



LEÇON 08 : NOMBRES COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE DU PLAN

1. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Vous avez vu cette année un nouvel ensemble de nombres qui vous a permis de résoudre certaines équations qui n'ont pas de solution dans l'ensemble des nombres réels. C'est l'ensemble des nombres complexes qu'on a noté \mathbb{C} .

Dans cette nouvelle leçon, l'ensemble \mathbb{C} va encore nous donner de puissants outils pour démontrer certaines propriétés

LEÇON : NOMBRES COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE DU PLAN

Plan du cours

I. Nombres complexes et géométrie

II. Configurations du plan et nombres complexes

III. Écritures complexes et transformations du plan

IV. Similitude directe

V. Reconnaître une similitude directe définie par son écriture complexe

VI. Détermination de l'écriture complexe d'une similitude directe donnée par son centre, son rapport et son angle.

VII. Construction de l'image d'un point par une similitude directe définie par son centre, son rapport et son angle.

VIII. Similitude directe définie par deux points distincts et leurs images

IX. Similitude directe définie par son centre, un point et son image

2. RESUME DE COURS

Dans toute cette leçon, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.

I. Nombres complexes et géométrie

1. Interprétation de $\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}\right)$ et de $\left|\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}\right|$

a) Interprétation de $\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}\right)$

Propriété

Si A, B, C et D sont des points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D tels que $A \neq B$ et $C \neq D$, alors $\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}\right)$ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{BA})$.
Autrement dit : $\text{mes}(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{BA}) = \arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Exercice

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives $-1 + i\sqrt{3}$; 2 et $-1 - i\sqrt{3}$.

Détermine la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA})$.

Solution

$z_A \neq z_B$ et $z_B \neq z_C$. Donc les points A, B et C sont tels que $A \neq B$ et $B \neq C$.

On a : $\text{Mes}(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) = \text{Arg}\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right)$.

Calculons $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$

$$\begin{aligned}\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} &= \frac{-1 + i\sqrt{3} - 2}{-1 - i\sqrt{3} - 2} \\ &= \frac{-3 + i\sqrt{3}}{-3 - i\sqrt{3}} \\ &= \frac{(-3 + i\sqrt{3})(-3 + i\sqrt{3})}{(-3 - i\sqrt{3})(-3 + i\sqrt{3})} \\ &= \frac{9 - 6i\sqrt{3} - 3}{9 + 3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{6 - 6i\sqrt{3}}{12} \\
&= \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \\
&= \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

Posons $\text{Arg}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \alpha$.

$$\text{On a } \begin{cases} \cos\alpha = \frac{1}{2} \\ \sin\alpha = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ Donc } \alpha = -\frac{\pi}{3}$$

$$\begin{aligned}
\text{D'où : Mes}(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) &= \text{Arg}\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right) \\
&= \text{Arg}\left(\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}\right) \\
&= -\frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Par suite la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA})$ est $-\frac{\pi}{3}$.

b) Interprétation de $\left|\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}\right|$

Propriété

Si A, B, C et D sont des points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D tels que

$$C \neq D, \text{ alors : } \left|\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}\right| = \frac{AB}{CD}.$$

Exercice

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.

On considère les points non alignés A, B et C d'affixes respectives $-1 + i\sqrt{3}$; 2 et $-1 - i\sqrt{3}$

1) Donne une interprétation de $\left|\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right|$.

2) Déduis-en que : $AB = BC$.

Solution

1) On a : $z_B \neq z_C$; ce qui justifie l'existence du quotient $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$

$$\left|\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right| = \frac{AB}{BC}$$

2) Calculons $\left|\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right|$

$$\left|\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right| = \left|\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

D'où : $\frac{BA}{BC} = 1$ et par suite $AB = BC$.

II. Configurations du plan et nombres complexes

1) Droites parallèles

Propriété:

A, B, C et D sont des points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D tels que :
 $A \neq B$ et $C \neq D$.

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D} \in \mathbb{R}^*$.

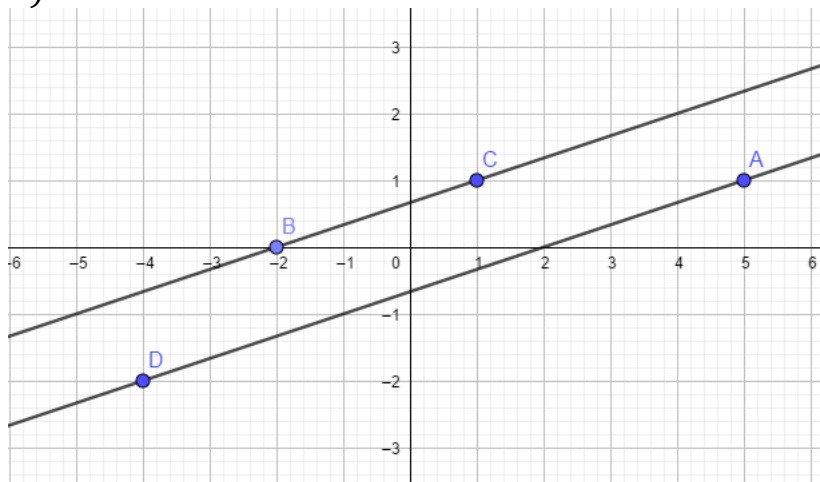
Exercice

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $5 + i$; -2 ; $1 + i$ et $-4 - 2i$

- 1) Trace les droites (AD) et (BC).
- 2) Démontre que les droites (AD) et (BC) sont parallèles.

Solution

1)



2) On a : $z_A \neq z_B$ et $z_D \neq z_C$. Donc $A \neq B$ et $D \neq C$.

Calculons : $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_B}$

$$\begin{aligned} \frac{z_D - z_A}{z_C - z_B} &= \frac{-4 - 2i - (5 + i)}{1 + i - (-2)} \\ &= \frac{-9 - 3i}{3 + i} \\ &= \frac{-3(3+i)}{3+i} = -3. \end{aligned}$$

$-3 \in \mathbb{R}^*$. Donc $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_B} \in \mathbb{R}^*$. Par suite les droites (AD) et (BC) sont parallèles.

2) Alignements de trois points

Propriété:

A, B et C sont des points tels que $A \neq B$ et $B \neq C$ d'affixes respectives z_A , z_B et z_C .

Les points distincts A, B, et C sont alignés si et seulement si $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} \in \mathbb{R}^*$.

Exercice

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $2 + i\sqrt{3}$; -1 et $11 + 4i\sqrt{3}$

Démontrez que les points A, B et C sont alignés.

Solution

On a : $z_A \neq z_B$ et $z_B \neq z_C$ donc $A \neq B$ et $B \neq C$.

Calculons : $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$

$$\begin{aligned}\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} &= \frac{2 + i\sqrt{3} - (-1)}{11 + 4i\sqrt{3} - (-1)} \\ &= \frac{3 + i\sqrt{3}}{12 + 4i\sqrt{3}} \\ &= \frac{3 + i\sqrt{3}}{4(3 + i\sqrt{3})} \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

$\frac{1}{4} \in \mathbb{R}^*$. Donc $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} \in \mathbb{R}^*$. Par suite les points A, B et C sont alignés.

3) Droites perpendiculaires

Propriété

A, B, C et D sont des points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D tels que : $A \neq B$ et $C \neq D$.

Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D} \in i\mathbb{R}^*$.

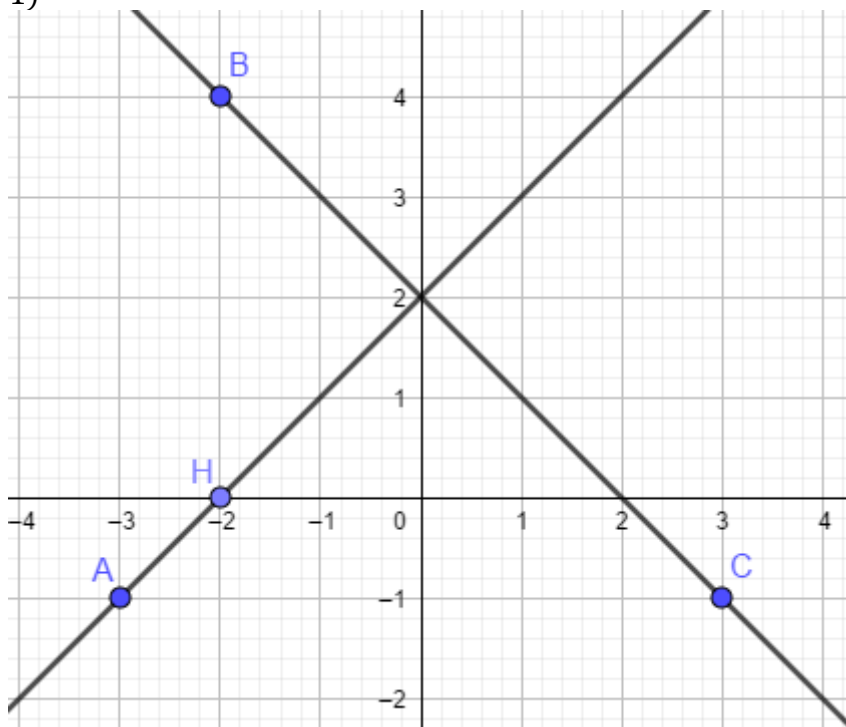
Exercice

On considère les points A, B, C et H d'affixes respectives $-3 - i$; $-2 + 4i$; $3 - i$ et -2 .

- 1) Trace les droites (AH) et (BC).
- 2) Démontre que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

Solution

1)



2) On a : $z_A \neq z_H$ et $z_B \neq z_C$ donc $A \neq H$ et $C \neq B$.

$$\begin{aligned} \text{Calculons } \frac{z_B - z_C}{z_H - z_A} &= \frac{-2 + 4i - (3 - i)}{-2 - (-3 - i)} \\ &= \frac{-5 + 5i}{-5 + 5i} \\ &= \frac{1 + i}{(-5 + 5i)(1 - i)} \\ &= \frac{(1 + i)(1 - i)}{-5 + 5i + 5i + 5} \\ &= \frac{1 + 1}{-5 + 5i + 5i + 5} \\ &= \frac{10i}{2} \\ &= 5i \end{aligned}$$

$5i \in i\mathbb{R}^*$. Donc les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

4) Points cocycliques

(C'est-à-dire des points situés sur un cercle)

Propriété

A, B, C et D sont des points deux à deux distincts et non alignés d'affixes respectives z_A , z_B , z_C et z_D .

A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} ; \frac{z_C - z_B}{z_D - z_B} \in \mathbb{R}^*$

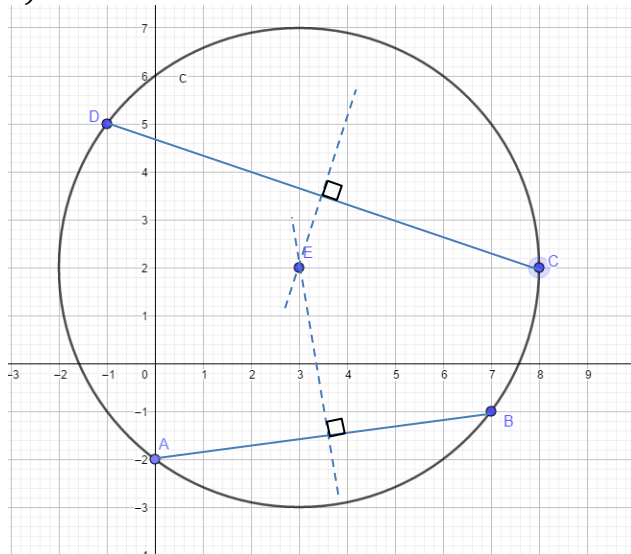
Exercice

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé (O, I, J), on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $-2i$; $7 - i$ et $8 + 2i$ et $-1 + 5i$.

- Place les points A, B, C et D dans le repère.
- Démontre que les points A, B, C et D sont cocycliques.

Solution

a)



b) On a : $z_B \neq z_A$ et $z_B \neq z_C$. Calculons $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}$ et $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_C}$

$$\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-1 + 5i - (-2i)}{7 - i - (-2i)}$$

$$= \frac{-1+7i}{7+i} = \frac{(-1+7i)(7-i)}{(7+i)(7-i)} = \frac{-7+i+49i+7}{49+1} = \frac{50i}{50} = i$$

$$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_C} = \frac{-1+5i-(8+2i)}{7-i-(8+2i)} = \frac{-9+3i}{-1-3i} = \frac{(-9+3i)(-1+3i)}{(-1-3i)(-1+3i)} = \frac{9-27i-3i-9}{1+9} = \frac{-30i}{10} = -3i$$

$$\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} : \frac{z_D - z_C}{z_B - z_C} = \frac{i}{-3i} = -\frac{1}{3}$$

Conclusion

$\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = i$ donc A, B et D sont non alignés.

De plus $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} : \frac{z_D - z_C}{z_B - z_C} \in \mathbb{R}^*$.

Donc les points A, B, C et D sont cocycliques.

5) Figures géométriques et nombres complexes

Propriétés

A, B et C sont des points non alignés d'affixes respectives z_A , z_B et z_C .

- Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in i\mathbb{R}^*$.

- Le triangle ABC est isocèle en A si et seulement si

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\alpha} \text{ ou } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\alpha}, \text{ avec } 0 < \alpha < \pi$$

- Le triangle ABC est rectangle et isocèle en A si et seulement si $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i$ ou $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = -i$.

- Le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Exercice 1

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O, I, J), on considère les points A, B et C d'affixes respectives $1 + i$; 3 et $3 + 5i$.

a) Place les points A, B et C dans le repère (O, I, J).

b) Démontre que le triangle ABC est rectangle en A.

Solution

<p>a)</p>	<p>b) On a : $z_A \neq z_B$ et $z_C \neq z_A$. Donc $A \neq B$ et $C \neq A$.</p> <p>Calculons : $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$</p> $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{3 - (1 + i)}{3 + 5i - (1 + i)}$ $= \frac{2 - i}{2 + 4i}$ $= \frac{(2 - i)(2 - 4i)}{(2 + 4i)(2 - 4i)}$ $= \frac{4 - 8i - 2i - 4}{4 - 8i - 2i - 4}$ $= \frac{-10i}{-10i} = 1$ <p>$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in i\mathbb{R}^*$. Donc le triangle ABC est rectangle en A.</p>
-----------	--

Exercice 2

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $-3 + 2i$; $-2 - 3i$ et $3 - 2i$

Démontre que le triangle ABC est rectangle isocèle en B.

Solution

On a : $z_A \neq z_B$ et $z_C \neq z_B$. Donc $A \neq B$ et $C \neq B$.

Calculons : $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$

$$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{-3 + 2i - (-2 - 3i)}{3 - 2i - (-2 - 3i)} = \frac{-1 + 5i}{5 + i} = \frac{(-1 + 5i)(5 - i)}{(5 + i)(5 - i)} = \frac{-5 + i + 25i + 5}{25 + 1} = i$$

$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = i$, donc le triangle est rectangle isocèle en B.

Exercice 3

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $-1 + i\sqrt{3}$; 2 et $-1 - i\sqrt{3}$.
Démontrez que le triangle ABC est équilatéral.

Solution

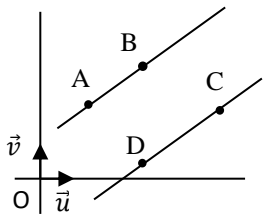
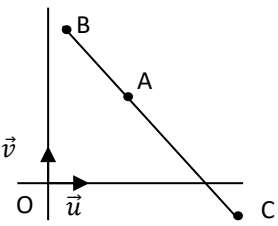
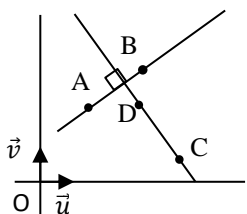
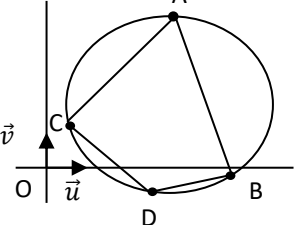
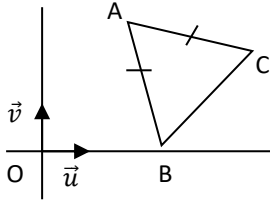
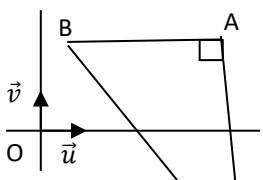
On a : $z_A \neq z_B$ et $z_C \neq z_B$. Les points A, B et C sont $A \neq B$ et $C \neq B$.

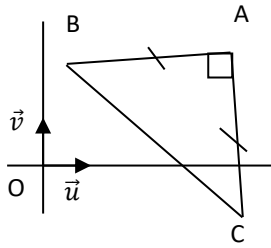
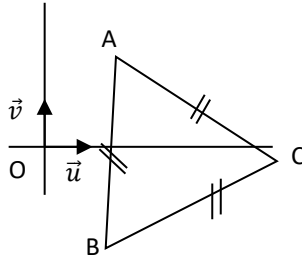
Calculons : $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$

$$\begin{aligned}\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} &= \frac{-1 + i\sqrt{3} - 2}{-1 - i\sqrt{3} - 2} = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{-3 - i\sqrt{3}} = \frac{(-3 + i\sqrt{3})(-3 + i\sqrt{3})}{9 + 3} = \frac{9 - 6i\sqrt{3} - 3}{12} = \frac{6 - 6i\sqrt{3}}{12} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ &= e^{-i\frac{\pi}{3}},\end{aligned}$$

$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$, donc ABC est un triangle équilatéral.

Tableau récapitulatif

Configuration	Caractérisation géométrique	Caractérisation complexe
<p>Droites parallèles</p> 	<p>Il existe un nombre réel λ non nul tel que :</p> $\overrightarrow{CD} = \lambda \overrightarrow{AB}.$ <p>ou</p> $\text{mes}(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = k\pi; k \in \mathbb{Z}$	$\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = k\pi;$ $k \in \mathbb{Z}$ <p>ou</p> $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$
<p>Points A, B, C alignés.</p> 	$\text{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$
<p>Droites perpendiculaires</p> 	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ <p>ou</p> $\text{mes}(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $; k \in \mathbb{Z}$	$\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$ <p>ou</p> $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$
<p>Points A, B, C, D non alignés cocycliques</p> 	$\text{mes}(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \text{mes}(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ <p>et</p> $\text{mes}(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \neq k\pi,$ $k \in \mathbb{Z}$	$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}; \frac{z_B - z_D}{z_A - z_D} \in \mathbb{R}^*$
<p>Triangle ABC isocèle en A.</p> 	$AB = AC \text{ et } \text{mes}\hat{A} = \alpha$ $(0 < \alpha < \pi).$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\alpha}$ <p>ou</p> $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\alpha}$
<p>Triangle ABC rectangle en A.</p> 	$\text{mes}\hat{A} = \frac{\pi}{2}$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = bi, \text{ avec}$ $b \in \mathbb{R}^*$

<p>Triangle ABC rectangle et isocèle en A.</p> 	<p>$AB = AC$ et $\text{mes}\hat{A} = \frac{\pi}{2}$.</p>	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$ <p>ou</p> $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i$
<p>Triangle ABC équilatéral.</p> 	<p>$AB = AC$ et $\text{mes}\hat{A} = \frac{\pi}{3}$.</p>	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ <p>ou</p> $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Exercice de maison

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct.

On donne les points A, B, C, D et K d'affixes respectives $2 + i$, $2 - i$, $5 - 2i$, $5 + 2i$ et 4.

Justifie que :

- 1- les droites (AB) et (CD) sont parallèles ;
- 2- les points I, J et B sont alignés ;
- 3- les droites (OK) et (DC) sont perpendiculaires ;
- 4- le triangle JBD est rectangle en B ;
- 5- les points A, B, C et D sont cocycliques.

III. Écritures complexes et transformations du plan

1. Définition de transformation du plan et d'écriture complexe

Définition

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).

- Une transformation du plan est une application bijective du plan dans le plan.
- Soit F une transformation du plan qui à tout point M associe le point M'. L'application bijective f de \mathbb{C} dans \mathbb{C} qui à l'affixe z de M, associe l'affixe z' de M' s'appelle la transformation complexe associée à F.

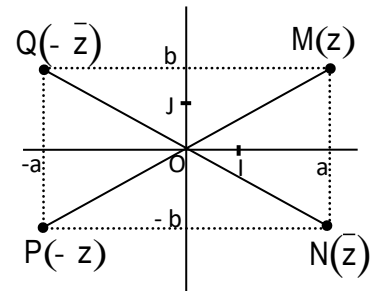
L'application F s'appelle la transformation ponctuelle associée à f .
L'expression de z' en fonction de z s'appelle l'écriture complexe de F .

2. Ecritures complexes de symétrie centrale de centre O et de symétries orthogonales d'axes (OI) et (OJ) dans le repère (O, I, J) .

Propriété

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) .

- La symétrie orthogonale d'axe (OI) a pour écriture complexe : $z' = \bar{z}$.
- La symétrie centrale de centre O a pour écriture complexe : $z' = -z$.
- La symétrie orthogonale d'axe (OJ) a pour écriture complexe : $z' = -\bar{z}$.



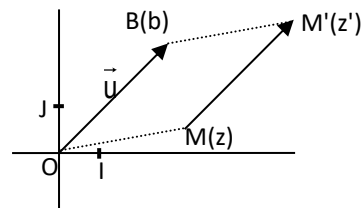
3. Ecriture complexe d'une translation, d'une homothétie et d'une rotation

a) Translation

$t_{\vec{u}}$ est la translation de vecteur \vec{u} d'affixe b , M et M' sont les points du plan d'affixes respectives z et z' .

$$\begin{aligned} \text{On a : } M' = t_{\vec{u}}(M) &\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}. \\ &\Leftrightarrow z' - z = b \\ &\Leftrightarrow z' = z + b \end{aligned}$$

La translation de vecteur \vec{u} d'affixe b a pour écriture complexe : $z' = z + b$.



Exercice

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé.

On donne le vecteur \vec{u} d'affixe $1 - 2i$.

- 1) Donne l'écriture complexe de la translation t de vecteur \vec{u} .
- 2) Détermine les affixes des images respectives A' et B' par t de chacun des points A et B , d'affixes respectives $3 - i$ et 5 .

Solution

1) L'écriture complexe de la translation t de vecteur \vec{u} d'affixe $1 - 2i$ est :

$$z' = z + 1 - 2i$$

2) Déterminons les affixes des images A' et B' respectives de A et de B par t .

$$z_{A'} = z_A + 1 - 2i$$

$$\text{On a : } z_{A'} = 3 - i + 1 - 2i = 4 - 3i$$

$$\text{Donc } z_{A'} = 4 - 3i$$

$$z_{B'} = z_B + 1 - 2i$$

$$\text{On a : } z_{B'} = 5 + 1 - 2i = 6 - 2i$$

$$\text{Donc : } z_{B'} = 6 - 2i$$

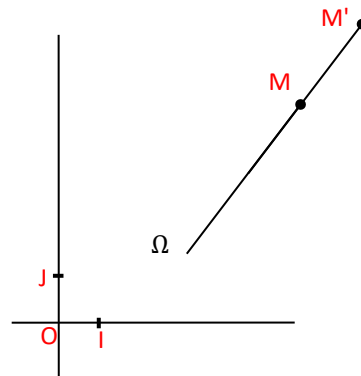
b) Homothétie de centre Ω et de rapport $k, k \in \mathbb{R}^*$

h est l'homothétie de centre Ω d'affixe Z_Ω et de rapport $k, k \in \mathbb{R}^*$.

M et M' sont les points du plan d'affixes respectives z et z' . On a :

$$\begin{aligned} M' = h(M) &\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M} \\ &\Leftrightarrow Z' - Z_\Omega = k(Z - Z_\Omega) \\ &\Leftrightarrow Z' = k(Z - Z_\Omega) + Z_\Omega \end{aligned}$$

L'homothétie de centre Ω d'affixe Z_Ω et de rapport k a pour écriture complexe : $Z' = k(Z - Z_\Omega) + Z_\Omega$



Exercice

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé.

Détermine l'écriture complexe associée à l'homothétie h de rapport -2 et de centre Ω d'affixe $3 - i$.

Solution

L'écriture complexe associée à l'homothétie h de rapport -2 et de centre Ω d'affixe $3 - i$ est : $z' = -2(z - (3 - i)) + (3 - i)$.

Par suite : $z' = -2z + 9 - 3i$.

c) Rotation de centre Ω et d'angle $\theta, \theta \in]-\pi, \pi]$

r est la rotation de centre de centre Ω d'affixe Z_Ω et d'angle orienté de mesure principale θ .

• M et M' sont les points du plan d'affixes respectives z et z' tels que M est distinct de Ω . On a :

$$M' = r(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \text{Mes}(\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \end{cases}$$

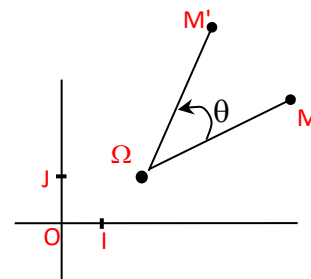
• $r(\Omega) = \Omega$

On a : $\frac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega} = e^{i\theta}$

$z' = e^{i\theta}(z - z_\Omega) + z_\Omega$

La rotation de centre Ω d'affixe Z_Ω et d'angle orienté de mesure principale θ a pour écriture complexe :

$z' = e^{i\theta}(z - z_\Omega) + z_\Omega$



Exercice

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct.

Trouve l'écriture complexe de la rotation r de centre Ω d'affixe $i\sqrt{3}$ et d'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{3}$.

Solution

La rotation de centre Ω d'affixe Z_Ω et d'angle orienté de mesure principale θ a pour écriture complexe : $z' = e^{i\theta}(z - z_\Omega) + z_\Omega$

Or $z_\Omega = i\sqrt{3}$ et $\theta = \frac{\pi}{3}$

Donc $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - i\sqrt{3}) + i\sqrt{3}$

Comme $e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$

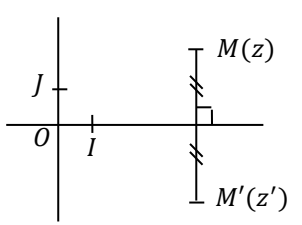
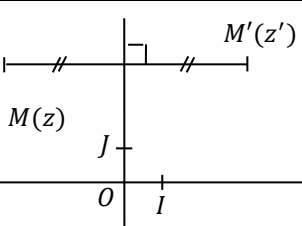
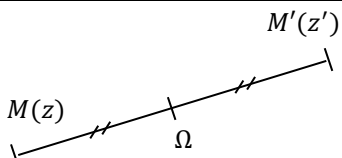
On a : $z' = \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z - i\sqrt{3}) + i\sqrt{3}$

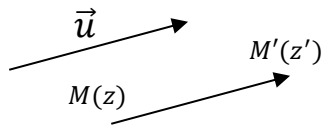
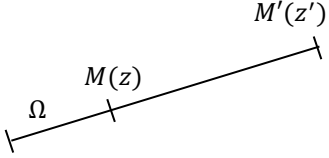
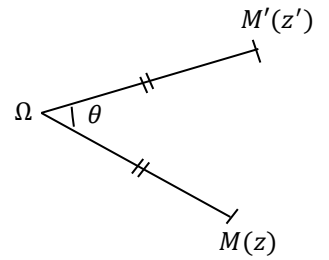
$z' = \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - i\sqrt{3} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\sqrt{3}$

Par suite : $z' = \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - i \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} + i\sqrt{3}$

On en déduit que : $z' = \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \frac{3}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$

4) Tableau récapitulatif des écritures complexes des transformations usuelles

Transformation du plan	Image $M'(z')$ d'un point $M(z)$	Définition géométrique	Ecriture complexe
Symétrie par rapport à l'axe (OI)		La droite (OI) est la médiatrice du segment $[MM']$	$z' = \bar{z}$
Symétrie par rapport à l'axe (OJ)		La droite (OJ) est la médiatrice du segment $[MM']$	$z' = -\bar{z}$
Symétrie centrale de Centre Ω		$\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$	$Z' - Z_\Omega = -(Z - Z_\Omega)$

Translation de vecteur \vec{u} d'affixe b		$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	$z' = z + b$
Homothétie de Centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k ($k \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$)		$\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$	$Z' - Z_\Omega = k(Z - Z_\Omega)$
Rotation de Centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ		$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \text{mes}(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \end{cases}$	$Z' - Z_\Omega = e^{i\theta} (Z - Z_\Omega)$

IV. Similitude directe

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.

1. Définition

Une similitude directe est une transformation du plan dont l'écriture complexe est de la forme : $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Exemple :

Toute translation, toute homothétie et toute rotation est une similitude directe.

2. Propriété

Soit s une similitude directe d'écriture complexe : $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

* Si $a = 1$, alors s est la translation de vecteur d'affixe b .

* Si $a \neq 1$ alors s est la similitude directe de centre d'affixe $\frac{b}{1-a}$, de rapport $|a|$, d'angle $\text{Arg}(a)$.

Vocabulaire

Le centre, le rapport et l'angle d'une similitude directe sont appelés ses éléments caractéristiques.

Remarque

- Toute rotation d'angle α est une similitude directe de rapport 1 et d'angle α .
- Toute homothétie de rapport $k (k > 0)$ est une similitude directe de rapport k et d'angle nul.
- Toute homothétie de rapport $k (k < 0)$ est une similitude directe de rapport $-k$ et d'angle π .

Exercice

Détermine les éléments caractéristiques de la similitude directe S dont l'écriture complexe est : $z' = (1 - i)z + i$

Solution

z' est de la forme $z' = az + b$ où $a = 1 - i$, et $b = i$.

$a \neq 1$. Soit A le centre de S , k son rapport et θ son angle.

- L'affixe du centre A est $\frac{b}{1-a}$

$$\frac{b}{1-a} = \frac{i}{1-(1-i)} = \frac{i}{i} = 1$$

- Le rapport k est tel que : $k = |a|$

$$K = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

- L'angle θ est tel que : $\theta = \text{Arg}(a)$

On a : $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\theta = -\frac{\pi}{4}$

S est la similitude directe de centre A d'affixe 1, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

V. Reconnaître une similitude directe définie par son écriture complexe

Propriétés

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct, on considère la similitude directe S d'écriture complexe : $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

	Conditions vérifiées par a		Nature et éléments caractéristiques de S
Similitude directe S d'écriture complexe $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.	Si $a \in \mathbb{R}^*$	$a = 1$	S est la translation de vecteur \vec{u} d'affixe b
		$a \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$	S est l'homothétie de centre Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$ et de rapport a .
	Si $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$	$ a = 1$	S est la rotation de centre Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$ et d'angle $\text{Arg}(a)$
		$ a \neq 1$	S est la similitude directe de centre Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$ de rapport $ a $ de d'angle $\text{Arg}(a)$

Exercice de fixation

Détermine dans chaque cas, la nature et les éléments caractéristiques de la similitude directe S définie par son écriture complexe :

$$a) z' = 5z + 2i ;$$

$$b) z' = z + 1 + 3i ;$$

$$c) z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i ;$$

$$d) z' = (-1 + i)z + 2.$$

Solution

a) $a = 5$, dans ce cas $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$, S est une homothétie de rapport 5.
Déterminons l'affixe z_0 de son centre.

$$z_0 = \frac{2i}{1-5} = -\frac{1}{2}i$$

Donc S est l'homothétie de centre le point d'affixe $-\frac{1}{2}i$ et de rapport 5

b) $a = 1$. Donc, S est la translation de vecteur d'affixe $1+3i$

c) $a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, dans ce cas $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$$\left|\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = 1, \text{ donc } S \text{ est une rotation}$$

Déterminons son angle

$$\text{Arg}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\pi}{3} \text{ car } \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}.$$

Son angle est $\frac{\pi}{3}$

Déterminons son centre

$$\begin{aligned} \frac{b}{1-a} &= \frac{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Son centre a pour affixe 1.

D'où, S est la rotation de centre le point d'affixe 1 et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

d) $a = -1 + i$, dans ce cas $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$$|-1+i| = \sqrt{2}, \quad |-1+i| \neq 1 \text{ donc } S \text{ est une similitude directe}$$

$$\text{Arg}(-1+i) = \frac{3\pi}{4} \text{ car } -1 + i = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}$$

L'angle de S est $\frac{3\pi}{4}$

$$\begin{aligned} \frac{b}{1-a} &= \frac{2}{1 - (-1+i)} \\ &= \frac{2}{2-i} \\ &= \frac{2(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{4+2i}{4+1} = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i \end{aligned}$$

D'où, S est la similitude directe de centre le point d'affixe $\frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.

VI. Détermination de l'écriture complexe d'une similitude directe donnée par son centre, son rapport et son angle.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.

Propriété

Soit M' un point du plan d'affixe z' qui est l'image d'un point M d'affixe z par une similitude directe S de centre Ω d'affixe z_Ω , de rapport k et d'angle θ .

On a : $z' = ke^{i\theta}(z - z_\Omega) + z_\Omega$.

Exercice

Détermine l'écriture complexe de la similitude directe de centre le point A d'affixe i , de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Solution

La forme générale de l'écriture complexe de S est : $z' = ke^{i\theta}(z - z_A) + z_A$

$$\begin{aligned} z' &= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z - z_A) + z_A \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(z - i) + i \\ &= (1 + i)(z - i) + i \\ &= (1 + i)z + 1. \end{aligned}$$

Donc l'écriture complexe de S est : $z' = (1 + i)z + 1$.

Exercices de maison

Exercice 1

On donne le point A d'affixe $2 + 2i$.

- Détermine l'écriture complexe de la translation t de vecteur \vec{u} d'affixe $1 - 3i$.
- Détermine l'écriture complexe de l'homothétie h de centre A et de rapport -3 .
- Détermine l'écriture complexe de la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Exercice 2

Détermine les éléments caractéristiques de la similitude directe S dont l'écriture complexe est : $z' = (1 + i\sqrt{3})z + 2i\sqrt{3}$.

Exercice 3

Détermine dans chaque cas, la nature et les éléments caractéristiques de la similitude directe s définie par son écriture complexe :

- | | |
|---|-----------------------|
| a) $z' = -3z + 1 - i$; | b) $z' = z + i$; |
| c) $z' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)z + \frac{1}{2}i$; | d) $z' = (2 - 2i)z$. |
| e) $z' = -z + i$ | |
-

Exercice 4

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

- Détermine l'écriture complexe de la similitude directe de centre le point A d'affixe $1 - i$, de rapport 3 et d'angle $\frac{-3\pi}{4}$.
- Détermine l'écriture complexe de la similitude directe de centre le point B d'affixe $i\sqrt{3}$, de rapport 4 et d'angle $\frac{-2\pi}{3}$.

c) Détermine l'écriture complexe de la similitude directe de centre le point O, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{5\pi}{6}$.

VII. Construction de l'image d'un point par une similitude directe définie par son centre, son rapport et son angle.

Propriété

Soit s une similitude directe de centre A , de rapport k et d'angle θ ($\theta \in]-\pi; \pi]$).

Pour tout point M du plan distinct de A , $s(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} AM' = kAM \\ Mes(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) = \theta \end{cases}$

Conséquence

Toute similitude directe $s_{(A, k, \theta)}$ de centre A , de rapport k et d'angle de mesure θ , s'écrit de façon unique sous la forme :

$$s_{(A; k; \theta)} = r_{(A; \theta)} \circ h_{(A; k)} = h_{(A; k)} \circ r_{(A; \theta)}.$$

* $h_{(A; k)}$ est l'homothétie de centre A et de rapport k

* $r_{(A; \theta)}$ est la rotation de centre A et d'angle de mesure θ .

Vocabulaire:

L'écriture: $s_{(A; k; \theta)} = r_{(A; \theta)} \circ h_{(A; k)} = h_{(A; k)} \circ r_{(A; \theta)}$ s'appelle la décomposition canonique de la similitude directe $s_{(A; k; \theta)}$

Exercice 1

Ecris la décomposition canonique de $s_{(A; 2; \frac{3\pi}{2})}$

Solution

$$s_{(A; 2; \frac{3\pi}{2})} = r_{(A; \frac{3\pi}{2})} \circ h_{(A; 2)} = h_{(A; 2)} \circ r_{(A; \frac{3\pi}{2})}.$$

Exercice 2 :

Construis l'image M' d'un point M par la similitude directe S de centre A , de rapport 3 et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

Solution

$$s_{(A; 3; \frac{\pi}{6})} = h_{(A; 3)} \circ r_{(A; \frac{\pi}{6})} = r_{(A; \frac{\pi}{6})} \circ h_{(A; 3)}$$

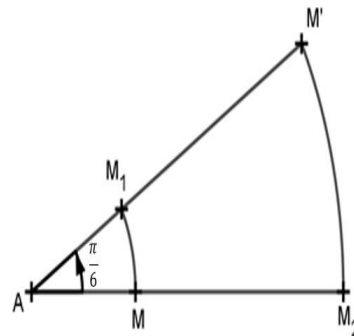
3)

$$\bullet s_{(A; 3; \frac{\pi}{6})} = h_{(A; 3)} \circ r_{(A; \frac{\pi}{6})}.$$

$$M \xrightarrow{r} M_1 \xrightarrow{h} M'$$

$$\bullet s_{(A; 3; \frac{\pi}{6})} = r_{(A; \frac{\pi}{6})} \circ h_{(A; 3)}$$

$$M \xrightarrow{h} M_2 \xrightarrow{r} M'$$



VIII. Similitude directe définie par deux points distincts et leurs images

Propriété

Soit A, B, C et D quatre points du plan tels que : $A \neq B$ et $C \neq D$.

Il existe une unique similitude directe qui transforme A en C et B en D.

Conséquence

Soit A, B et C trois points du plan tels que : $A \neq B$ et $B \neq C$.

Il existe une unique similitude directe qui transforme A en B et B en C

Exercice

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct.

On donne les points A(2), B(2+2i), C(1-3i) et D(-4i).

a) Trouve l'écriture complexe de la similitude directe s telle que : $s(A) = C$ et $s(B) = D$.

b) Détermine les éléments caractéristiques de S.

Solution

a) Soit : $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$, l'écriture complexe de S.

$$\begin{aligned} \begin{cases} s(A) = C \\ s(B) = D \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} az_A + b = z_C \\ az_B + b = z_D \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 1 - 3i \\ (2 + 2i)a + b = -4i \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 1 - 3i \\ (-2 - 2i)a - b = 4i \\ -2ia = 1 + i \end{cases} \\ a &= \frac{1+i}{-2i} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

La 1^{ère} équation du système donne :

$$b = 1 - 3i - 2a = 1 - 3i - 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$b = 2 - 4i$$

L'écriture complexe de s est : $z' = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + 2 - 4i$

b) Notons k le rapport de S, θ son angle et Ω son centre :

$$* k = \left|-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$* \theta = \text{Arg}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{3\pi}{4}$$

$$* z_\Omega = \frac{2-4i}{1-\left(-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)} =$$

$$\frac{2-2i}{1-\left(-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)} = 2 - 2i$$

Donc, S est la similitude directe de centre $\Omega(2-2i)$, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.

IX. Similitude directe définie par son centre, un point et son image

Propriété

Soit A, B et C trois points du plan tels que : $A \neq B$ et $A \neq C$.

Il existe une unique similitude directe de centre A qui transforme B en C.

EXERCICE

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on donne les points A(-2+i), B(1+2i) et C(2-i).

On considère la similitude directe S de centre A telle que : $S(B) = C$.

a) Trouve l'écriture complexe de S.

b) Détermine les éléments caractéristiques de S

SOLUTION

a) L'écriture complexe de s est de la forme : $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

$$\begin{cases} s(A) = A \\ s(B) = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} az_A + b = z_A \\ az_B + b = z_C \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-2+i)a + b = -2+i & (L_1) \\ (1+2i)a + b = 2-i & (L_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-2+i)a + b = -2+i & (L_1) \\ (-1-2i)a - b = -2+i & -1 \times (L_2) \end{cases}$$

$$(L_1) - (L_2) \Leftrightarrow (-3-i)a = -4+2i$$

$$a = \frac{-4+2i}{-3-i}$$

$$a = 1 - i$$

$$(L_1) \text{ donne : } b = -2 + i - (-2+i)a$$

$$b = -2 + i - (-2+i)(1-i) = -1 - 2i$$

$$\text{Donc, } S : z' = (1-i)z - 1 - 2i$$

b) S a un centre, donc S n'est pas une translation.

$a = 1 - i$, $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ donc S n'est pas une homothétie.

$|1 - i| = \sqrt{2}$, $|a| \neq 1$ donc S n'est pas une rotation.

D'où S est la similitude directe de centre A de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\text{Arg}(1 - i)$

Soit θ l'argument principal $1-i$.

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$$

Conclusion : S est la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$

X. Images de figures simples par une similitude directe

Propriété 1

Toute similitude directe de rapport k transforme :

- une droite en une droite ;
- une demi-droite en une demi-droite ;
- un segment de longueur ℓ en un segment de longueur $k\ell$;
- un cercle de centre A et de rayon r en un cercle de centre A' , image de A par la similitude directe, et de rayon kr .

Propriété 2

Toute similitude directe de rapport k multiplie :

- les distances par k ;
- les aires par k^2

EXERCICE

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).

On donne la similitude directe S dont l'écriture complexe est : $z' = (1 + i)z - 1 - 2i$

- Calcule l'aire a_1 de l'image du triangle OIJ par S.
- Trouve l'image (C_2) par S du cercle (C_1) de centre O et de rayon 2.
- Détermine l'image de la droite (OI) par S.

SOLUTION

a) Le rapport de la similitude S est $\sqrt{2}$. Le triangle OIJ a pour aire $\frac{1}{2}$ ua.

Donc l'aire a_1 de l'image du triangle OIJ est : $(\sqrt{2})^2 \times \frac{1}{2} = 2 \times \frac{1}{2}$ ua, soit 1ua.

b) Soit O' l'image de O par S. On a : $z_{O'} = -1 - 2i$.

(C_2) est le cercle de O' et de rayon $2\sqrt{2}$.

c) Soit I' l'image de I par S. On a : $z_{I'} = -i$.

L'image de la droite (OI) par S est la droite ($O'I'$).

Exercices de maison

Exercice 1

Soit A et B deux points distincts du plan.

Construis l'image C du point B par la similitude directe $S_{(A; 2; -\frac{\pi}{3})}$.

Exercice 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on donne les points A(-2), C(-2+4i) et D(-4+2i).

On considère la similitude directe S de centre A telle que : $S(C) = D$.

- Trouve l'écriture complexe de S.
- Précise le rapport et l'angle de S.
- Détermine l'affixe du point B telle que $S(B) = C$.
- Détermine l'affixe du point E telle que $S(D) = E$.

Exercice 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct.

On donne les points A(2), B($i\sqrt{3}$), C($2+\sqrt{3} - 2i\sqrt{3}$) et D($3+\sqrt{3}+i\sqrt{3}$).

On considère la similitude directe S telle que : $S(A) = C$ et $S(B) = D$.

- a) Justifie que l'écriture complexe de la similitude directe S est : $z' = (1 - i\sqrt{3})z + \sqrt{3}$
b) Détermine les éléments caractéristiques de S .

Exercice 4

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) .

On considère l'application S du plan dans lui-même d'écriture complexe :

$$z' = (1 + i\sqrt{3})z + i\sqrt{3}.$$

1. Détermine la nature et les éléments caractéristiques de S .
- 2.a) Détermine l'image de la droite (OI) par S .
b) Soit \vec{u} le vecteur d'affixe $1+i$ et A le point d'affixe $2i$.
Détermine l'image par S de la droite passant par A et de vecteur directeur \vec{u} .
- 3) Détermine l'image par S du cercle de centre B d'affixe -1 et de rayon 2 .
- 4) Détermine l'ensemble des points M du plan d'affixe z telle que : $|(1 + i\sqrt{3})z + i\sqrt{3}| = 6$.

3. EXERCICES

3-1. Exercices de fixation

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct.

Exercice 1

On donne les points A, B et C d'affixes respectives $-2 - 2i$; $1 - i$ et $10 + 2i$.
Démontre que les points A, B et C sont alignés.

Exercice 2

On donne les points A, B et C d'affixes respectives 3 ; $\frac{5+7i}{2}$ et $\frac{-1-i}{2}$.
Démontre que le triangle ABC est rectangle isocèle en A .

Exercice 3

On considère les points A, B, C d'affixes respectives -4 ; $-1 + i\sqrt{3}$ et $-1 - i\sqrt{3}$.
Démontre que le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 4

Les points A, B, C, D ont pour affixes respectives $a = 2 - 2i$, $b = -1 + 7i$, $c = 4 + 2i$ et $d = -4 - 2i$.

Ω est le point d'affixe $-1 + 2i$

Démontre que A, B, C, D appartiennent au cercle de centre Ω et de rayon 5 .

Exercice 5

On a quatre points A, B, C et D d'affixes respectives 8 ; $8i$; $12 - 32i$ et $12 + 32i$.

Démontre que les points A, B, C et D sont sur un même cercle, dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 6

Détermine dans chacun des cas suivants, l'écriture complexe de la transformation F

- 1) F est la rotation de centre O, et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
- 2) F est la rotation de centre O, et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.
- 3) F est l'homothétie de centre O, et de rapport -2
- 4) F est la similitude de centre O de rapport 2 et d'angle π .

Exercice 7

Détermine l'écriture complexe de F, la rotation de centre $(1-2i)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Exercice 8

Détermine l'écriture complexe de la transformation F, homothétie de centre $\Omega(3 + 2i)$ et de rapport 4.

Exercice 9

Détermine l'écriture complexe de F, similitude directe de centre $\Omega(1 - i)$, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Exercice 10

Détermine la nature et les éléments caractéristiques de la transformation du plan F dont l'écriture complexe est donnée dans chacun des cas suivants.

a) $z' = -3z + 2 - i$

b) $z' = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z - i + 1$

c) $z' = z + 2 - 3i$;

d) $z' = (-\sqrt{3} - i)z - i$

3-2. Exercices de renforcement

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct.

Exercice 11

On donne les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c telles que

$$a = 1 + \frac{3}{4}i ; b = 2 - \frac{5}{4}i ; c = 3 + \frac{7}{4}i$$

1) Place les points A, B et C.

2) Détermine la nature du triangle ABC, justifie ta réponse

3) Calcule l'affixe de A' tel que ABA'C soit un carré.

Exercice 12

On considère les points A, B et C d'affixes respectives : -1 ; $3 + 4i$ et $-3 + 4i$.

a) Détermine l'affixe du point D tel que ABDC soit un parallélogramme.

b) Démontre que ABDC est un carré.

Exercice 13

Soit A, B et C des points non alignés d'affixes respectives a, b et c.

1. Précise la nature du triangle ABC dans chacun des cas suivants :

a) $\frac{c-a}{b-a} = -i$

b) $\frac{c-a}{b-a} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

c) $\left|\frac{c-a}{b-a}\right| = 1$

2) Détermine la position des droites (AC) et (AB) dans chacun des cas suivants :

a) $\frac{c-a}{b-a}$ est un réel

b) $Arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \frac{\pi}{2}$

Exercice 14

Détermine dans chacun des cas suivants, l'écriture complexe de la transformation F

1) F est la rotation de centre $(2i)$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

2) F est l'homothétie de centre $(1+2i)$ et de rapport $\frac{3}{2}$.

Exercice 15

Détermine dans chacun des cas suivants, l'écriture complexe de la transformation F

1) F est l'homothétie de centre $\Omega(3 - i)$ et de rapport -2 .

2) F est la similitude plane directe de centre $(-2i)$ de rapport $\frac{3}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 16

Détermine la nature et les éléments caractéristiques de la transformation du plan F dont l'écriture complexe est donnée par : $z' = (1-i)z - 2 + i$.

Exercice 17

S est la similitude plane directe transformant les points $(-1+i)$ et $(3-2i)$ respectivement en (i) et $B(\frac{4\sqrt{3}-3}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4}i)$
Détermine l'expression complexe et les éléments caractéristiques de S .

Exercice 18

On considère les points A, I, C et K d'affixe respectives :

$$z_A = 0 ; z_C = 1 + i ; z_I = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \text{ et } z_K = \frac{1}{2} + i.$$

Soit S la similitude plane directe transformant A en I et C en K
Détermine l'expression complexe et les éléments caractéristiques de S .

Exercice 19

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, A' et B' d'affixes respectives : $z_A = 2 - i$, $z_B = -1 + 2i$, $z_{A'} = 1$ et $z_{B'} = 1 + 6i$.
Détermine le centre, le rapport et l'angle de la similitude directe transformant A en A' et B en B' .

3-3. Exercices d'approfondissement

Exercice 20

Soit f l'application de $\mathbb{C} \setminus \{-3\}$ dans \mathbb{C} définie par : $f(z) = \frac{z+1-i}{z+3}$

On désigne par A, B et M les points d'affixes respectives -3 ; $-1 + i$ et z .

1. Donne une interprétation géométrique du module et d'un argument de $f(z)$.
2. Détermine et construis :
 - a) l'ensemble (C_1) des points M tels que $|f(z)| = 1$;
 - b) l'ensemble (C_2) des points M tels que $f(z)$ soit un réel strictement négatif ;
 - c) l'ensemble (C_3) des points M tels que $f(z)$ soit imaginaire pur.

Exercice 21

Dans le plan complexe, on donne les quatre points A, B, C, D d'affixes respectives :
 $z_A = -2 + 6i$, $z_B = 1 - 3i$, $z_C = 5 + 5i$, $z_D = 2 + 4i$.

1. Soit S la similitude qui, à tout point M d'affixe z , fait correspondre le point M' d'affixe z' déterminée par : $z' = 3iz + 13 - 9i$.

- a. Donne les éléments de cette similitude : point invariant Ω , rapport, angle.
- b. Détermine l'image par S du point C , du point D .

Démontre que les vecteurs \overrightarrow{CD} et $\overrightarrow{S(C)S(D)}$ sont orthogonaux.

2. Soit R la similitude déterminée par $R(B)=C$ et $R(D)=A$.

- a. Trouve la relation liant l'affixe z d'un point M et l'affixe z' de son image $R(M)$.
- b. Donne les éléments de cette similitude.
- c. Démontre que les vecteurs \overrightarrow{BD} et \overrightarrow{CA} sont orthogonaux.

c. Que représente le point D pour le triangle ABC ?

Exercice 22

On considère dans \mathbb{C} l'équation : (E) : $z^3 + (4 - 2i)z^2 + (8 - 6i)z + 8 - 4i = 0$

1.a) Démontre que (E) admet une solution réelle, que l'on déterminera.

b) Résous l'équation (E)

2. On considère dans le plan complexe les points A, B et C d'affixes respectives : $-1 + 3i$; -2 ; $-1 - i$.

Soit r la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre Ω d'affixe i .

a. Place les points A, B et C.

b. Démontre que le point B est l'image du point A par la rotation r .

c. Détermine l'antécédent D du point C par r . Place D sur la figure.

3.a. Démontre que les quatre points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

b. Démontre que le quadrilatère ADBC est un trapèze isocèle.

Exercice 23

1- Résous dans \mathbb{C} , l'équation $4z^2 - 12z + 153 = 0$

2- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 1 cm, On considère les points A, B, C et P d'affixes respectives $z_A = \frac{3}{2} + 6i$, $z_B = \frac{3}{2} - 6i$, $z_C = -3 - \frac{1}{4}i$ et $z_P = 3 + 2i$ et le vecteur \vec{w} d'affixe $-1 + \frac{5}{2}i$.

a) Détermine l'affixe z_Q du point Q, image du point B par la translation de vecteur \vec{w} .

b) Détermine l'affixe z_R du point R, image du point P par l'homothétie h de centre C et de rapport $-\frac{1}{3}$.

c) Détermine l'affixe z_S du point S, image du point P par la rotation r de centre A et de rapport $-\frac{\pi}{2}$.

d) Place les points P, Q, R et S.

3.a) Démontre que le quadrilatère PQRS est un parallélogramme.

b) Calcule $\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q}$. Déduis- en la nature du parallélogramme PQRS.

c) Démontre que les points P, Q, R et S appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

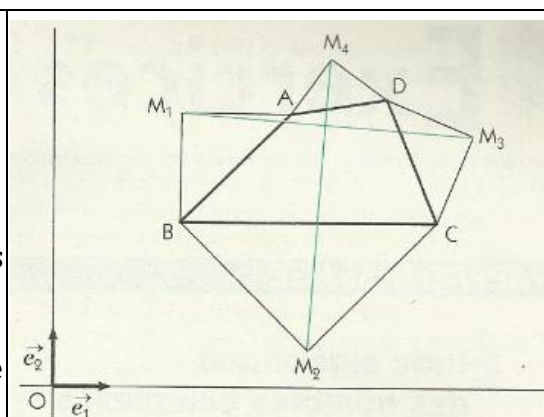
4. SITUATION D'EVALUATION

Exercice 30

Des élèves d'un lycée ont décoré par différentes figures géométriques les murs de la salle du club Mathématiques.

La figure ci-contre représentant l'une d'elle est constituée d'un quadrilatère ABCD de sens direct et de triangles rectangles isocèles AM_1B , BM_2C , CM_3D et DM_4A de sommets respectifs M_1, M_2, M_3 et M_4 .

Observant attentivement cette figure, l'un des élèves de la promotion terminale, passionné de nombres complexes et géométrie, affirme que



<p>les segments $[M_1M_3]$ et $[M_2M_4]$ ont des supports perpendiculaires et ont la même longueur. Démontre en utilisant les nombres complexes que l'affirmation de cet élève est correcte</p>	
---	--