $\int_{0}^{1}(1-x)e^x dx = [(1-x)e^x]_{0}^{1} + \int_{0}^{1} e^x dx$

$$= -1 + [e^x]_{0}^{1}$$

$$= -1 + e - 1$$

$$= e - 2.$$

d) Posons : $u = x$ et $v' = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$. Donc, $u' = 1$ et $v = 2\sqrt{x+1}$.

Par suite, $\displaystyle\int_1^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = [2x\sqrt{x+1}]_1^3 - 2\int_1^3 \sqrt{x+1}\,dx$

$$= 12 - 2\sqrt{2} - 2\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^3$$

$$= 12 - 2\sqrt{2} - 2\left[\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}\right]_1^3$$

$$= 12 - 2\sqrt{2} - \frac{4}{3}(8 - 2\sqrt{2})$$

$$= \frac{4 + 2\sqrt{2}}{3}.$$

11

a) $\displaystyle\int_0^\pi e^x \cos x\,dx = [-\sin x e^x]_0^\pi + \int_0^\pi e^x \sin x\,dx$

$$= \int_0^\pi e^x \sin x\,dx$$

Par ailleurs, $\displaystyle\int_0^\pi e^x \sin x\,dx = [\cos x e^x]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cos x\,dx$

$$= -e^\pi - 1 - \int_0^\pi e^x \cos x\,dx$$

Par suite, $\displaystyle\int_0^\pi e^x \cos x\,dx = -e^\pi - 1 - \int_0^\pi e^x \cos x\,dx$

$$2\int_0^\pi e^x \cos x\,dx = -e^\pi - 1$$

Par conséquent, $\displaystyle\int_0^\pi e^x \cos x\,dx = -\frac{e^\pi + 1}{2}$.

b) $\displaystyle\int_0^\pi x^2 \sin x\,dx = [-x^2 \cos x]_0^\pi + 2\int_0^\pi x\cos x\,dx$

$$= \pi^2 + 2\int_0^\pi x\cos x\,dx$$

Par ailleurs, $\int_0^{\pi} x\cos x dx = [x\sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx$

$$= -[-\cos x]_0^{\pi}$$

$$= -2$$

Il s'ensuit que, $\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx = \pi^2 + 2(-2)$

$$= \pi^2 - 4.$$

c) $\int_0^1 (x+1)^2 e^{-x} dx = [-(x+1)^2 e^{-x}]_0^1 + 2\int_0^1 (x+1)e^{-x} dx$

$$= 1 - \frac{4}{e} + 2\int_0^1 (x+1)e^{-x} dx$$

Par ailleurs, $\int_0^1 (x+1)e^{-x} dx = [-(x+1)e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx$

$$= 1 - \frac{2}{e} - [e^{-x}]_0^1$$

$$= 1 - \frac{2}{e} + 1 - \frac{1}{e}$$

$$= 2 - \frac{3}{e}$$

Par conséquent, $\int_0^1 (x+1)^2 e^{-x} dx = 1 - \frac{4}{e} + 2\left(2 - \frac{3}{e}\right)$

$$= 5 - \frac{10}{e}$$

12

1. $I + J = \int_0^{\pi} x\, dx$ donc, $I + J = \frac{\pi^2}{2}$

$$J = \int_0^{\pi} x \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1}{2} x dx - \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \cos(2x) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^2\right]_0^{\pi} - \left[\frac{1}{4}\sin(2x)\right]_0^{\pi}$$

Il en découle que, $J = \dfrac{\pi^2}{4}$

2. $I = \dfrac{\pi^2}{4}$

12

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x}\,dx$

$$I_n = \int_1^e \frac{1}{x}(\ln x)^n dx$$

$$I_n = \left[\frac{1}{n+1}(\ln x)^{n+1}\right]_1^e$$

$$= \frac{1}{n+1}$$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

1

1. a) Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{2x}$; $k \in \mathbb{R}$.

   b) Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{x}$; $k \in \mathbb{R}$.

   c) Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{\frac{1}{2}x}$; $k \in \mathbb{R}$.

2. a) Pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)+2f(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)-(-2)f(x)=0$

   Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{-2x}$; $k \in \mathbb{R}$.

   b) Pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)+f(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)-(-1)f(x)=0$

   Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{-x}$; $k \in \mathbb{R}$.

   c) Pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)+\frac{1}{2}f(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)-(-\frac{1}{2})f(x)=0$

   Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{-\frac{1}{2}x}$; $k \in \mathbb{R}$.

3. a) Pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)=f(x) \Leftrightarrow f'(x)-f(x)=0$

   Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{x}$; $k \in \mathbb{R}$.

   b) Pour $x \in \mathbb{R}$, $-3f'(x)+f(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)-\frac{1}{3}f(x)=0$

   Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{\frac{1}{3}x}$; $k \in \mathbb{R}$.

   c) Pour $x \in \mathbb{R}$, $4f'(x)+2f(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)-(-\frac{1}{2})f(x)=0$

   Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{-\frac{1}{2}x}$; $k \in \mathbb{R}$.

2

1. Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto Ae^{2x}$; $A \in \mathbb{R}$.

2. $h(\ln 2) = 1 \Leftrightarrow Ae^{2\times\ln 2} = 1$

$$\Leftrightarrow Ae^{\ln 4} = 1$$

$$\Leftrightarrow 4A = 1$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{1}{4}$$

Par conséquent, pour tout nombre réel x, $h(x) = \frac{1}{4}e^{2x}$

3

1. a) Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto Ae^{x} + Be^{-x}$; $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.

   b) Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto Ae^{2x} + Be^{-2x}$; $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.

   c) Pour $x \in \mathbb{R}$, $3f''(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow f''(x) - \frac{1}{3}f(x) = 0$

   Donc, les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto Ae^{\frac{\sqrt{3}}{3}x} + Be^{-\frac{\sqrt{3}}{3}x}$; $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$

2. a) Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto A\cos x + B\sin x$; $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.

   b) Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto A\cos(2x) + B\sin(2x)$; $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.

   c) Pour $x \in \mathbb{R}$, $12f''(x) = -15f(x) \Leftrightarrow f''(x) + \frac{5}{4}f(x) = 0$

   Donc, les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

   $x \mapsto A\cos(\frac{x\sqrt{5}}{2}) + B\sin(\frac{x\sqrt{5}}{2})$; $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.

4

1. Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto Ae^{4x} + Be^{-4x}$; $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.
2. Déterminons les nombres réels A et B tels que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = Ae^{4x} + Be^{-4x}$.

On a : $h'(x) = 4Ae^{4x} - 4Be^{-4x}$

Par suite, $h(0) = 1$ et $h'(0) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 1 \\ 4A - 4B = -1 \end{cases}$.

On en déduit que : $A = \dfrac{3}{8}$ et $B = \dfrac{5}{8}$. Par conséquent, $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \frac{3}{8}e^{4x} + \frac{5}{8}e^{-4x}$.

5

1. Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto A\cos(3x) + B\sin(3x)$; $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.
2. Déterminons les nombres réels A et B tels que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = A\cos(3x) + B\sin(3x)$.

On a : $h'(x) = -3A\sin(3x) + 3B\cos(3x)$.

Par suite, $h(\frac{\pi}{6}) = -1$ et $h'(\frac{\pi}{6}) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases}$.

Par conséquent, $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = -\cos(3x) + \sin(3x)$.

6

1. $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = xe^{-x}$; $g'(x) = (1-x)e^{-x}$

Donc, $g'(x) + g(x) = (1-x)e^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}$

On en déduit que la fonction g est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).

2. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E') sont les fonctions $x \mapsto ke^{-x}$; $k \in \mathbb{R}$.

3. f est solution de (E) $\Leftrightarrow f'(x) + f(x) = e^{-x}$

Par ailleurs, $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) + g(x) = e^{-x}$

Il s'ensuit que, f est solution de (E) $\Leftrightarrow f'(x)+f(x)-(g'(x)+g(x))=e^{-x}-e^{-x}$

$\Leftrightarrow (f-g)'(x)+(f-g)(x)=0$

$\Leftrightarrow f-g$ est solution de l'équation (E').

En définitive, f est solution de (E) si et seulement si $f-g$ est solution de (E')

4. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E') sont les fonctions $x \mapsto ke^{-x}$; $k \in \mathbb{R}$.

On en déduit que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) sont les fonctions

$x \mapsto ke^{-x}+xe^{-x}$; $k \in \mathbb{R}$. c'est à dire les fonctions $x \mapsto (k+x)e^{-x}$; $k \in \mathbb{R}$.

NOMBRES COMPLEXES

1

a) $2+i+5+7i=7+8i$

b) $7(2+i)\ -i(16-7i)=14+7i-16i-7$

$$=7-9i$$

c) $(2+i)[\ 35-7i+2i(-16+7i)]=(2+i)\ \ 35-7i\ -32i-14$

$$=(2+i)\ \ 21-39i$$

$$=\ 81-57i$$

d) $(2-i)^3+(2+i)^3=2^3-3\times 2^2 i+3\times 2i^2-i^3+2^3+3\times 2^2 i+3\times 2i^2+i^3$

$$=8-6+8-\ 6$$

$$=16-12$$

$$=4.$$

2

a) $\dfrac{2-i}{3+5i}=\dfrac{(2-i)(3-5i)}{(3+5i)(3-5i)}=\dfrac{1-13i}{34}=\dfrac{1}{34}-\dfrac{13}{34}i$

b) $\dfrac{11-8i}{23i}=\dfrac{(11-8i)(-i)}{23i(-i)}=\dfrac{-8\ -11i}{23}=-\dfrac{8}{23}-\dfrac{11}{23}i$

c) $(\dfrac{1-i}{3+4i})(\dfrac{-2+3i}{5+2i})=(\dfrac{(1-i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)})(\dfrac{(-2+3i)(5-2i)}{(5+2i)(5-2i)})$

$$=(\frac{-1-7i}{25})(\frac{-4+19i}{29})$$

$$=\frac{137+9i}{725}$$

$$=\frac{137}{725}+\frac{9}{725}i.$$

d) $\frac{11-8i}{4+5i}+\frac{-5+9i}{1+12i}=\frac{(11-8i)(1+12i)+(-5+9i)(4+5i)}{(4+5i)(1+12i)}$

$$=\frac{107+124i-65+11i}{-56+53i}$$

$$=\frac{(42+135i)(-56-53i)}{(-56+53i)(-56-53i)}$$

$$=\frac{4803}{5945}-\frac{9786}{5945}i.$$

3

a) $(ix-2)+5i(3x+iy)=ix-2+15ix-5y$

$$=-2-5y+i(x+15x)$$

$$=-2-5y+16ix$$

La partie réelle est $-2-5y$ et la partie imaginaire est $16x$

b) $\frac{ix}{x+3iy}=\frac{ix(x-3iy)}{(x+3iy)(x-3iy)}$

$$=\frac{3xy+ix^2}{x^2+9y^2}$$

$$=\frac{3xy}{x^2+9y^2}+i\frac{x^2}{x^2+9y^2}$$

La partie réelle est $\frac{3xy}{x^2+9y^2}$ et la partie imaginaire est $\frac{x^2}{x^2+9y^2}$.

c) $\frac{y-ix}{x+3i}=\frac{(y-ix)(x-3i)}{(x+3i)(x-3i)}$

$$=\frac{xy-3x-i(3y+x^2)}{x^2+9}$$

$$=\frac{xy-3x}{x^2+9}+(-i\frac{3y+x^2}{x^2+9})$$

La partie réelle est $\frac{xy-3x}{x^2+9}$ et la partie imaginaire est $-\frac{3y+x^2}{x^2+9}$.

d) $\frac{y}{x-i}+\frac{x}{x+i}=\frac{y(x+i)+x(x-i)}{(x+i)(x-i)}$

$$=\frac{xy+x^2+i(y-x)}{x^2+1}$$

$$=\frac{xy+x^2}{x^2+1}+i\,\frac{y-x}{x^2+1}$$

La partie réelle est $\frac{xy+x^2}{x^2+1}$ et la partie imaginaire est $\frac{y-x}{x^2+1}$.

4

a) $5-i$; b) $-2+2i$; c) $-7i$; d) $2i$; e) $-1+13i$; f) $\frac{1}{5}-\frac{7}{5}i$

5

a) $|2+7i|=\sqrt{2^2+7^2}=\sqrt{53}$.

b) $|4-3i|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5$.

c) $|-4|=4$.

d) $|3i|=3$.

e) $\left|\frac{1}{2}-3i\right|=\sqrt{\frac{1}{4}+9}=\frac{\sqrt{37}}{2}$.

f) $|(1-\sqrt{2})i|=|1-\sqrt{2}|=\sqrt{2}-1$.

$|-\sqrt{2}+i\sqrt{2}|=\sqrt{2+2}=2$.

6

a) $|2i(8-6i)| = |2i| \times |8-6i|$

$= |2i| \times |8-6i|$

$= 2 \times 10$

$= 20.$

b) $|(-3+7i)^2| = 58.$

c) $\left|\dfrac{-3+2i}{2+3i}\right| = \dfrac{|-3+2i|}{|2+3i|} = \dfrac{\sqrt{(-3)^2+2^2}}{\sqrt{2^2+3^2}} = \dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = 1.$

d) $\left|\dfrac{(-3+5i)(8+2i)}{(8+2i)(-1+i)}\right| = \dfrac{|-3+5i| \times |8+2i|}{|8+2i| \times |-1+i|} = \dfrac{\sqrt{34} \times \sqrt{20}}{\sqrt{68} \times \sqrt{2}} = \sqrt{5}.$

7

1. $|2-2i| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$

$|\sqrt{2} + i\sqrt{6}| = \sqrt{2+6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$

$|(1+\sqrt{3}) - i(1-\sqrt{3})| = \sqrt{(1+\sqrt{3})^2 + (1-\sqrt{3})^2}$

$= \sqrt{1+2\sqrt{3}+3+1-2\sqrt{3}+3}$

$= \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$

2. $OA = |z_A| = |2-2i| = 2\sqrt{2}.$

$OB = |z_B| = |\sqrt{2} + i\sqrt{6}| = 2\sqrt{2}.$

$OC = |z_C| = |(1+\sqrt{3}) - (1-i\sqrt{3})| = 2\sqrt{2}.$

Donc, $OA = OB = OC = 2\sqrt{2}.$

Par suite, les points A, B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon $2\sqrt{2}$.

8

1. Voir figure.

2. $z_{\overrightarrow{AB}} = -3+3i$; $z_{\overrightarrow{AC}} = 2+5i$ et $z_{\overrightarrow{BC}} = 5+2i$.

Donc $AB = \left|z_{\overrightarrow{AB}}\right| = \sqrt{(-3)^2+3^2}$

$= 3\sqrt{2}$.

$AC = \left|z_{\overrightarrow{AC}}\right| = \sqrt{2^2+5^2}$

$= \sqrt{29}$.

$BC = \left|z_{\overrightarrow{BC}}\right| = \sqrt{5^2+2^2}$

$= \sqrt{29}$.

On a : $AC = BC$.

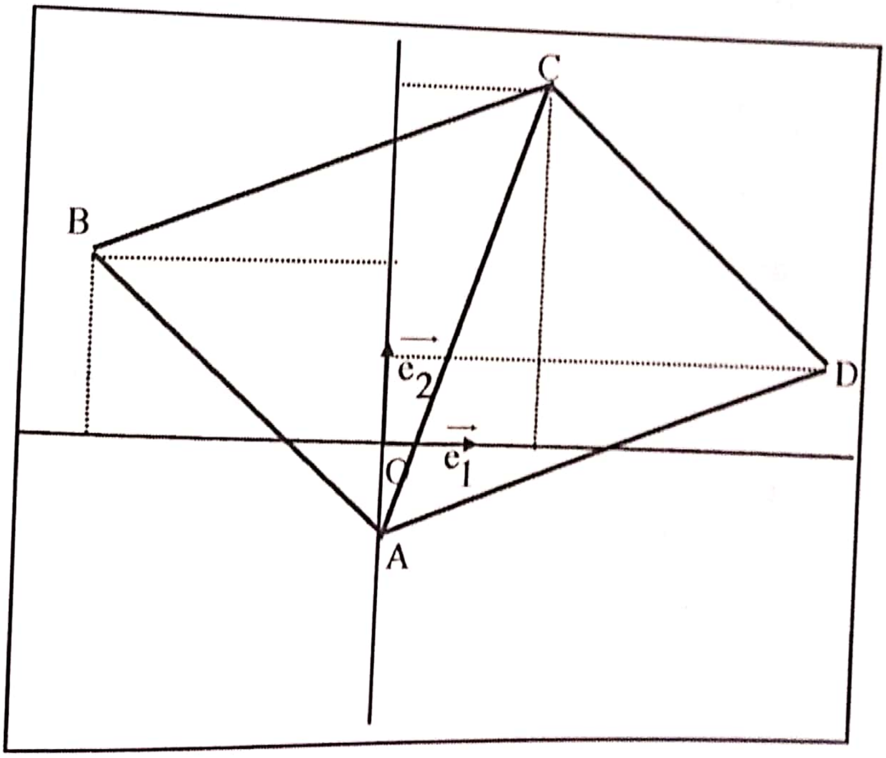
Donc, le triangle ABC est isocèle en C.

3. ABCD est un parallélogramme si $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{CD}} = z_{\overrightarrow{BA}}$

$\Leftrightarrow z_D = z_{\overrightarrow{BA}} + z_C$

Par suite, $z_D = 5 + i$.



9

a) $\left|\sqrt{3}-i\right| = 2$ et soit α un argument de $\sqrt{3}-i$.

α vérifie le système $\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\alpha = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Il s'ensuit que $-\dfrac{\pi}{6}$ est un argument de $\sqrt{3}-i$.

En s'inspirant de cette démarche, on a ce qui suit :

b) π est un argument de -1.

c) $\dfrac{\pi}{2}$ est un argument de $2i$.

d) $\dfrac{\pi}{3}$ est un argument de $\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

e) $\dfrac{3\pi}{4}$ est un argument de $-1+i$.

10

a) $\dfrac{\pi}{4}$ est un argument de $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ et $-\dfrac{\pi}{3}$ est un argument de $1-i\sqrt{3}$.

Donc, $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{3}$ c'est-à-dire $-\dfrac{\pi}{12}$ est un argument de $(\sqrt{2}+i\sqrt{2})(1-i\sqrt{3})$.

b) $-\dfrac{\pi}{4}$ est un argument de $1-i$.

Donc, $-\dfrac{2008\pi}{4}$ ou encore 0 est un argument de $(1+i)^{2008}$.

c) $\frac{\pi}{6}$ est un argument de $\sqrt{6}+i\sqrt{2}$.

Donc, $-\frac{\pi}{6}$ est un argument de $\frac{1}{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}$.

d) $-\frac{3\pi}{4}$ est un argument de $-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$ et $\frac{\pi}{3}$ est un argument de $1+i\sqrt{3}$.

Donc, $-\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{3}$ c'est-à-dire $-\frac{13\pi}{12}$ est un argument de $\frac{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{3}}$.

11

1. $|z_1| = 1$ et $\frac{5\pi}{6}$ est un argument de z_1.

   $|z_2| = 1$ et $\frac{\pi}{4}$ est un argument de z_2.

2. a) $|z_1 z_2| = 1$ et $-\frac{11\pi}{12}$ est un argument de $z_1 z_2$.

   b) $z_1 z_2 = \cos\left(-\frac{11\pi}{12}\right) + i\ \sin\left(-\frac{11\pi}{12}\right)$.

3. $z_1 z_2 = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} - i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

4. $(\cos(-\frac{11\pi}{12}) + i\ \sin(-\frac{11\pi}{12}) = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} - i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

   Il en découle que : $\cos\left(-\frac{11\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\left(-\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

12

a) Pour $z \in \mathbb{C}$, $(1-i)z = 1+i \Leftrightarrow z = \dfrac{1+i}{1-i}$

$$\Leftrightarrow z = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{2i}{2}$$

$$\Leftrightarrow z = i.$$

Donc, l'ensemble solution est $\{i\}$.

b) Pour $z \in \mathbb{C}$, $(-2+i)z = 2(z+i) - 3 \Leftrightarrow (-2+i)z = 2z + 2i - 3$

$$\Leftrightarrow (-4+i)z = 2i - 3$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-3+2i}{-4+i}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{14}{17} - \frac{5}{17}i.$$

Donc, l'ensemble solution est $\{ \dfrac{14}{17} - \dfrac{5}{17} \}$

c) Contrainte sur l'inconnue z : $z - i \neq 0$, c'est-à-dire $z \neq i$

Pour z différent de i, $\dfrac{z+3i}{z-i} = 4+2i \Leftrightarrow z+3i = (4+2i)(z-i)$

$$\Leftrightarrow z+3i = (4+2i)z - (4+2i)i$$

$$\Leftrightarrow (-3-2i)z = -3i - 4i + 2$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{2-7i}{-3-2i}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{8}{13} + \frac{25}{13}i.$$

Donc, l'ensemble solution est $\left\{\dfrac{8}{13} + \dfrac{25}{13}i\right\}$ car $\dfrac{8}{13} + \dfrac{25}{13}i$ est différent de i.

13

a) $z^2 + 2iz + 1 = 0$

$\Delta = -8 = (2i\sqrt{2})^2$

$z_1 = \dfrac{-2i + 2i\sqrt{2}}{2} = -(1 - \sqrt{2})i$ et $z_2 = \dfrac{-2i - 2i\sqrt{2}}{2} = -(1 + \sqrt{2})i$

Donc, les solutions de l'équation sont : $-(1 - \sqrt{2})i$ et $-(1 + \sqrt{2})i$.

b) $iz^2 - 2z + 3i = 0$

$\Delta = 16 = 4^2$

$z_1 = \dfrac{2 + 4}{2i} = -3i$ et $z_2 = \dfrac{2 - 4}{2i} = i$.

Donc, les solutions de l'équation sont : $-3i$ et i.

c) $z^2 + 2(1 + i)z + 2i = 0$

$\Delta = 4(1 + i)^2 - 8i = 0$

$z = -\dfrac{2 + 2i}{2} = -1 - i$

La solution de l'équation est : $-1 - i$.

14

1. $(6+2i)^2 = 36+24i-4$

$= 32+24i.$

2. $\Delta = (4+2i)^2 - 4(-5-2i)$

$= 16-4+16i+20+8i$

$= 32+24i$

$= (6+2i)^2$

$z_1 = \dfrac{-4-2i-6-2i}{2} = -5-2i$ et $z_2 = \dfrac{-4-2i+6+2i}{2} = 1$

Par suite, les solutions de l'équation sont : $-5-2i$ et 1.

15

1. $z^2+z-2=0$

Les solutions de cette équation sont 1 et -2

2. Résolution de l'équation (E)

Contrainte sur l'inconnue z, $z \in \mathbb{C}$.

Pour $z \in \mathbb{C}$, (E) $\Leftrightarrow (z+i)^2 + (z+i) - 2 = 0$

$\Leftrightarrow z+i = 1$ ou $z+i = -2$

$\Leftrightarrow z = 1-i$ ou $z = -2-i$

Les solutions de l'équation (E) sont : $1-i$ et $-2-i$.

Résolution de l'équation (F) :

Contrainte sur l'inconnue z : $z \neq 0$ et $z^2 \neq 0$, c'est-à-dire $z \neq 0$.

Pour $z \in \mathbb{C}^*$, (F) $\Leftrightarrow \dfrac{2i}{z^2} + \dfrac{1+i}{z} - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+i)^2}{z^2} + \frac{1+i}{z} - 2 = 0 \text{ car } (1+i)^2 = 2i$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1+i}{z}\right)^2 + \frac{1+i}{z} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+i}{z} = 1 \text{ ou } \frac{1+i}{z} = -2$$

$$\Leftrightarrow z = 1+i \text{ ou } z = \frac{-1-i}{2}$$

$$\Leftrightarrow z = 1+i \text{ ou } z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

L'ensemble solution de l'équation (F) est $\{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i ; 1+i\}$.

16

a. Pour $z \in \mathbb{C}$, $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow |z - 2i| = |z - 1|$

$$\Leftrightarrow |z - z_A| = |z - z_B| \text{ où } A(2i) \text{ et } B(1)$$

$$\Leftrightarrow AM = BM$$

Donc, l'ensemble (Γ) est la médiatrice du segment [AB].

b. Pour $z \in \mathbb{C}$, $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow |z - (-2)| = |z - (1-i)|$

$$\Leftrightarrow |z - z_A| = |z - z_B| \text{ où } A(-2) \text{ et } B(1-i)$$

$$\Leftrightarrow AM = BM$$

Par suite, l'ensemble (Γ) est la médiatrice du segment [AB].

c) Pour $z \in \mathbb{C}$, $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \left| iz - (1+i) \right| = 1$

$$\Leftrightarrow \left| i \right| \times \left| z - \frac{1+i}{i} \right| = 1$$

$$\Leftrightarrow \left| z - 1 + i \right| = 1$$

$$\Leftrightarrow \left| z - (1 - i) \right| = 1$$

$$\Leftrightarrow \left| z - z_A \right| = 1$$

$$\Leftrightarrow AM = 1$$

Donc, l'ensemble (Γ) est le cercle de centre A et de rayon 1.

d) Pour $z \in \mathbb{C}^*$, $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \left| \frac{z - 2i}{z} \right| = 1$

$$\Leftrightarrow \left| z - 2i \right| = \left| z \right|$$

$$\Leftrightarrow AM = OM \quad \text{où } A\,(2i) \text{ et } O\,(0)$$

Donc, l'ensemble (Γ) est la médiatrice du segment $[AO]$.

1. Notons (Δ) l'ensemble des points M d'affixes z tels que $|z + 4 - 2i| = |3i - z|$.

$M \in (\Delta) \Leftrightarrow |z + 4 - 2i| = |3i - z|$

$\Leftrightarrow |z - (-4 + 2i)| = |z - 3i|$

$\Leftrightarrow |z - z_A| = |z - z_B|$ avec $A(-4 + 2i)$ et $B(3i)$

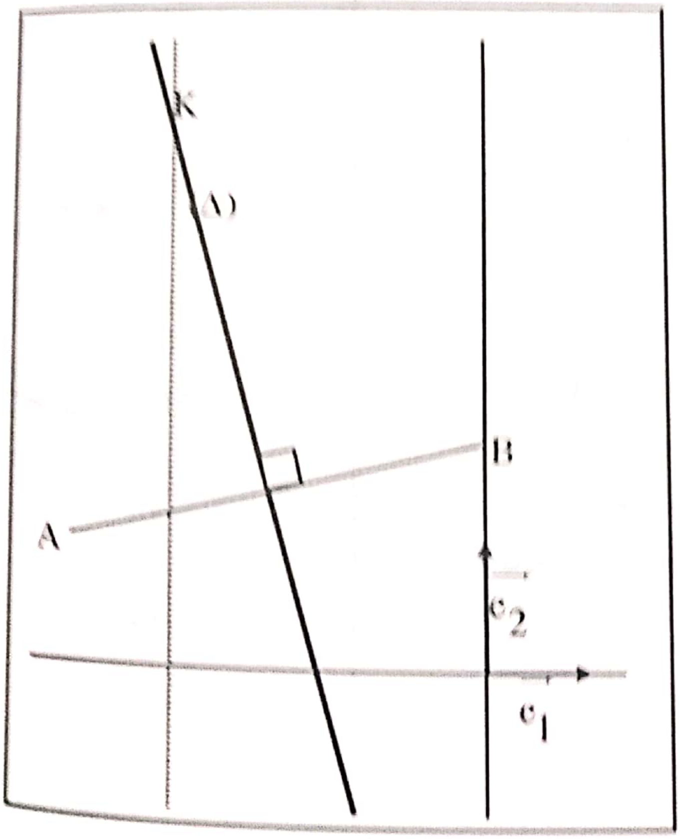
$\Leftrightarrow AM = BM$.

Donc (Δ) est la médiatrice du segment [AB].

2. $|z_K + 4 - 2i| = \frac{\sqrt{85}}{2}$ et $|3i - z_K| = \frac{\sqrt{85}}{2}$.

Donc, $|z_K + 4 - 2i| = |3i - z_K|$.

Par conséquent, K appartient à (Δ)



18

1. Notons (C) l'ensemble des points M tels que $|iz + 4 - i| = 2$

$M \in (C) \Leftrightarrow |iz + 4 - i| = 2$

$\Leftrightarrow |i|\,|iz + 4 - i| = 2$

$\Leftrightarrow |i(iz + 4 - i)| = 2$

$\Leftrightarrow |-z + 4i + 1| = 2$

$\Leftrightarrow |z - (1 + 4i)| = 2$

$\Leftrightarrow |z - z_A| = 2$ où A est le point d'affixe $1 + 4i$.

$\Leftrightarrow AM = 2.$

Donc (C) est le cercle de centre A et de rayon 2.

2. Soit ib ; $b \in \mathbb{R}$ l'affixe d'un point d'intersection de (C) et de l'axe imaginaire

Il s'ensuit que,

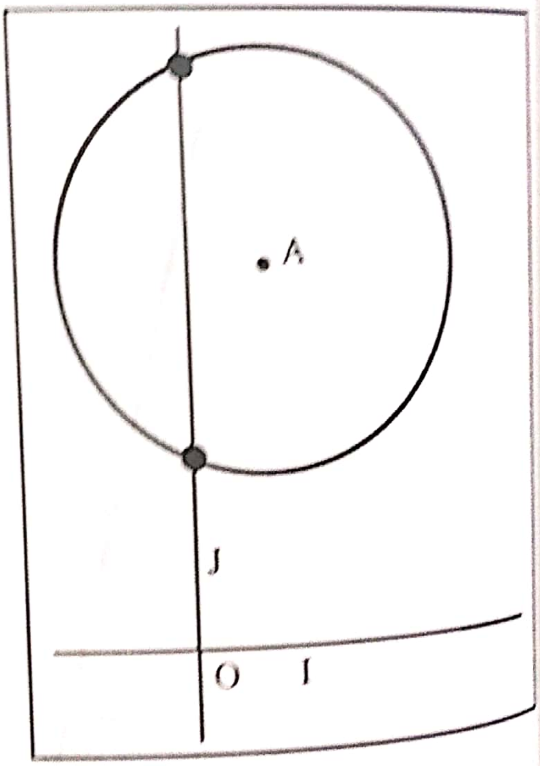
$|i(ib) + 4 - i| = 2 \Leftrightarrow |-b + 4 - i| = 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{(-b+4)^2 + (-1)^2} = 2$

$\Leftrightarrow b^2 - 8b + 16 + 1 = 4$

$\Leftrightarrow b^2 - 8b + 13 = 0$

$\Leftrightarrow b = 4 - \sqrt{3}$ ou $b = 4 + \sqrt{3}$



Par suite, les points d'intersection de (C) avec l'axe imaginaire sont les points d'affixes $(4 - \sqrt{3})i$ et $(4 + \sqrt{3})i$.

19

1. $P(i) = i^3 + i(i^2) - i + 3i$

$= -i - i - i + 3i$

$= -3i + 3i$

$= 0$

2. On a $Q(z) = z^2 + az + b$ où a et b sont des nombres réels

Donc, $P(z) = (z - i)(z^2 + az + b)$

$= z^3 + (a - i)z^2 + (b - ai)z - bi$.

Par identification des coefficients du polynôme P, on obtient $a - i = i$, $b = -3$

Il en résulte que : $a = 2i$ et $b = -3$.

Par conséquent, $Q(z) = z^2 + 2iz - 3$.

3. Pour tout nombre complexe z, $P(z) = 0 \Leftrightarrow (z - i)(z^2 + 2iz - 3) = 0$.

$\Leftrightarrow z - i = 0$ ou $z^2 + 2iz - 3 = 0$

$\Leftrightarrow z = i$ ou $z^2 + 2iz - 3 = 0$.

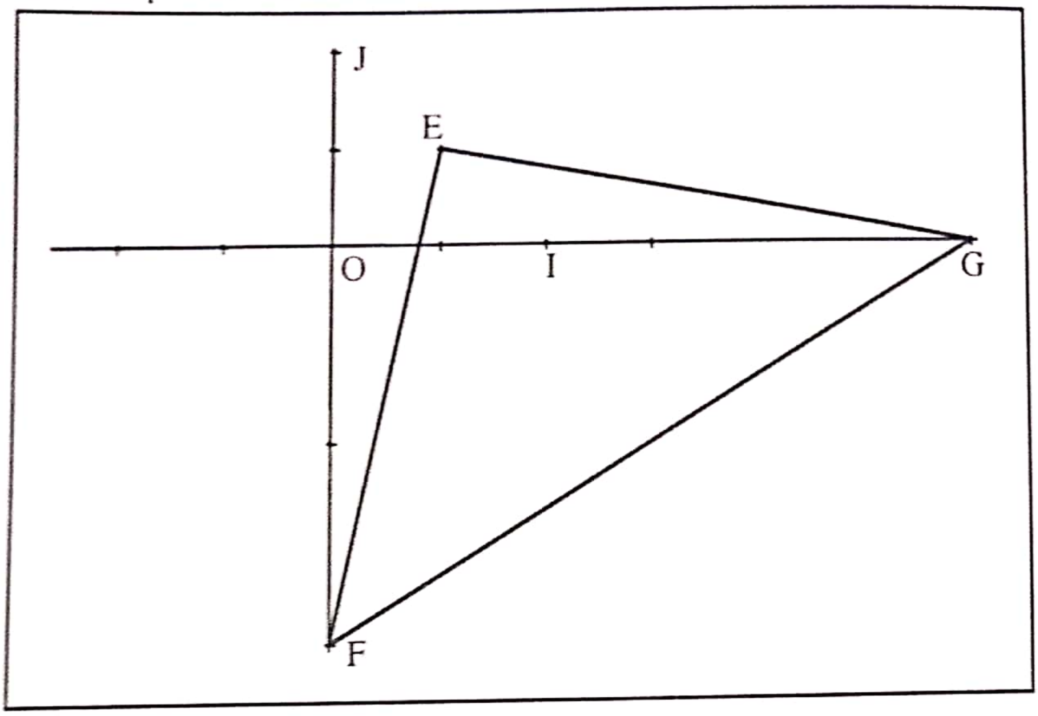
Résolvons l'équation $z^2 + 2iz - 3 = 0$.

Les solutions de cette équation sont $z_1 = \sqrt{2} - i$ et $z_2 = -\sqrt{2} - i$.

En définitive, les solutions de l'équation $P(z) = 0$ sont : i, $\sqrt{2} - i$ et $-\sqrt{2} - i$.

20

1. Construction des points E. F et G.



2. $\dfrac{z_G - z_E}{z_F - z_E} = i$

3. Il résulte de la question 2) que triangle EFG est rectangle isocèle en E de sens direct

21

1. $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \dfrac{4i - 3\sqrt{3} - 5i}{2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 5i}$

$= \dfrac{-3\sqrt{3} - i}{-\sqrt{3} - 5i} = \dfrac{3\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} + 5i}$

$= \dfrac{(3\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - 5i)}{(\sqrt{3} + 5i)(\sqrt{3} - 5i)}$

$$= \frac{9 - 15i\sqrt{3} + i\sqrt{3} + 5}{3 + 25}$$

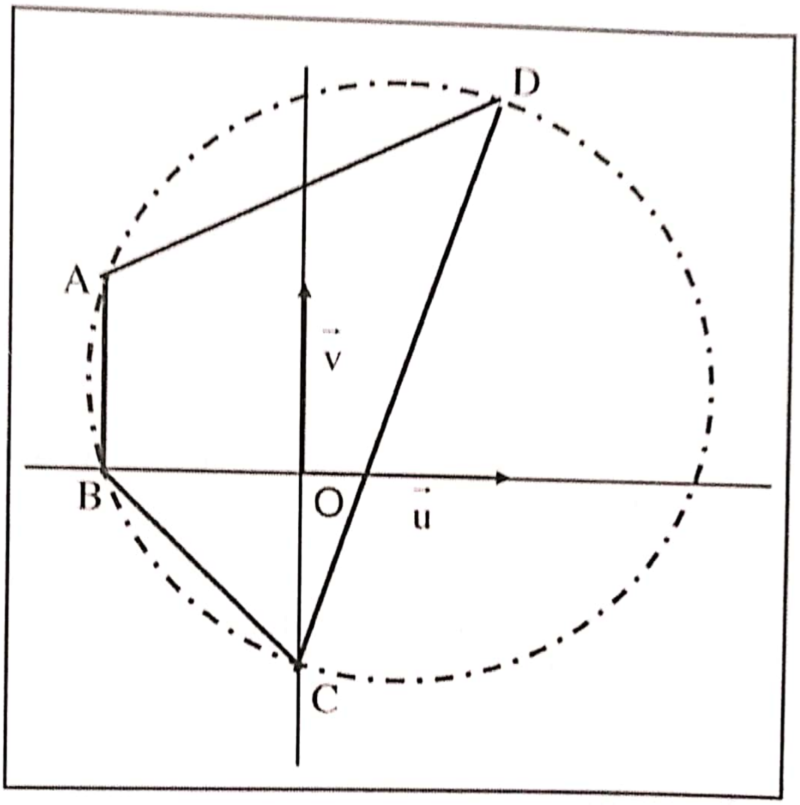
$$= \frac{14 - 14i\sqrt{3}}{28} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

2. De la question 1), on déduit que : $BC = AC$ et $Mes(\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}}) = -\frac{\pi}{3}$.

Le triangle ABC est donc équilatéral de sens indirect.

22



1. et 2. Voir figure

3. On a : $z_{\vec{u}} = 2 + 2i$.

4. a) Voir figure.

b) $z_{\overrightarrow{BD}} = 2 + 2i$

Donc, $z_D = 2 + 2i + z_B$.

$z_D = 1 + 2i$.

5. $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} = \frac{-i + 1 - i}{-i + 1} = \frac{1 - 2i}{1 - i}$

$\frac{z_D - z_A}{z_D - z_B} = \frac{1 + 2i + 1 - i}{1 + 2i + 1} = \frac{2 + i}{2 + 2i}$.

Par suite, $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} : \frac{z_D - z_A}{z_D - z_B} = \frac{1 - 2i}{1 - i} : \frac{2 + i}{2 + 2i}$

$$= \frac{-i(2-i)2(1+i)}{(2-i)(1-i)}$$

$$= \frac{-2i(1+i)}{(1-i)}$$

$$= 2$$

De plus, les points A, B et C ne sont pas alignés.

Par conséquent, les points A, B, C et D sont cocycliques.

23

1. $z = x + iy$ donc $Z = \dfrac{x+iy+1}{x+iy+1-4i} = \dfrac{x+1+iy}{x+1+i(y-4)}$

$$= \frac{(x+1+iy)\,[x+1-i(y-4)]}{[x+1+i(y-4)][x+1-i(y-4)]}$$

$$= \frac{(x+1)^2+y(y-4)-i[(x+1)(y-4)-y(x+1)]}{(x+1)^2+(y-4)^2}$$

Il s'ensuit que $Z = \dfrac{(x+1)^2+y^2-4y+4i(x+1)}{(x+1)^2+(y-4)^2}$

Donc $X = \dfrac{(x+1)^2+y^2-4y}{(x+1)^2+(y-4)^2}$ et $Y = \dfrac{4(x+1)}{(x+1)^2+(y-4)^2}$

2. a) Pour z différent de $-1+4i$, Z est réel $\Leftrightarrow Y = 0$

$$\Leftrightarrow x+1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

Donc, l'ensemble des points M tels que Z est réel est la droite d'équation $x = -1$ privée du point A.

b) Pour z différent de $-1+4i$,

Z est imaginaire pur $\Leftrightarrow X = 0$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 - 4y = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$$

On a $(-1+1)^2 + (4-2)^2 = 4$

Donc, les coordonnées du point d'affixe $-1+4i$ vérifie l'équation $(x+1)^2+(y-2)^2=4$

Il en résulte que, l'ensemble des points M tels que Z est imaginaire est le cercle de centre B et de rayon 2 privé du point A.

c) Pour z différent de $-1+4i$,

Z est nul $\Leftrightarrow z+1=0$

$$\Leftrightarrow z = -1$$

Donc l'ensemble des points M tels que Z est nul est le singleton {C}

d) Pour z différent de $-1+4i$,

$Z > 0 \Leftrightarrow Y = 0$ et $X > 0$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ et } (x+1)^2 + (y-2)^2 > 4$$

Donc, l'ensemble des points M tels que $Z > 0$ est la droite (AC) privé du segment [AC].

e) Pour z différent de $-1+4i$,

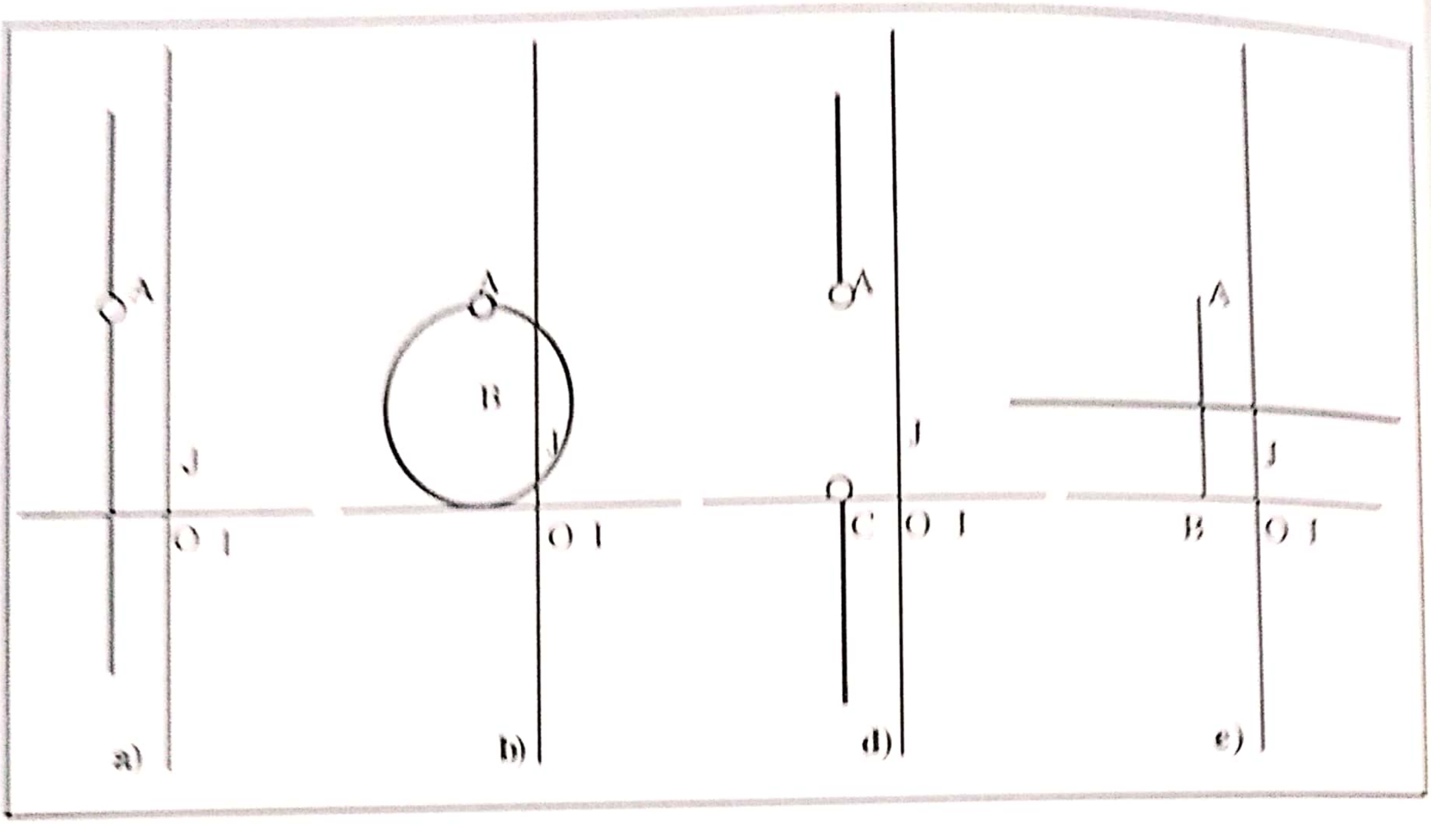
$|Z| = 1 \Leftrightarrow |z-(-1)| = |z-(-1+4i)|$

$$\Leftrightarrow |z - z_B| = |z - z_A|$$

$$\Leftrightarrow MB = MA$$

Donc, l'ensemble des points M tels que $|Z| = 1$ est la médiatrice du segment [AB].

Construction des différents ensembles



24

a) $i\,e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{5\pi}{6}}$

Donc, le module est 1 et $\frac{5\pi}{6}$ est un argument.

b) $-3e^{i\frac{\pi}{4}} = 3e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{4}} = 3e^{i\frac{5\pi}{4}}$

On en déduit que le module est 3 et $\frac{5\pi}{4}$ est un argument.

c) $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1$

Donc, 1 est le module et 0 est un argument.

d) $e^{-i\frac{6\pi}{7}} - e^{i\frac{6\pi}{7}} = -2i\sin\frac{6\pi}{7}$

Puisque $\frac{\pi}{2} < \frac{6\pi}{7} < \pi$, alors $\sin\frac{6\pi}{7} > 0$. Par conséquent, $e^{-i\frac{6\pi}{7}} - e^{i\frac{6\pi}{7}} = 2\sin\left(\frac{6\pi}{7}\right)e^{-i\frac{\pi}{2}}$

Par suite, $2\sin\frac{6\pi}{7}$ est le module et un argument est $-\frac{\pi}{2}$.

e) $(1-i)\,e^{-i\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{-i\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$

Donc, le module est $\sqrt{2}$ et un argument est $-\frac{7\pi}{12}$

f) $\frac{1-i}{1+i}\,e^{-i\frac{\pi}{2}} = -ie^{-i\frac{\pi}{2}} = e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{-i\frac{\pi}{2}} = e^{-i\pi}$

Donc, le module est 1 et un argument est $-\pi$.

25

1. $\frac{Z_B-Z_A}{Z_C-Z_A} = \frac{2+4i}{c+2i}$, ce qui permet de dire que $\frac{Z_B-Z_A}{Z_C-Z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

On en déduit que le triangle ABC est un triangle équilatéral de sens direct.

2. $\frac{2+4i}{c+2i} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow \frac{2+4i}{c+2i} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

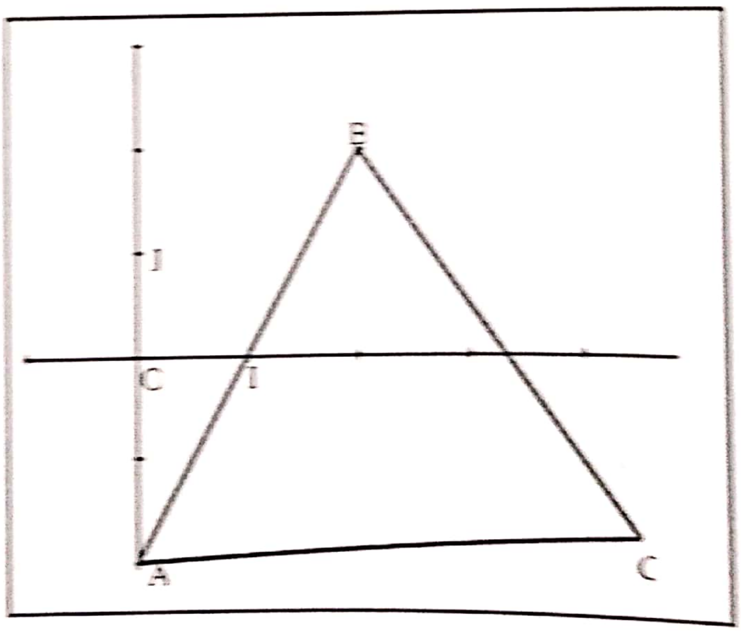
$\Leftrightarrow 4+8i = (1+i\sqrt{3})(c+2i)$

$\Leftrightarrow (1+i\sqrt{3})c + 2i - 2\sqrt{3} = 4+8i$

$\Leftrightarrow (1+i\sqrt{3})c = 4+2\sqrt{3}+6i$

$\Leftrightarrow c = \frac{4+2\sqrt{3}+6i}{1+i\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow c = 1+2\sqrt{3} - i\sqrt{3}$



3. Voir figure.

26

$-4 = 4e^{i\pi}$

Posons $z = re^{i\alpha}$.

Donc, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$z^4 = -4 \Leftrightarrow r^4 = 4 \text{ et } 4\alpha = \pi + 2k\pi \text{ ; } k \in Z$$

$$\Leftrightarrow r = \sqrt[4]{4} \text{ et } \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4} \text{ ; } k \in Z$$

$$\Leftrightarrow r = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \alpha_k = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \text{ ; } k \in \{0; 1; 2; 3\}$$

Donc, les solutions sont les nombres complexes $z_k = 2\, e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2})}$ où $k \in \{0; 1; 2; 3\}$

Par suite, $z_0 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + i$,

$$z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}} = -1 + i \text{ ,}$$

$$z_2 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{4}} = -1 - i$$

$$z_3 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{7\pi}{4}} = 1 - i \text{ .}$$

Par conséquent, l'ensemble solution $S = \{ 1+i \text{ ; } -1+i \text{ ; } -1-i \text{ ; } 1-i \}$.

27

1. $z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0$

$\Delta = (2i)^2$

Par suite, les solutions sont $\sqrt{3} - i$ et $\sqrt{3} + i$.

2. Notons ib, où b est un nombre réel, la solution imaginaire pure.

$(ib)^3 - 2(\sqrt{3} + i)(ib)^2 + 4(1 + i\sqrt{3})(ib) - 8i = 0$

$2\sqrt{3}\ b^2 - 4b\sqrt{3} + i(-b^3 + 2b^2 + 4b - 8) = 0$

$$\begin{cases} 2\sqrt{3}\ b^2 - 4b\sqrt{3} = 0 \quad (1) \\ -b^3 + 2b^2 + 4b - 8 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

On a $(1) \Leftrightarrow 2\sqrt{3}\ b^2 - 4b\sqrt{3} = 0$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\ b(b-2) = 0$

$\Leftrightarrow b = 0$ ou $b = 2$.

Dans l'équation (2) : $-0^3 + 2\times 0^2 + 4\times 0 - 8 = -8 \neq 0$

$-2^3 + 2\times 2^2 + 4\times 2 - 8 = -8 + 8 + 8 - 8$

$= 0.$

Par conséquent, $2i$ est la solution imaginaire pure recherchée.

3.

I

a) Laissé au soin du lecteur.

b) Pour $z \in \mathbb{C}$, $(E) \Leftrightarrow (z - 2i)(z^2 - 2\sqrt{3}\ z + 4) = 0$

$\Leftrightarrow z - 2i = 0$ ou $z^2 - 2\sqrt{3}\ z + 4 = 0$

$\Leftrightarrow z - 2i = 0$ ou $z = \sqrt{3} - i$ ou $z = \sqrt{3} + i$

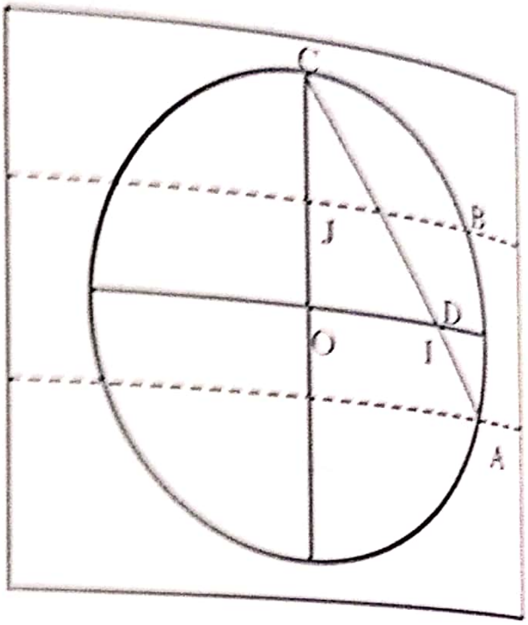
Donc, les solutions de l'équation (E) sont : $\sqrt{3} - i$, $\sqrt{3} + i$ et $2i$

II

1. a) $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 2$ $\overrightarrow{AC}(-\sqrt{3}+3i)$

Il en découle que : $OA = OB = OC = 2$.

Donc les points A, B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.



b) $\overrightarrow{AC}(-\sqrt{3}+3i)$ et $\overrightarrow{AD}(\sqrt{3} - i - \frac{2\sqrt{3}}{3})$.

Donc $\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

On en déduit que les points A, C et D sont alignés.

c) Voir figure

2. On a : $OA = AB = BC = OC$.

Par suite, le quadrilatère $OABC$ est un losange.

28

1. a) $i^3 + (6-5i)i^2 + (1-20i)i - 14 - 5i = -i - (6-5i) + i + 20 - 14 - 5i$

$$= -i - 6 + 5i + i + 20 - 14 - 5i$$

$$= 20 - 20 + 6i - 6i$$

$$= 0.$$

Donc, i est une solution de l'équation (E).

b) Résolution de l'équation : $z^2 + (6-4i)z + 5 - 14i = 0$.

$$\Delta = (6-4i)^2 - 4(5-14i)$$

$$= 36 - 48i - 16 - 20 + 56i$$

$$= 8i = (2+2i)^2.$$

$z_1 = \dfrac{-6+4i-2-2i}{2} = -4+i$ et $z_2 = \dfrac{-6+4i+2+2i}{2} = -2+3i.$

Les solutions de l'équation sont : $-4+i$ et $-2+3i$.

c) $(z-i)(z^2+(6-4i)z+5-14i) = z^3+(6-5i)z^2+(1-20i)z-14-5i$

Déduisons-en les solutions de (E).

Pour $z \in \mathbb{C}, (E) \Leftrightarrow z^3+(6-5i)z^2+(1-20i)z-14-5i=0$

$\Leftrightarrow (z-i)(z^2+(6-4i)z+5-14i)=0$

$\Leftrightarrow z-i=0$ ou $(z^2+(6-4i)z+5-14i)=0$

$\Leftrightarrow z=i$ ou $z=-4+i$ ou $z=-2+3i.$

On en déduit que les solutions de l'équation (E) sont : i, $-4+i$ et $-2+3i$.

2. a) Voir figure.

b) $\dfrac{u-v}{t-v} = \dfrac{i-(-2+3i)}{-4+i-(-2+3i)}$

$= \dfrac{2-2i}{-2-2i}$

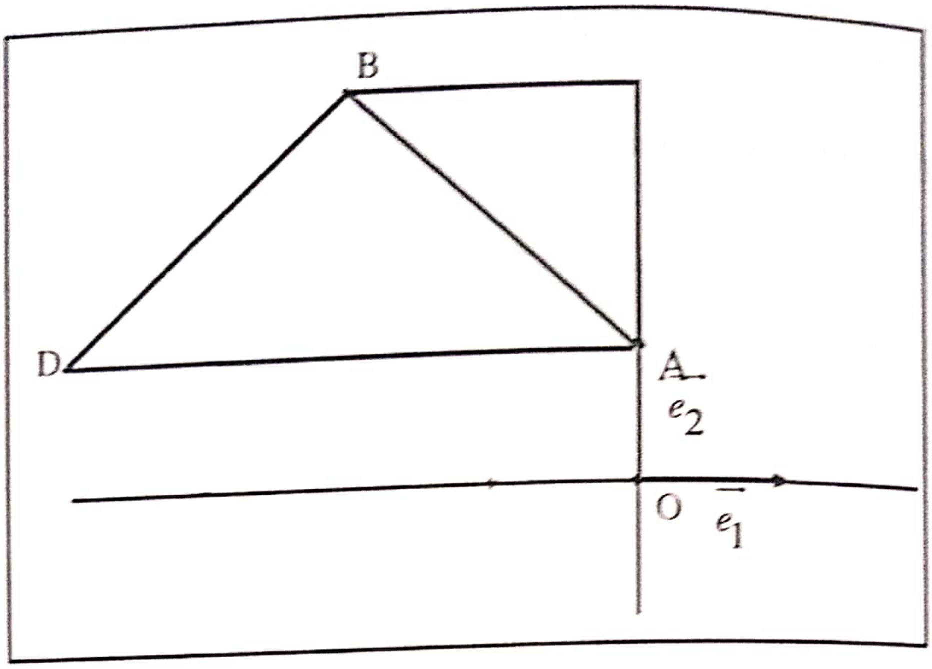
$= \dfrac{i(-2-2i)}{-2-2i} = i$. Puisque $|i|=1$ et $\dfrac{\pi}{2}$ est un argument de i alors $i = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$

Donc, $\dfrac{u-v}{t-v} = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$

c) De 2c), $\dfrac{u-v}{t-v} = \dfrac{z_A - z_B}{z_D - z_B} = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$

Il en ressort que $\dfrac{AB}{DB} = 1$ et $Mes(\widehat{\overline{BD}; \overline{BA}}) = \dfrac{\pi}{2}$. Il s'ensuit que le triangle ABD est rectangle isocèle en B.

Figure



29

1. Soit ib un imaginaire pure

$$P(ib)=0 \Leftrightarrow (ib)^3+(-1+2i)(ib)^2-3(ib)-(1+2i)=0$$

$$\Leftrightarrow -ib^3-(-1+2i)b^2-3ib-1-2i=0$$

$$\Leftrightarrow b^2-1+i(-b^3-2b^2-3b-2)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2-1=0 & (1) \\ b^3+2b^2+3b+2=0 & (2) \end{cases}$$

On a : $(1) \Leftrightarrow b^2-1=0$

$$\Leftrightarrow \quad b=-1 \text{ ou } b=1$$

Dans l'équation (2) : $(-1)^3+2\times(-1)^2+3\times(-1)+2=-1+2-3+2=0$

$$1^3+2\times1^2+3\times1+2=1+2+3+2=8\neq 0$$

Par suite, – 1 seulement vérifie l'équation (2) Donc, $-i$ est l'unique racine imaginaire pure du polynôme P .

2. Effectuons la division euclidienne de P par $z+i$

Il s'ensuit que : $Q(z)=z^2+(-1+i)z-2+i$

3. $(3-i)^2=9-6i-1=8-6i$

Résolution de l'équation $Q(z)=0$:

Le discriminant $\Delta=(-1+i)^2-4(-2+i)$

$$\Delta=1-2i-1+8-4i$$

$$\Delta=8-6i=(3-i)^2$$

On a : $z_1=\dfrac{-(-1+i)-(3-i)}{2}=\dfrac{-2}{2}=-1$ et $z_2=\dfrac{-(-1+i)+(3-i)}{2}=\dfrac{4-2i}{2}=2-i$

Par conséquent, les solutions de $Q(z)=0$ sont : -1 et $2-i$.

4. Pour $z\in\mathbb{C}$, $P(z)=0 \Leftrightarrow (z+i)Q(z)=0$

$$\Leftrightarrow z+i=0 \text{ ou } Q(z)=0$$

$$\Leftrightarrow z=-i \text{ ou } z=-1 \text{ ou } z=2-i$$

En définitive, l'ensemble solution est $\{-1;-i;2-i\}$.

5. a) Voir figure.

b) $\dfrac{z_D-z_A}{z_C-z_A}=\dfrac{3i-(-1)}{2-i-(-1)}$

$$=\frac{1+3i}{3-i}$$

$$=\frac{(1+3i)(3+i)}{3^2+.1^2}$$

$$=\frac{3+i+9i-3}{10}$$

$$=\frac{10i}{10}=i.$$

Il en résulte que le triangle ACD est rectangle isocèle en A et de sens direct.

6. a) Voir figure.

b) $\Omega D = |z_D - z_\Omega| = |3i-(1+i)| = |-1+2i| = \sqrt{5}$

$\Omega B = |z_B - z_\Omega| = |-i-(1+i)| = |-1-2i| = \sqrt{5}$

Par suite, $\Omega D = \Omega B$. On en déduit que le triangle $B\Omega D$ est isocèle en Ω.

7. L'affixe du milieu du segment [DC] est $\dfrac{z_D + z_C}{2} = \dfrac{3i+2-i}{2} = \dfrac{2+2i}{2} = 1+i$.

Donc, Ω est le milieu de [DC].

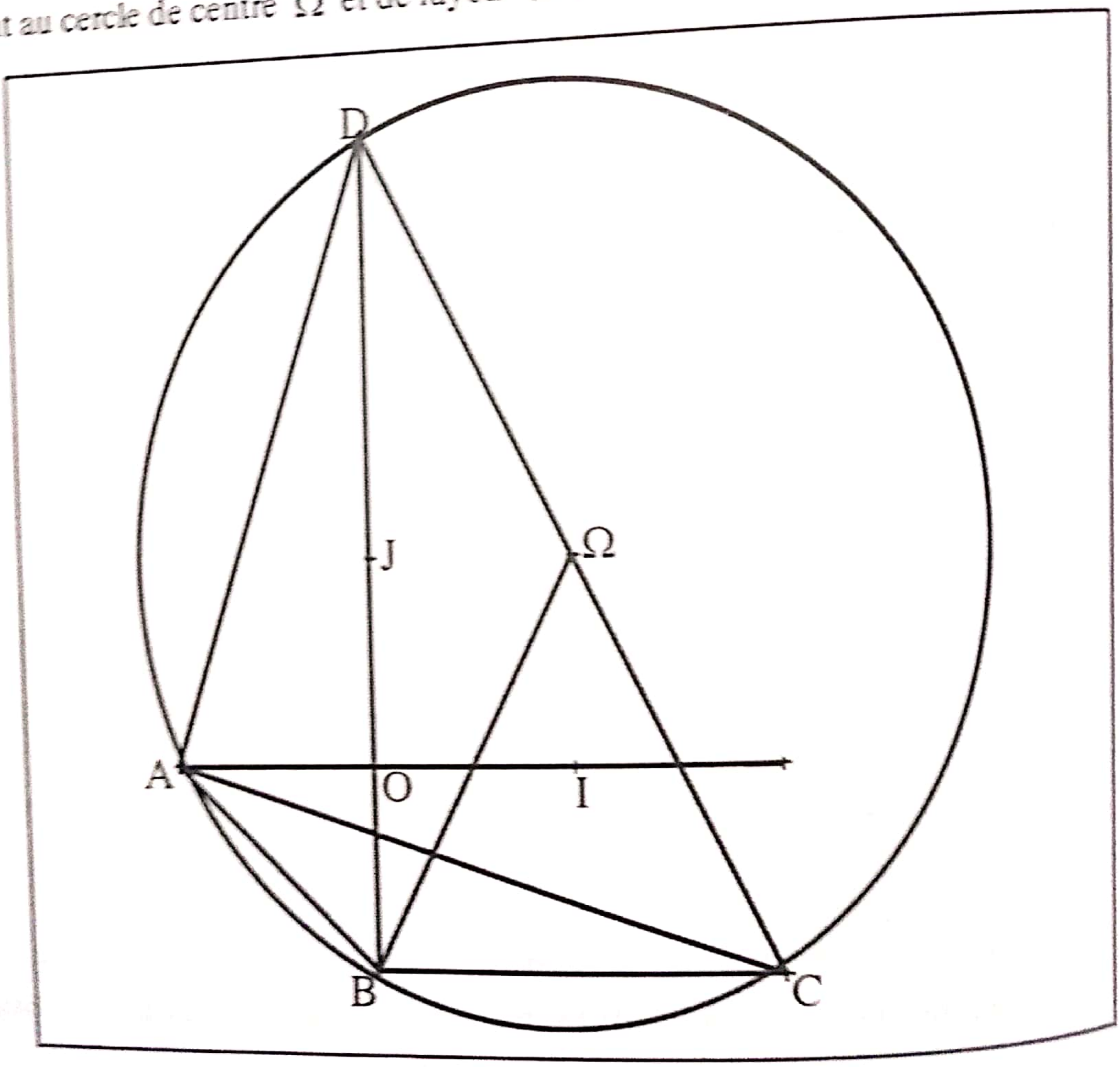
Par ailleurs, ACD est rectangle isocèle en A et Ω est le milieu de [DC] donc,

$\Omega A = \Omega C = \Omega D$

De plus, $B\Omega D$ est isocèle en Ω donc, $\Omega D = \Omega B$.

En définitive, $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D = \sqrt{5}$. Il en découle que les points A, B, C et D appartiennent au cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{5}$.

Figure



30

1. Pour $z \in \mathbb{C}, M(z) \in (\Gamma) \Leftrightarrow |(1+i)z+2-2i| = 4\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow |1+i|\left|z+\frac{2-2i}{1+i}\right| = 4\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\left|z+\frac{(2-2i)(1-i)}{2}\right| = 4\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \left|z+(1-i)^2\right| = 4$

$\Leftrightarrow |z-2i| = 4.$

2. Pour $z \in \mathbb{C}, M(z) \in (\Gamma) \Leftrightarrow |z-2i| = 4$

$\Leftrightarrow |z_M - z_F| = 4$

$\Leftrightarrow MF = 4$. Donc, (Γ) est le cercle de centre F et de rayon 4.

3. a) $M(a) \in (\Gamma)$ et $a \in IR \Leftrightarrow |a-2i| = 4$

$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+(-2)^2} = 4$

$\Leftrightarrow a^2+4 = 16$

$\Leftrightarrow a^2 = 12$

$\Leftrightarrow a = -2\sqrt{3}$ ou $a = 2\sqrt{3}$

Les points d'intersection de (Γ) et de l'axe réel sont les points d'affixes $-2\sqrt{3}$ et $2\sqrt{3}$.

b) $M(ib) \in (\Gamma)$ et $b \in IR \Leftrightarrow |ib-2i| = 4$

$\Leftrightarrow |i(b-2)|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(b-2)^2} = 4$

$\Leftrightarrow |b-2| = 4$

$\Leftrightarrow b-2 = 4$ ou $-b+2 = 4$

$\Leftrightarrow b = 6$ ou $b = -2.$

Donc, les points d'intersection de (Γ) et de l'axe imaginaire sont les points d'affixes $-2i$ et $6i$.

4. a) $\left|-2\sqrt{3}-4i+2i\right| = \left|-2\sqrt{3}-2i\right|$

$$= \sqrt{(-2\sqrt{3})^2+(-2)^2}$$

$$= \sqrt{16}$$

$$= 4$$

b) Voir figure.

c) Sous forme algébrique :

$$\frac{z_B - z_E}{z_A - z_E} = \frac{2\sqrt{3}-6i}{-2\sqrt{3}-6i}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-3i}{-\sqrt{3}-3i}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}-3i)(-\sqrt{3}+3i)}{12}$$

$$= \frac{-3+3i\sqrt{3}+3i\sqrt{3}+9}{12}$$

$$= \frac{6+6i\sqrt{3}}{12}$$

$$= \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Sous forme exponentielle :

$$\frac{z_B - z_E}{z_A - z_E} = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$$

$$= e^{i\frac{\pi}{3}}$$

5. $$\frac{z_B - z_E}{z_A - z_E} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

On en déduit que le triangle ABE est équilatéral de sens direct.

6. Les points A et E appartiennent à (Γ) donc, $AF = EF = 4$

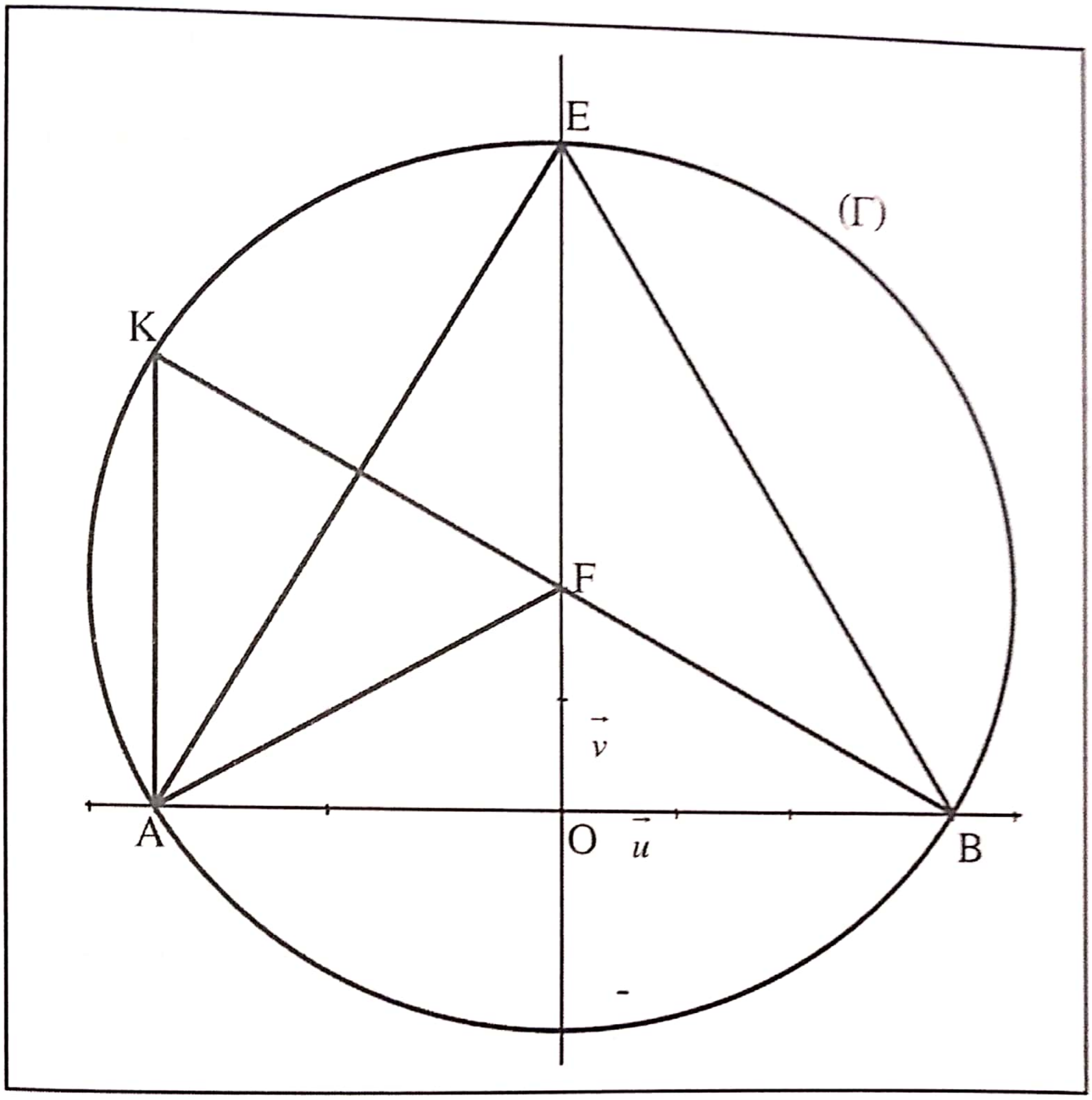
De plus, $AK = \left|-2\sqrt{3}-(-2\sqrt{3}+4i)\right| = |-4i| = 4$

$$EK = \left|6i-(-2\sqrt{3}+4i)\right| = \left|-2\sqrt{3}+2i\right| = \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4$$

En définitive, $AF = EF = EK = AK$

Par suite, le quadrilatère $KAFE$ est un losange.

Figure



SIMILITUDES DIRECTES DU PLAN

1

L'écriture complexe d'une similitude directe est de la forme $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Cette similitude directe admet pour rapport le module de a et pour angle un argument de a.

Le centre de la similitude directe est le point d'affixe $\frac{b}{1-a}$ si a est différent de 1.

Lorsque a est différent de 1, les éléments caractéristiques de la similitude directe sont : le centre, le rapport et l'angle.

a) On a la translation de vecteur $\vec{u}(3-i)$.

b) Cette similitude directe est une homothétie de rapport 2. Le centre Ω a pour affixe

$$z_\Omega = \frac{1+i}{1-2} = -1-i.$$

Donc, on a l'homothétie de centre $\Omega(-1-i)$ et de rapport 2.

c) Cette similitude directe est une homothétie de rapport -1. Le centre Ω a pour affixe

$z_\Omega = \frac{4+3i}{1-(-1)} = \frac{4+3i}{2} = 2+\frac{3}{2}i$. Donc, on a l'homothétie de centre $\Omega(2+\frac{3}{2}i)$ et de rapport -1.

On note que cette similitude directe est également la rotation de centre $\Omega(2+\frac{3}{2}i)$ et d'angle π.

d) $z' = (\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})z + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= e^{i\frac{\pi}{3}}z + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

La similitude directe est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$. Le centre Ω a pour affixe

$$z_\Omega = \frac{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})} = \frac{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1 .$$

Donc, on a la rotation de centre $\Omega(1)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

2

a) $|-1+i| = \sqrt{2}$. Le rapport est $\sqrt{2}$

Soit α un argument de $-1+i$: $\begin{cases} \cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

Donc, l'angle de la similitude est $\frac{3\pi}{4}$.

Enfin, l'affixe du centre est $\frac{1+2i}{1-(-1+i)}$.

On a,
$$\frac{1+2i}{1-(-1+i)} = \frac{1+2i}{2-i} = \frac{i(2-i)}{2-i} = i.$$

Il s'ensuit que le centre de la similitude est le point d'affixe i.

b) $\left|\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right|=\frac{1}{2}$. Le rapport est $\frac{1}{2}$

Soit α un argument de $\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}$: $\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{1}{2}\\ \sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

Donc, l'angle de la similitude est $\frac{\pi}{3}$.

Enfin, l'affixe du centre est $\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}}$

On a : $$\frac{\sqrt{3}+i}{1-\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}}=\frac{(\frac{3}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4})(\sqrt{3}+i)}{\frac{9}{16}+\frac{3}{16}}$$
$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}+2i.$$

Il s'ensuit que le centre de la similitude est le point d'affixe $\frac{2\sqrt{3}}{3}+2i$.

c) $\left|3\sqrt{2}+i\sqrt{6}\right|=2\sqrt{6}$. Le rapport est $2\sqrt{6}$

Soit α un argument de $3\sqrt{2}+i\sqrt{6}$: $\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\alpha=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

Donc, l'angle de la similitude est $\frac{\pi}{6}$

Enfin, l'affixe du centre est : $\dfrac{12\sqrt{3}-i(6-\sqrt{2})}{1-3\sqrt{2}-i\sqrt{6}}$

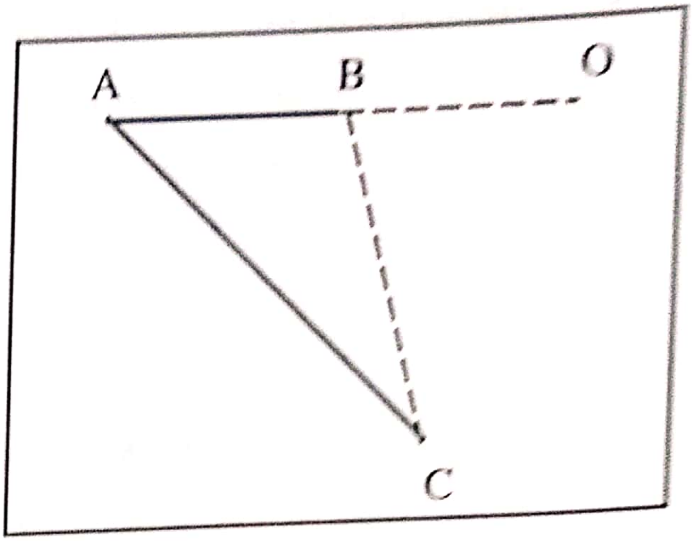
$$\frac{2\sqrt{3}-i(6-\sqrt{2})}{1-3\sqrt{2}-i\sqrt{6}}=\frac{(1-3\sqrt{2}-i\sqrt{6})(i\sqrt{2})}{1-3\sqrt{2}-i\sqrt{6}}$$

$$=i\sqrt{2}.$$

Il s'ensuit que le centre de la similitude est le point d'affixe $i\sqrt{2}$.

3

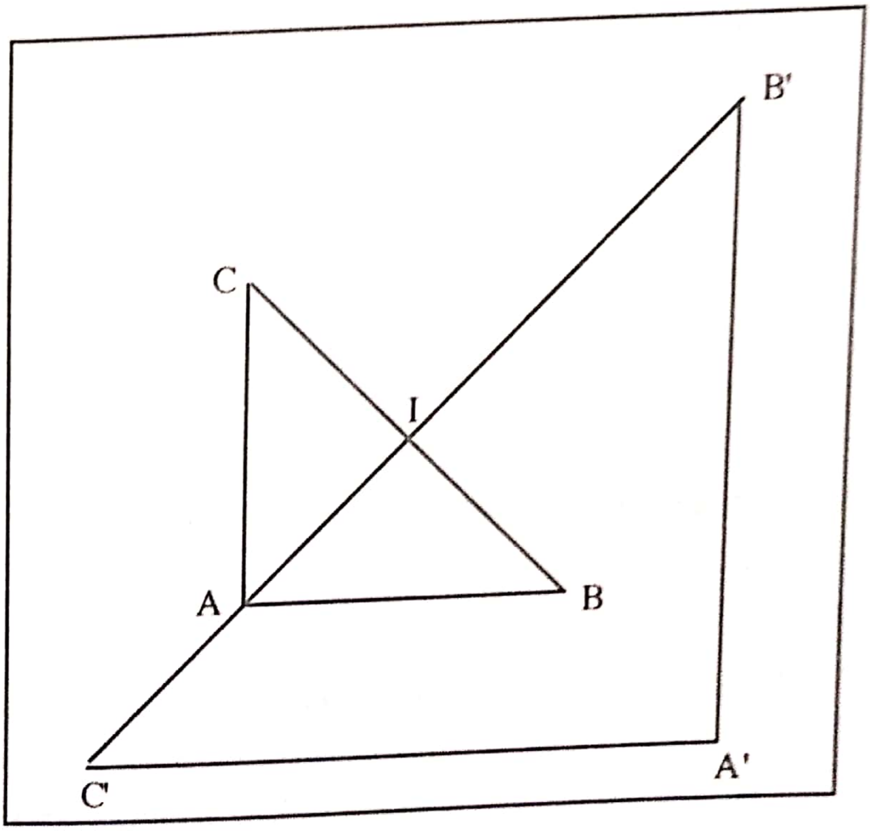
1. $\overrightarrow{AO} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\begin{cases} AC = AO \\ Mes(\widehat{\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AC}}) = -\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$



2. $r_A \circ h_A$ est la forme réduite de la similitude S. On a $r_A \circ h_A(B) = C$. On en déduit que l'image de B par S est le point C.

4

1. $\begin{cases} IA' = 2IA \\ Mes(\widehat{\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IA'}}) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$, $\begin{cases} IB' = 2IB \\ Mes(\widehat{\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IB'}}) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ et $\begin{cases} IC' = 2IC \\ Mes(\widehat{\overrightarrow{IC};\overrightarrow{IC'}}) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$.



G 3

2. Le triangle ABC est rectangle isocèle en A et de sens direct. De plus, triangle A'B'C' est l'image du triangle ABC par la similitude directe S. Puisque une similitude directe conserve les distances et les angles orientés, alors le triangle A'B'C' est rectangle isocèle en A' et de sens direct.

5

1. (C) est le cercle de centre A et de rayon 4. Donc, (C') est le cercle de centre S(A) et de rayon 3×4.Par suite, (C') est le cercle de centre B et de rayon 12.

2. (C') est l'ensemble des points M du plan tels que : BM = 12. Or BD = 12 donc, D appartient au cercle (C').

6

1. a) $z_B = (1-i)\left(-\frac{1}{2}i\right) + 2 + i$

$z_B = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$

Donc, l'affixe de B est $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$.

b) $z_C = (-2-2i)(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i) + 7 - 4i$

$z_C = 5 - 8i$

Donc, l'affixe de C est $5-8i$.

2. $z_I = \frac{2+i}{1-(1-i)} = 1-2i.$

3. a) $z_I' = (-2-2i)(1-2i)+7-4$

$= -2+4i-2i-4+7-4i$

$= 1-2i.$

Par conséquent, le point I est invariant par S_2.

Scanné avec CamScanner

b) S_2 n'est pas une translation donc, S_2 admet un centre qui est le point invariant par S_2.
Par conséquent, le point I est le centre de la similitude S_2.

4. a) L'angle de S_1 est un argument de $1-i$. Donc, l'angle de S_1 est $-\frac{\pi}{4}$.

L'angle de S_2 est argument de $-2-2i$. Donc, l'angle de S_2 est $-\frac{3\pi}{4}$.

b) L'angle de la similitude $S_2 \circ S_1$ est $-\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}$ c'est à dire π.

5. $$\frac{Z_C - Z_I}{Z_A - Z_I} = \frac{5 - 8i - 1 + 2i}{-\frac{1}{2}i - 1 + 2i} = \frac{2(4-6i)}{-2+3i} = -4.$$

On en déduit que les points A, I et C sont alignés.

Autre manière de répondre à la question: $S_2 \circ S_1$ est la similitude de centre I, d'angle π.

Donc, $S_2 \circ S_1$ est une homothétie de centre I. De plus, $S_2 \circ S_1(A) = C$.

Il s'ensuit que, les points A, I et C sont alignés.

7

1. L'angle de la similitude S est un argument de 2i.

Donc, $\frac{\pi}{2}$ est l'angle de la similitude S.

2. a) A et B appartiennent à la droite (AB) d'où A' et B' appartiennent à (Δ) car (Δ) est l'image de (AB) par S.

$\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$, donc les droites (AB) et (Δ) sont perpendiculaires.

b) On a : A'$(7+3i)$ et B'$(5-i)$.

c) La droite (Δ) passe par les points A'$(7;3)$ et B'$(5;-1)$.

Soit $M(x;y)$ un point de (Δ). On a $\overrightarrow{A'M}(x-7; y-3)$ et $\overrightarrow{A'B'}(-2;-4)$

$M \in (\Delta) \Leftrightarrow (x-7)(-4) - (y-3)(-2) = 0$

$\Leftrightarrow -4x + 2y + 28 - 6 = 0$

$\Leftrightarrow -2x + y + 11 = 0$

Donc, $-2x + y + 11 = 0$ est une équation cartésienne de (Δ).

3. **a)** On a $\overrightarrow{AB}(-2 + i)$ et $\overrightarrow{AC}(-4 + 2i)$. D'où $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$.

Il en résulte que les points A, B et C sont alignés.

b) Les points A, B et C sont alignés.

La similitude conserve l'alignement des points d'où A', B' et C' sont alignés.

Puisque A' et B' appartiennent à (Δ), donc C'appartient à (Δ).

8

1. **a)** Le rapport de S est le module de $1 + i$.

On a $|1+i| = \sqrt{2}$.

L'angle de S est un argument de $1+i$.

Soit α un argument de $1 + i$: $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Donc, l'angle de S est $\dfrac{\pi}{4}$.

Le centre de S est le point d'affixe $\dfrac{2-4i}{1-(1+i)}$.

On a : $\dfrac{2-4i}{1-(1+i)} = 4 + 2i$

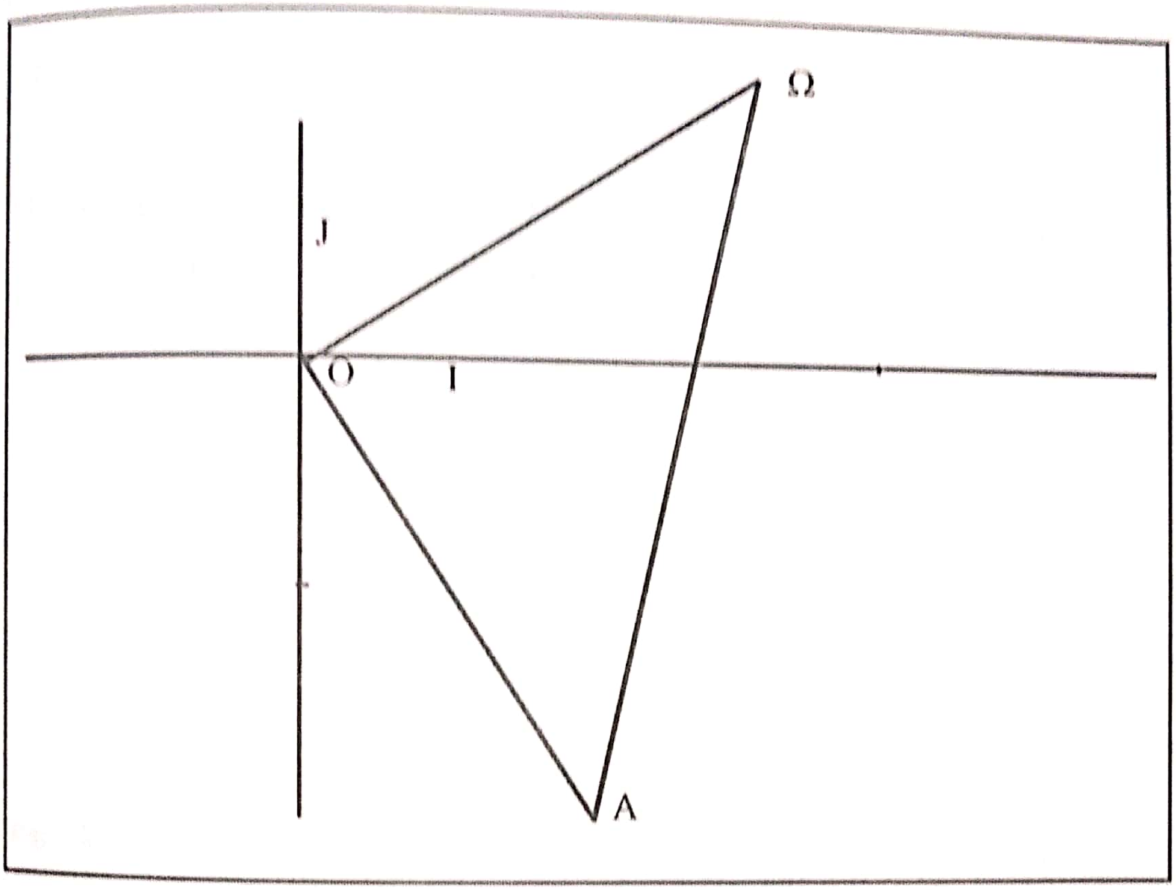
Par suite, S est la similitude directe de centre d'affixe $4+2i$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$

b) $S = R \circ H$ où H est l'homothétie de centre d'affixe $4+2i$ et de rapport $\sqrt{2}$ et de la rotation de centre d'affixe $4+2i$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

2. a) $z_A = (1+i)0 + 2 - 4i = 2 - 4i$

Donc, l'image du point O par S est le point A $(2-4i)$.

b) Voir figure



3. $O\Omega = OA$ et $OA^2 + O\Omega^2 = A\Omega^2$.

Donc, le triangle ΩOA est rectangle isocèle en O.

9

L'écriture complexe d'une similitude directe est de la forme $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$

a) $S(A) = B$ et $S(C) = D \Leftrightarrow \begin{cases} (1+i)a + b = -4 \\ (-1+i)a + b = 3 - i \end{cases}$

On a : $(1+i)a + b - (-1+i)a - b = -4 - (3 - i)$

Par suite, $2a = -7 + i$

$$a = -\frac{7}{2} + \frac{1}{2}i \quad \text{avec } -\frac{7}{2} + \frac{1}{2}i \in \mathbb{C}^*.$$

Par ailleurs, $\begin{cases} (1+i)a + b = -4 \\ (-1+i)a + b = 3 - i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1+i)(-1+i)a + (-1+i)b = -4(-1+i) \\ (-1+i)(1+i)a + (1+i)b = (1+i)(3-i) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a + (-1+i)b = 4 - 4i \\ -2a + (1+i)b = 4 + 2i \end{cases}$$

Donc, $(-1+i)b - (1+i)b = 4 - 4i - (4 + 2i)$

$$-2b = -6i$$

$$b = 3i$$

En définitive, l'écriture complexe de S est $z' = (-\frac{7}{2} + \frac{1}{2}i)z + 3i.$

b) $z' = (-\frac{9}{13} + \frac{7}{13}i)z + \frac{3}{13} + \frac{15}{13}i.$

10

1. Le rapport de S est $\frac{BO}{BA}$.

$$\frac{BO}{BA} = \frac{|-1+3i|}{|-1+3i-5-i|} = \frac{1}{2}$$

Donc, le module de S est $\frac{1}{2}$.

2. (C') est le cercle de rayon $\frac{1}{2}$OA dont le centre est l'image du point A par S

O est l'image de A par S et OA = $|z_A| = \sqrt{26}$, donc $\frac{1}{2}$OA $= \frac{\sqrt{26}}{2}$.

Par suite, (C') est le cercle de centre O et de rayon $\frac{\sqrt{26}}{2}$.

3. L'écriture complexe d'une similitude directe est de la forme $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$

$S(A) = O$ et $S(B) = B \Leftrightarrow \begin{cases} a(5+i) + b = 0 \\ a(-1+3i) + b = -1+3i \end{cases}$

Par suite, $a = \frac{3}{10} - \frac{2}{5}i$ et $b = -\frac{19}{10} + \frac{17}{10}i$.

Par conséquent, l'écriture complexe de S est $z' = \left(\frac{3}{10} - \frac{2}{5}i\right)z - \frac{19}{10} + \frac{17}{10}i$.

4. O appartient au cercle (C) donc son image par S appartient au cercle (C').

$$z_0' = \left(\frac{3}{10} - \frac{2}{5}i\right)0 - \frac{19}{10} + \frac{17}{10}i$$

$$= -\frac{19}{10} + \frac{17}{10}i.$$

Donc, le point $E\left(-\frac{19}{10} + \frac{17}{10}i\right)$ appartient au cercle (C').

Autre manière de répondre à la question.

$$OE = |z_E| = \sqrt{\left(-\frac{19}{10}\right)^2 + \left(\frac{17}{10}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{650}{100}}$$

$$= \frac{\sqrt{26}}{2}.$$

On en déduit que le point E appartient au cercle (C').

11

1. Voir figure.

2. Le rapport de S est 3.

3. L'angle de S est $\frac{\pi}{2}$.

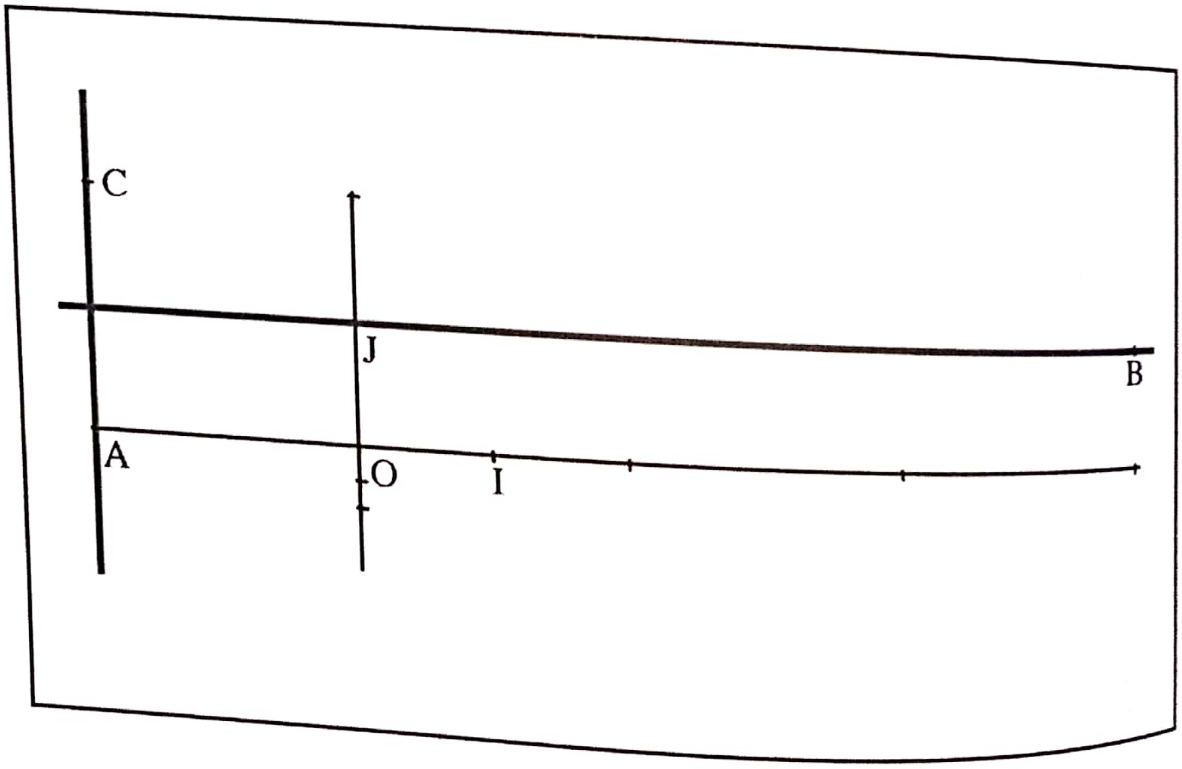
4. $\begin{cases} S(A) = J \\ S(C) = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + b = i \\ (-2+2i)a + b = 6 + i \end{cases}$.

Il en découle que, $z' = -3iz - 5i$.

5. (Δ) est la droite (AC). De ce fait (Δ') est la droite (BJ)

Donc, une équation de (Δ') est $y = 1$.

Construction des points A, B et C



12

1. $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{z_C + i}{\sqrt{3} + i} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc, $\left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = |e^{i\frac{\pi}{3}}| = 1$

Par suite, $\dfrac{AC}{AB} = 1$

Et, $AC = AB$

Par ailleurs, $mes(\widehat{\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}}) = \arg\left(\dfrac{z_C + i}{\sqrt{3} + i}\right) + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

$$= \arg\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

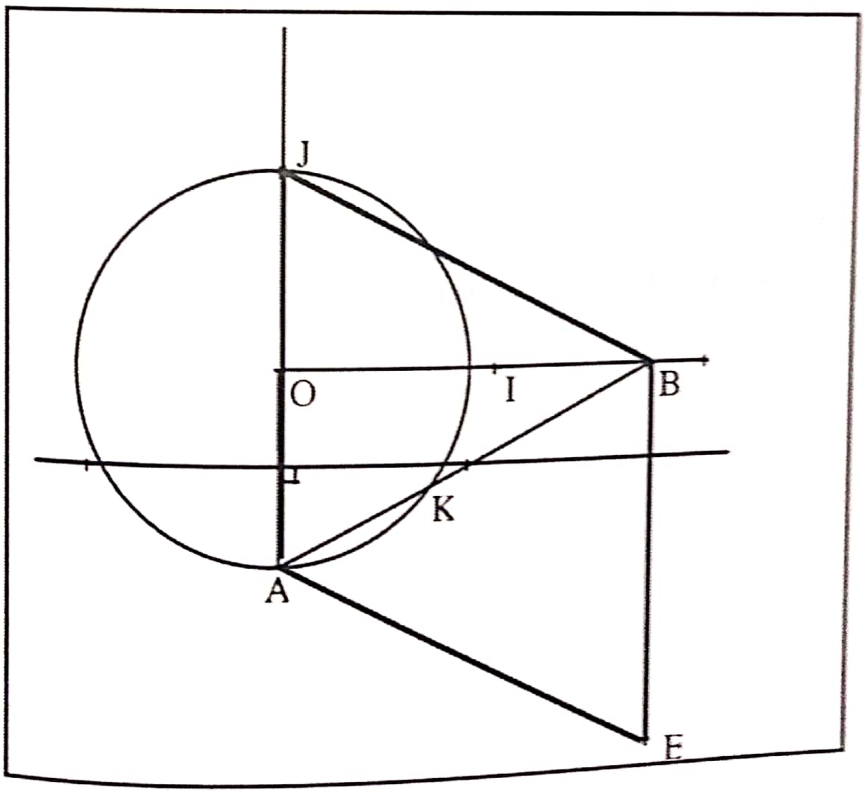
$$= \frac{\pi}{3} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

On a $AC = AB$ et $mes(\widehat{\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}}) = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$.

Donc, le triangle ABC est équilatéral de sens direct.

2. $z_K = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$ donc $z_K = e^{-i\frac{\pi}{6}}$

3. Voir figure



4. On a $\dfrac{z_C + i}{\sqrt{3} + i} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$z_C + i = (\sqrt{3} + i)(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i)$$

$$z_C + i = 2i$$

$$z_C = i$$

Par suite, $z_C = z_J$

5. a) $z_A{}' = (-1 - i\sqrt{3})(-i) + \sqrt{3} - 2i$

$$= -\sqrt{3} + i + \sqrt{3} - 2i$$

$$= -i$$

Le point A est invariant par S

On en déduit que A est le centre de la similitude S car S n'est pas une translation.

b) $|-1 - i\sqrt{3}| = 2$ et $\arg(-1 - i\sqrt{3}) = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$: $k \in \mathbb{Z}$.

Donc, le rapport de S est 2 et l'angle de S est $-\dfrac{2\pi}{3}$.

6. $z_E = (-1 - i\sqrt{3})0 + \sqrt{3} - 2i$

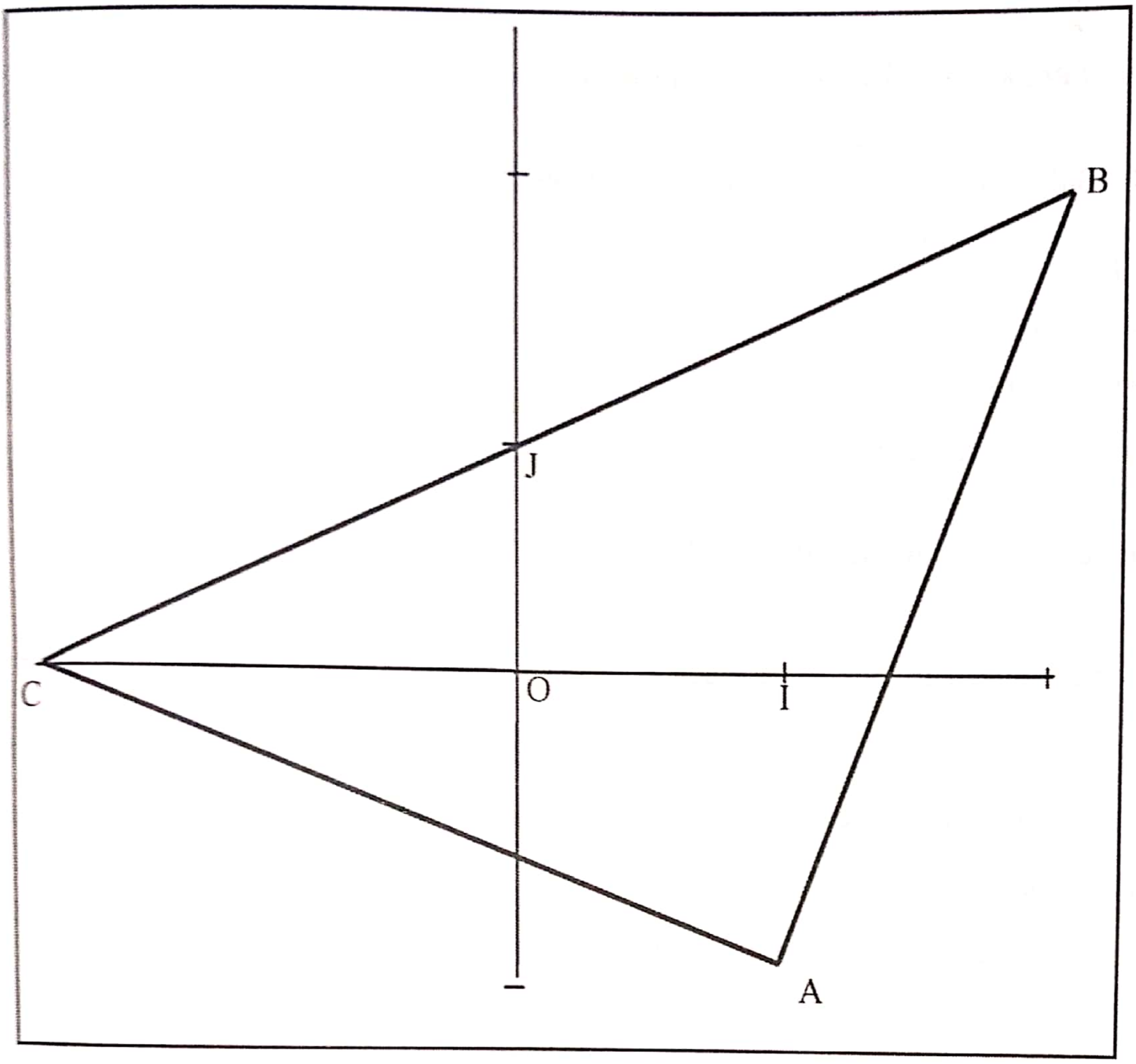
$$= \sqrt{3} - 2i.$$

7. On a $AE = EB = BC = AC = 2$

Par suite, le quadrilatère AEBC est un losange.

13

1. Figure.



2. $$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-2-1+i}{2+2i-1+i}$$

$$= \frac{-3+i}{1+3i}$$

$$= i.$$

3. Le triangle ABC est rectangle isocèle en A et de sens direct.

4. $\dfrac{z_B + z_C}{2} = \dfrac{2 + 2i - 2}{2}$

$\dfrac{z_B + z_C}{2} = i$

Par suite, le point J est le milieu du segment [BC].

5. Le rapport de S est $\dfrac{CB}{AB}$ et l'angle de S est $\widehat{(\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BC})}$

$\dfrac{CB}{AB} = \dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{10}} = \sqrt{2}$

Donc le rapport de S est $\sqrt{2}$

Par ailleurs, le triangle ABC est isocèle (direct) rectangle en A.

Donc $-\dfrac{\pi}{4}$ est une mesure de $\widehat{(\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BC})}$

Il en découle que l'angle de S est $-\dfrac{\pi}{4}$.

6. L'écriture complexe de S est $z' = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}z + b$; où $b \in \mathbb{C}$

B est le centre de la similitude S

Donc, $2 + 2i = (1 - i)(2 + 2i) + b$

$$b = -2 + 2i$$

Il s'ensuit que l'écriture complexe de S est $z' = (1 - i)z - 2 + 2i$.

PROBABILITE

1

a) Un nombre de cinq chiffres ne commence pas par 0.

En faisant allusion à la notion de 5 – uplets, on obtient 9×10^4 nombres

b) On obtient $9\times 9\times 8\times 7\times 6$ c'est-à-dire $9\times A_9^4$ nombres.

c) Un multiple de 2 se termine par l'un des chiffres suivants : 0, 2, 4, 6, 8.

Le chiffre des unités est choisi entre cinq chiffres.

Si ces nombres se terminent par 0, on en dénombre $9\times 8\times 7\times 6$.

Si ces nombres ne se terminent pas par 0, on en dénombre $4\times 8\times 8\times 7\times 6$.

En somme, on obtient 13794 nombres.

d) Ceci revient à dénombrer des nombres de trois chiffres.

On obtient $1\times 8\times 7\times 6\times 1$ nombres, soit 336 nombres

2

1. Un tirage est identifié à un sous ensemble de 3 éléments dans un ensemble à 32 éléments.

Donc, le nombre total de tirages possibles est $C_{32}^3 = 4960$ tirages possibles.

2. Le trèfle est tiré parmi 8 trèfles et les deux autres cartes sont tirées parmi 24 cartes

Le nombre total de tirages comportant un trèfle est $C_8^1 \times C_{24}^2 = 2208$

Donc, la probabilité de tirer un trèfle est $\frac{2208}{4960} = \frac{69}{155}$.

3

1. Le tirage successif sans remise induit un arrangement de 2 éléments dans un ensemble à 10 éléments.

De ce fait, le nombre de tirages possibles est $A_{10}^{2} = 90$

2. a) L'univers Ω de l'expérience est l'ensemble des tirages successifs de deux boules parmi 10 boules. Donc Card.$(\Omega) = A_{10}^{2} = 90$

Soit l'événement A : « Tirer deux boules de même couleur » qui correspond à l'événement « Tirer deux boules noires, deux boules rouges ou deux boules vertes ».

Donc, Card.$(A) = A_{2}^{2} + A_{3}^{2} + A_{5}^{2} = 2 + 6 + 20$, soit 28 tirages possibles.

Par suite, la probabilité de tirer deux boules de même couleur est $P(A) = \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{28}{90} = \dfrac{14}{45}$

b) Soit l'événement B : « tirer une boule verte ».

Dans un tirage, on a 5 possibilités pour la boule verte et 5 possibilités pour l'autre boule.

Or la boule verte peut être tirée en première ou en deuxième position.

Donc, Card$B = 5\times5\times2$, c'est-à-dire 50 possibilités de tirages.

Il s'ensuit que, la probabilité qu'on tire une boule verte est $P(B) = \dfrac{50}{90} = \dfrac{5}{9}$.

3. Soit l'événement C : « La boule verte est tirée au deuxième tirage »

On a : 5 possibilités de tirages pour la boule verte et 5 possibilités de tirages pour l'autre boule. Donc, Card$C = 5\times5 = 25$.

Par suite, $P(C) = \dfrac{5}{18}$

4. On calcul ici la probabilité qu'une boule verte est tirée sachant qu'elle a occupé la deuxième position dans le tirage. Cette probabilité est notée $P_B(C) = \frac{P(B\cap C)}{P(B)}$.

Or $B\cap C = C$ car la réalisation de C entraîne celle de B.

Donc, $P_B(C) = \frac{\frac{5}{18}}{\frac{5}{9}} = \frac{5}{18} \times \frac{9}{5}$, c'est à dire $P_B(C) = \frac{1}{2}$.

4

On désigne par : A l'événement « la machine provient de la salle A »

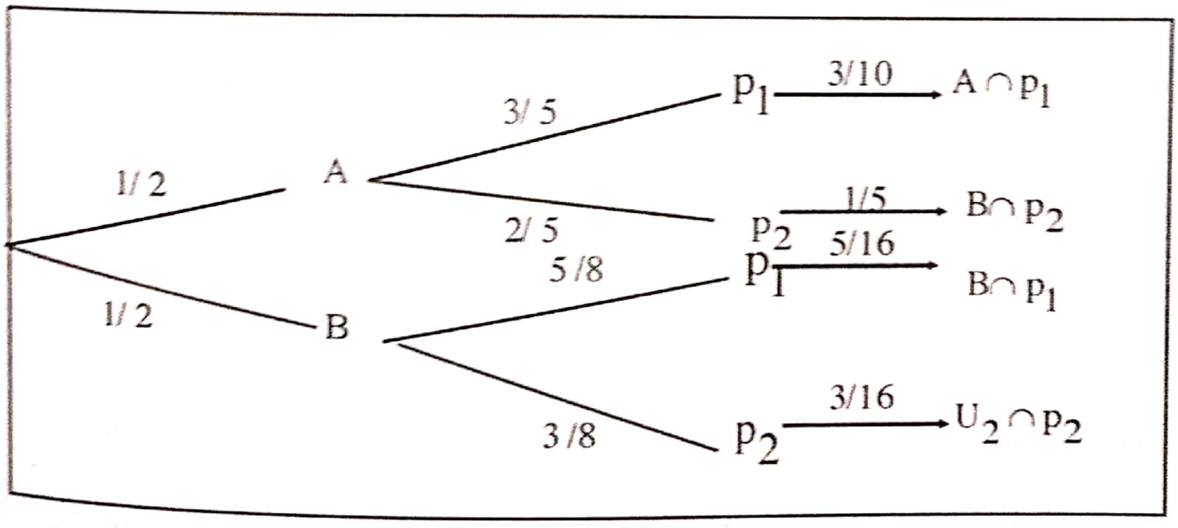
B l'événement « la machine provient de la salle B »

p_1 l'événement « la machine utilisée est un p_1 »

p_2 l'événement « la machine utilisée est un p_2 ».

1. Le Pentium p_1 provient de la salle A. Donc $P(p_1/A) = \frac{3}{5}$.

2. Dressons l'arbre de probabilité



La probabilité que la machine utilisée soit un p_1 est :

$P(p_1) = P(p_1\cap A) + P(p_1\cap B)$

$P(P_1) = P(A) \times P(P_1/A) + P(B) \times P(P_1/B)$

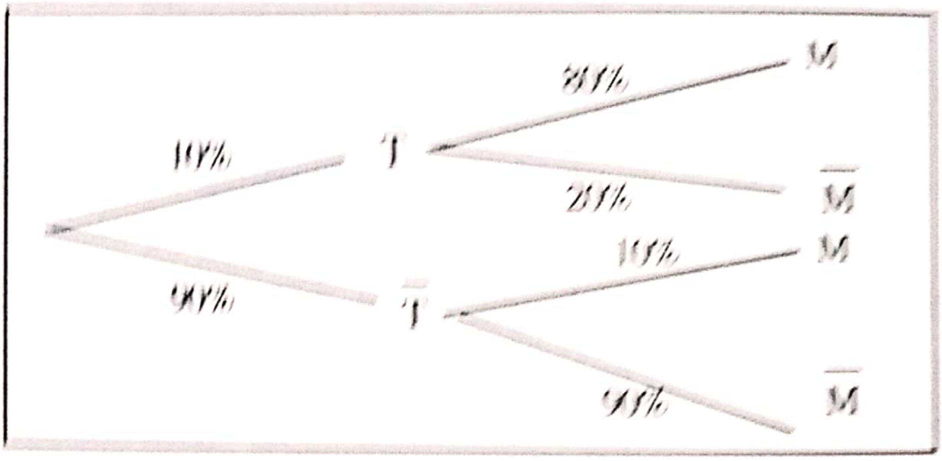
$P(P_1) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{8}$ car $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$ et $P(P_1/A) = \frac{3}{5}$ et $P(P_1/B) = \frac{5}{8}$

$P(P_1) = \frac{3}{10} + \frac{5}{16}$

$= \frac{49}{80}$

5

1.



2. $P(T) = \frac{10}{100}$; $P(T) = 0,1$; $P(\overline{T}) = \frac{90}{100}$; $P(\overline{T}) = 0,9$; $P(M/T) = \frac{80}{100}$

Donc, $P(M/\overline{T}) = \frac{10}{100}$

$= 0,1.$

3. $P(M) = P(M \cap T) + P(M \cap \overline{T})$

$= = P(M/T) \times P(T) + P(M/\overline{T}) \times P(\overline{T})$

$= 0,8 \times 0,1 + 0,1 \times 0,9 \quad = 0,8 \times 0,1 + 0,9 \times 0,1$

$= 0,17.$

Scanné avec CamScanner

4. $P(\overline{T}/M) = \dfrac{P(M \cap \overline{T})}{P(M)}$

$= \dfrac{P(M/\overline{T}) \times P(\overline{T})}{P(M)}$

$= \dfrac{0{,}1 \times 0{,}9}{0{,}17}$

$= 0{,}53.$

6

1. a) $P(A) = \dfrac{\text{le nombre d'élèves du club théatre}}{\text{le nombre total d'élèves}}$

$= \dfrac{6}{30}$

$= \dfrac{1}{5}.$

b) $P(B) = \dfrac{\text{le nombre d'élèves du club photo}}{\text{le nombre total d'élèves}}$

$= \dfrac{10}{30}$

$= \dfrac{1}{3}.$

c) $P(A \cap B) = \dfrac{\text{le nombre d'élèves issus des deux clubs}}{\text{le nombre total d'élèves}}$

$= \dfrac{2}{30}$

$= \dfrac{1}{15}.$

Or $P(A) \times P(B) = \dfrac{1}{5} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{15}.$

Donc, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$

Il en résulte que les événements A et B sont indépendants.

2. **a)** $P(C) = P(A/B)$

$= P(A)$ car A et B sont indépendants.

$= \dfrac{1}{5}$

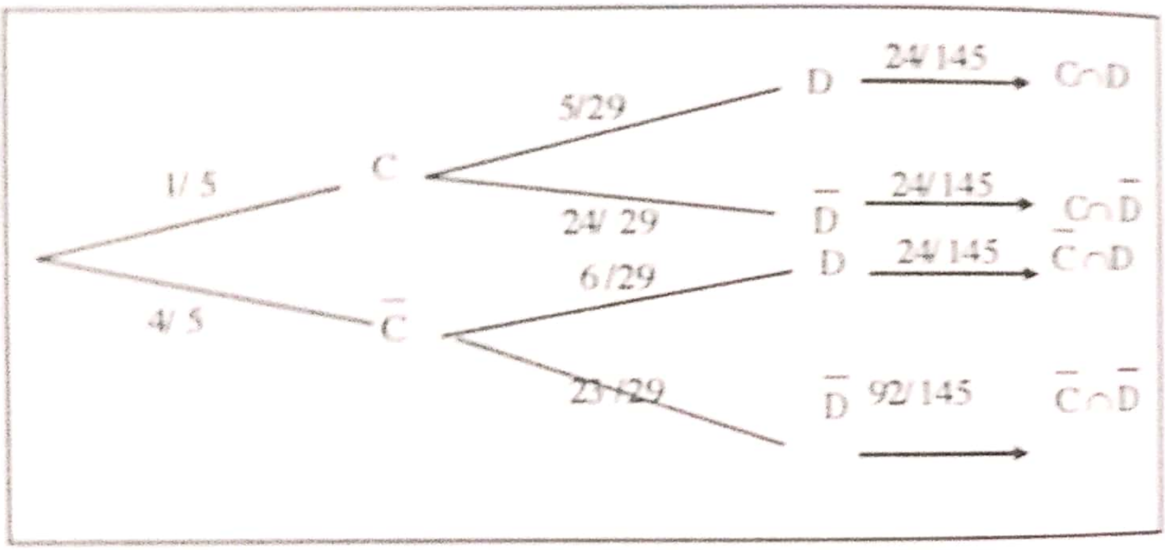
b) Déterminons $P(D/C)$: On a déjà choisi un élève (pour le rôle de photographe).

Donc le deuxième élève est choisi parmi 29 élèves dont 5 élèves du club théâtre.

$$P(D/C) = \frac{\text{le nombre d'élèves du club théâtre}}{\text{le nombre total d'élèves}}$$

$= \dfrac{5}{29}$

c)



3. Soit P(D) la probabilité que l'élève photographié soit du club théâtre

$P(D) = P(D \cap C) + P(D \cap \overline{C})$

$= \dfrac{1}{29} + \dfrac{24}{145}$

$P(D) = \dfrac{1}{5}$

7

Les boules sont indiscernables au toucher donc l'expérience est équiprobable. L'univers Ω est l'ensemble des tirages de 2 boules parmi 10.

Donc Card (Ω) = C_{10}^{2}.

Il s'ensuit que on a 45 tirages possibles.

1. Le nombre de possibilités de tirer 2 boules rouges est $C_5^2 = 10$.

La probabilité est $\frac{10}{45} = \frac{2}{9}$.

2. Tirer deux boules de même couleur revient à tirer soit 2 boules rouges, 2 boules vertes ou 2 boules blanches.

Le nombre de possibilités est $C_5^2 + C_3^2 + C_2^2$ c'est à dire 14.

Donc la probabilité de tirer deux boules de même couleur est $\frac{14}{45}$.

3. a) La probabilité de tirer deux boules rouges est $\frac{2}{9}$.

La probabilité de l'événement contraire est $\frac{7}{9}$.

Donc la probabilité de tirer deux boules rouges seulement au premier tirage est $\frac{2}{9} \times \left(\frac{7}{9}\right)^4$, c'est-à-dire 0,08.

b) Nous sommes dans un schéma de Bernoulli à 5 épreuves et lors d'une épreuve, la probabilité du succès (tirer 2 boules rouges) est $\frac{2}{9}$.

Par conséquent la probabilité recherchée est $C_5^2 \times (\frac{2}{9})^2 \times (\frac{7}{9})^3$, soit 0,23.

8

1. L'expérience consiste à choisir 12 assiettes parmi 18.
Donc, le cardinal de l'univers est C_{18}^{12}, c'est à dire 18564.

Parmi les 18 assiettes dont disposent les deux filles, seulement 12 appartiennent à Aya.

Donc la probabilité que les assiettes utilisées proviennent de celles de Aya est $\frac{1}{18564}$.

2. On relève que 3 assiettes de Marie sur 6 et 9 assiettes de Aya sur 12 ont été utilisées.

La probabilité que 3 assiettes de Marie aient été utilisées est $\frac{C_6^3 \times C_{12}^9}{C_{18}^{12}}$, soit $\frac{1100}{4641}$.

3. On signale que 12 assiettes sont considérées dans cette question parmi lesquelles 3 appartiennent à Marie. Le nombre de manières de choisir 2 assiettes parmi 12 est 66.
Il s'ensuit que, la probabilité que les assiettes cassées proviennent des assiettes de Marie est

$\frac{C_3^2}{C_{12}^2}$, soit $\frac{1}{22}$.

9

1. On se réfère au nombre de permutations d'un ensemble à 6 éléments.
Il en résulte 6 !, c'est à dire 720 manières possibles.

2. Le nombre de manières pour que chacune des filles soit servie en premier est 5!.
Puisque il y a 2 filles, on obtient 2×5 !, soit 240 manières pour que une fille soit servie en premier. Par suite, la probabilité qu'une fille soit servie en premier est $\frac{2\times 5!}{6!}$, soit $\frac{1}{3}$.

3. Le nombre de manières pour que les filles soient servies avant les garçons est $2 \times 4!$.

Donc la probabilité que les filles soient servies avant les garçons est $\frac{2 \times 4!}{6!}$, soit $\frac{1}{15}$.

4. a) La probabilité que les filles soient servies deux fois de suite avant les garçons est

$13 \times \left(\frac{1}{15}\right)^2 \times \left(\frac{14}{15}\right)^{12}$, c'est-à-dire 0,0252.

b) On a un schéma de Bernoulli à 14 épreuves.

Appelons succès l'événement « les filles reçoivent leurs repas avant les garçons ».

La probabilité du succès est $\frac{1}{15}$.

Par conséquent, la probabilité que les filles reçoivent 4 fois leurs repas avant les garçons est

$C_{14}^{4} \times \left(\frac{1}{15}\right)^4 \times \left(1-\frac{1}{15}\right)^{14-4}$, soit 0, 02.

c) Appelons n le nombre de services reçus par les élèves.

La probabilité que les filles ne soient pas servies avant les garçons pendant la durée du séjour

est $C_n^0 \times \left(\frac{1}{15}\right)^0 \times \left(\frac{14}{15}\right)^n$.

Par suite,

$$C_n^0 \times \left(\frac{1}{15}\right)^0 \times \left(\frac{14}{15}\right)^n \leq 0,4 \Leftrightarrow \left(\frac{14}{15}\right)^n \leq 0,4$$

$$\Leftrightarrow n \ln\left(\frac{14}{15}\right) \leq \ln(0,4)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,4)}{\ln(14)-\ln(15)}.$$

Or $\frac{\ln(0,4)}{\ln(14)-\ln(15)} = 13,28.$

Par conséquent, le nombre minimal de services est 14.

10

Lancer les trois pièces revient à réaliser trois expériences aléatoires indépendantes. Le lancer d'une pièce normale est une expérience équiprobable.

1. Les deux Face proviennent des pièces normales et la probabilité pour que Face paraisse sur une pièce normale est $\frac{1}{2}$.
Pile provient du dé truqué et la probabilité pour que Pile paraisse sur la pièce truquée est 1
Il s'ensuit que la probabilité d'obtenir deux fois Face et une Pile est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1$, soit $\frac{1}{4}$.

2. La probabilité d'obtenir trois fois Pile est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1$, c'est-à-dire $\frac{1}{4}$.

3. a) Face peut provenir d'aucune pièce ou Face peut provenir seulement d'une pièce normale ou des deux pièces normales à la fois.
Donc les valeurs de X sont : 0, 1 et 2

b) $(X = 0)$ = « avoir 0 fois Face »
= « avoir 3 fois Pile ».

En rapport avec la deuxième question, $P(X = 0) = \frac{1}{4}$.

$(X = 1)$ = « avoir 1 fois Face et 2 fois Pile »

Pile peut provenir d'une pièce normale ou d'une pièce anormale et Face provient seulement d'une pièce normale.

$$\text{Donc } P(X=1) = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1$$
$$= \frac{1}{2}.$$

$(X = 2)$ = « avoir deux fois Face et une fois Pile ».

En se référant à la première question, $P(X=2) = \frac{1}{4}$

La loi de probabilité est consignée dans le tableau ci-dessous :

x	0	1	2
P(X = x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

c) $E(X) = 0\times\frac{1}{4} + 1\times\frac{1}{4} + 2\times\frac{1}{4}$

$= 1.$

11

1. On note Ω l'univers de l'expérience :

$\text{Card}(\Omega) = 2000$ donc $P(S) = \dfrac{\text{Card}(S)}{\text{Card}(\Omega)}$

$P(S) = \dfrac{1200}{2000}$

$= 0,6$

On a : $M = \overline{S}$ donc $P(M) = 1 - P(S) = 0,4$

$P(A1) = \dfrac{\text{Card}(A1)}{\text{Card}(\Omega)}$

$= \dfrac{960}{2000}$

$= 0,48.$

2. **a)** Traduction de la phrase : $P(A1/S) = \dfrac{32}{100} = 0,32$

b) Calculons $P(S\cap A1)$

$P(S\cap A1) = P(A1/S)\times P(S)$

$= 0,32\times 0,6$

$= 0,192$

c) Déterminons Card$(M\cap A1)$

On a $\text{Card}(M\cap A1) = \text{Card}(A1) - \text{Card}(S\cap A1)$

Or $\text{Card}(S\cap A1) = \frac{32}{100}\times 1200$

$= 384$

Donc $\text{Card}(M\cap A1) = 960 - 384$

$= 576.$

Par suite $P(M\cap A1) = \frac{\text{Card}(M\cap A1)}{\text{Card}(\Omega)}$

$= \frac{576}{2000}$

$= 0{,}288$

3. a) X représente le coût total occasionné sur un an

Les valeurs prises par X sont :

Pour l'achat d'un modèle standard et le choix de l'abonnement 1 heure :

$20000 + 3400\times 12 = 60800$

Pour l'achat d'un modèle standard et le choix de l'abonnement 2h30 min :

$20000 + 8000\times 12 = 116000$

Pour l'achat d'un modèle miniature et le choix de l'abonnement 2h30 min :

$60000 + 3400\times 12 = 100800$

Pour l'achat d'un modèle standard et le choix de l'abonnement 2h30 min :

$60000 + 8000\times 12 = 156000$

Par conséquent les valeurs de X sont : 60 800 ; 116 000 ; 100 800 et 156 000.

b) $P(X = 60\,800) = P(S\cap A_1) = 0{,}192$

$P(X = 116\,000) = P(S\cap A_2)$

$= P(A_2/S)\times P(S)$

$= (1 - P(A_1/S)) \times P(S)$

$= (1 - 0,32) \times 0,6$

$= 0,408.$

$P(X = 100\,800) = P(M \cap A_1)$

$= 0,288.$

$P(X = (156\,000) = 1 - (0,192 + 0,408 + 0,288)$

$= 0,112.$

La loi de probabilité est consignée le tableau ci – dessous :

x_i	60 800	100 800	116 000	156 000
$P(X = x_i)$	0,192	0,288	0,408	0,112

c) $E(X) = 60800 \times 0,192 + 100800 \times 0,288 + 116000 \times 0,408 + 156000 \times 0,112$

$= 105\,504.$

Par conséquent, dans cette compagnie un client dépense en moyenne par an 105 504 pour l'achat d'un téléphone avec abonnement.

12

1. Chacun des 3 élèves peut recevoir le prix donc on a une expérience équiprobable. L'univers Ω est l'ensemble des distributions possibles sachant qu'un élève peut recevoir 0 à 5 livres.

   Donc $card(\Omega) = 3^5$.

2. a) Soit A l'événement « un seul élève reçoit exactement deux livres »

   Dans ce cas, un élève reçoit 0 livre, un autre 2 livres et le dernier 3 livres.

   On obtient 3! façons de faire ce choix.

Pour chaque choix, on a $1 \times C_5^2 \times C_3^3$ distributions possibles.

Par suite, card.(A) = $3! \times 1 \times C_5^2 \times C_3^3$.

Par conséquent, $P(A) = \dfrac{60}{243}$

$= \dfrac{20}{81}$.

b) Soit B l'événement « deux élèves reçoivent exactement deux livres chacun »
Dans ce cas un seul élève reçoit un seul livre.

On a 3 possibilités de choisir cet élève à qui on a C_5^1 possibilités de lui attribuer un livre

Donc, C_4^2 façons pour le second et C_2^2 façons pour le troisième.

D'où, card.(B) = $3 \times C_5^1 \times C_4^2 \times C_2^2$

Par suite $P(B) = \dfrac{90}{243} = \dfrac{10}{27}$.

3. Soit C l'événement « Une fille reçoit exactement deux livres .»

On a Card C = $C_5^2 \times 2^3$.

Donc, $P(C) = \dfrac{80}{243}$.

4. On a un schéma de Bernoulli à 4 épreuves et lors d'une épreuve, la probabilité du succès

(une fille gagne exactement deux livres) est $\dfrac{80}{243}$.

Donc la probabilité recherchée est $C_4^1 \times \dfrac{80}{243} \times \left(1 - \dfrac{80}{243}\right)^3$ c'est-à-dire 0,4.

5. **a)** Une fille peut recevoir 0 à 5 livres d'où les valeurs de X sont : 0, 1, 2, 3, 4, et 5.

(X = 0) = « la fille n'a pas de livre ».

Les livres sont donc repartis entre les garçons qui sont au nombre de 2.

Il s'ensuit que, $P(X = 0) = \frac{2^5}{243} = \frac{32}{243}$.

$(X = 1)$ = « la fille a exactement un livre ».

Card $(X = 1) = 5 \times 2^4$ donc $P(X = 1) = \frac{80}{243}$.

Pour $(X = 2)$, voir la question 1c) donc $P(X = 2) = \frac{80}{243}$.

$(X = 3)$ = « la fille a exactement trois livres ».

Card $(X = 3) = 2^2 \times C_5^3$ donc $P(X = 3) = \frac{40}{243}$.

$(X = 4)$ = « la fille a exactement quatre livres ».

Card $(X = 4) = 2 \times C_5^4$ donc $P(X = 4) = \frac{10}{243}$.

On a : $P(X = 5) = \frac{1}{243}$.

La loi de probabilité est consignée dans le tableau ci –dessous

x	0	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	$\frac{32}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{40}{243}$	$\frac{10}{243}$	$\frac{1}{243}$

b) On obtient $E(X) = \frac{405}{243} = \frac{5}{3}$.

13

1. Chacun des chiffres du code est choisi parmi 10 chiffres

On dénombre 10^4 c'est-à-dire 10000 cartes magnétiques possibles.

2. Le nombre de cartes magnétiques commence par 0 est 10^3 c'est-à-dire 1000

Donc, la probabilité que le code d'une carte magnétique commence par 0 est $\frac{1000}{10000} = \frac{1}{10}$

3. Le nombre de cartes magnétiques comportant les chiffres 2 ; 4 ; 5 ; 7 est $4!$, soit 24. D'où la probabilité que le code d'une carte magnétique soit composée des chiffres 2 ; 4 ; 5 ; 7 est

$$\frac{24}{10000} = \frac{3}{1250}$$

II

4. a) $P(E) = \frac{1}{24}$

b) $P(F) = \frac{23}{24} \times \frac{1}{23}$

$$= \frac{1}{24}.$$

5. G est réalisé si E ou F sont réalisés.

Sachant que les événement E et F sont disjoints, $P(G) = P(E) + P(F)$.

On obtient $P(G) = \ = \frac{1}{12}$

6. $P_G(E) = \frac{P(E \cap G)}{P(G)}$

Or $E \cap G = E$

Donc, $P_G(E) = \frac{P(E)}{P(G)}$

$$= \frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{12}} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}.$$

7. Si Monsieur KONE réussit le premier essai, X prend la valeur 30
Si Monsieur KONE échoue au premier essai et réussit au deuxième essai alors X prend la valeur 60 30 = 90
Si Monsieur KONE échoue aux deux essais alors X prend la valeur 60 +60 = 120
Les valeurs de X sont donc 30, 90 et 120.

a) $P(X = 30) = P(E) = \frac{1}{24}$

$P(X = 90) = P(F) = \frac{1}{24}$

$P(X = 120) = = \frac{23}{24} \times \frac{22}{23} = \frac{11}{12}$.

D'où le tableau suivant

x_i	30	90	120
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{11}{12}$

b) $E(X) = 30 \times \frac{1}{24} + 90 \times \frac{1}{24} + 120 \times \frac{22}{24}$

$E(X) = 115.$

14

1. Un choix de 4 chemises parmi 17 est identifié à une combinaison de 4 éléments dans un ensemble à 17 éléments. Il en résulte C_{17}^{4} choix possibles, soit 2380 choix possibles.

2. Le client achète uniquement des chemises en lin : On a 7 chemises en lin donc le nombre de choix possibles est C_7^4, c'est à dire 35 possibilités de choix.

3. **a)** Une chemise en lin et trois chemises en coton coûtent 36700 francs.

Deux chemises en lin et deux chemises en coton coûtent 33800 francs.

Trois chemises en lin et une chemise en coton coûtent 30900 francs.

Quatre chemises en lin coûtent 28000 francs.

Le client dispose de 34000 francs donc, il peut avoir au moins une chemise en lin dans son choix.Donc, $C_{10}^{2} \times C_7^2 + C_{10}^{3} \times C_7^1 + C_{10}^{4} \times C_7^0 = 1995$

b) Dépenser 33800 revient à acheter deux chemises en lin et deux chemises en coton.

Le nombre de choix se rapportant à cela et $C_{10}^{2} \times C_{7}^{2} = 945$.

La probabilité que le client dépense 33800 est $\frac{945}{1995}$ c'est à dire $\frac{63}{133}$.

c) Le nombre de choix comportant uniquement des chemises en lin est $C_{10}^{4} = 210$.

La probabilité que le client achète uniquement des chemises en lin est $\frac{210}{1995}$ c'est à dire $\frac{14}{133}$

4. **a)** Le client ne peut acheter qu'au moins 2 chemises en lin. Pour deux chemises en lin, il dépense 33800, pour trois chemises en lin, il dépense 30900 et pour quatre chemises en lin, il dépense 28000

Donc, le différentes valeurs de X sont : 28000, 30900 et 33800.

b)

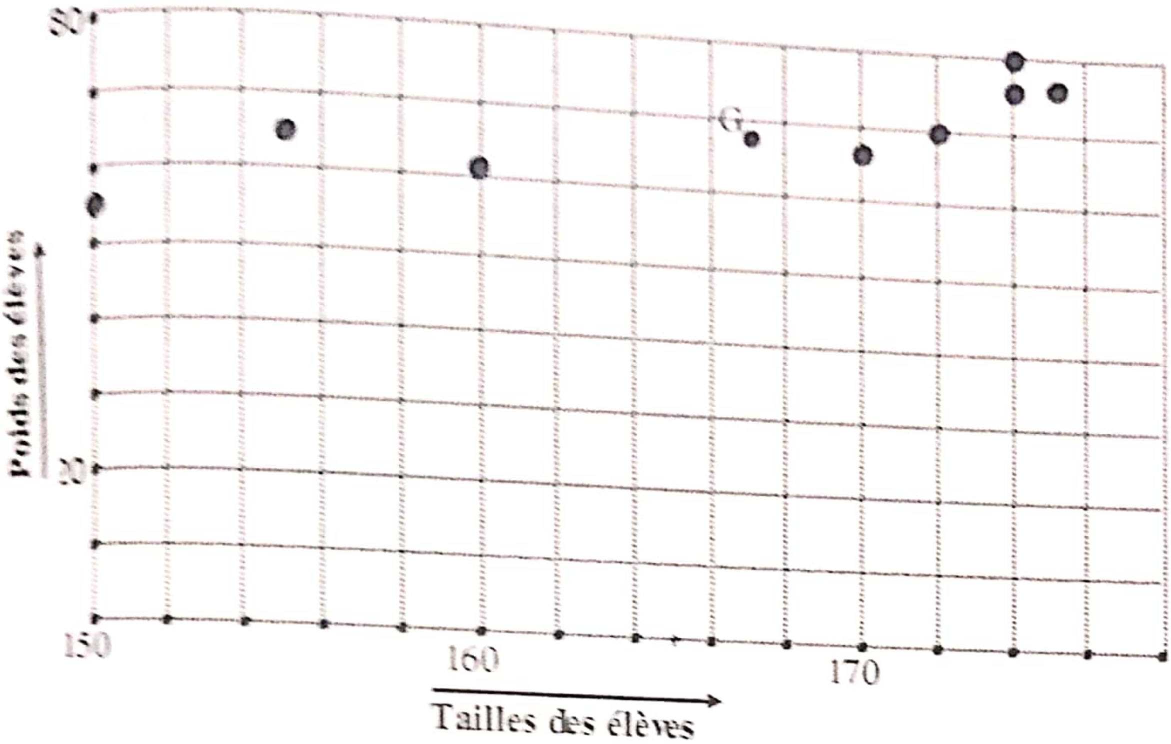
x	28000	30900	33800
$P(X = x)$	$\frac{14}{133}$	$\frac{56}{133}$	$\frac{63}{133}$

5. $E(X) = 28000 \times \frac{14}{133} + 30900 \times \frac{56}{133} + 33800 \times \frac{63}{133}$, $E(X) \approx 33493{,}23$.

STATISTIQUE

1

1. Le point moyen G est le point de coordonnées (166,25 ; 68,875).
2. Construction du nuage de points.



2

Tableau des calculs

x_i	y_i	x_i^2	$x_i\ y_i$
5	10	25	50
9,2	15	84,64	138
11	12	121	132
13	17	169	221
17,5	19,5	306,25	341,25
20	18	400	360
75,7	**91,5**	**1105,89**	**1242,25**
$\bar{x} = 12,61$	$\bar{y} = 15,25$	V(X)= 25,30	Cov(X;Y)=14,73

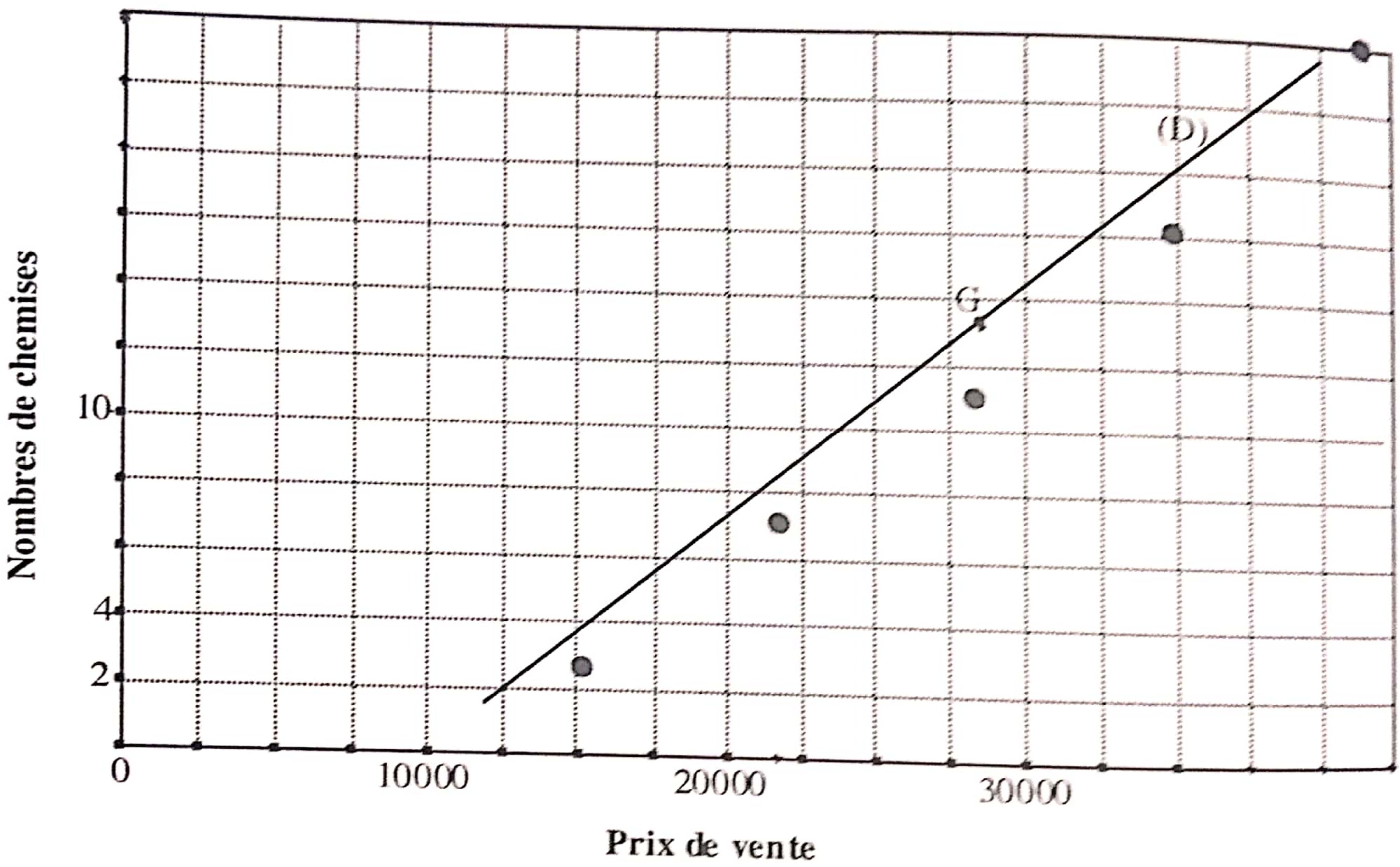
Une équation de la droite d'ajustement de y en x est $y = ax + b$.

On a : $a = \dfrac{Cov(x;y)}{V(x)} = 0{,}58$ et $b = \overline{y} - a\overline{x} = 7{,}93$.

Par suite, une équation de la droite de régression de y en x est : $y = 0{,}58x + 7{,}93$.

3

1. Nuage de points



2. $\overline{x} = 28250$ et $\overline{y} = 11{,}8$ donc $G(28250 ; 11{,}8)$

3. **Tableau des calculs**

x_i	y_i	x_i^2	$x_i\ y_i$
15000	3	225000000	45000
21750	7	473062500	152250
28000	11	784000000	308000
35000	16	1225000000	560000
41500	22	1722250000	913000
141250	**59**	**4429312500**	**1978250**
$\bar{x}$ **= 28250**	$\bar{y}$ **= 11,8**	**V(X) = 87800000**	**Cov(X ;Y) =62300**

Equation de la droite de régression de y en x : $y = 0{,}0007x - 7{,}97$.

4. Le prix que pourrait proposer le commerçant : 54250 francs.

4

Tableau des calculs

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i\ y_i$
10	150	100	22500	1500
15	175	225	30625	2625
18	325	324	105625	5850
24	400	576	160000	9600
33	510	1089	260100	16830
100	**1560**	**2314**	**578850**	**36405**
$\bar{x}$ **= 20**	$\bar{y}$ **= 312**	**V(X) =62,8**	**V(Y) =18426**	**Cov(X ;Y) =1041**

Il s'ensuit que le coefficient de corrélation $r = 0{,}96$.

Remarque : r est proche de 1

Donc, il y a une bonne corrélation entre le salaire globale proposé et le nombre d'ouvrier correspondant.

5

1. $\bar{x} = 10,02$ et $\bar{z} = 3$

Tableau de calculs

x_i	z_i	x_i^2	z_i^2	$x_i\ z_i$
7	1	49	1	7
8,2	2	67,24	4	16,4
10	3	100	9	30
11,9	4	141,61	16	47,6
13	5	169	25	65
50,1	**15**	**526,85**	**55**	**166**
$\bar{x} = 10,02$	$\bar{z} = 3$	**V(X)=4,96**	**V(z) = 2**	**Cov(z ;x) = 3,14**

Cov(z ;x) = 3,14 ; V(z) = 2.

On en déduit que la droite d'ajustement a pour équation $x = 1,57z + 5,31$.

Pour z = 9, x = 19,44.

Par conséquent le budget de la police s'accroîtra de 19,44 %.

2. $\bar{x} = 10,02$; $\bar{y} = 19,8$.

Tableau des calculs

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i\ y_i$
7	24	49	576	168
8,2	22	67,24	484	180,4
10	21	100	441	210
11,9	17	141,61	289	202,3
13	15	169	225	195
50,1	**99**	**526,85**	**2015**	**955,7**

On a : V(x) = 4,96 et Cov(x ;y) = – 7,25.

Une équation de la droite d'ajustement de y en x est $y = ax + b$ avec :

$$a = \frac{Cov(x;y)}{V(x)} = -1,46 \text{ et } b = \bar{y} - a\bar{x} = 34,42.$$

Il en découle que $y = -1,46x + 34,42$.

3. Le coefficient de corrélation $r = \frac{Cov(x;y)}{\sqrt{V(x)V(y)}}$.

On obtient : $V(x) = 4{,}96$; $V(y) = 10{,}96$ et $Cov(x;y) = -7{,}25$

Donc $r = -0{,}98$.

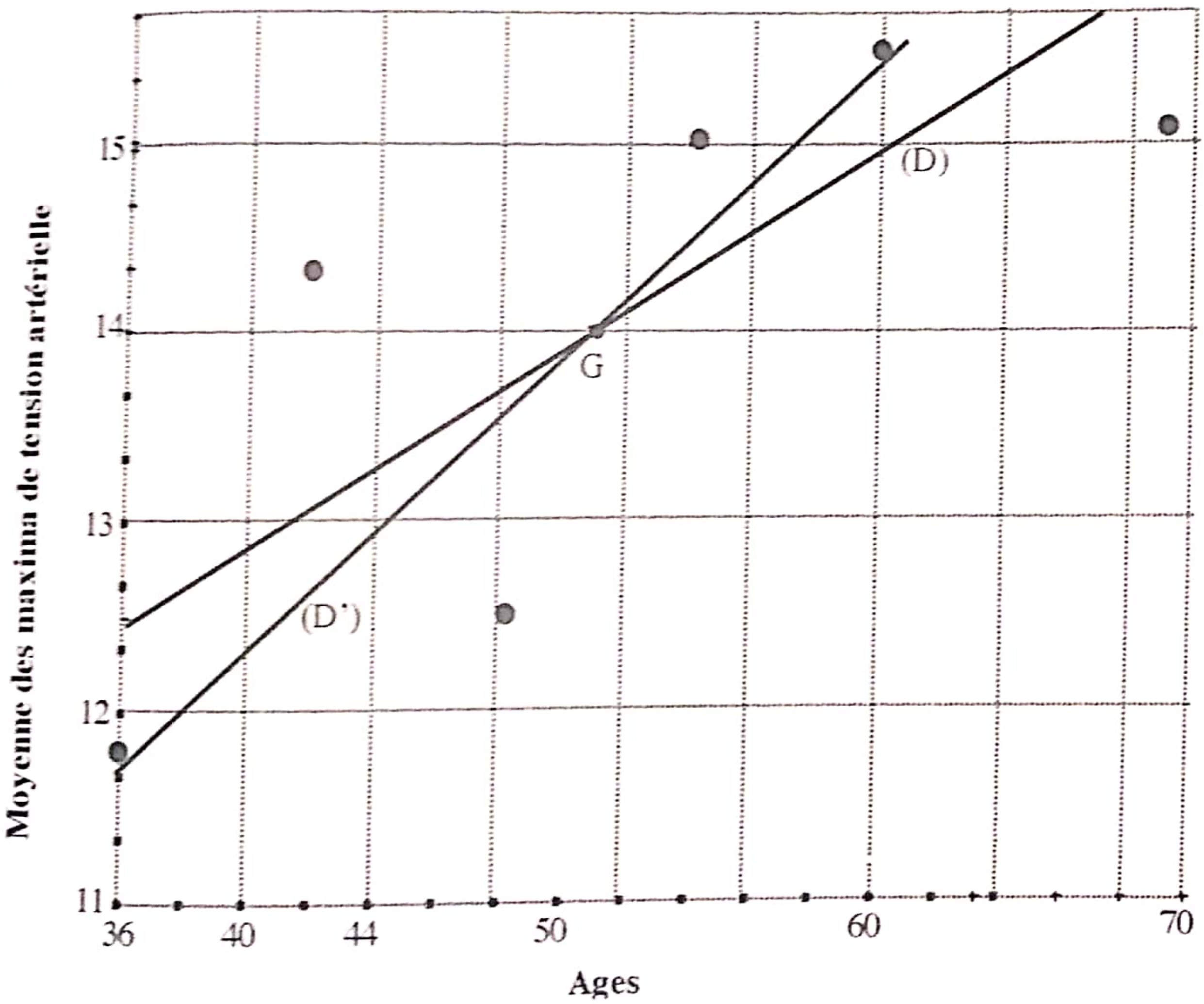
4. 2011 correspond à l'année 9, année pour laquelle le budget de la police s'accroîtra de 19,44% .

Donc $z = 9 \Rightarrow x = 19{,}44 \Rightarrow y = -1{,}46 \times 19{,}44 + 34{,}42$.

Par conséquent le pourcentage de la baisse de la criminalité pour l'année 2011 peut s'estimer à 6,03% .

6

1. Nuage de points



Scanné avec CamScanner

2.

Tableau des calculs

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i\ y_i$
36	11,8	1296	139,24	424,8
42	14,0	1764	196	588
48	12,6	2304	158,76	604,8
54	15,0	2916	225	810
60	15,5	3600	240,25	930
69	15,1	4761	228,01	1041,9
309	**84**	**16641**	**1187,26**	**4399,5**

Les moyennes et les variances des séries statistiques associées aux variables X et Y sont respectivement : $\bar{x} = 51,5$ et $V(x) = 121,25$; $\bar{y} = 14$ et $V(y) = 1,87$.

3. a) $Cov(x ; y) = 12,25$.

Une équation de la droite d'ajustement de y en x : $y = 0,1x + 8,85$.

b) On obtient : $x = 6,55y - 40,2$.

4. A partir de la droite de régression de y en x, pour $x = 70$, on obtient $y = 16,82$.
Ce qui est proche 16,2.Donc cette tension artérielle est normale.

PROBLEME n°1

Partie A

1. $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0}(x^2 + 4x - 16 + 32\ln x)$

On a $\lim\limits_{x\to 0}(\ln(x)) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}(x^2 + 4x - 16) = -16$ donc, $\lim\limits_{x\to}(x^2 + 4x - 16 + 32\ln x) = -\infty$.

Il en découle que $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$

Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}(x^2 + 4x - 16 + 32\ln x) = +\infty$.

2. Pour tout nombre réel x strictement positif, $g'(x) = 2x + 4 + \dfrac{32}{x}$

$$= \frac{2x^2+4x+32}{x}.$$

3. **a)** $\forall x \in]0; +\infty[$, $x > 0$ donc le signe de $g'(x)$ est celui de $2x^2 + 4x + 32$. Le discriminant de $2x^2 + 4x + 32$ est $\Delta = 16 - 4\times 2\times 32 = -240 < 0$. Le signe de $2x^2 + 4x + 32$ étant celui de 2, on a $2x^2 + 4x + 32 > 0$

Par suite, $g'(x)$ est strictement positif. Par conséquent, g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

b) Tableau de variation de g :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

4. a fonction g est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$. Donc g réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur $g(]0;+\infty[)$. On a $g(]0;+\infty[) =]\lim\limits_{x\to -\infty} g(x); \lim\limits_{x\to +\infty} g(x)[= \mathbb{R}$.

Puisque $0 \in \mathbb{R}$ alors l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $]0;+\infty[$.

Vérification : $f(1,32) \approx -0,093$ et $f(1,33) \approx 0,21$. On a $f(1,32)$ et $f(1,33)$ de signes contraires alors $1,32 < \alpha < 1,33$.

5. La fonction g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Donc, $x < \alpha \Rightarrow g(x) < g(\alpha)$

$\Rightarrow g(x) < 0$ car $g(\alpha)=0$.

Par ailleurs, $\alpha < x \Rightarrow g(0) < g(x)$

$\Rightarrow 0 < g(x)$ car $g(0)=0$.

Par conséquent, $\forall x \in]0;\alpha[, g(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha;+\infty[, g(x) > 0$.

Partie B

1. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(-\frac{1}{32}x + \frac{(x-2)\ln x}{x^2})$

$= \lim\limits_{x\to 0}(-\frac{1}{32}x + (x-2)\frac{1}{x^2}\ln x)$.

On a $\lim\limits_{x\to 0}(-\frac{1}{32}x) = 0$. De plus, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 0}\ln x = -\infty$ et

$\lim\limits_{x\to 0}(x-2)\frac{1}{x^2}\ln x) = +\infty$.

Donc, $\lim\limits_{x\to 0}(-\frac{1}{32}x + (x-2)\frac{1}{x^2}\ln x) = +\infty$

Par conséquent, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

Interprétation graphique : La droite d'équation $x=0$ est asymptote à (C_f).

Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}(-\frac{1}{32}x + \frac{(x-2)\ln x}{x^2})$

$= \lim\limits_{x\to +\infty}(-\frac{1}{32}x + \frac{x-2}{x} \times \frac{\ln x}{x})$.

On a $\lim\limits_{x\to +\infty}(-\frac{1}{32}x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x-2}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x-2}{x} \times \frac{\ln x}{x} = 0$.

Par suite, $\lim_{x \to +\infty} (-\frac{1}{32}x + \frac{x-2}{x} \times \frac{\ln x}{x}) = -\infty$.

Par conséquent, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

2. $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (-\frac{1}{32}x)) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x-2)\ln x}{x^2} = 0$.

On en déduit que la droite (D) d'équation $y = -\frac{1}{32}x$ est asymptote à (C_f) en $+\infty$.

3. $\forall x \in]0;+\infty[$, $f(x) - (-\frac{1}{32}x) = \frac{(x-2)\ln x}{x^2}$.

$\forall x \in]0;+\infty[$, $x > 0$ donc, le signe de $f(x) - (-\frac{1}{32}x)$ est celui de $(x-2)\ln x$.

On a : $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Par ailleurs, $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$; $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$ et $\ln x < 0 \Leftrightarrow x < 1$.

D'où le tableau de signe :

x	0		1		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\ln(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)-(-\frac{1}{32}x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Par conséquent : $\forall x \in]0;1[\cup]2;+\infty[$, $f(x) - (-\frac{1}{32}x) > 0$. Donc (C_f) est au dessus de (D) sur $]0;1[$ et sur $]2;+\infty[$.

D'autre part : $\forall x \in]1;2[$, $f(x) - (-\frac{1}{32}x) < 0$ donc, (C_f) est en dessous de (D) sur $]1;2[$.

Enfin, pour $x = 1$ ou $x = 2$, $f(x) - (-\frac{1}{32}x) = 0$ donc, (C_f) et (D) se coupent aux points d'abscisses 1 et 2.

4. $\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = -\frac{1}{32} + \frac{(\ln x + (x-2)\times\frac{1}{x})x^2 - (x-2)(2x)\ln x}{x^4}$

$$= -\frac{1}{32} + \frac{(x\ln x + x - 2 - 2(x-2)\ln x}{x^3}$$

$$= \frac{-x^3+32(x-2+(4-x)\ln x)}{32x^3}.$$

$$= \frac{-x^3+32x-2\times 32+32(4-x)\ln x)}{32x^3}$$

$$= \frac{(4-x)(x^2+4x-16)+32(4-x)\ln x)}{32x^3}$$

$$= \frac{(4-x)(x^2+4x-16+32\ln x)}{32x^3}$$

$$= \frac{(4-x)g(x)}{32x^3}.$$

5. $\forall x \in]0;+\infty[, 32x^3 > 0$ donc , le signe de $f'(x)$ est celui de $(4-x)g(x)$.

On a $4-x=0 \Leftrightarrow x=4$ et en s'aidant de la question 5 Partie A , on dresse le tableau suivant

x	0		α		4		$+\infty$
$4-x$	||	$+$	|	$+$	0	$-$	
$g(x)$	||	$-$	0	$+$	|	$+$	
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	

Il s'ensuit que : $\forall x \in]0;\alpha[\cup]4;+\infty[, f'(x) < 0$, $\forall x \in]\alpha;4[, f'(x) > 0$ et $f'(\alpha) = f'(4) = 0$.

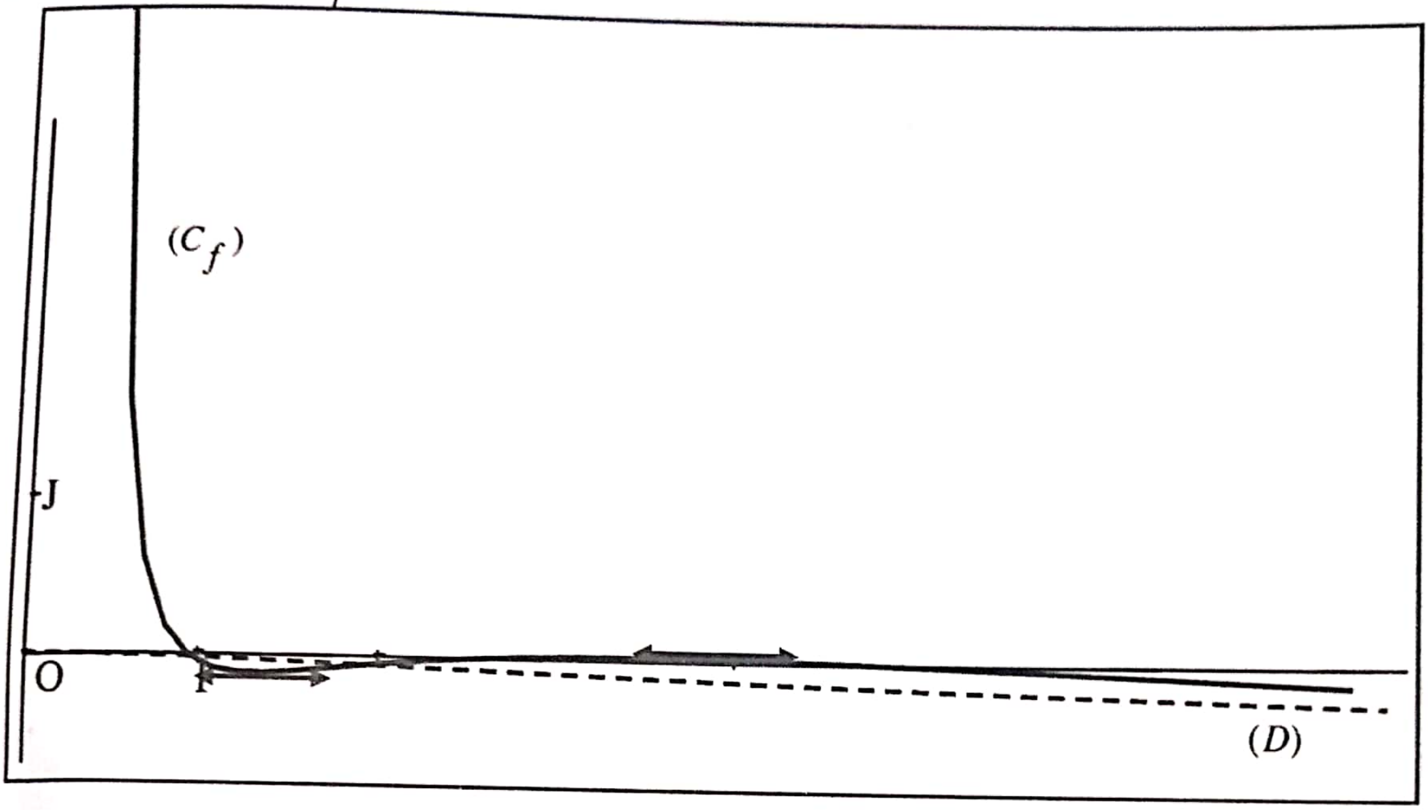
6. $\forall x \in]0;\alpha[\cup]4;+\infty[, f'(x) < 0$, donc la fonction f est strictement croissante sur $]0;\alpha[$ et sur $]4;+\infty[$. Et $\forall x \in]\alpha;4[$, $f'(x) > 0$ donc, la fonction f est strictement croissante sur $]\alpha;4[$.

Tableau de variation de f .

x	0		α		4		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$\frac{-1+2\ln 2}{8}$	$\searrow$	$-\infty$

$$f(4) = -\frac{1}{32}\times 4 + \frac{(4-2)\ln(4)}{4^2} = \frac{-1+2\ln 2}{8}$$

7. Tracé (D) et de (C_f) :



Partie C

1. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^2 \frac{1}{x} \ln x dx$

$= [\frac{1}{2}(\ln x)^2]_1^2$

$= \frac{1}{2}(\ln 2)^2 - \frac{1}{2}(\ln 1)^2$

$= \frac{1}{2}(\ln 2)^2.$

2. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}dx = \int_1^2 \frac{1}{x^2}\ln x dx$ Posons $u' = \frac{1}{x^2}$ et $v = \ln x$

Donc, $u = -\frac{1}{x}$ et $v' = \frac{1}{x}$

Par suite, $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\ln x dx = \left[-\frac{1}{x}\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 (-\frac{1}{x})\times\frac{1}{x}dx$

$$= -\frac{1}{2}\ln 2 + \int_1^2 \frac{1}{x^2}dx$$

$$= -\frac{1}{2}\ln 2 + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2$$

$$= -\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2} - (-1)$$

$= -\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}$. On en déduit que $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}dx = \frac{1-\ln 2}{2}$.

3. $\forall x \in]0;+\infty[$, $\frac{\ln x}{x} - 2\frac{\ln x}{x^2} = \frac{x\ln x}{x^2} - \frac{2\ln x}{x^2}$

$$= \frac{x\ln x - 2\ln x}{x^2}$$

$= \frac{(x-2)\ln x}{x^2}$. Donc, $\frac{(x-2)\ln x}{x^2} = \frac{\ln x}{x} - 2\frac{\ln x}{x^2}$

4. $A = \int_1^2 ((-\frac{1}{32}x) - f(x))dx = \int_1^2 \frac{(2-x)\ln x}{x^2}dx$

$$= 2\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}dx - \int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx$$

$$= 2\times\frac{1-\ln 2}{2} - \frac{1}{2}(\ln 2)^2 = 1 - \ln 2 - \frac{1}{2}(\ln 2)^2.$$

PROBLEME n°2

Partie A

1. a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(e^{2x} - 4e^{x} + 4)$

$$= \lim_{x\to-\infty}(e^{x}(e^{x} - 4) + 4).$$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{x} - 4) = -4$

Donc, $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{x}(e^{x} - 4) + 4)) = 4$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 4$.

Interprétation graphique : La droite d'équation $y = 4$ est asymptote à (C_f) en $-\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(e^{2x} - 4e^{x} + 4)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}(e^{x}(e^{x} - 4) + 4))$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{x} - 4) = +\infty$

Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{x}(e^{x} - 4) + 4)) = +\infty$. Il s'ensuit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x}(e^{x} - 4) + 4}{x}$

$$= \lim_{x\to+\infty}((e^{x} - 4)\frac{e^{x}}{x} + \frac{4}{x}).$$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{x} - 4) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x}}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x} = 0$.

Par suite, $\lim\limits_{x\to+\infty}((e^{x} - 4)\dfrac{e^{x}}{x} + \dfrac{4}{x}) = +\infty$

Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$.

Interprétation graphique : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ donc (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées en $+\infty$.

2. **a)** Pour tout nombre réel x, $f'(x) = 2e^{2x} - 4e^{x}$

$$= 2(e^{x}e^{x} - 2e^{x})$$

$$= 2(e^{x} - 2)e^{x}$$

b) Pour tout nombre réel x, $2e^{x} > 0$ donc, le signe de $f'(x)$ est celui de $e^{x} - 2$.

Pour $x \in \mathbb{R}, e^{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow e^{x} = 2$

$$\Leftrightarrow e^{x} = e^{\ln 2}$$

$$\Leftrightarrow x = \ln 2$$

Ensuite, $e^{x} - 2 > 0 \Leftrightarrow e^{x} > 2$

$$\Leftrightarrow e^{x} > e^{\ln 2}$$

$\Leftrightarrow x > \ln 2$. On en déduit que $e^{x} - 2 < 0 \Leftrightarrow x > \ln 2$

Il s'ensuit que : $\forall x \in]-\infty; \ln 2[, f'(x) < 0$, $\forall x \in]\ln 2; +\infty[, f'(x) > 0$, et $f'(\ln 2) = 0$.

c) Par conséquent : $\forall x \in]-\infty; \ln 2[, f'(x) < 0$, donc, la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty; \ln 2[$.

$\forall x \in]\ln 2; +\infty[, f'(x) > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur $]\ln 2; +\infty[$.

d) Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$f(\ln(2)) = e^{2\ln 2} - 4e^{\ln 2} + 4 = e^{\ln 4} - 4 \times 2 + 4 = 4 - 8 + 4 = 0$

3. Une équation de (T) est : $y = f'(0)(x-0)+f(0)$.

On a : $f'(0) = 2(e^0 - 2)e^0 = 2(1-2)\times 1 = -2$ et $f(0) = e^{2\times 0} - 4e^0 + 4 = 1-4+4 = 1$.

Donc : $y = -2x+1$.

4. **a)** Pour tout nombre réel x, $h'(x) = 2e^{2x} - 4e^x + 2$

$$= 2(e^{2x} - 2e^x + 1)$$

$$= 2(e^x - 1)^2.$$

b) Pour $x \in \mathbb{R}$, $(e^x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow e^x = e^0$$

$\Leftrightarrow \quad x = 0$ donc, pour tout nombre réel non nul x, $(e^x - 1)^2 > 0$

Par suite, $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, h'(x) > 0$ donc, la fonction h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c) $h(0) = e^{2\times 0} - 4e^0 + 2\times 0 + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$

De plus, la fonction h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Donc, $x < 0 \Rightarrow h(x) < h(0)$

$$\Rightarrow h(x) < 0 \text{ car } h(0) = 0$$

Par ailleurs, $0 < x \Rightarrow h(0) < h(x)$

$$\Rightarrow 0 < h(x) \text{ car } h(0) = 0$$

En définitive, $\forall x \in]-\infty\,;0[$, $h(x) < 0$ et $\forall x \in]0;+\infty[$, $h(x) > 0$

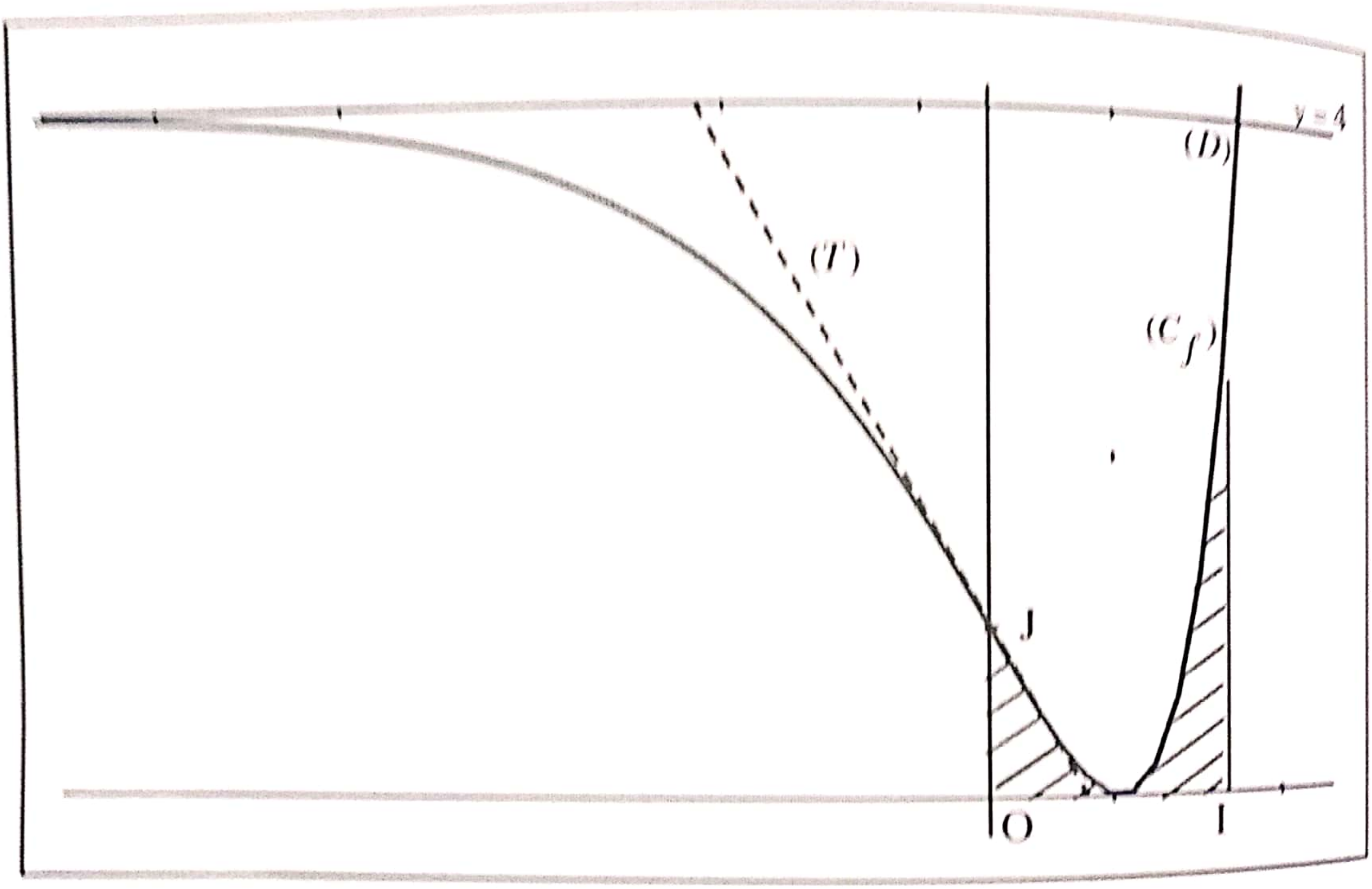
5. Pour tout nombre réel x, $f(x) - (-2x+1) = e^{2x} - 4e^x + 4 + 2x - 1$

$$= e^{2x} - 4e^x + 2x + 3$$

$$= h(x).$$

Par suite : $\forall x \in]-\infty ; 0[$, $h(x) < 0 \Rightarrow f(x) - (-2x+1) < 0$. Donc la courbe (C_f) est en dessous de (T) sur $]-\infty ; 0[$. Par ailleurs, $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $h(x) > 0 \Rightarrow f(x) - (-2x+1) > 0$. Donc la courbe (C_f) est au dessus de (T) sur $]0 ; +\infty[$. Enfin pour $x = 0$, $f(x) - (-2x+1) = 0$ donc (C_f) et (T) se coupent au point $A(0 ; 1)$.

6. Tracé de (T) et (C_f).



Partie B

1. Pour $x \in \mathbb{R}, f(x) = 4 \Leftrightarrow e^{2x} - 4e^{x} + 4 = 4$

$$\Leftrightarrow e^{2x} - 4e^{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{x}(e^{x} - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{x} - 4 = 0 \text{ car } e^{x} > 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2\ln 2$$

On en déduit que B est le point de coordonnées (2ln2 ,4).

$$A(\lambda) = \int_{\lambda}^{2\ln 2} (4 - f(x))dx = \int_{\lambda}^{2\ln 2} (4 - (e^{2x} - 4e^{x} + 4))dx$$

$$= \int_{\lambda}^{2\ln 2} (-e^{2x} + 4e^{x})dx = [-\frac{1}{2}e^{2x} + 4e^{x}]_{\lambda}^{2\ln 2}$$

$$= -\frac{1}{2}e^{2\times 2\ln 2} + 4e^{2\ln 2} - (-\frac{1}{2}e^{2\lambda} + 4e^{\lambda})$$

$$= -\frac{1}{2}e^{\ln 16} + 4e^{\ln 4} + \frac{1}{2}e^{2\lambda} - 4e^{\lambda}$$

$$= -\frac{16}{2} + 4\times 4 + \frac{1}{2}e^{2\lambda} - 4e^{\lambda}$$

$$= \frac{1}{2}e^{2\lambda} - 4e^{\lambda} + 8.$$

2. **a)** (E_0) est la partie du plan délimitée par (C_f) , (D) et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2ln2$.

b) $A(0) = \frac{1}{2}e^{2\times 0} - 4e^{0} + 8 = \frac{1}{2} - 4 + 8 = \frac{9}{2}$

3. $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} A(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \to -\infty} (\frac{1}{2}e^{2\lambda} - 4e^{\lambda} + 8)$. On a $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \frac{1}{2}e^{2\lambda} = 0$; $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} (-4e^{\lambda}) = 0$.

Par suite, $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} (\frac{1}{2}e^{2\lambda} - 4e^{\lambda} + 8) = 8$. On en déduit que $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} A(\lambda) = 8$.

PROBLEME n°3

1. $x \in D_f \Leftrightarrow e^x - 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow e^x \neq 1$

$\Leftrightarrow e^x \neq e^0$

$\Leftrightarrow x \neq 0$. On en déduit que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^*$

2. Pour tout nombre réel x appartenant à $\mathbb{R}^*$, $x \neq 0$ donc $-x \neq 0$. Il s'ensuit que $-x \in \mathbb{R}^*$.

$$f(-x) = \frac{e^{\frac{-x}{2}}}{e^{-x} - 1} = \frac{e^{\frac{-x}{2}}}{e^{-x}(1 - e^x)}$$

$$= \frac{e^x e^{\frac{-x}{2}}}{-(e^x - 1)} = -\frac{e^{\frac{x}{2}}}{(e^x - 1)}.$$

Par conséquent $f(-x) = -f(x)$. On conclut que la fonction f est impaire.

Interprétation graphique : Le point O est centre de symétrie de la courbe (C_f).

3. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{(e^x - 1)}$.

On a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} e^{\frac{x}{2}} = 1$. Par ailleurs, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (e^x - 1) = 0$ et $\forall x > 0$, $e^x > e^0$ donc, $e^x - 1 > 0$.

Il s'ensuit que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{(e^x - 1)} = +\infty$. Donc, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$.

Interprétation graphique : La droite d'équation $x = 0$ est asymptote à (C_f) au voisinage de 0.

4. **a)** Pour tout nombre réel x strictement positif, $f(x)=\dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{e^{x}-1}=\dfrac{1}{e^{-\frac{x}{2}}(e^{x}-1)}$

$$=\frac{1}{e^{-\frac{x}{2}+x}-e^{-\frac{x}{2}}}.$$

$$f(x)=\frac{1}{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}.$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{x}{2}}=+\infty$. Par ailleurs $\lim\limits_{x\to+\infty}(-\dfrac{x}{2})=-\infty$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{x}{2}}=0$

Par suite, $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}})=+\infty$. Par conséquent $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}=0$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Interprétation graphique : La droite d'équation y =0 est asymptote à (C_f) en $+\infty$.

5. Pour tout nombre réel x strictement positif, $f'(x)=-\dfrac{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}(e^{x}-1)-e^{\frac{x}{2}}e^{x}}{(e^{x}-1)^{2}}$

$$=-\frac{-\frac{1}{2}e^{x}e^{\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}}{2(e^{x}-1)^{2}}$$

$$=-\frac{e^{\frac{x}{2}}(e^{x}+1)}{2(e^{x}-1)^{2}}.$$

6. **a)** Pour tout nombre réel non nul x, $e^{\frac{x}{2}} > 0$; $e^{-\frac{x}{2}} > 0$ donc $e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} > 0$.

Par ailleurs, $2(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}})^2 > 0$.

Il s'ensuit que, $-\dfrac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{2(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}})^2} < 0$. Donc $f'(x) < 0$.

On en déduit que pour tout nombre réel strictement positif, $f'(x) < 0$.

Donc, la fonction f est strictement décroisante sur $]0;+\infty[$.

b) Tableau de variation de f sur $]0;+\infty[$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\searrow$	0

7. Tracé de (C_f) sur son ensemble de définition : Voir graphique.

Partie B

1. h la restriction de f à $]0;+\infty[$. h est continue et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

$h(]0;+\infty[) =]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x); \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)[$

$=]0;+\infty[$. Donc, h réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur $]0;+\infty[$.

2. $h(\ln 2) = \dfrac{e^{\frac{\ln 2}{2}}}{e^{\ln 2} - 1} = \dfrac{e^{\frac{1}{2}\ln 2}}{2-1} = e^{\ln\sqrt{2}}$ donc $h(\ln 2) = \sqrt{2}$

$$h'(\ln 2) = -\frac{e^{\frac{\ln 2}{2}}(e^{\ln 2}+1)}{2(e^{\ln 2}-1)^2}\,.$$

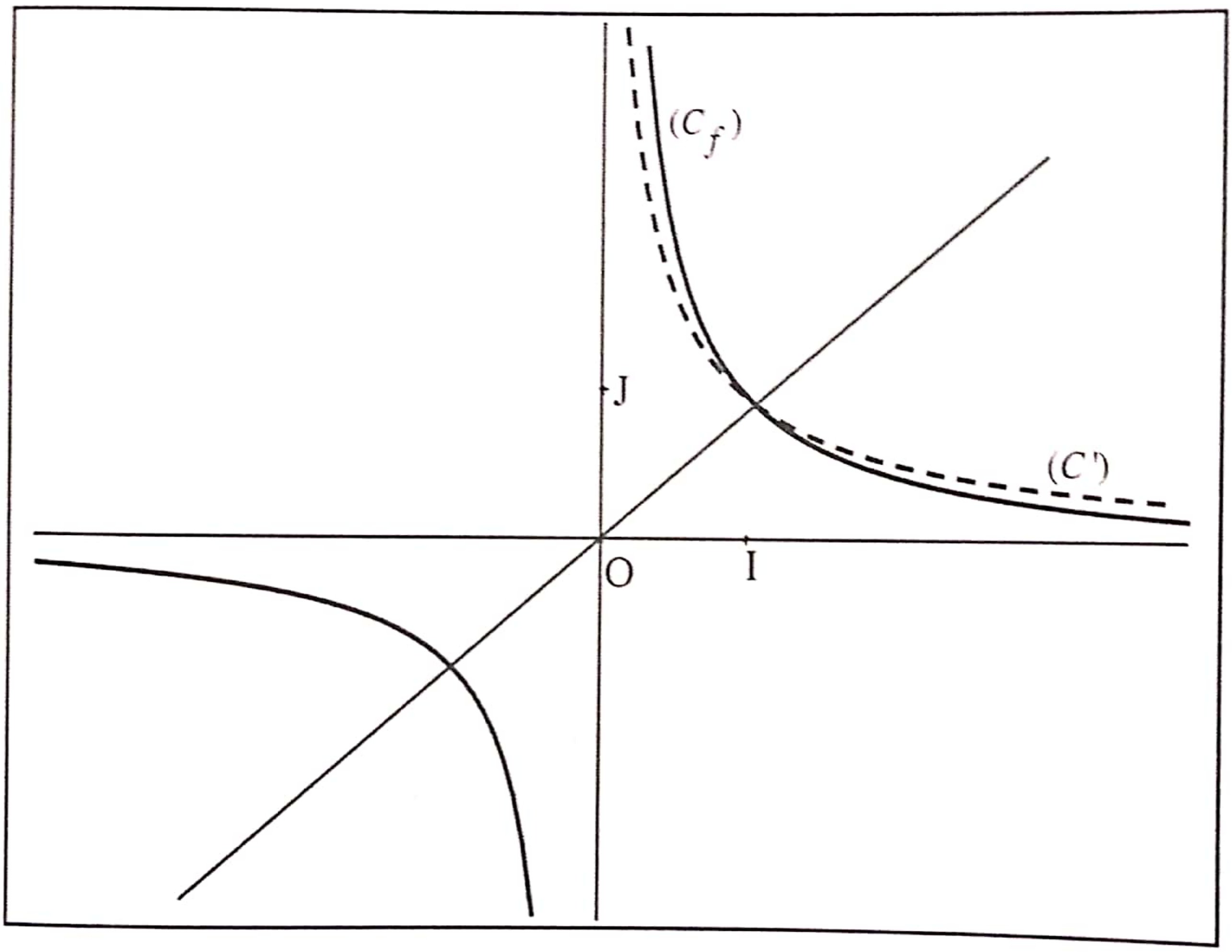
$$= -\frac{\sqrt{2}(2+1)}{2(2-1)^2} = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ donc, } h'(\ln 2) \neq 0\,.$$

On en déduit que h est dérivable en $\sqrt{2}$ et

$$(h^{-1})'(\sqrt{2}) = \frac{1}{h'(h^{-1}(\sqrt{2}))}$$

$$= \frac{1}{h'(\ln(2))} = -\frac{2}{3\sqrt{2}} \text{ Donc } (h^{-1})'(\sqrt{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

3. Tracé de (C_f) et de (C') dans le repère (O, I, J)



Partie C

1. Vérifier que pour tout nombre réel x non nul,

$$\frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}-1}-\frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}+1}=\frac{e^{\frac{x}{2}}(e^{\frac{x}{2}}+1)-e^{\frac{x}{2}}(e^{\frac{x}{2}}-1)}{(e^{\frac{x}{2}}-1)(e^{\frac{x}{2}}+1)}=\frac{e^{x}+e^{\frac{x}{2}}-e^{x}+e^{\frac{x}{2}}}{e^{x}-1}$$

$$=\frac{2e^{\frac{x}{2}}}{e^{x}-1}.$$

Par conséquent, $2\dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{e^{x}-1}=\dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}-1}-\dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}+1}$.

2. On déduit de la question précédente que pour tout x appartenant à $[\ln 2;\alpha]$

$$2f(x)=\frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}-1}-\frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}+1}$$

Donc, $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\alpha} f(x)dx=\int_{\ln 2}^{\alpha}\left(\frac{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}-1}-\frac{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}+1}\right)dx$

$$\int_{\ln 2}^{\alpha} f(x)dx=\left[\ln(e^{\frac{x}{2}}-1)-\ln(e^{\frac{x}{2}}+1)\right]_{\ln 2}^{\alpha}$$

$$=\ln(e^{\frac{\alpha}{2}}-1)-\ln(e^{\frac{\alpha}{2}}+1)-\ln(e^{\frac{\ln 2}{2}}-1)+\ln(e^{\frac{\ln 2}{2}}+1)$$

$$=\ln(e^{\frac{\alpha}{2}}-1)-\ln(e^{\frac{\alpha}{2}}+1)-\ln(\sqrt{2}-1)+\ln(\sqrt{2}+1)$$

$$= \ln(e^{\frac{\alpha}{2}}) + \ln(1+e^{-\frac{\alpha}{2}}) - \ln(e^{\frac{\alpha}{2}}) - \ln(1-e^{-\frac{\alpha}{2}}) - \ln(\sqrt{2}-1) + \ln(\sqrt{2}+1)$$

On conclut que : $A(\alpha) = \ln(1-e^{-\frac{\alpha}{2}}) - \ln(1+e^{-\frac{\alpha}{2}}) + \ln(3+2\sqrt{2})$.

3. $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} (1-e^{-\frac{\alpha}{2}}) = 1$; $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} (1+e^{-\frac{\alpha}{2}}) = 1$

donc, $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \ln(1-e^{-\frac{\alpha}{2}}) = 0$, $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \ln(1+e^{-\frac{\alpha}{2}}) = 0$

Il s'ensuit que $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} A(\alpha) = \ln(3+2\sqrt{2})$.

PROBLEME n°4

Partie A

1. **a)** $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \left(\frac{x}{x-1} - 2\ln(x-1) \right) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \left(x\frac{1}{x-1} - 2\ln(x-1) \right)$

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} x = 1$; $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} (x-1) = 0$ et $\forall x > 1, x-1 > 0$ implique $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{1}{x-1} = +\infty$

donc, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{1}{x-1} = +\infty$

Par ailleurs, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} (x-1) = 0$; $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \ln(x-1) = -\infty$ donc, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} (-2\ln(x-1)) = +\infty$

Il s'ensuit que, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \left(x\frac{1}{x-1} - 2\ln(x-1) \right) = +\infty$

Par suite, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} g(x) = +\infty$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{x-1} - 2\ln(x-1) \right)$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} (1) = 1$; $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-1) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} 2\ln(x-1)) = +\infty$

Donc, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{x-1} - 2\ln(x-1) \right) = -\infty$

Par suite, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

2. **a)** $\forall x \in]1;+\infty[$, $g'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} - \frac{2}{x-1}$

$$= \frac{-1-2(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{1-2x}{(x-1)^2}$$

b) Sens de variation de g :

$\forall x \in]1;+\infty[$, $(x-1)^2 > 0$ donc le signe de $g'(x)$ est celui de $1-2x$

On a : $1-2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Par suite, pour tout nombre réel x appartenant à $]1;+\infty[$, $1-2x<0$.

Par conséquent, $\forall x \in]1;+\infty[$, $g'(x)<0$.

On en déduit que la fonction g est strictement décroissante sur $]1;+\infty[$.

c) Tableau de variation de g :

x	1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

3. **a)** g est continue et strictement décroissante sur $]1;+\infty[$ donc réalise une bijection de $]1;+\infty[$ sur $g(]1;+\infty[)$.

$$g(]1;+\infty[) =]\lim_{x\to+\infty} g(x); \lim_{x\to 1} g(x)[$$

$$=]-\infty;+\infty[$$

$$= \mathbb{R}.$$

Puisque $0 \in \mathbb{R}$, alors l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans $]1;+\infty[$.

Vérification : $g(3{,}093) \approx 0{,}00058$ et $g(3{,}094) \approx -0{,}00059$ donc $g(3{,}093)\times g(3{,}094)<0$.

Il en découle que $3{,}093 < \alpha < 3{,}094$.

b) g est strictement décroissante sur $]1;+\infty[$ et $g(\alpha)=0$

Donc, $x<\alpha \Rightarrow g(\alpha)<g(x)$

$$\Rightarrow 0<g(x).$$

Par ailleurs, $\alpha<x \Rightarrow g(x)<g(\alpha)$

$\Rightarrow g(x)<0$. En définitive, $\begin{cases} \forall x \in]1;\alpha[, & g(x)>0 \\ \forall x \in]\alpha;+\infty[, & g(x)<0 \end{cases}$

Partie B

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (2 + \frac{\ln(x-1)}{x^2})$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} (2 + \frac{x-1}{x^2} \frac{\ln(x-1)}{x-1})$ .On a $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-1) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x-1)}{x-1}$

Par ailleurs, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc, $\lim\limits_{x \to +\infty} (2 + \frac{x-1}{x^2} \frac{\ln(x-1)}{x-1} = 2.$

Il s'ensuit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ donc, la droite (D) d'équation y = 2 est asymptote à (C_f).

2. Pour x $\in]1;+\infty[$, $f(x) = 2 \Leftrightarrow 2 + \frac{\ln(x-1)}{x^2} = 2$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(x-1)}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(x-1) = \ln 1$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 1$$

$\Leftrightarrow x = 2$. On a : $2 \in]1;+\infty[$ et $f(2) = 2 - \frac{\ln(2-1)}{2^2} = 2 - \frac{\ln 1}{4} = 2$

Par conséquent, (C_f) et (D) se coupent au point $B\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$.

3. Pour tout nombre réel x, strictement supérieur à 1, $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x-1} \times x^2 - 2x\ln(x-1)}{x^4}$

$$= \dfrac{\frac{x}{x-1} - 2\ln(x-1)}{x^3}$$

$$= \frac{g(x)}{x^3}.$$

4. **a)** $\forall x \in]1;+\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

Puisque, $\forall x \in]1;+\infty[, x^3 > 0$ alors le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$.

D'après la question 6 Partie A, $\forall x \in]1;\alpha[, g(x) > 0$ et $\forall x \in]\alpha;+\infty[$, $g(x) < 0$ et $g(\alpha) = 0$ donc, $\forall x \in]1;\alpha[, f'(x) > 0$ et $\forall x \in]\alpha;+\infty[$, $f'(x) < 0$ et $f'(\alpha) = 0$. On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $]1;\alpha[$ et f est strictement décroissante sur $]\alpha;+\infty[$.

b) Tableau de variation de f

x	1		α		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	2

5. **a)** $g(\alpha) = 0 \Rightarrow \dfrac{\alpha}{\alpha-1} - 2\ln(\alpha-1) = 0$

$$\Rightarrow \ln(\alpha-1) = \frac{\alpha}{2(\alpha-1)}$$

Donc, $f(\alpha) = 2 + \dfrac{\ln(\alpha-1)}{\alpha^2} = 2 + \dfrac{\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}}{\alpha^2}$

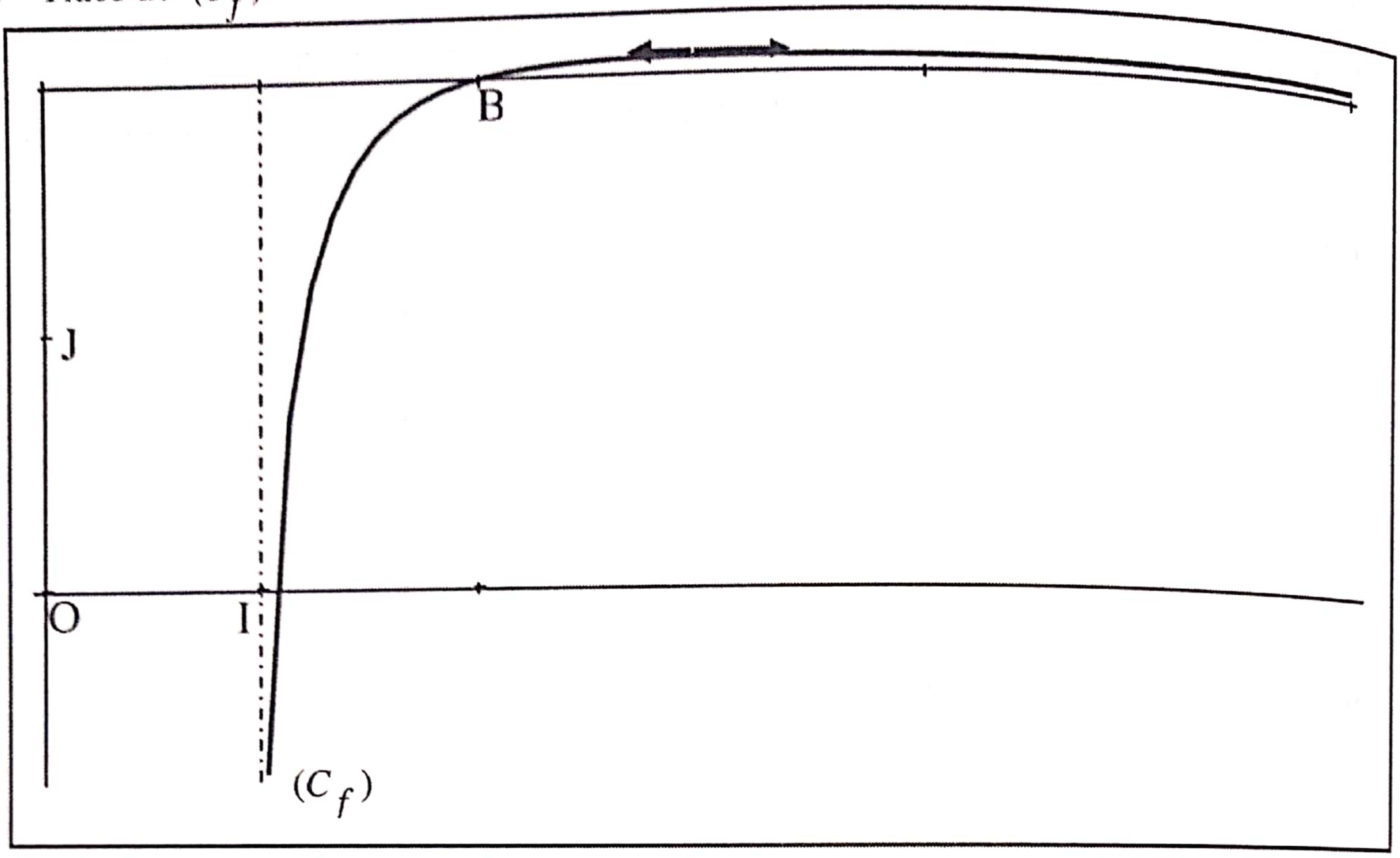
$$= 2 + \frac{1}{2\alpha(\alpha-1)}.$$

b) $3{,}093 < \alpha < 3{,}094$; $2{,}093 < \alpha - 1 < 3{,}094$.

Il s'ensuit que $2{,}0771 < 2 - \dfrac{1}{2\alpha(\alpha-1)} < 2{,}0772$ donc $2{,}0771 < f(x) < 2{,}0772$.

On en déduit $2{,}077$ est une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 2×10^{-3} près par défaut.

6. Tracé de (C_f)



Partie C

1. Pour tout nombre réel x différent de 0 et 1, $\dfrac{-1}{x}+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{-(x-1)+x}{x(x-1)}$

$$=\frac{-x+1+x}{x(x-1)}$$

$$=\frac{1}{x(x-1)}\,.$$

Donc, $\dfrac{1}{x(x-1)}=\dfrac{-1}{x}+\dfrac{1}{x-1}$.

2. $-\displaystyle\int_{\beta}^{2}\frac{1}{x(x-1)}dx=\int_{\beta}^{2}\left(\frac{-1}{x}+\frac{1}{x-1}\right)dx$

$$=\left[-\ln x+\ln(x-1)\right]_{\beta}^{2}$$

$$=-\ln 2+\ln(2-1)-(-\ln\beta+\ln(\beta-1))$$

$$=-\ln 2+\ln 1+\ln\beta-\ln(\beta-1)$$

$$=-\ln 2+\ln\beta-\ln(\beta-1)$$

3. $\int_{\beta}^{2} f(x)dx = \int_{\beta}^{2} \frac{\ln(x-1)}{x^2} dx = \int_{\beta}^{2} \frac{1}{x^2} \ln(x-1)dx$, posons $u' = \frac{1}{x^2}$ et $v = \ln(x-1)$

Donc, $u = -\frac{1}{x}$ et $v' = \frac{1}{x-1}$

Par suite, $\int_{\beta}^{2} f(x)dx = \left[-\frac{1}{x}\ln(x-1) \right]_{\beta}^{2} - \int_{\beta}^{2} (-\frac{1}{x}) \frac{1}{(x-1)} dx$

$$= -\frac{1}{2}\ln(2-1) + \frac{1}{\beta}\ln(\beta-1) + \int_{\beta}^{2} \frac{1}{x(x-1)} dx$$

$$= \frac{1}{\beta}\ln(\beta-1) - \ln 2 + \ln\beta - \ln(\beta-1)$$

$$= \ln\beta - \frac{(\beta-1)}{\beta}\ln(\beta-1) - \ln 2 .$$

On a , $A(\beta) = \int_{\beta}^{2} (2 - f(x))dx$

$$= \int_{\beta}^{2} (-\frac{\ln(x-1)}{x^2})dx$$

$$= -\int_{\beta}^{2} \frac{\ln(x-1)}{x^2})dx$$

$$= \frac{(\beta-1)\ln(\beta-1)}{\beta} - \ln\beta + \ln 2.$$

4. $\lim_{\beta\to 1} \ln\beta = \ln 1 = 0$; $\lim_{\beta\to 1} \beta = 1$. De plus, $\lim_{\beta\to 1} (\beta-1) = 0$ donc, $\lim_{\beta\to 1} (\beta-1)\ln(\beta-1) = 0$

Par suite, $\lim_{\beta\to 1} \frac{(\beta-1)\ln(\beta-1)}{\beta} = 0$. Par conséquent, $\lim_{\beta\to 1} A(\beta) = \ln 2$.

PROBLEME n°5

Partie A

1. **a)** $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(1+(2x+1)e^{-2x})$

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x} = +\infty$.

De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+1) = -\infty$.

En définitive, $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+(2x+1)e^{-2x}) = -\infty$. Par conséquent, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(1+(2x+1)e^{-2x})$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}(1+2xe^{-2x}+e^{-2x})$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$

Par ailleurs, posons $u = -2x$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} u = -\infty$.

Il s'ensuit que $\lim\limits_{x\to+\infty} 2xe^{-2x} = \lim\limits_{u\to-\infty}(-ue^{u}) = 0$.

Par conséquent, $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+2xe^{-2x}+e^{-2x}) = 1$.

On en déduit que : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$.

2. **a)** Pour tout nombre réel x, $g'(x) = 2e^{-2x} + (2x+1)(-2)e^{-2x}$

$= (-4x - 2 + 2)e^{-2x}$

$= -4xe^{-2x}$.

b) Pour tout nombre réel x, $e^{-2x} > 0$. Donc le signe de $g'(x)$ est celui de $-4x$.

$\forall x \in]-\infty;0[, -4x > 0$ donc, $g'(x) > 0$.

Par suite, g est strictement croissante sur

$\forall x \in]0;+\infty[, -4x < 0$ donc, $g'(x) < 0$.

Il s'ensuit que, g est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

c) Tableau de variation de g

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

$g(0) = 1 + (2 \times 0 + 1)e^{-2\times 0} = 1 + 1 = 2$

3. **a)** g est continue et strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$ donc, sur $[-1\,;0]$ car $[-1\,;0] \subset]-\infty\,;0]$.

$g([-1;0]) = [g(-1); g(0)] = [1-e; 2]$.

On a $1-e<0$ et $2>0$ donc, $0 \in [1-e;2]$. On en déduit que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $[-1\,;0]$.

b) Vérification : $g(-0{,}64) \approx -0{,}00705$ et $g(-0{,}63) \approx 0{,}083$ donc $g(-0{,}64) \times g(-0{,}63) < 0$.

Il en découle que $-0{,}64 < \alpha < -0{,}63$.

4. **a)** g est continue et strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

Il s'ensuit que $g([0;+\infty[) =]\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1\ ;\ g(0)]$

$=]\,1\,;\,2]$.

b) g est strictement croissante sur $]-\infty;0]$ et $g(\alpha)=0$

Donc, $\quad x < \alpha \Rightarrow g(x) < g(\alpha)$

$\Rightarrow g(x) < 0$.

Ensuite, $\quad \alpha < x \Rightarrow g(\alpha) < g(x)$

$\Rightarrow g(x) > 0$.

Par ailleurs, $g([0;+\infty[) =]1;2]$ donc $\forall x \in [0;+\infty[, g(x) \in]1;2]$.

Par suite $g(x) > 0$

En définitive : $\forall x \in]-\infty;\alpha[, g(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha;+\infty[, g(x) > 0$

Partie B

1. **a)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x-(x+1)e^{-2x}) = \lim\limits_{x\to-\infty} x(1-\frac{x+1}{x}e^{-2x})$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$.

De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x} = +\infty$ donc,

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x}e^{-2x} = +\infty$

Il s'ensuit que $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-\frac{x+1}{x}e^{-2x}) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x(1-\frac{x+1}{x}e^{-2x}) = +\infty$.

Par conséquent, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-(x+1)e^{-2x}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}(1-\frac{x+1}{x}e^{-2x})$

Donc, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = -\infty$

b) Interprétation graphique : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = -\infty$ donc, la courbe (C_f)

admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x-(x+1)e^{-2x})$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}(x - xe^{-2x} + e^{-2x})$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$

De plus, posons $u = -2x$ donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} u = -\infty$

Par conséquent, $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-2x} = \lim\limits_{u\to-\infty}(-\frac{u}{2}e^{u}) = \lim\limits_{u\to-\infty}(-\frac{1}{2}ue^{u}) = 0$

En définitive, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x - xe^{-2x} + e^{-2x}) = +\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3. **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}((x-(x+1)e^{-2x})-x)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}(-(x+1)e^{-2x})$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}(-xe^{-2x}+e^{-2x})$

$=0$. Donc, la droite (Δ) est asymptote à (C_f) en $+\infty$.

b) $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)-x=-(x+1)e^{-2x}$

$=(-x-1)e^{-2x}$.

$\forall x\in\mathbb{R}, e^{-2x}>0$ donc, le signe de $f(x)-x$ est celui de $-x-1$.

On a : $-x-1=0 \Leftrightarrow x=-1$.

Donc, $\forall x\in]-\infty;-1[, -x-1>0$

$f(x)-x>0$. Donc (C_f) est au dessus de (Δ) sur $]-\infty;-1[$.

De plus, $\forall x\in]-1;+\infty[, -x-1<0$

$f(x)-x<0$. Donc, (C_f) est en dessous de (Δ) sur $]-1;+\infty[$.

4. **a)** Pour tout nombre réel x , $f'(x)=1-(e^{-2x}+(x+1)(-2)e^{-2x})$

$=1-(-2x-2+1)e^{-2x}$

$=1+(2x+1)e^{-2x}$

$=g(x)$.

b) $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=g(x)$ donc, la signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$

$\forall x\in]-\infty;\alpha[, g(x)<0$ et $\forall x\in]\alpha;+\infty[$, $g(x)>0$ et $g(\alpha)=0$.

Par suite, $\forall x\in]-\infty;\alpha[, f'(x)<0$ donc, f est strictement décroissante sur $]-\infty;\alpha[$.

Par ailleurs, $\forall x\in]\alpha;+\infty[, f'(x)>0$ donc, f est strictement croissante sur $]\alpha;+\infty[$.

c) Tableau de variation de f

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

5. $g(\alpha)=1+(2\alpha+1)e^{-2\alpha}$ et $g(\alpha)=0$ donc, $1+(2\alpha+1)e^{-2\alpha}=0$

$$e^{-2\alpha}=\frac{-1}{2\alpha+1}.$$

Par ailleurs, $f(\alpha)=\alpha-(\alpha+1)e^{-2\alpha}$

Il s'ensuit que, $f(\alpha)=\alpha-(\alpha+1)\times\dfrac{-1}{2\alpha+1}$

$$=\alpha+\frac{\alpha+1}{2\alpha+1}=\alpha+\frac{1}{2}\times\frac{2\alpha+2}{2\alpha+1}$$

$$=\alpha+\frac{1}{2}\times(1+\frac{1}{2\alpha+1})$$. Donc, $f(\alpha)=\alpha+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4\alpha+2}$.

6. Une équation de (T) est $y=f'(0)(x-0)+f(0)$.

On a : $f'(0)=g(0)=1+(2\times0+1)e^{-2\times0}=1+1=2$ et $f(0)=0-(0+1)e^{-2\times0}=-1$.

Donc : $y=2x-1$.

Partie C

1. a) Pour tout nombre réel $x, h'(x)=f'(x)-2$

$$h'(x)=g(x)-2.$$

$g(0)=2$.

g est strictement croissante sur $]-\infty;0[$ donc, $x<0 \Rightarrow g(x)<g(0)$

$$\Rightarrow g(x)<2$$
$$\Rightarrow g(x)-2<0$$
$$\Rightarrow h'(x)<0.$$

Par ailleurs, g est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ donc, $x > 0 \Rightarrow g(x) < g(0)$

$$\Rightarrow h'(x) < 0$$

En définitive, pour tout nombre réel non nul x, $h'(x) < 0$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $h'(x) < 0$ donc, h est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.

2. a) $h(0) = f(0) - 2\times 0 + 1 = -1 + 1 = 0$

h est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$ et $h(0) = 0$

Donc, $x < 0 \Rightarrow h(x) > h(0)$

$$\Rightarrow h(x) > 0$$

Par ailleurs, h est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ et $h(0) = 0$.

Donc, $x > 0 \Rightarrow h(x) < h(0)$

$$\Rightarrow h(x) < 0$$

Par conséquent : $\forall x \in]-\infty;0[, h(x) > 0$ et $\forall x \in]0;+\infty[$, $h(x) < 0$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = f(x) - 2x + 1$

$$= f(x) - (2x - 1).$$

On a : $\forall x \in]-\infty;0[, h(x) > 0$

$$f(x) - (2x-1) > 0.$$

Donc, (C_f) est au dessus de (T) sur $]-\infty;0[$

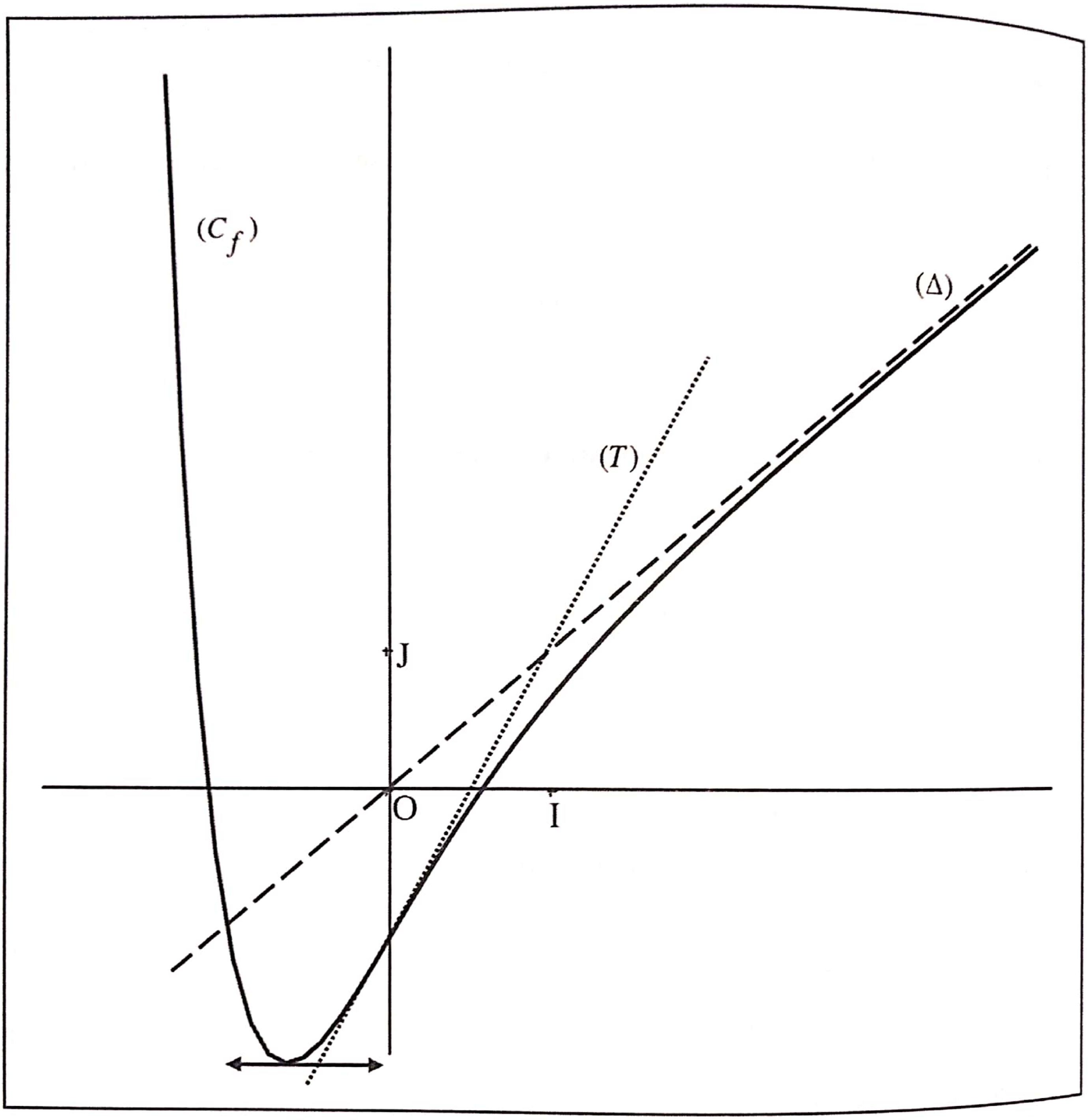
Par ailleurs, $\forall x \in]0;+\infty[$, $h(x) < 0$

$$f(x) - (2x-1) < 0.$$

Donc, (C_f) est en dessous de (T) sur $]0;+\infty[$.

Enfin, (C_f) et (T) se coupent au point d'abscisse 0.

3. Tracé de (C_f), (T) et (Δ)



Partie D

1. (C_f) est en dessous de (Δ) sur $[-1;+\infty[$ et pour tout $t>0$, $[0;t]\subset[-1;+\infty[$.

Donc, $A(t)=\int_0^t (x-f(x))dx=\int_0^t (x-x+(x+1)e^{-2x})dx$

Par conséquent, $A(t)=\int_0^t (x+1)e^{-2x}dx$.

2. Posons $u=x+1$ et $v'=e^{-2x}$

Donc, $u'=1$ et $v=-\frac{1}{2}e^{-2x}$

Il s'ensuit que : $A(t)=\left[(-\frac{1}{2})(x+1)e^{-2x}\right]_0^t-\int_0^t(-\frac{1}{2}e^{-2x})dx$

$$=(-\frac{1}{2})(t+1)e^{-2t}-(-\frac{1}{2})e^{-2\times 0}+\frac{1}{2}(\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^t)$$

$$=-\frac{1}{2}te^{-2t}-\frac{3}{4}e^{-2t}+\frac{3}{4}.$$

3. $\lim\limits_{t\to+\infty}A(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}(-\frac{1}{2}te^{-2t}-\frac{3}{4}e^{-2t}+\frac{3}{4})$.

On a $\lim\limits_{t\to+\infty}te^{-2t}=0$; $\lim\limits_{t\to+\infty}e^{-2t}=0$

Donc, $\lim\limits_{t\to+\infty}(-\frac{1}{2}te^{-2t}-\frac{3}{4}e^{-2t}+\frac{3}{4})=\frac{3}{4}$.

On en déduit que $\lim\limits_{t\to+\infty}A(t)=\frac{3}{4}$.

PROBLEME n°6

Partie A

1. Pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]-1;+\infty[$,

$$g'(x) = 2 - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1}$$

$$= \frac{2(x+1)^2 - 1 - (x+1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{2x^2+4x+2-1-x-1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{2x^2+3x}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x(2x+3)}{(x+1)^2}.$$

2. **a)** Sens de variation de g : $\forall x \in]-1;+\infty[$, $(x+1)^2 > 0$. Donc, le signe de $g'(x)$ est celui de $x(2x+3)$

On a : $2x+3=0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$. D'où le tableau de signe suivant :

x	-1		0		$+\infty$
$2x+3$	‖	$+$		$+$	
x	‖	$-$	0	$+$	
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Il découle du tableau que :

$\forall x \in]-1;0[$, $g'(x) < 0$ donc la fonction g est strictement décroissante sur $]-1;0[$.

$\forall x \in]0;+\infty[$, $g'(x) > 0$ donc la fonction g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

b) Tableau de variation de g

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	$\searrow$	2	$\nearrow$	

$g(0) = 2\times 0 + 1 + \frac{1}{0+1} - \ln(0+1) = 2$

c) 2 est le minimum de g sur $]-1;+\infty[$ donc, $\forall x \in]-1;+\infty[$, $g(x) \geq 2$. On en déduit que $\forall x \in]-1;+\infty[$, $g(x) > 0$.

Partie B

1. $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} \left[(x+1)^2 - x\ln(x+1)\right]$

$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} (x+1)^2 = 0$; $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} (-x) = 1$

De plus, $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} (x+1) = 0$; $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} \ln(x+1) = -\infty$

Donc, $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} \left[(x+1)^2 - x\ln(x+1)\right] = -\infty$. Par conséquent $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x) = -\infty$

Interprétation graphique : La droite d'équation $x = -1$ est asymptote à (C_f).

2. a) $\forall x \in]-1;+\infty[\setminus\{0\}$, $x(x+1)\left(\frac{x+1}{x} - \frac{\ln(x+1)}{x+1}\right) = \frac{x(x+1)^2}{x} - \frac{x(x+1)\ln(x+1)}{x+1}$

$$= (x+1)^2 - x\ln(x+1)$$

Il s'ensuit que $f(x) = x(x+1)\left(\frac{x+1}{x} - \frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)$.

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Posons $u = x+1$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} u = +\infty$. Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \lim\limits_{u\to+\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$

Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = 1$. Par suite, $\lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{x+1}{x} - \frac{\ln(x+1)}{x+1}) = 1$

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} x(x+1) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$.

En définitive, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x(x+1)\left(\frac{x+1}{x} - \frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)}{x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)\left(\frac{x+1}{x} - \frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1) = +\infty$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{x+1}{x} - \frac{\ln(x+1)}{x+1}) = 1$

Donc, $= \lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)\left(\frac{x+1}{x} - \frac{\ln(x+1)}{x+1}\right) = +\infty$

Par conséquent, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

3. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ donc, (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

4. a) $\forall x \in]-1;+\infty[$, $f'(x) = 2(x+1) - \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$

$= 2x + 2 - 1 + \frac{1}{x+1} - \ln(x+1)$

$= 2x + 1 + \frac{1}{x+1} - \ln(x+1)$

$= g(x)$.

b) $\forall x \in]-1;+\infty[$, $g(x) > 0$ donc, $f'(x) > 0$.

Par suite, la fonction f est strictement croissante sur $]-1;+\infty[$.

c) Tableau de variation de f

x	1 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

5. Une équation de (T) est $y = f'(0)(x-0) + f(0)$.

On a : $f'(0) = g(0) = 2$ et $f(0) = 1$.

Donc : $y = 2x + 1$.

6. $\forall x \in]-1;+\infty[$, $f(x) - (2x+1) = (x+1)^2 - x\ln(x+1) - (2x+1)$

$$= x^2 + 2x + 1 - x\ln(x+1) - (2x+1)$$

$$= x(x - \ln(x+1)).$$

Partie C

1. $\forall x \in]-1;+\infty[$, $h'(x) = 1 - \dfrac{1}{x+1}$.

$$= \frac{x+1-1}{x+1}$$

$$= \frac{x}{x+1}.$$

2. Tableau de signe de h' :

x	-1		0		$+\infty$
$x+1$	‖	$+$		$+$	
x	‖	$-$	0	$+$	
$h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Par conséquent,

$\forall x \in]-1;0[$, $h'(x) < 0$ donc la fonction h est strictement décroissante sur $]0;1[$.
$\forall x \in]0;+\infty[$, $h'(x) > 0$ donc la fonction h est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

3. $h(0) = 0 - \ln(0+1) = \ln 1 = 0$

Par ailleurs, la fonction h est strictement décroissante sur $]-1;0[$.

Donc, $x < 0 \Rightarrow h(0) < h(x)$

$$\Rightarrow 0 < h(x) \text{ car } h(0) = 0$$

La fonction h est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Donc, $x > 0 \Rightarrow h(x) > h(0)$

$$\Rightarrow h(x) > 0 \text{ car } h(0) = 0$$

On conclut que : tout nombre réel non nul appartenant à $]-1;+\infty[$, $h(x) > 0$.

4. $\forall x \in]-1;+\infty[$, $f(x) - (2x+1) = x(x - \ln(x+1))$. D'où le tableau de signe qui suit :

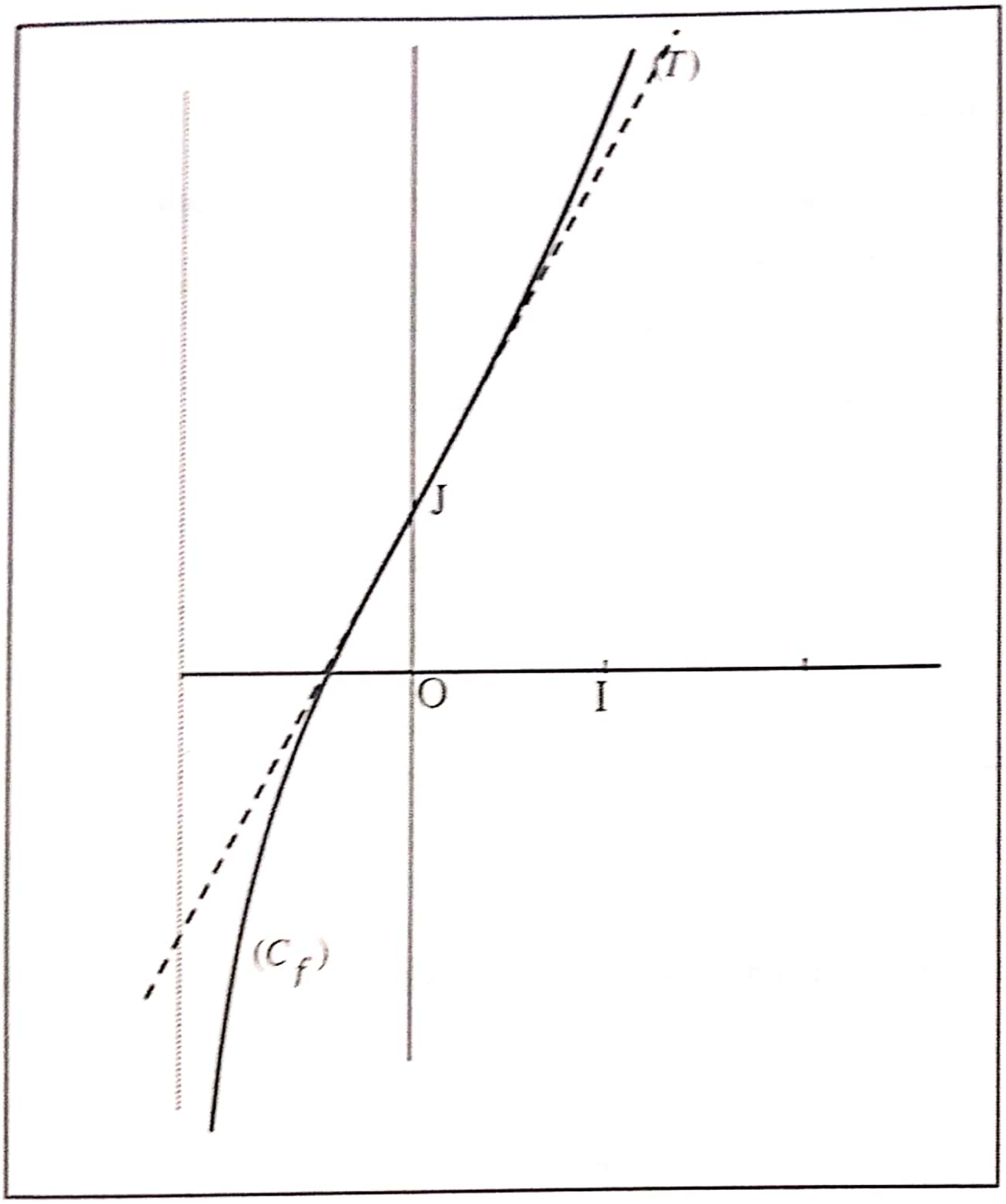
x	-1		0		$+\infty$
$h(x)$	‖	$+$	0	$+$	
x	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)-(2x+1)$	‖	$-$	0	$+$	

Il en ressort que : $\forall x \in]-1;0[$, $f(x) - (2x+1) < 0$ donc (C_f) est en dessous de (T) sur $]-1;0[$.

Par ailleurs : $\forall x \in]0;+\infty[$, $f(x) - (2x+1) > 0$ donc, (C_f) est au dessus de (T) sur $]0;+\infty[$.

Enfin, $f(x) - (2x+1) = 0$ pour $x = 0$ donc, (C_f) et (T) se coupent au point $A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

5. Tracé de (T) et de (C_f)



Partie D

1. f est dérivable et strictement croissante sur $]-1;+\infty[$ donc f réalise une bijection de $]-1;+\infty[$ sur $f(]-1;+\infty[)$.

On a $f(]-1;+\infty[) =]\lim\limits_{x\to -1} f(x); \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)[$

$=]-\infty;+\infty[$

$= \mathbb{R}$. .

2. f réalise une bijection de $]-1;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$. Puisque $0 \in \mathbb{R}$ alors l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $]-1;+\infty[$.

3. Utilisons **la méthode de balayage** :

Recherche d'un l'encadrement de α par deux décimaux consécutifs d'ordre 1 :

x	$-0,5$	$-0,4$	$-0,3$	$-0,2$	$-0,1$	0
$f(x)$	−	+	+	+	+	+

Donc, $-0,5 < \alpha < -0,4$.

Recherche d'un l'encadrement de α par deux décimaux consécutifs d'ordre 2 :

x	$-0,5$	$-0,49$	$-0,48$	$-0,47$	$-0,46$	$-0,45$	$-0,44$	$-0,43$	$-0,42$	$-0,41$	$-0,4$
$f(x)$	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+	+

D'où l'encadrement : $-0,47 < \alpha < -0,46$ avec $-0,46-(-0,47)=0,01$.

4. **a)** $A(\alpha)$ est l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=\alpha$ et $x=0$.

b) Pour tout nombre réel x différent de -1,

$$x-1+\frac{1}{x+1}=\frac{(x+1)(x-1)+1}{x+1}$$

$$=\frac{x^2-1+1}{x+1}$$

$$=\frac{x^2}{x+1}.$$

Donc, $\dfrac{x^2}{x+1}=x-1+\dfrac{1}{x+1}$.

c) Calculons $\int_{\alpha}^{0} x\ln(x+1)dx$ à l'aide d'une intégration par partie :

Posons $u' = x$ et $v = \ln(x+1)$

Donc. $u = \frac{1}{2}x^2$ et $v' = \frac{1}{x+1}$

Par suite. $\int_{\alpha}^{0} x\ln(x+1)dx = \left[\frac{1}{2}x^2\ln(x+1)\right]_{\alpha}^{0} - \int_{\alpha}^{0} \frac{1}{2}x^2 \frac{1}{x+1}dx$

$$= -\frac{1}{2}\alpha^2\ln(\alpha+1) - \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{0} \frac{x^2}{x+1}dx$$

$$= -\frac{1}{2}\alpha^2\ln(\alpha+1) - \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{0} (x-1+\frac{1}{x+1})dx$$

$$= -\frac{1}{2}\alpha^2\ln(\alpha+1) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2 - x + \ln(x+1)\right]_{\alpha}^{0}$$

$$= -\frac{1}{2}\alpha^2\ln(\alpha+1) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\alpha^2 - \alpha + \ln(\alpha+1))$$

$$= \frac{1}{4}(\alpha^2 - 2\alpha) + \frac{1}{2}(1-\alpha^2)\ln(\alpha+1)).$$

5. $\int_{\alpha}^{0} f(x)dx = \int_{\alpha}^{0} ((x+1)^2 - x\ln(x+1))dx = \int_{\alpha}^{0} (x+1)^2dx - \int_{\alpha}^{0} x\ln(x+1)dx$

On a : $\int_{\alpha}^{0} (x+1)^2dx = [\frac{1}{3}(x+1)^3]_{\alpha}^{0}$

$$= \frac{1}{3}(0+1)^3 - \frac{1}{3}(\alpha+1)^3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(\alpha+1)^3$$

En définitive, $A(\alpha) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(\alpha+1)^3 + \frac{1}{4}(2\alpha - \alpha^2) + \frac{1}{2}(\alpha^2 - 1)\ln(\alpha+1)).$

PROBLEME n°7

Partie A

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 1 - e^{x-1}$

2. Pour $x \in \mathbb{R}$, $1 - e^{x-1} = 0 \Leftrightarrow e^{x-1} = 1$

$$\Leftrightarrow \ln(e^{x-1}) = \ln 1$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1.$$

Par ailleurs, $1 - e^{x-1} > 0 \Leftrightarrow e^{x-1} < 1$

$$\Leftrightarrow \ln(e^{x-1}) < \ln 1$$

$$\Leftrightarrow x - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow x < 1$$

On en déduit que : $1 - e^{x-1} < 0 \Leftrightarrow x > 1$.

D'où le tableau de signe suivant

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

Il s'ensuit que, $\forall x \in]-\infty\,;1[$, $g'(x) > 0$ donc la fonction g est strictement croissante sur $]-\infty\,;1[$

$\forall x \in]\,1\,;+\infty\,[$, $g'(x) < 0$ donc la fonction g est strictement décroissante sur $]\,1\,;+\infty\,[$.

Tableau de variation de g sans les limites aux bornes :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

$g(1) = 1 - e^{1-1} = 1 - e^{0} = 1 - 1 = 0$

3. La fonction g est strictement croissante sur $]-\infty\,;1[$.

$x < 1 \Rightarrow g(x) < g(1)$

$\Rightarrow g(x) < 0$ car $g(1) = 0$

Par ailleurs, la fonction g est strictement décroissante sur $]1\,;+\infty[$.

$x > 1 \Rightarrow g(x) < g(1)$

$\Rightarrow g(x) < 0$

Par conséquent, pour tout nombre réel x différent de 1, $g(x) < 0$.

Partie B

1. a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x^2 - (x-1)e^{x-1})$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} (x-1) = -\infty$ implique $\lim\limits_{x\to-\infty} (x-1)e^{x-1} = 0$ donc,

$\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2 - (x-1)e^{x-1}) = +\infty$

On en déduit que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - (x-1)e^{x-1}}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(x - \frac{x-1}{x} e^{x-1}\right).$$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} (1) = 1$

Posons $u = x-1$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x-1} = \lim\limits_{u\to-\infty} e^{u} = 0$

Par suite, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x} e^{x-1} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} (x - \frac{x-1}{x} e^{x-1}) = -\infty$.

Finalement, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$.

c) Interprétation graphique : Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

alors (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

2. **a)** Pour tout nombre réel non nul x, $x^2(1 - \frac{1}{e}\times\frac{x-1}{x}\times\frac{e^x}{x}) = x^2 - x^2 \times \frac{x-1}{x^2} \times e^x e^{-1}$

$$= x^2 - (x-1)\times e^{x-1}.$$

On en déduit que pour tout nombre réel x non nul, $f(x) = x^2(1 - \frac{1}{e}\times\frac{x-1}{x}\times\frac{e^x}{x})$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1 - \frac{1}{e}\times\frac{x-1}{x}\times\frac{e^x}{x}\right)$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{e}\times\frac{x-1}{x}\times\frac{e^x}{x}\right) = -\infty$

Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1 - \frac{1}{e}\times\frac{x-1}{x}\times\frac{e^x}{x}\right) = -\infty$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x}\left(1 - \frac{1}{e}\times\frac{x-1}{x}\times\frac{e^x}{x}\right)$

$$= \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{1}{e}\times\frac{x-1}{x}\times\frac{e^x}{x}\right) = -\infty.$$

Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$.

c) Interprétation graphique : Puisque $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ alors (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

3. a) Pour tout nombre réel x, $f'(x) = 2x - (e^{x-1} + (x-1)e^{x-1})$

$$= 2x - (1 + x - 1)e^{x-1}$$

$$= 2x - xe^{x-1}$$

$$= x(2 - e^{x-1}).$$

b) Pour tout nombre réel x, $2 - e^{x-1} = 0 \Leftrightarrow e^{x-1} = 2$

$$\Leftrightarrow x - 1 = \ln 2$$

$$\Leftrightarrow x = 1 + \ln 2$$

Par ailleurs, $2 - e^{x-1} > 0 \Leftrightarrow e^{x-1} < 2$

$$\Leftrightarrow x - 1 < \ln 2$$

$\Leftrightarrow x < 1 + \ln 2$. Par conséquent, $2 - e^{x-1} < 0 \Leftrightarrow x > 1 + \ln 2$.

Tableau de signe de f

x	$-\infty$	0		$1+\ln 2$		$+\infty$
$2 - e^{x-1}$	$+$		$+$	0	$-$	
x	$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	

Il ressort du tableau : $\forall x \in]-\infty; 0[\cup]1 + \ln 2; +\infty[, f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur les intervalles $]-\infty; 0[$ et $]1 + \ln 2; +\infty[$.

$\forall x \in]0; 1 + \ln 2[, f'(x) > 0$ donc f est strictement décroissante sur $]0; 1 + \ln 2[$.

c) $f(1 + \ln 2) = (1 + \ln 2)^2 - (1 + \ln 2 - 1)e^{1+\ln 2 - 1}$

$$= 1 + 2\ln 2 + (\ln 2)^2 - (\ln 2)e^{\ln 2}$$

$$= 1 + 2\ln 2 + (\ln 2)^2 - 2\ln 2$$

$$= 1 + (\ln 2)^2.$$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		0		$1+\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$1+(\ln 2)^2$	$\searrow$	$-\infty$

$$f(0) = 0^2 - (0-1)e^{0-1} = \frac{1}{e}$$

4. f est continue et strictement croissante sur $[0;1+\ln 2]$. Donc f réalise une bijection de $[0;1+\ln 2]$ sur $f([0;1+\ln 2])$.

On a $f([0;1+\ln 2]) = [f(1+\ln 2); f(0)]$

Il s'ensuit que $f([0;1+\ln 2]) = [\frac{1}{e};1+(\ln 2)^2]$

5. **a)** f est continue et strictement décroissante sur $[1+\ln 2;+\infty[$.

On a $f([1+\ln 2;+\infty[) =]-\infty;1+(\ln 2)^2]$

Donc, f réalise une bijection de $[1+\ln 2;+\infty[$ sur $]-\infty;1+(\ln 2)^2]$.

Puisque, $0 \in \left]-\infty;1+(\ln 2)^2\right]$ alors l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[1+\ln 2;+\infty[$.

b) Vérification : $f(2{,}41) \approx 0{,}0328$ et $f(2{,}42) \approx -0{,}0183$.

Comme $f(2{,}41) \times f(2{,}42) < 0$ alors $2{,}41 < \alpha < 2{,}42$.

6. **a)** On a $(T) : y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$f'(1) = 1 \times (2 - e^{1-1}) = 2 - 1 = 1$; $f(1) = 1^2 - (1-1)e^{1-1} = 1$.

Par suite, $(T) : y = 1 \times (x-1) + 1$

$y = x$.

b) Pour tout nombre réel x, $f(x)-x = x-(x^2-(x-1)e^{x-1})$

$$= x - x^2 + (x-1)e^{x-1}$$

$$= x(1-x) + (x-1)e^{x-1}$$

$$= (x-1)(x-e^{x-1}).$$

Par conséquent, $f(x)-x=(x-1)g(x)$.

c) Pour tout nombre réel x, $f(x)-x=(x-1)g(x)$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, g(x)>0$ et $g(1)=0$. Par ailleurs, $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

D'où le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$-$	
$x-1$		$-$		$+$	
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	

Il ressort du tableau que :

$\forall x \in]-\infty;1[, f(x)-x>0$ donc (C_f) est au dessus de (T) sur $]-\infty;1[$.

$\forall x \in]1;+\infty[, f(x)-x<0$ donc (C_f) est en dessous de (T) sur $]1;+\infty[$.

$f(x)-x=0 \Leftrightarrow x=1$ donc (C_f) et (T) se coupent au point A .

7. Voir graphique.

Partie C

1. a) h est la restriction de la bijection f à l'intervalle $[0;1+\ln 2]$. Par conséquent h est strictement croissante sur $h([0;1+\ln 2]) = [\frac{1}{e};1+(\ln 2)^2]$. Il s'ensuit que h^{-1} est strictement croissante sur $[\frac{1}{e};1+(\ln 2)^2]$

b) Tableau de variation de h^{-1} :

x	$\frac{1}{e}$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $1+(\ln 2)^2$
$(h^{-1})'(x)$	$+$
$h^{-1}(x)$	$0 \nearrow 1+\ln 2$

2. **a)** $h(1) = f(1) = 1$ et $h'(1) = f'(1) = 1 \neq 0$ donc h^{-1} est dérivable en 1.

On a $(h^{-1})'(1) = \dfrac{1}{h'(h^{-1}(1))} = \dfrac{1}{h'(1)} = \dfrac{1}{1}$ donc $(h^{-1})'(1) = 1$

b) Equation de la tangente à (Γ) au point A : $y = (h^{-1})'(1)(x-1) + h^{-1}(1)$.

On a $(h^{-1})'(1) = 1$ et $h(1) = 1 \Rightarrow h^{-1}(1) = 1$

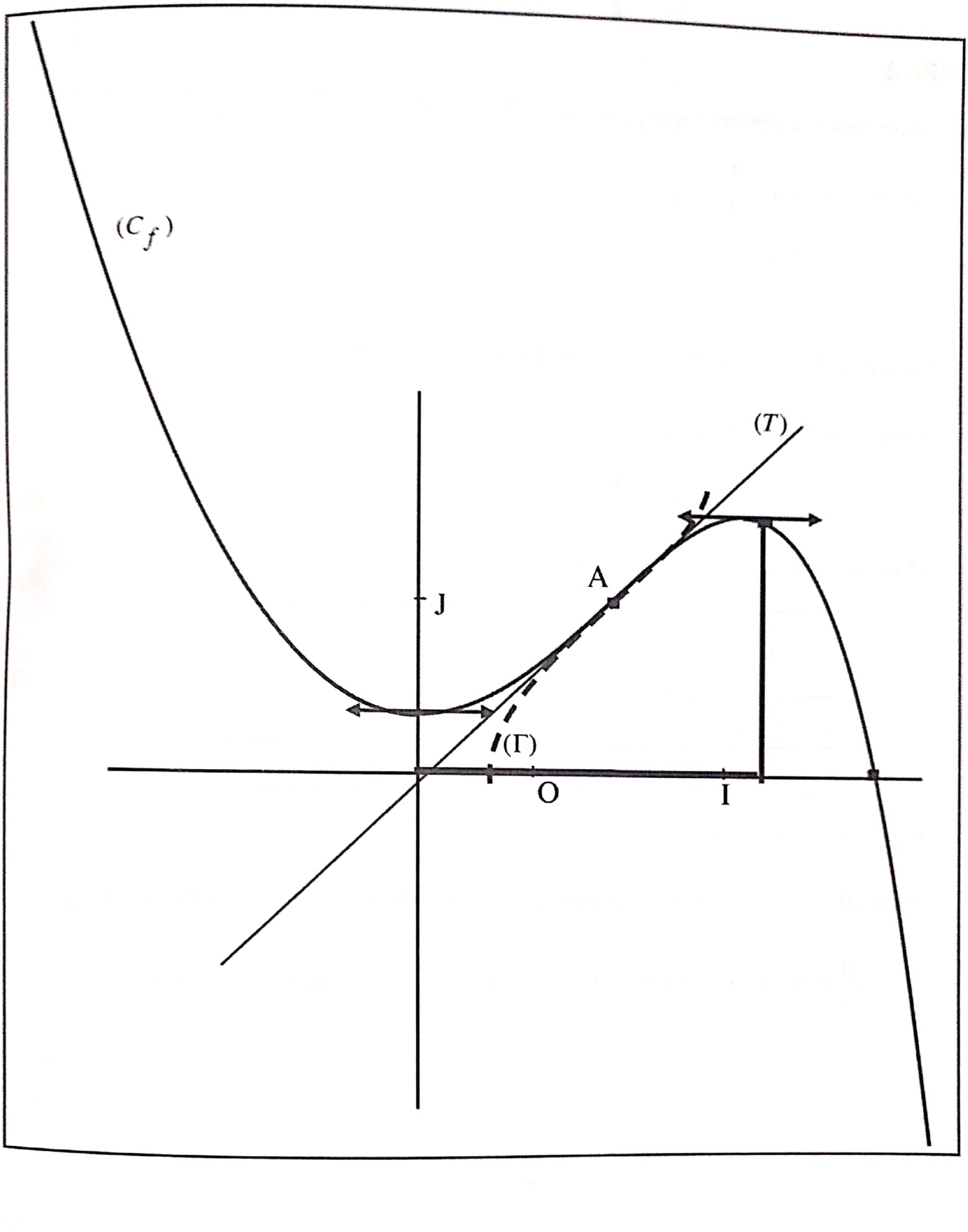
On en déduit que : $y = 1\times(x-1)+1$; $y = x$.

Donc, (T) est la tangente à (Γ) au point A.

3. (Γ) est l'image de (C_f) par la symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation $y = x$.

Voir graphique.

Tracé de (C_f), (T) et (Γ)



Scanné avec CamScanner

PROBLEME n°8

Partie A

1. Pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$,

$$g'(x) = 2\times 2x - \frac{1}{x}$$

$$= \frac{4x^2-1}{x}.$$

Variation de g : $\forall x \in]0;+\infty[$, $x > 0$. Donc, le signe de $g'(x)$ est celui de $4x^2-1$.

On a : $4x^2-1=0 \Leftrightarrow (2x-1)(2x+1)=0$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ ou } x = \frac{1}{2}.$$

D'où le tableau de signe suivant :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$4x^2-1$		$-$		$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

Il découle du tableau que :

$\forall x \in \left]0;\frac{1}{2}\right[$, $g'(x) < 0$ donc la fonction g est strictement décroissante sur $\left]0;\frac{1}{2}\right[$

$\forall x \in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$, $g'(x) > 0$ donc, la fonction g est strictement croissante sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

Tableau de variation de g

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	$\searrow$	$\frac{3}{2}+\ln 2$	$\nearrow$	

$g(\frac{1}{2}) = 2\times(\frac{1}{2})^2 + 1 - \ln(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2} + \ln 2$

2. $\frac{3}{2}+\ln(2)$ est le minimum de g sur $]0;+\infty[$ donc, $\forall x \in]0;+\infty[, g(x) \geq \frac{3}{2}+\ln 2$. De plus,

$\frac{3}{2}+\ln 2 \approx 2,19$.

Donc, $\frac{3}{2}+\ln 2 > 0$. On en déduit que : $\forall x \in]0;+\infty[, g(x) > 0$.

Partie B

1. a) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[2x-3+\frac{\ln x}{x}\right]$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-3) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$ donc, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2x-3+\frac{\ln x}{x}\right] = +\infty$

En définitive, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left[2x-3+\frac{\ln x}{x}\right]$

$= \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left[2x-3+\frac{1}{x}\times\ln x\right]$. On $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}(2x-3) = -1$

De plus, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x} \times \ln x = -\infty$.

Par conséquent, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \left[2x - 3 + \frac{1}{x} \times \ln x\right] = -\infty$. Il s'ensuit que , $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = -\infty$.

Interprétation graphique : La droite d'équation $x = 0$ est asymptote à (C).

2. **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - (2x-3)) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Donc, la droite (D) est asymptote à (C) en $+\infty$

b) $\forall x \in]0;+\infty[, f(x) - (2x-3) = \frac{\ln x}{x}$.

$\forall x \in]0;+\infty[, x > 0$ donc, le signe de $f(x) - (2x-3)$ est celui de $\ln x$.

On a : $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$; $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$ et $\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

Par conséquent, $\forall x \in]0;1[, f(x) - (2x-3) < 0$. Donc (C) est en dessous de (D) sur $]0;1[$.

Par ailleurs, $\forall x \in]1;+\infty[, f(x) - (2x-3) > 0$. donc, (C) est au dessus de (D) sur $]1;+\infty[$.

Enfin, pour $x = 0$, $f(x) - (2x-3) = 0$ donc, (C) et (D) se coupent au point d'abscisse 0.

3. **a)** $\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = 2 + \dfrac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2}$

$$= 2 + \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 1 - \ln x}{x^2}$$

$$= \frac{g(x)}{x^2}.$$

b) $\forall x \in]0;+\infty[, g(x) > 0$; $f'(x) > 0$.

Il s'ensuit que la fonction f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Tableau de variation de f

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

c) Une équation de (T) est $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.

On a : $f'(1) = \frac{g(1)}{1^2} = 2\times 1^2 + 1 - \ln 1 = 3$ et $f(0) = 2\times 1 - 3 + \frac{\ln 1}{1} = -1$.

Donc : $y = 3(x-1) - 1$

$y = 3x - 3 - 1$

$y = 3x - 4$.

4. a) f est dérivable et strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

On a $f(]0;+\infty[) =]\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$

$=]-\infty;+\infty[$.

Donc, f réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$. Puisque, $0 \in \mathbb{R}$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0;+\infty[$.

b) Justification : $f(1,3) \approx -0,19$ et $f(1,4) \approx 0,04$. Comme $f(1,3)\times f(1,4) < 0$ alors $1,3 < \alpha < 1,4$.

Partie C

1. a) $\forall x \in]0;+\infty[, h'(x) = -2x - \frac{1}{x}$

$\forall x \in]0;+\infty[, -2x - \frac{1}{x} < 0$ donc, $h'(x) < 0$.

On en déduit que la fonction h est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

b) $h(1) = -1^2 + 1 - \ln 1 = -1 + 1 = 0$.

Par ailleurs, la fonction h est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

Donc, $x < 1 \Rightarrow h(x) > h(1)$

$\Rightarrow h(x) > 0$ car $h(1) = 0$.

Et, $x > 1 \Rightarrow h(x) < h(1)$

$$\Rightarrow h(x) < 0 \text{ car } h(1) = 0$$

On conclut que : $\forall x \in]0;1[, h(x) > 0$ et $\forall x \in]1;+\infty[, h(x) < 0$.

2. **a)** $\forall x \in]0;+\infty[, \varphi'(x) = f'(x) - 3$

$$= \frac{g(x)}{x^2} - 3$$

$$= \frac{2x^2+1-\ln x}{x^2} - 3$$

$$= \frac{2x^2+1-\ln x - 3x^2}{x^2}$$

$$= \frac{-x^2+1-\ln x}{x^2}.$$

Donc, $\varphi'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$.

Autrement manière

$\forall x \in]0;+\infty[, \varphi(x) = f(x) - 3x + 4$

$$= 2x - 3 + \frac{\ln x}{x} - 3x + 4$$

$$= -x + 1 + \frac{\ln x}{x} = -x + 1 + \frac{\ln x}{x}$$

Donc, $\varphi'(x) = -1 + \dfrac{1-\ln x}{x^2}$

$$= \frac{-x^2+1-\ln x}{x^2}.$$

Il s'ensuit que $\varphi'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$.

b) $\forall x \in]0;+\infty[, x^2 > 0$. Donc, le signe de $\varphi'(x)$ est celui de $h(x)$.

On a : $\forall x \in]0;1[, h(x) > 0$. donc, $\varphi'(x) > 0$.

Par conséquent φ est strictement croissante sur $]0;1[$.

$\forall x \in]1;+\infty[, h(x) < 0$ donc, $\varphi'(x) < 0$.

Par suite, φ est strictement décroissante sur $]1;+\infty[$.

Déterminons le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x

$\varphi(1) = f(1) - (3 \times 1 - 4) = -1 + 1 = 0$

De plus, φ est strictement croissante sur $]0;1[$.

Donc, $x < 1 \Rightarrow \varphi(x) < \varphi(1)$

$\Rightarrow \varphi(x) < 0$ car $\varphi(1) = 0$

Par ailleurs, φ est strictement décroissante sur $]1;+\infty[$.

Donc, $x > 1 \Rightarrow \varphi(x) < \varphi(1)$

$\Rightarrow \varphi(x) < 0$ car $\varphi(1) = 0$

On conclut que : $\forall x \in]0;+\infty[\setminus\{1\}$, $\varphi(x) < 0$ et $\varphi(1) = 0$

c) $\forall x \in]0;+\infty[$, $f(x) - (3x-4) = \varphi(x)$.

On a : $\forall x \in]0;+\infty[\setminus\{1\}$, $\varphi(x) < 0$

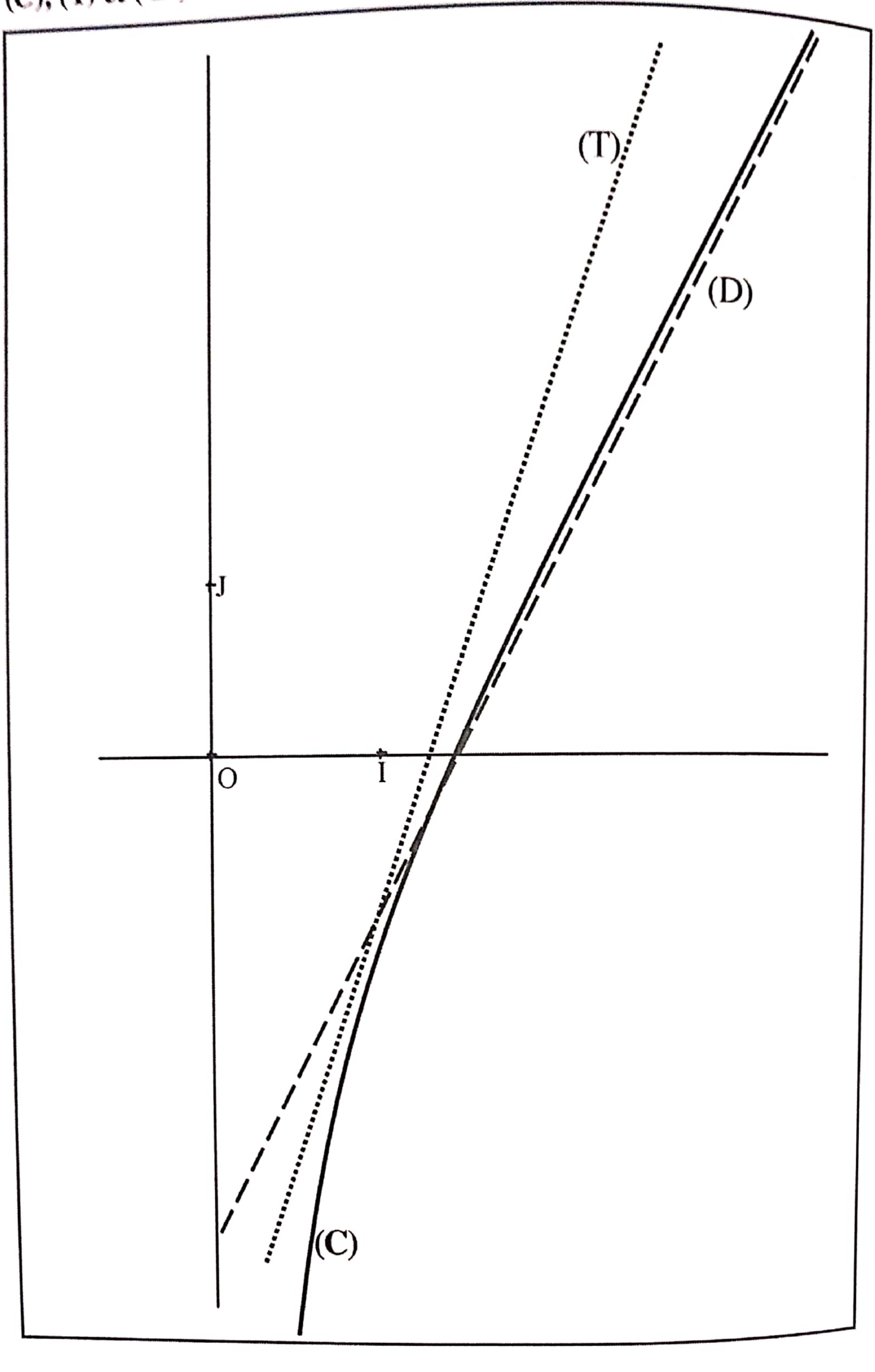
$f(x) - (3x-4) < 0$.

Donc, la courbe (C) est en dessous de (T) sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$.

Enfin, $f(x) - (3x-4) = 0$ pour $x = 1$ donc, (C) et (T) se coupent au point d'abscisse 1.

Partie D

1. Tracé de (C), (T) et (D)



Scanné avec CamScanner

2. (C) est au dessus de (D) sur $[1;+\infty[$ donc sur $[1;e]$.

Soit l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan délimitée par (C), (D) et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$. On a $\mathcal{A}=(\int_1^e (f(x)-(2x-3))dx)4cm^2$.

$$\int_1^e (f(x)-(2x-3))dx = \int_1^e (2x-3+\frac{\ln x}{x}-2x+3))dx$$

$$= \int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \int_1^e \frac{1}{x}\ln x dx$$

$$= [\ \frac{1}{2}(\ln x)^2\ ]_1^e \ = \frac{1}{2}(\ln e)^2-\frac{1}{2}(\ln 1)^2$$

$$= \frac{1}{2}.$$

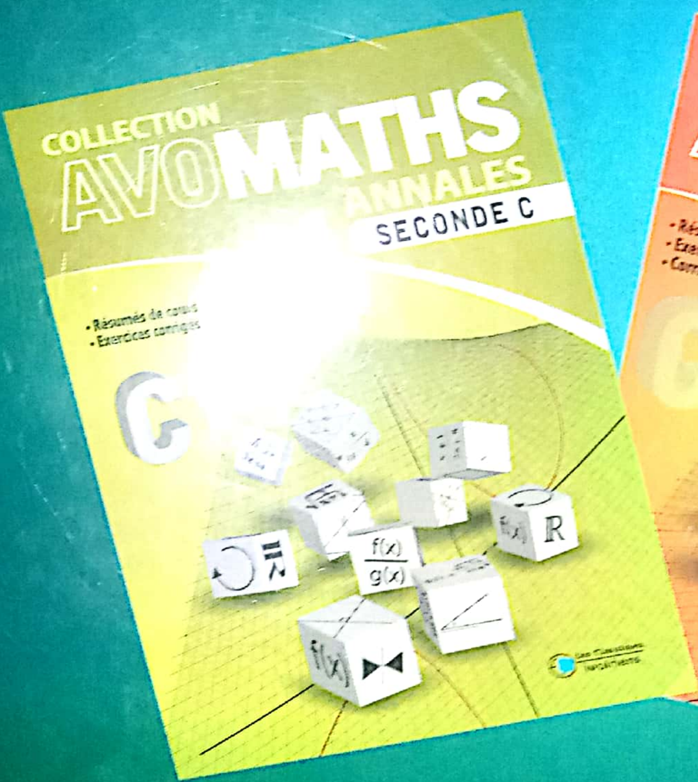
On en déduit que : $\mathcal{A}=2cm^2$.

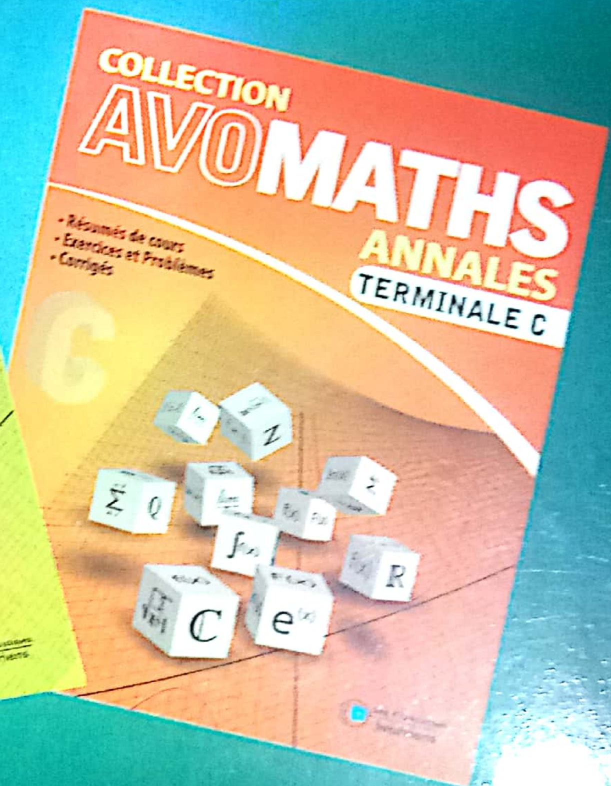
Création et Réalisation de la maquette :
Service PAO Les Classiques Ivoiriens

ISBN :
978-2-916472-94-2

Dépôt Légal :
N° 9675 du 03 Octobre 2011
04 Trimestre 2011

4500





ISBN 978-2-916472-94-2