SUITES ARITHMETIQUES ET SUITES GEOMETRIQUES

I. Suites arithmétiques

1) Définition

Exemple :
Considérons une suite numérique (u_n) où la différence entre un terme et son précédent reste constante et égale à 5.
Si le premier terme est égal à 3, les premiers termes successifs sont :
$u_0 = 3$,
$u_1 = 8$,
$u_2 = 13$,
$u_3 = 18$.
Une telle suite est appelée une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme 3.

La suite est donc définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$.

Définition : Une suite (u_n) est une suite arithmétique s'il existe un nombre r tel que pour tout entier n, on a : $u_{n+1} = u_n + r$.
Le nombre r est appelé raison de la suite.

Méthode : Démontrer si une suite est arithmétique

Vidéo https://youtu.be/YCokWYcBBOk

1) La suite (u_n) définie par : $u_n = 7 - 9n$ est-elle arithmétique ?

2) La suite (v_n) définie par : $v_n = n^2 + 3$ est-elle arithmétique ?

1) $u_{n+1} - u_n = 7 - 9(n+1) - 7 + 9n = 7 - 9n - 9 - 7 + 9n = -9$.
La différence entre un terme et son précédent reste constante et égale à -9.
(u_n) est une suite arithmétique de raison -9.

2) $v_{n+1} - v_n = (n+1)^2 + 3 - n^2 - 3 = n^2 + 2n + 1 + 3 - n^2 - 3 = 2n + 1$.
La différence entre un terme et son précédent ne reste pas constante.
(v_n) n'est pas une suite arithmétique.

Vidéo https://youtu.be/6O0KhPMHvBA

Propriété : (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.
Pour tout entier naturel n, on a : $u_n = u_0 + nr$.

Démonstration :
La suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0 vérifie la relation $u_{n+1} = u_n + r$.
En calculant les premiers termes :

$u_1 = u_0 + r$

$u_2 = u_1 + r = (u_0 + r) + r = u_0 + 2r$

$u_3 = u_2 + r = (u_0 + 2r) + r = u_0 + 3r$

…

$u_n = u_{n-1} + r = (u_0 + (n-1)r) + r = u_0 + nr$.

Méthode : Déterminer la raison et le premier terme d'une suite arithmétique

Vidéo https://youtu.be/iEuoMgBblz4

Considérons la suite arithmétique (u_n) tel que $u_5 = 7$ et $u_9 = 19$.
1) Déterminer la raison et le premier terme de la suite (u_n).
2) Exprimer u_n en fonction de n.

1) Les termes de la suite sont de la forme $u_n = u_0 + nr$

Ainsi $u_5 = u_0 + 5r = 7$ et

$u_9 = u_0 + 9r = 19$.

On soustrayant membre à membre, on obtient : $5r - 9r = 7 - 19$ donc $r = 3$.

Comme $u_0 + 5r = 7$, on a : $u_0 + 5 \times 3 = 7$ et donc : $u_0 = -8$.

2) $u_n = u_0 + nr$ soit $u_n = -8 + n \times 3$ ou encore $u_n = 3n - 8$

2) Variations

Propriété : (u_n) est une suite arithmétique de raison r.
- Si $r > 0$ alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $r < 0$ alors la suite (u_n) est décroissante.

Démonstration : $u_{n+1} - u_n = u_n + r - u_n = r$.
- Si $r > 0$ alors $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est croissante.
- Si $r < 0$ alors $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite (u_n) est décroissante.

Exemple :

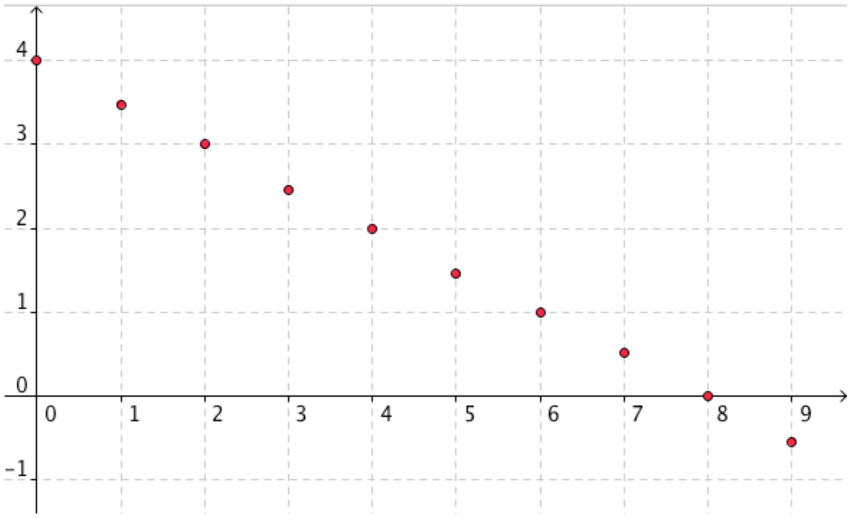
Vidéo https://youtu.be/R3sHNwOb02M

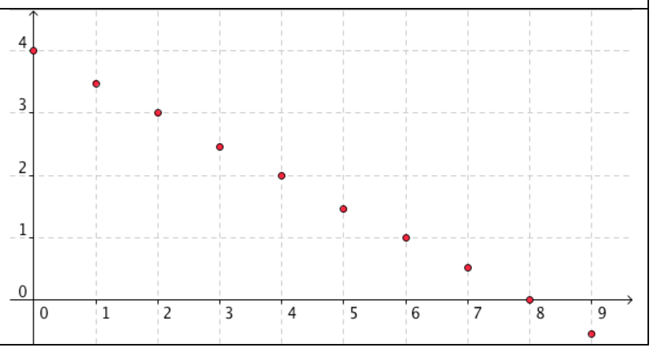
La suite arithmétique (u_n) définie par $u_n = 5 - 4n$ est décroissante car de raison négative et égale à -4.

3) Représentation graphique

Les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique sont alignés.

Exemple :
On a représenté ci-dessous la suite de raison -0,5 et de premier terme 4.



RÉSUMÉ	(u_n) une **suite arithmétique** - de **raison** r - de premier terme u_0.	**Exemple :** $r = -0,5$ et $u_0 = 4$
Définition	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = u_n - 0,5$ La différence entre un terme et son précédent est égale à -0,5.
Propriété	$u_n = u_0 + nr$	$u_n = 4 - 0,5n$
Variations	Si $r > 0$: (u_n) est croissante. Si $r < 0$: (u_n) est décroissante.	$r = -0,5 < 0$ La suite (u_n) est décroissante.
Représentation graphique	Remarque : Les points de la représentation graphique sont alignés.	

II. Suites géométriques

1) Définition

Exemple :
Considérons une suite numérique (u_n) où le rapport entre un terme et son précédent reste constant et égale à 2.
Si le premier terme est égal à 5, les premiers termes successifs sont :
u_0 = 5,
u_1 = 10,
u_2 = 20,
u_3 = 40.
Une telle suite est appelée une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 5.

La suite est donc définie par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$

Vidéo https://youtu.be/WTmdtbQpa0c

Définition : Une suite (u_n) est une suite géométrique s'il existe un nombre q tel que pour tout entier n, on a : $u_{n+1} = q \times u_n$.
Le nombre q est appelé raison de la suite.

Méthode : Démontrer si une suite est géométrique
Vidéo https://youtu.be/YPbEHxuMaeQ

La suite (u_n) définie par : $u_n = 3 \times 5^n$ est-elle géométrique ?

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3 \times 5^{n+1}}{3 \times 5^n} = \frac{5^{n+1}}{5^n} = 5^{n+1-n} = 5$.
Le rapport entre un terme et son précédent reste constant et égale à 5.
(u_n) est une suite géométrique de raison 5 et de premier terme $u_0 = 3 \times 5^0 = 3$.

Exemple concret :
On place un capital de 500€ sur un compte dont les intérêts annuels s'élèvent à 4%.
Chaque année, le capital est multiplié par 1,04.
Ce capital suit une progression géométrique de raison 1,04.

On a ainsi :
$u_1 = 1{,}04 \times 500 = 520$ $u_2 = 1{,}04 \times 520 = 540{,}80$ $u_3 = 1{,}04 \times 540{,}80 = 562{,}432$
De manière générale : $u_{n+1} = 1{,}04 \times u_n$ avec $u_0 = 500$
On peut également exprimer u_n en fonction de n : $u_n = 500 \times 1{,}04^n$

Propriété : (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.
Pour tout entier naturel n, on a : $u_n = u_0 \times q^n$.

Démonstration :
La suite géométrique (u_n) de raison q et de premier terme u_0 vérifie la relation
$u_{n+1} = q \times u_n$.
En calculant les premiers termes :
$u_1 = q \times u_0$
$u_2 = q \times u_1 = q \times \left(q \times u_0\right) = q^2 \times u_0$
$u_3 = q \times u_2 = q \times \left(q^2 \times u_0\right) = q^3 \times u_0$
…
$u_n = q \times u_{n-1} = q \times \left(q^{n-1} u_0\right) = q^n \times u_0$.

Méthode : Déterminer la raison et le premier terme d'une suite géométrique
Vidéo https://youtu.be/wUfleWpRr10

Considérons la suite géométrique (u_n) tel que $u_4 = 8$ et $u_7 = 512$.
Déterminer la raison et le premier terme de la suite (u_n).

Les termes de la suite sont de la forme $u_n = q^n \times u_0$.
Ainsi $u_4 = q^4 \times u_0 = 8$ et
$u_7 = q^7 \times u_0 = 512$.
Ainsi : $\dfrac{u_7}{u_4} = \dfrac{q^7 \times u_0}{q^4 \times u_0} = q^3$ et $\dfrac{u_7}{u_4} = \dfrac{512}{8} = 64$ donc $q^3 = 64$.
On utilise la fonction racine troisième de la calculatrice pour trouver le nombre qui élevé au cube donne 64.
Ainsi $q = \sqrt[3]{64} = 4$
Comme $q^4 \times u_0 = 8$, on a : $4^4 \times u_0 = 8$ et donc : $u_0 = \dfrac{1}{32}$.

2) Variations

Propriété : (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme non nul u_0.
Pour $u_0 > 0$:
- Si q > 1 alors la suite (u_n) est croissante.
- Si 0 < q < 1 alors la suite (u_n) est décroissante.

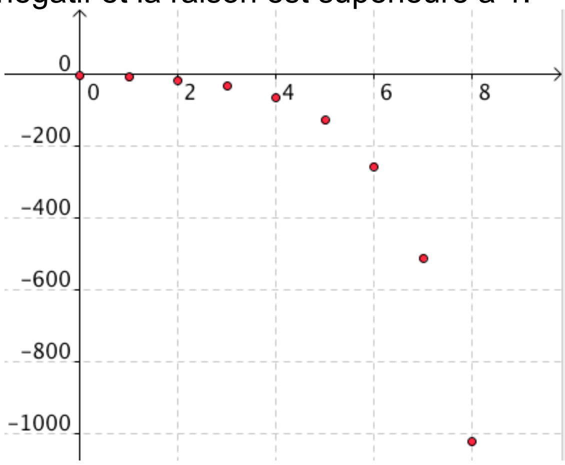
Pour $u_0 < 0$:
- Si q > 1 alors la suite (u_n) est décroissante.
- Si 0 < q < 1 alors la suite (u_n) est croissante.

Démonstration dans le cas où u_0 > 0 :
$u_{n+1} - u_n = q^{n+1}u_0 - q^n u_0 = u_0 q^n (q-1)$.
- Si q > 1 alors $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est croissante.
- Si 0 < q < 1 alors $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite (u_n) est décroissante.

Exemple :

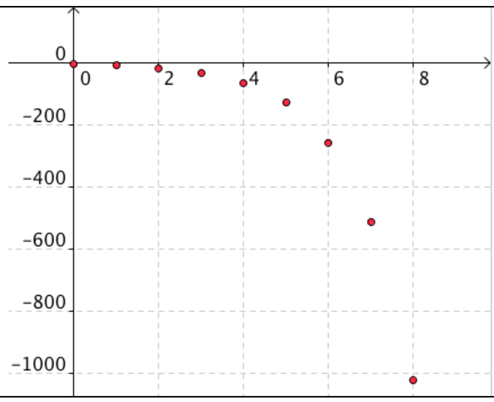
Vidéo https://youtu.be/vLshnJqW-64

La suite géométrique (u_n) définie par $u_n = -4 \times 2^n$ est décroissante car le premier terme est négatif et la raison est supérieure à 1.



	A	B
1	n	u_n
2	0	-4
3	1	-8
4	2	-16
5	3	-32
6	4	-64
7	5	-128
8	6	-256
9	7	-512
10	8	-1024

Remarque : Si la raison q est négative alors la suite géométrique n'est pas monotone.

RÉSUMÉ	(u_n) une **suite géométrique** de **raison** q de premier terme u_0.	**Exemple :** $q = 2$ et $u_0 = -4$
Définition	$u_{n+1} = q \times u_n$	$u_{n+1} = 2 \times u_n$ Le rapport entre un terme et son précédent est égal à 2.
Propriété	$u_n = u_0 \times q^n$	$u_n = -4 \times 2^n$
Variations	Pour $u_0 > 0$: Si q > 1 : (u_n) est croissante. Si 0 < q < 1 : (u_n) est décroissante. Pour $u_0 < 0$: Si q > 1 : (u_n) est décroissante. Si 0 < q < 1 : (u_n) est croissante.	$u_0 = -4 < 0$ $q = 2 > 1$ La suite (u_n) est décroissante.
Représentation graphique	Remarque : Si q < 0 : la suite géométrique n'est ni croissante ni décroissante.	

III. Sommes de termes consécutifs

1) Cas d'une suite arithmétique

Propriété : n est un entier naturel non nul alors on a : $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$

Remarque : Il s'agit de la somme des n+1 premiers termes d'une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme 1.

Démonstration :

	1	+	2	+	3	+ ...	+	n-1	+	n
+	n	+	n-1	+	n-2	+ ...	+	2	+	1
	(n+1)	+	(n+1)	+	(n+1)	+ ...	+	(n+1)	+	(n+1)

= n x (n+1)

donc : $2\times(1+2+3+...+n)=n(n+1)$

et donc : $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

Méthode : Calculer la somme des termes d'une suite arithmétique

Vidéo https://youtu.be/WeDtB9ZUTHs

Vidéo https://youtu.be/iSfevWwk8e4

Calculer les sommes S_1 et S_2 suivantes :

$S_1=1+2+3+...+348$

$S_2=33+36+39+...+267$

$S_1=1+2+3+...+348$

$=\frac{348\times349}{2}$

$=60726$

$S_2=33+36+39+...+267$

$=3\times(11+12+...+89)$

$=3\times((1+2+...+89)-(1+2+...+10))$

$=3\times\left(\frac{89\times90}{2}-\frac{10\times11}{2}\right)$

$=11850$

Une anecdote relate comment le mathématicien allemand *Carl Friedrich Gauss* (1777 ; 1855), alors âgé de 10 ans a fait preuve d'un talent remarquable pour le calcul mental. Voulant occuper ses élèves, le professeur demande d'effectuer des additions, plus exactement d'effectuer la somme des nombres de 1 à 100. Après très peu de temps, le jeune *Gauss* impressionne son professeur en donnant la réponse correcte. Sa technique consiste à regrouper astucieusement les termes extrêmes par deux. Sans le savoir encore, *Gauss* a découvert la formule permettant de calculer la somme des termes d'une série arithmétique.

2) Cas d'une suite géométrique

Propriété : n est un entier naturel non nul et q un réel différent de 1 alors on a :

$$1+q+q^2+...+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Remarque : Il s'agit de la somme des n+1 premiers termes d'une suite géométrique de raison q et de premier terme 1.

Démonstration :

$$S = 1+q+q^2+...+q^n$$
$$q \times S = q+q^2+q^3+...+q^{n+1}$$

Ainsi :

$$S - q\times S = \left(1+q+q^2+...+q^n\right)-\left(q+q^2+q^3+...+q^{n+1}\right)$$
$$S - q\times S = 1-q^{n+1}$$
$$S\times\left(1-q\right) = 1-q^{n+1}$$
$$S = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Méthode : Calculer la somme des termes d'une suite géométrique

Vidéo https://youtu.be/eSDrE1phUXY

Calculer la somme S suivante :

$$S = 1+3+3^2+...+3^{13}$$

$$S = 1+3+3^2+...+3^{13}$$
$$= \frac{1-3^{14}}{1-3} = 2391484$$