	SERIES D'EXERCICES 2022-2023 **NIVEAU** **TLE S** **THEME 1:** **LIMITES ET CONTINUITE** **RECEUIL DE 18 EXOS TYPES** LIMITES, CONTINUITE avec paramètre, ASPECT GRAPHIQUE, COMPOSEE, ENCADREMENT, RESOLUTION DE $f(x) = k$.
QUIZZ DES MATHEUX NIVEAU TLE B & D	ENCADREUR : M. DJAHA (0709521305/ 0506448812)

PARTIE I

EXERCICE 1 :

Soit la fonction f : $x \longmapsto 3x-2\sin x$

1) Montrer que pour tout réel x, on a : $3x-2 \leq f(x) \leq 3x+2$.

2) En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

EXERCICE 2 :

Soit la fonction f : $x \longmapsto \frac{1-2x\cos(3x)}{x^2+1}$

1) Montrer que pour tout réel $x < 0$, on a : $\frac{2x+1}{x^2+1} \leq f(x) \leq \frac{1-2x}{x^2+1}$.

2) En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

EXERCICE 3 :

1) Soit les fonctions f : $x \longmapsto \frac{1}{x}$ et g : $x \longmapsto \sqrt{x+1}$

a) Calculer $f \circ g\ (3)$; $g \circ f\ (-2)$

b) Définir chacune des fonctions $f \circ g\ (x)$ et $g \circ f\ (x)$.

c) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g\ o\ f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f\ o\ g(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} g\ o\ f(x)$

2) Déduis-en le calcul des limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{x}+\frac{\pi}{4}\right)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \sin\left(\frac{\pi x+1}{1-2x}\right)$.

EXERCICE 4 :

Le tableau ci-contre est le tableau de variation d'une fonction f définie et continue sur IR\{0} :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

1) Déterminer chacune des limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(-1+\frac{1}{x^2})$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(\frac{1}{x})$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(\sqrt{x})$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(\frac{1+x^4}{x+1})$

2) Déterminer l'image par f de chacun des intervalles suivants : $]-\infty,-1]$; $[-1,0[$ et $]0,+\infty[$

3) Montrer que l'équation f(x)=0 admet exactement deux solutions α et β dans IR\{0}

EXERCICE 5 :

Soit la fonction $f : x \mapsto x^3-3x^2+1$

1) Etablir le tableau de variation de la fonction f.

2) Montrer que l'équation $x^3 = 3x^2 - 1$ admet dans IR exactement trois solutions α, β et γ (dans cet ordre). Vérifier que $-1 < \alpha < 0$ et que $2 < \gamma < 3$.

3) En déduire le tableau de signe de $f(x)$.

EXERCICE 6 :

Soit les fonctions f et g définies respectivement sur IR et IR\{−1} par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} & si\ \ x > 0 \\ f(x) = \frac{x+1}{2} & si\ \ x \le 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-x}{2x^2+x-1} & si\ \ x \neq -1\ et\ x \neq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & si\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue en 0.

2) Montrer que f est continue sur IR.

3) Montrer que la fonction g o f est continue en 0.

4) Montrer que la fonction f o g est continue sur IR\{−1}

EXERCICE 7 :

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{1-2x}}$ définie et dérivable sur $]-\infty,\frac{1}{2}[$ et voici son tableau de variation

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$
f'(x)		−	‖
f	0	↘	$-\infty$ ‖

1) Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(\frac{1}{x})$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2x+4}\right)$

2) Soit la fonction g définie sur $]-\infty,\frac{1}{2}[$ par : $g(x)= f(x)-x$

a) Déterminer l'image de $]-\infty,\frac{1}{2}[$ par g.

b) En déduire que l'équation f(x)=x admet une unique solution α dans $]-\infty,\frac{1}{2}[$.

Vérifier que $-0{,}7< \alpha < -0{,}6$

c) Montrer que : $\alpha^2(1-2\alpha) = 1$

EXERCICE 8 :

1) Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+4}-x & \text{si} \quad x\leq 0\\ 2+x^2\cos(\frac{\pi}{x}) & \text{si} \quad x>0\end{cases}$

2) Montrer que l'équation $f(x)=\frac{3}{2}$ admet au moins une solution dans $]1\ ,\ 2[$.

a) Montrer que pour tout $x>0$ on a : $2-x^2\leq f(x)\leq 2+x^2$.

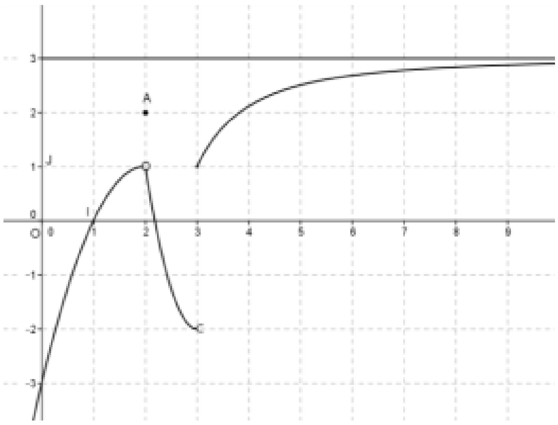
b) Montrer que f est continue en 0.

3) Montrer que f est continue sur IR.

PARTIE II

EXERCICE N1 :

Le graphique ci-contre représente la courbe (C) d'une fonction f définie sur IR. (Tenir compte que le point A(2,2) ∈(C)). La droite D : y=3 est une asymptote à (C) au voisinage de +∞.



1) a/ Déterminer : $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}} f(x)$.

Que peut-on conclure ?

b/ A-t-on $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$? Justifier.

2) Déterminer : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{f(x)-3}$

et $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{|f(x)|}$

EXERCICE N2 :

Soit la fonction f définie sur IR par : $\begin{cases} f(x)=\frac{4x+4}{\sqrt{2x^2-1}-1} & \text{si } x<-1\\ f(x)=2x+a & \text{si } x\geq -1\end{cases}$ (où a est un réel)

1) Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} f(x)=-2$

2) En déduire la valeur de a pour laquelle f admet une limite en (-1).

EXERCICE N3 :

1) Soit la fonction f définie sur IR\{2} par : $f(x)=\frac{x^2+\sqrt{3x^4+x^2+1}}{x-2}$

Montrer que pour tout x <0 on a : $f(x)=\frac{x\left(1+\sqrt{3+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}\right)}{1-\frac{2}{x}}$. En déduire $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

2) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2+1}{x\sqrt{x+1}}$

EXERCICE N4 :

Soit la fonction f définie sur $IR\setminus\{1,-1\}$ par : $f(x) = \frac{4x^2+12x-16}{5\,|1-x^2|}$ et (C) sa courbe représentative selon un repère orthogonal.

1) Etudier la limite de f en 1. Que peut en déduire ?

2) Montrer que la courbe (C) admet trois asymptotes dont on donnera leurs équations.

EXERCICE N5 :

Soit la fonction f définie sur $IR^* \setminus \{1\}$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-\sqrt{x^2-x}}{x} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \frac{2x^2-2}{x|x-1|^3} & \text{si } x \in]0,1[\cup]1,+\infty[\end{cases}$

(C) est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O\ ,\vec{\imath}\ ,\vec{\jmath})$.

1) Montrer que l'axe $(O\ ,\vec{\imath})$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$

2) Montrer que chacune des droites $D_1 : x = 0$ et $D_2 : x = 1$ est une asymptote verticale à (C) à droite et à gauche.

3) a) Montrer que pour tout $x < 0$ on a :

$$f(x) = x - \sqrt{1-\frac{1}{x}}$$

b) Déterminer alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

4) a) Montrer que la droite Δ: $y = x-1$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $-\infty$

b) Etudier la position de (C) par rapport à la droite Δ pour tout $x \in]-\infty,0[$.

1) Montrer que (C) admet une asymptote verticale dont on donnera une équation

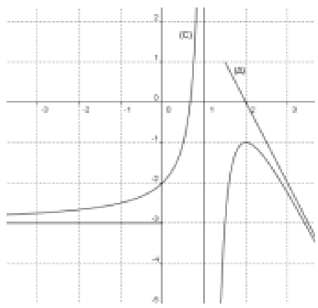
2) a) Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x)= ax+b+ \frac{c}{x-2}$ $\forall\ x \in IR\setminus\{2\}$.

b) En déduire que la courbe (C) admet une asymptote oblique (Δ) au voisinage de $(+\infty)$ et au voisinage de $(-\infty)$.

c) Etudier la position relative de la courbe (C) et son asymptote (Δ).

EXERCICE N6 :

Le graphique ci-contre représente la courbe d'une fonction f définie sur $IR\setminus\{1\}$. La droite (Δ) : $y = -2x+4$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$. Les droites d'équations $x = 1$ et $y = -3$ sont des asymptotes à (C).



1) Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{f(x)+3}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) + 2x - 4]$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) + 2x - 4]$

2) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3) Soit α l'unique solution dans D_f de l'équation $f(x)= -2x+4$

En tenant compte de la position de (C) par rapport à (Δ), dresser le tableau de signe de l'expression : $g(x)=f(x)+2x-4$.

EXERCICE N7 :

Soit la fonction f définie sur IR^* par : $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^2+x+1}-x-1}{x} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \frac{x^2-x}{|x^2-x|+x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

On désigne par (C) sa courbe représentative selon un repère orthonormé $(O\ ,\vec{\imath}\ ,\vec{\jmath})$.

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to0} f(x) = -\frac{1}{2}$

2) Montrer que la courbe (C) admet deux asymptotes horizontales dont on donnera leurs équations.

EXERCICE N8 :

Calculer chacune des limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^4+3x^2-1}}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-3x+1}{x^2-1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} [\sqrt{4x^2+x-1}-2x-1]$; $\lim\limits_{x\to-\infty} [\sqrt{2x^4+x^3-1}-\sqrt{x^2+1}]$; $\lim\limits_{x\to+\infty} [\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^3+1}]$

EXERCICE N9 :

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2+x}{x-2}$ (C) étant sa courbe dans un repère orthonormé.

1) Montrer que (C) admet une asymptote verticale dont on donnera une équation

2) a) Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x)= ax+b+ \frac{c}{x-2}$ $\forall\ x \in IR\setminus\{2\}$.

b) En déduire que la courbe (C) admet une asymptote oblique (Δ) au voisinage de $(+\infty)$ et au voisinage de $(-\infty)$.

c) Etudier la position relative de la courbe (C) et son asymptote (Δ).