DEVOIR DE MATHEMATIQUE N° 2

Durée : 3 heures 45 minutes

EXERCICE 1 : 6,5 points

Dans tout l'exercice les résultats seront donnés sous forme décimales arrondis au millième près. Les parties A, B et C sont indépendantes.

Une compagnie d'assurance automobile fait un bilan des frais d'intervention parmi ses dossiers de la circulation.

- 85% des dossiers entrainent des frais de réparation matérielle ;
- 20 % des dossiers entrainent des frais de dommages corporels ;
- Parmi les dossiers entrainant des frais de réparation matérielle, 12 % entrainent des frais de dommages corporels.

Soit les évènements suivants :

- R : « le dossier traité entraine des frais de réparation matérielle »
- D : « le dossier traité entraine des frais de dommages corporels »
- $\overline{R}$ et $\overline{D}$ désignent les évènements contraires respectifs de R et de D.

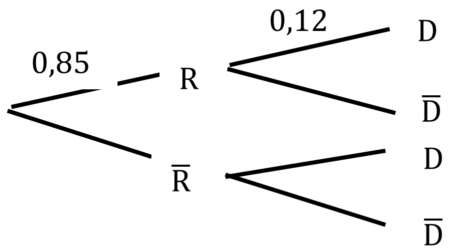
On choisit un dossier au hasard.

PARTIE A

1- Recopie et complète le tableau de répartition ci-contre:

	R	$\overline{R}$	Total
D			
$\overline{D}$			
Total	85		100

2- Recopie et complète l'arbre pondéré ci-dessous.



3- Calcule la probabilité pour que le dossier choisi :
3-1- entraine des frais de réparation matérielle et de des frais de dommages corporels.
3-2- n'entraine ni frais de réparation matérielle ni frais de dommages corporels.
3-3- entraine des frais de réparation matérielle sachant qu'il entraine des frais de dommage corporels.

PARTIE B

On constate que 40 % des dossiers traités correspondent à des excès de vitesse et que parmi ces derniers 60 % entrainent des frais de dommages corporels.

On note l'évènement : E : « le dossier traité correspond à un cas d'excès de vitesse »

1- Justifie que $P(E \cap D) = 0{,}24$.
2- On choisit cinq dossiers de façon in dépendante. Démontre que la probabilité qu'au moins un dossier corresponde à un excès de vitesse et entraine des frais de dommages corporels est 0,746.
3- On choisit n dossiers de façon indépendante. (n étant un nombre entier naturel) Détermine le nombre minimal n de dossiers pour que la probabilité qu'au moins un dossier corresponde à un excès de vitesse et entraine des frais de dommages corporelssoit supérieure à 0,9.

PARTIE C

Dans cette partie, on considère les conditions de la partie B.

Soit X la variable aléatoire correspondant au gain net algébrique d'un conducteur victime d'un seul accident ayant souscrit à une police d'assurance dans cette compagnie.
Ce gain net est la différence entre sa prime de dédommagement perçue et sa prime cotisation de en cas d'incident.
La prime de cotisation s'élève à 250 000 francs sur l'année.
En cas d'accident, s'il est avéré qu'il y a eu excès de vitesse et dommages corporels, le conducteur reçoit une prime de 100 000 francs pour ses soins. Dans le cas contraire, il reçoit une prime de 400 000 francs pour encouragement et ses réparations matérielles éventuelles.

1- Détermine les deux valeurs prise par X.
2- Etablis la loi de probabilité de X
3- Calcule l'espérance mathématique de X puis interprète le résultat.
4- Calcule la variance et l'écart type de X.
5- Détermine puis représente graphiquement la fonction de répartition F(X).

EXERCICE 2 : 3,5 points

On considère la fonction g définie sur $[0 ;\frac{\pi}{4}]$ par $g(x) = tanx$.

g étant dérivable sur $]0 ;\frac{\pi}{4}[$

1- Calcule $g(0)$ puis $g(\frac{\pi}{4})$.
2- Détermine les dérivées première et seconde de g.
3- Justifie que pour tout x élément de $[0 ;\frac{\pi}{4}]$, on a : $1 \leq 1 + tan^2x \leq 2$.
4- En appliquant l'Inégalité des accroissement finis pour tout x élément de $[0 ;\frac{\pi}{4}]$ déduis que :$x \leq tanx \leq 2x$.

PROBLEME : 10 points

Le but de ce problème est de construire les courbes (C) et (C^{-1}) respectivement des fonctions f_1 et f_1^{-1} issues de la fonction f_n pour le cas où n = 1 dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J) d'unité 2 cm. Pour ce faire on s'aidera d'une fonction auxiliaire h_1 issue de h_n .

PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire h_1.

On considère la fonction h_n définie sur]0 ;+∞[par : $h_n(x) = n - \frac{1}{x^{\frac{5n}{2}}}$

1- Justifie que ∀ $x \in]0\,;+\infty[$ et n = 1, $h_1(x) = 1 - \frac{1}{x^2\sqrt{x}}$
2- Calcule les limites de h_1 en 0 et en $+\infty$. Interprète les résultats.
3- a- Justifie $x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
   b- Etudie la dérivabilité de h_1 au point d'abscisse $x = 1$. On s'aidera de l'expression conjuguée du numérateur.
4- Etudie le sens de variation de h_1 puis dresse son tableau de variation.
5- Démontre que : ∀ $x \in]0\,;1[$, $h_1(x) < 0$ et ∀ $x \in]1\,;+\infty[$, $h_1(x) > 0$.

PARTIE B : Etude de la fonction f_1

On considère la fonction f_n définie et dérivable sur]0 ;+∞[par : $f_n(x) = \frac{x}{2n} - 1 + \frac{1}{3x^{\frac{3n}{2}}}$

1- Justifie que ∀ $x \in]0\,;+\infty[$ et n = 1, $f_1(x) = \frac{x}{2} - 1 + \frac{1}{3x\sqrt{x}}$
2- Calcule la limite de f_1 en 0. Interprète graphiquement le résultat obtenu.
3- Calcule la limite de f_1 en $+\infty$.
4- Démontre que la droite (Δ) d'équation $y = \frac{x}{2} - 1$ est une asymptote oblique à (C).
5- Etudie la position relative de (C) par rapport à (Δ).
6- Démontre que : ∀ $x \in]0\,;+\infty[$, $f'_1(x) = \frac{1}{2}h_1(x)$.
7- Etudie les variations de f_1 puis dresse son tableau de variation.
8- Démontre que f_1 réalise une bijection de [1 ;+∞[sur un intervalle K à préciser.
9- Démontre que l'équation $f_1(x) = 0$ admet deux solutions α et β dans]0 ;+∞[.
10- Justifie que $1{,}6 < \beta < 1{,}7$.
11- Détermine une valeur approchée de α à 10^{-2}près.
12- Démontre que f_1 n'admet aucun point d'inflexion sur]0 ;+∞[.
13- Démontre que l'équation $f_1(x) = x$ admet une unique solution $x_0$dans $]\frac{2}{5};\frac{1}{2}[$.
14- Détermine l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse $x = 1$.
15- Sur ta feuille de papier millimétré, Trace (D), (T) et (C).

PARTIE C : Etude de la fonction f_1^{-1}, réciproque de f_1

1- Dresse le tableau de variation de f_1^{-1} sur $[-\frac{1}{6}\,;+\infty[$.
2- Calcule $f_1(4)$.
3- Démontre que f_1^{-1} est dérivable en $\frac{25}{24}$ puis calcule $(f_1^{-1})'(\frac{25}{24})$.
4- Trace (C^{-1}) dans le même repère que (C) sur [1 ; +∞[.