

PREPA DEVOIR 1

Exercice 1 : Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 6x + 8} & \text{si } x \leq 2 \\ x - 1 - \frac{4}{x+2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan.

1. Montrer que f est continue en 2.
2. Étudier la dérivabilité de f à gauche en 2. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
3. Montrer que f est dérivable à droite en 2. Écrire une équation de la demi-tangente à (C_f) à droite en 2.
4. a) Justifier la dérivabilité de f sur chacun des intervalles $]-\infty, 2[$ et $]2, +\infty[$; puis calculer $f'(x)$.
b) Existe-t-il des pts de (C_f) d'abscisse $x > 2$ en lesquels la tangente soit parallèle à la droite $\Delta : 10x - 9y - 1 = 0$

Exercice 2 : Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+2}{1-x} & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 + 3x + 2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

- 1) Montrer que f est continue en -1 .
- 2) a) Étudier la dérivabilité de f en -1 .
b) Écrire une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse -1 .
- 3) a) Pour $x \in]-\infty, -1[$. Calculer $f'(x)$.
b) Pour $x \in]-1, +\infty[$. Calculer $f'(x)$.
- 4) Existe-t-il des pts de C_f où la tgte à C_f est parallèle à : $\Delta : y = \frac{1}{4}x - 1$. Si oui, préciser leurs coordonnées.

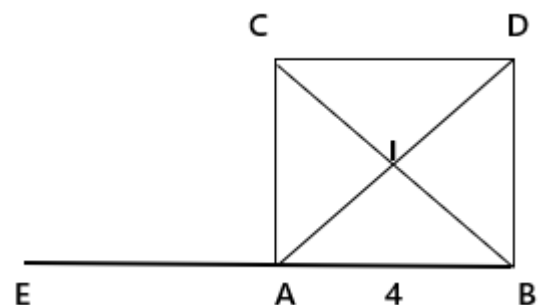
Exercice 3 : Dans le plan on considère un triangle équilatéral ABC de côté 3.

Soit I le milieu de $[BC]$ et D le symétrique de C par rapport à B .

- 1) Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$; $\vec{DA} \cdot \vec{DC}$; $\vec{IA} \cdot \vec{IC}$ et $\vec{IB} \cdot \vec{IC}$.
- 2) Soit J le milieu de $[AD]$. Montrer que : $\vec{AJ} \cdot \vec{AC} = 0$
- 3) Soit ξ l'ensemble des points M du plan tels que $MC^2 - 2MB^2 = -9$
 - a) Vérifier que A appartient à (ξ)
 - b) Montrer que D est le barycentre des points pondérés $(C, 1)$ et $(B, -2)$
 - c) Déterminer et construire l'ensemble (ξ)

Exercice 4 : Soit $ABCD$ un carré de centre I et tel que $AB = 4$.

- 1) Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$; $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$ et $\vec{AB} \cdot \vec{DC}$
- 2) Soit E le symétrique de B par rapport à A .
 - a. Calculer $\vec{EB} \cdot \vec{ED}$; $\vec{EB} \cdot \vec{EC}$ et $\vec{EB} \cdot \vec{EI}$.
 - b. Montrer que pour tout point M du plan on a : $MD^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{DB^2}{2}$.



Exercice 5 : I - soit $[AB]$ un segment de milieu I et tel que $AB = 4$

Déterminer $E = \{M \in P \text{ telle que } \vec{MA} \cdot \vec{MB} = -5\}$

$F = \{M \in P / MA^2 + MB^2 = 10\}$

II - $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ R.O.N du plan $A(-2, 2)$ $B(4, 0)$ et $C(-1, 2)$

1 - calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$

2 - Déterminer $\cos \widehat{BAC}$.

III / Soit $[AB]$ un segment de milieu I et tel que $AB = 4$. Déterminer les ensembles suivants :

$E = \{M \in p \text{ et } MA^2 + MB^2 = 1\}$; $F = \{M \in p \text{ et } MA^2 - MB^2 = 8\}$ et $G = \{M \in p \text{ et } \vec{MA} \cdot \vec{MB} = 1\}$