Mes prises de notes de la Licence 3 Economie UAO 2015-2016

MATHEMATIQUES FINANCIERES

COURS ET EXERCICES TYPES D'APPLICATION ET EXPLICATIONS CONCISES ET CORRIGES DETAILLES

PLAN§

MERCI ET BON USAGE

M. DJAHA: 0709521305/0506448812

Chapitre I : INTERETS SIMPLES

Thèmes : - formule générale
- Méthode des nombres et diviseurs
- Valeur acquise
- Taux moyen de placement

Les intérêts simples concernent essentiellement les opérations financières dont le terme est au plus égal à un an :

- Les emprunts ou placements sur le marché monétaire,
- Les pensions de titres et réméré s,
- Les calculs de coupons courus sur les obligations,
- Les comptes courants bancaires,
- L'escompte commercial.

1. Définition

L'intérêt est la rémunération due par l'emprunteur au prêteur, en contrepartie de la mise à disposition d'un capital pendant une durée déterminée.

Outre le capital et la durée, l'importance de cette rémunération dépend également du taux, qui est l'intérêt généré par un capital de 100 FF placé pendant un an.

1.1. Expression générale

Désignons par :

C : le capital prêté, exprimé en francs

n : la durée de placement, exprimée en années

t : le taux d'intérêt annuel.

L'intérêt annuel i sera fourni par l'expression suivante :

$$i = \left(C/100\right) \times t \times n$$

$$\Rightarrow \quad i = \left(C \cdot t \cdot n\right)/100$$

Application : un capital de 4.000 FF placé pendant trois ans au taux de 10% produira un intérêt égal à :

$$i = \left(4.000 \times 10 \times 3\right)/100 = 1.200\,FF$$

1.2.Durée de placement

La durée de placement peut être exprimée en années, mois ou jours.

a) Durée de placement en mois

La durée indiquée par n correspond alors à un nombre de mois qui représente $n/12^e$ d'année.

L'expression générale devient :

$$i = \left(C/100\right) \times t \times \left(n/12\right)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$i = (C \cdot t \cdot n)/1200$$

b) Durée de placement en jours

L'année commerciale comportant 360 jours, n indiquera la durée en jours qui correspond à $n/36ème$ d'année. Il en résulte l'expression suivante :

$$i = (C \cdot t \cdot n)/36000$$

Application : Intérêt d'un capital de 1.500 FF placé à 10% pendant 70 jours :

$$(1500 \times 10 \times 70)/36\,000 = 29{,}17\, FF$$

Remarques : Dans cette application la durée est donnée. En règle générale, elle doit être déterminée à partir des dates extrêmes fournies. Il conviendra ainsi de considérer les mois pour leur nombre de jours civils (janvier : 31 jours ; février : 28 jours…) au lieu de leurs valeurs déduites à partir de l'année commerciale $\left(360/12 = 30 \text{ jours}\right)$. Le décompte des jours, compris entre deux dates extrêmes, doit s'effectuer en ne retenant que l'une de ces deux dates :

<u>Application</u> : Un prêt consenti A à B le 10 mai est remboursé le 14 juillet.

Quelle est la durée en jours ?

Mois	Nombre de jours civils	Date initiale	Date finale	Nombre jours
Mai	31	10	-	21
Juin	30	-	-	30
Juillet	31	-	14	14
				65 jours

Dans cette application, le 10 mai est exclu du décompte des jours et le 14 juillet est inclus.

2. Transformation de l'expression générale

L'expression comporte quatre variables : i, C, t, n. Si l'une d'elles est inconnue, sa valeur sera directement obtenue par la transformation de la formule générale. Ainsi la valeur de :

i sera donnée par : $i = (C \cdot t \cdot n) / 100$

t sera donnée par : $t = (100 \cdot i) / (C \cdot n)$

n sera donnée par : $t = (100 \cdot i) / (C \cdot t)$

C sera donnée par : $C = (100 \cdot i) / (t \cdot n)$

Application : Les valeurs numériques des expressions précédentes, déterminées à partir de l'application 1.1. figurent dans le tableau suivant :

Inconnue	Valeurs numériques de l'expression transformée	Valeur de l'inconnue
i	$(4000 \times 10 \times 3) / 100$	1.200 FF
t	$(100 \times 1200) / (4000 \cdot 3)$	10%
n	$(100 \times 1200) / (4000 \times 10)$	3 ans
C	$(100 \times 1200) / (10 \times 3)$	4.000 FF

3. Méthode de simplification des calculs

Une simplification des méthodes de calculs s'impose, notamment lorsqu'il s'agit de déterminer l'intérêt global produit par plusieurs valeurs évaluées au même taux pour des durées différentes. Il en est ainsi des bordereaux d'escompte des effets de commerce.

3.1. La méthode des nombres et diviseurs

La description de cette méthode implique que soit réécrite l'expression générale exprimée en jours :

$$i = (C \cdot t \cdot n) / 36000$$

En divisant le numérateur et le dénominateur par t, il vient :

$$i = (C \cdot n) / (36000/t)$$

Posons le nombre : $N = C \cdot n$

Le diviseur : $D = 36000/t$

L'intérêt produit par un capital sera égal à :

$$\boxed{i = N/D} \quad (1)$$

3.2.Généralisation au cas de K capitaux

Soient k capitaux placés au taux commun t pendant des durées différentes.

Désignons par :

C_i : le ième capital,

n_i : la durée de placement du ième capital,

I_i : l'intérêt du ième capital,

I : l'intérêt global,

t : le taux commun de placement.

Compte tenu de l'expression (1), l'intérêt du ième capital s'écrira :

$$\boxed{I_i = N_i/D} \quad (2)$$

L'intérêt global est la somme des intérêts produits par les k capitaux :

$$\boxed{I = \sum_{i=1}^{k} I_i} \quad (3)$$

La transposition de (2) dans (3) livre l'expression finale, à partir des nombres et diviseurs, de l'intérêt global :

$$\boxed{I = \sum_{i=1}^{k} N_i/D} \quad (4)$$

Compte tenu de $N_i = C_i \cdot n_i$, la relation (4) s'exprime également ainsi :

$$\boxed{I = \sum_{i=1}^{k} C_i \cdot n_i/D}$$

Application : Calculer l'intérêt global, à un taux de 10%, des capitaux suivants :

$$C_1 = 1500, \quad n_1 = 35 \text{ jours}$$

$$C_2 = 2000, \quad n_2 = 40 \text{ jours}$$

$$C_3 = 2500, \quad n_3 = 45 \text{ jours}$$

$$C_4 = 3000, \quad n_4 = 50 \text{ jours}$$

$$C_5 = 3500, \quad n_5 = 55 \text{ jours}$$

Déterminer tout d'abord la somme des nombres :

C_i	n_i	$C_i n_i$
1.500	35	52.500
2.000	40	80.000
2.500	45	112.500
3.000	50	150.000
3.500	55	192.5000
		587.500

$$\sum_{i=1}^{5} C_i n_i = \sum_{i=1}^{5} N_i = 587500$$

Valeur du diviseur $D : 36000/t$

$$D = 36000/10 = 3600$$

L'intérêt global est égal à :

$$I = \sum_{i=1}^{5} N_i / D = 587500/3600 = 163{,}19 \; FF$$

4. Taux moyen de placement

Soient les capitaux : $C_1, C_2, \cdots, C_k$: placés respectivement aux taux différents: $t_1, t_2, \cdots, t_k$; pendant les durées, exprimées en jours : $n_1, n_2, \cdots, n_k$.

Le taux moyen de placement est le taux, noté t, qui, appliqué à cette séquence de capitaux et de durées correspondantes, produit le même intérêt global que celui obtenu à partir des taux initiaux respectifs.

La détermination de t implique la résolution de l'égalité :

$$\left(C_1 \cdot \bar{t} \cdot n_1 / 36000\right) + \left(C_2 \cdot \bar{t} \cdot n_2 / 36000\right) + \cdots \left(C_k \cdot \bar{t} \cdot n_k / 36000\right)$$

$$= \left(C_1 \cdot t_1 \cdot n_1 / 36000\right) + \left(C_2 \cdot t_2 \cdot n_2 / 36000\right) + \cdots \left(C_k \cdot t_k \cdot n_k / 36000\right)$$

$$\Leftrightarrow \bar{t} \sum_{i=1}^{k} C_i n_i = \sum_{i=1}^{k} C_i t_i n_i$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\bar{t} = \sum_{i=1}^{k} C_i t_i n_i / \sum_{i=1}^{k} C_i n_i}$$

L'application de la méthode des nombres et diviseurs permet d'exprimer cette relation sous une forme équivalente :

L'égalité $C_i n_i = N_i \Rightarrow C_i t_i n_i = N_i t_i$

D'où :

$$\boxed{\bar{t} = \sum_{i=1}^{k} C_i t_i n_i / \sum_{i=1}^{k} C_i n_i = \sum_{i=1}^{k} N_i t_i / \sum_{i=1}^{k} N_i}$$

<u>Application</u> : Déterminer le taux moyen des placements suivants :

$C_1 : 1000\,FF, \quad n_1 = 20\ jours, \quad t_1 = 10\%,$

$C_2 : 2000\,FF, \quad n_2 = 25\ jours, \quad t_2 = 20\%,$

$C_3 : 3000\,FF, \quad n_3 = 30\ jours, \quad t_3 = 8\%,$

$C_4 : 4000\,FF, \quad n_4 = 35\ jours, \quad t_4 = 7\%,$: placés respectivement aux taux

C_i	n_i	$N_i = C_i n_i$	t_i	$N_i t_i$
1.000	20	20.000	10	200.000
2.000	25	50.000	9	450.000
3.000	30	90.000	8	720.000
4.000	35	140.000	7	980.000
$\sum N_i = 300\,000$			$\sum N_i t_i = 2\,350\,000$	

$$\bar{t} = \sum_{i=1}^{4} N_i t_i / \sum_{i=1}^{4} N_i = 2350000/300000 = 7{,}83\%$$

5. Valeur acquise

La valeur acquise, notée C_n , est la somme du capital initial (C) et des intérêts (i) qu'il génère au terme des n périodes de placement :

$$\boxed{C_n = C + i}$$

Or $i = (C \cdot t \cdot n)/100$

$\Rightarrow$

$$\boxed{C_n = C[1 + (t \cdot n/100)]}$$

Application : Quelle est la valeur acquise par un capital de 5.000 FF placé au taux de 10% pendant 3 ans ?

$$C_3 = 5000[1+(10\times 3/100)] = 6500\,FF$$

5.1.Représentation graphique de la valeur acquise

La valeur acquise est une fonction linéaire du capital investi, du taux ainsi que de la durée de placement. Sa représentation graphique comportera, en abscisses, soit :

- Les valeurs du taux d'intérêt,
- Les durées de placement,
- Les capitaux investis.

Illustrons ces trois représentations à partir des données suivantes :

$C = 1000\,FF,$

$t = 10\%,$

$n = 3\,ans,$

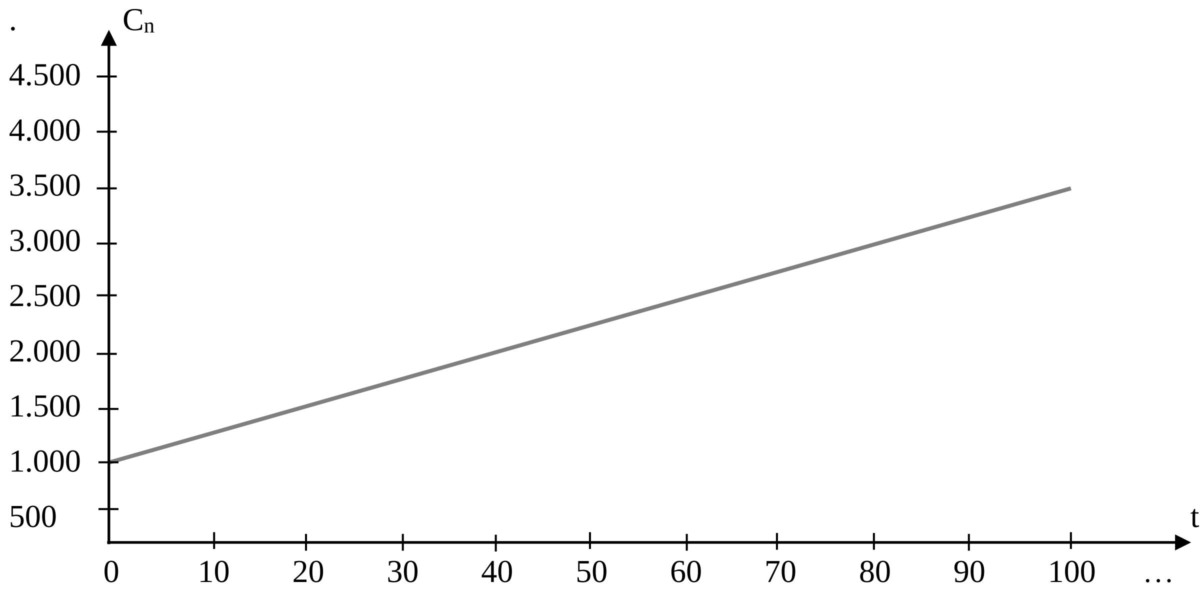
a) Valeur acquise fonction du taux d'intérêt

Le paramètre étant le taux d'intérêt (t), la valeur acquise s'écrira :

$$C_n = 1000[1+(t\times 3/100)] = 30t + 1000$$

Graphique 1

Représentation graphique de la fonction



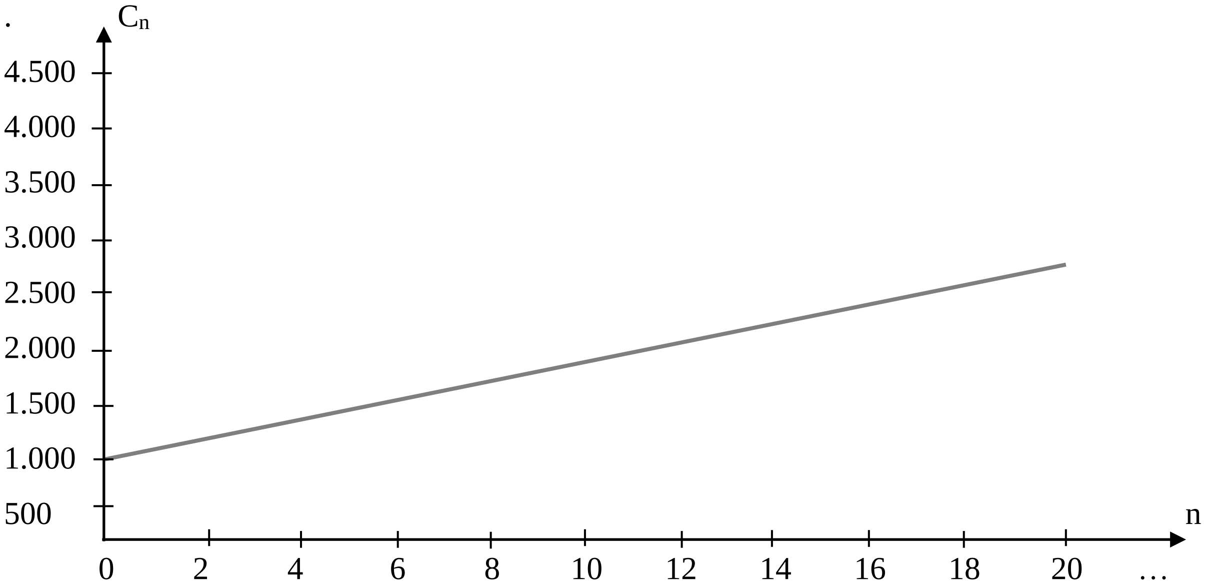
b) Valeur acquise fonction de la durée de placement

Le paramètre est dans ce cas la durée de placement (n), la fonction qui en résulte sera :

$$C_n = 1000[1+(10\times n/100)] = 100n + 1000$$

Graphique 2

Représentation graphique de la fonction



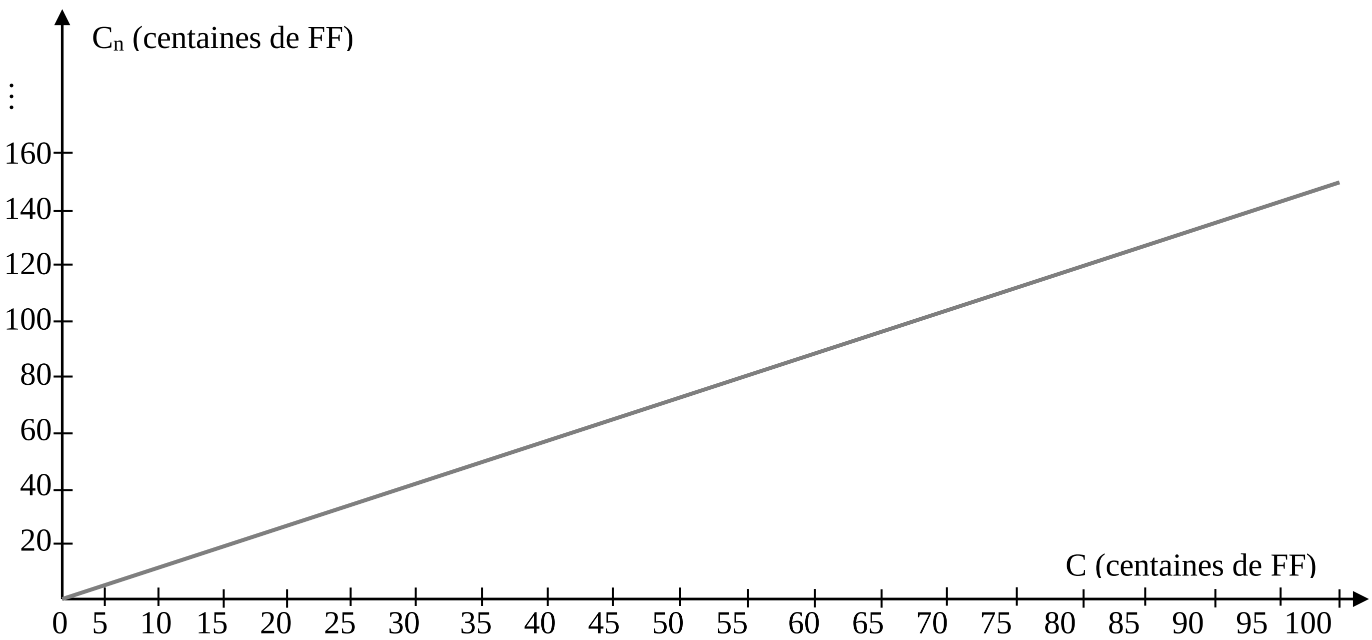
c) Valeur acquise fonction du capital placé

La fonction dont le paramètre est C, s'écrit :

$$C_n = C\ [1 + (10 \times 3/100)] = 1{,}3C$$

Graphique 3

Représentation graphique de la fonction



Remarque : Les graphiques 1 et 2 indiquent que, quelles que soient les valeurs prises par t et n, lorsqu'elles sont nulles ou positives, la valeur acquise C_n, ne peut être inférieure au capital initialement placé C (1.000 FF) ; cette condition est imposée par la présence de la constante, qui est dans les deux cas, égale à 1.000.

La troisième fonction, représentée par le graphique 3, ne comporte pas de constante. Cela signifie qu'une valeur nulle pour C_n n'est pas exclue. L'éventualité de valeurs acquises négatives est définitivement écartée si l'on admet l'hypothèse que le capital placé ne peut être négatif.

CE QU'IL FAUT RETENIR

- **Expressions de l'intérêt simple**

Durée de placement en	Expressions de l'intérêt
Jours	$i = (C \cdot t \cdot n)/36\,000$
Mois	$i = (C \cdot t \cdot n)/1\,200$
Années	$i = (C \cdot t \cdot n)/100$

- **Intérêts simples par la méthode des nombres et diviseurs**

$$N_i = C_i n_i$$

Durée de placement en	Expressions de l'intérêt pour	
	Un capital placé	K capitaux placés
Jours : $D = 36000/t$ Mois : $D = 1200/t$ Années : $D = 100/t$	$i = N/D$	$i = \sum_{i=1}^{k} N_i / D$

- **Taux moyen de k placements**

$$\bar{t} = \sum_{i=1}^{k} C_i t_i n_i / \sum_{i=1}^{k} C_i n_i = \sum_{i=1}^{k} N_i t_i / \sum_{i=1}^{k} N_i$$

- **Valeur acquise par un capital placé**

Durée de placement en	Expression de la valeur acquise
Jours	$C_n = C[1 + (t \cdot n/36000)]$
Mois	$C_n = C[1 + (t \cdot n/1200)]$
Années	$C_n = C[1 + (t \cdot n/100)]$

EXERCICES

1 Un individu dispose le 30 avril de l'année N de 20.000 F sur un compte de banque rémunéré à 5% par an. La banque autorise les découverts pour un maximum de 2.000 F au taux de 9%. Au-delà de ce plafond un taux dissuasif de 18% est pratiqué. Le client dispose alors de 15 jours pour régulariser sa situation, c'est-à-dire pour revenir à un découvert inférieur à 2.000 F.
N.B : Les jours de valeur ne sont pas pris en considération dans l'exercice.

1. *Le 18 mai N l'individu retire 5.000 F.*
   Le 28 mai N l'individu retire 12.000 F.
   Le 7 juillet N l'individu retire 3.000 F.
   Le 22 septembre on prélève automatiquement 4.000 F sur son compte.
   Le 30 septembre il verse 20.000 F.
   Calculez le montant dont il dispose après le versement du 30 septembre ?
2. *Pour éviter les frais dus au découvert, le client décide de verser le 6 septembre la somme minimale pour ne pas être à découvert.*
   Quelle est cette somme ? (arrondir au franc supérieur).
3. *Pour le versement du 6 septembre le client a dû prélever sur un compte d'épargne rémunéré à 7%. Le 30 septembre il remet la somme sur son compte d'épargne. Quel résultat global que cette opération lui a permis d'obtenir ?* commentez.
4. *Calculez le gain obtenu sur l'opération précédente s'il ne couvre le découvert que le 22 septembre.*

2 *Calculez le capital qui, placé à 6% pendant 78 jours, a acquis une valeur de 22.286 F.*

3 Un capital de 70.000 F, prêté le 7 septembre au taux de 8,5%, a acquis une valeur de 74.165 F au moment du remboursement.

Déterminez la date de remboursement du prêt.

4 Un capital de 221.400 F a produit, entre le 18 mars et le 10 mai, un intérêt de 2.933,55 F.

Calculez le taux de placement.

5 Le 3 mars, une personne dispose de 100.000 F sur son compte en banque. Le taux d'intérêt sur ce placement très liquide est de 4,5%.
Elle effectue les opérations suivantes :

- 30 mai : retrait de 60.000 F

- 3 juillet : versement de 20.000 F
- 13 septembre : versement de 15.000 F.

1. *Calculez les intérêts produits par son compte à la fin de l'année par la méthode des nombres et diviseurs.*
2. *Calculez le capital de départ qui aurait donné le même montant d'intérêt que celui calculé précédemment si la personne n'avait effectué aucune opération du 3 mars au 31 décembre.*
3. *La personne décide de retirer 10.000 F, le 20 mai, puis des capitaux en progression arithmétiques aux deux dates suivantes (3 juillet et 13 septembre). Quelle doit être la raison de la suite sachant qu'elle veut obtenir le même montant global d'intérêt à la fin de l'année ?*

6 Une entreprise a placé dans diverses banques les sommes suivantes :

Capitaux	**Taux**	**Dates**
20.000 F	7,5%	Du 10 mai au 7 juin
45.000 F	10%	Du 10 mai au 4 août
70.000 F	8ù	Du 10 mai au 15 juillet

1. *Calculez le taux moyen résultant de l'ensemble de ces placements.*
2. *La banque propose de placer 135.000 F au taux moyen pendant la durée moyenne de placement, l'entreprise doit-elle accepter ? commentez.*
3. *Pendant combien de temps faut-il placer 135.000 F (2.000 + 45.000 +70.000) au taux moyen pour obtenir la même somme globale d'intérêt que précédemment ?*

7 En début d'année une personne décide de s'acheter une chaîne stéréo de 12.000 F à la fin de l'année. Pour disposer de cette somme, le moment venu, elle décide de placer une somme constante à chaque début de mois, jusqu'au début du mois de décembre. Le taux d'intérêt qu'elle peut obtenir est de 4,5%.

1. *Quel doit être le montant de chaque mensualité,*
2. *Quel serait la somme constante à verser chaque semaine ?*
3. *Le 1^{er} juillet le taux d'intérêt passe à 6%, quelle est la nouvelle acquise en fin d'année ?*
4. *En apprenant l'augmentation du taux d'intérêt (le 1^{er} juillet) la personne décide de réduire ses versements de façon à obtenir une valeur acquise de 12.000 F. quelle est la nouvelle mensualité ?*

8 Un directeur d'agence bancaire décide de fidéliser un client important. Le compte du client est actuellement de 900.000 F ; actuellement, il peut lui proposer un placement à un taux de 7,5% ; la solution qu'il étudie est la suivante : il cherche le taux d'intérêt t tel que son client soit rémunéré à t% les deux premières années, et à t+3% les trois années suivantes. Sur les cinq ans, le taux d'intérêt annuel ne doit pas être supérieur de plus de un point au taux actuel. Le surcroît de coût en versement d'intérêt pour l'agence est compensé, selon lui, par l'avantage de disposer d'une grosse somme immobilisée.

Quel est le taux d'intérêt cherché ?

9 Deux financiers font une compétition ; ils disposent chacun de 100.000 F ; ils doivent faire les meilleurs placements possibles pendant trois ans. Au bout de trois ans, la valeur acquise obtenue par le premier est de 4.000 F supérieure à celle du second.

Quel est le taux d'intérêt simple de placement obtenu par chacun sachant que la somme des deux valeurs acquises est de 20% supérieure à la somme des deux placements.

Chapitre II : APPLICATIONS DES INTERETS SIMPLES

SECTION I : L'ESCOMPTE

Thèmes : - Escomptes commercial et rationnel
- Valeurs actuelles
- Agio
- Equivalence d'effets (ou capitaux)
- Echéance moyenne

L'extinction d'une dette s'effectue généralement par la remise immédiate ou différée :

- D'espèces,
- D'un chèque bancaire ou postal.

Ou encore par l'établissement d'un effet de commerce, qu'il s'agisse d'une lettre de change ou d'un billet à ordre ; trois options sont alors offertes au bénéficiaire :

- **Attendre l'échéance** et percevoir la contre-valeur de cet effet ;
- **L'endosser** à l'ordre d'une tierce personne, à l'égard de laquelle il est redevable d'une somme égale ou supérieure à la valeur nominale ;
- **L'escompter** auprès d'un établissement bancaire, à une date quelconque antérieure à l'échéance, afin de disposer de liquidités.

1. Définition

L'escompte est l'intérêt prélevé par l'acquéreur d'un effet de commerce. Il représente la rémunération du service qui consiste à avancer au vendeur de cet effet une somme, appelée valeur actuelle commerciale, pendant la durée qui sépare la date de négociation de l'échéance de l'effet.

Cet intérêt est proportionnel au taux d'escompte, à la durée du prêt, ainsi qu'à :

- La valeur nominale de l'effet, si l'escompte est commercial ;
- La valeur actuelle rationnelle, si l'escompte est rationnel.

2. L'escompte commercial

2.1. Expression générale

Désignons par :

V : la valeur nominale de l'effet escompté

t : le taux de l'escompte (taux annuel pour 100 FF).

n : la durée en jour (jour de négociation exclu et jour de l'échéance inclus)

e : le montant de l'escompte.

La valeur de l'escompte est donnée par :

$$\boxed{e = (V \cdot t \cdot n)/36000}$$

Ce résultat s'obtient également par la méthode des nombres et diviseurs.

Posons :

$$N = V \cdot n$$

$$D = 36000/t$$

D'où $\boxed{e = \frac{N}{D}}$

Application : Déterminer le montant de l'escompte commercial d'un effet de 5.000 FF de valeur nominale, cédé le 12 juin et dont l'échéance est le 10 juillet. Le taux d'escompte est de 10% ;

Le décompte des jours se fonde sur l'exclusion du 12 juin et la prise en considération du 10 juillet. Le nombre de jours ainsi obtenu est de :

- Juin : $(30-12) = 18\ jours$
- Juillet : $= 10\, jours$

$$n = 28\ jours$$

$$e = (5000 \times 10 \times 28)/36000 = 38{,}89\, FF$$

Cette valeur s'obtient également par la méthode des nombres et diviseurs :

$$N = V \cdot n$$

$$N = 5\,000 \times 28 = 140000$$

$$D = 36000/t = 36000/10$$
$$= 3600$$

D'où

$$e = \frac{N}{D} = \frac{140000}{3600} = 38{,}89\, FF$$

Remarques : L'expression de l'escompte est identique à celle des intérêts simples. Cette similitude s'applique également aux méthodes de décompte des jours de valeurs ainsi qu'aux transformations et simplifications dont l'expression initiale est l'objet.

2.2.Valeur actuelle commerciale

La valeur actuelle d'un effet est la différence entre la valeur nominale et l'escompte.

$$\boxed{a = V - e}$$

Où :

$a =$valeur actuelle

Si l'on remplace e par son expression initiale :

$$\boxed{a = V - [(V \cdot t \cdot n)/36\,000]}$$

Ce résultat est également obtenu par les nombres et diviseurs :

$$a = V - \frac{V \cdot n}{D}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{a = V - [(D - n)/D]}$$

<u>Application</u> : Considérons les éléments de l'application précédente :

$V = 5000$

$e = 38{,}89\,FF$ valeur actuelle

La valeur actuelle de cet effet résultera de la différence de V et de e :

$a = V - e$

$a = 5000 - 38{,}89$

$a = 4961{,}11\,FF$

3. L'escompte rationnel

La particularité de l'opération d'escompte, relativement aux autres formes de financement, est le prélèvement immédiat des intérêts. Il s'agit donc d'intérêts précomptés. Il apparaît dès lors utile, à l'instar des opérations de même caractères, de rapporter l'intérêt au montant effectif du prêt. Les termes généralement évoqués pour traduire ces notions sont respectivement : le taux d'escompte rationnel et la valeur actuelle rationnelle.

3.1.Expressions générales

Désignons par :

a' : la valeur actuelle rationnelle

e' : l'escompte rationnel

Avec :

$$a' + e' = V$$

Où :

$$e' = (a' \cdot t \cdot n)/36000$$

D'où :

$V = a'\left[(36000 + t \cdot n)/36000\right]$ la valeur actuelle rationnelle

L'expression a' relativement à la valeur nominale V s'écrit :

$$\boxed{a' = \frac{36000 \cdot V}{36000 + t \cdot n}}$$

L'escompte rationnel e' s'exprime par rapport à la valeur nominale :

$$e' = V - a'$$

$$e' = V - \left[(36000 \cdot V)/(36000 + t \cdot n)\right]$$

$$\boxed{e' = (V \cdot t \cdot n)/(36000 + t \cdot n)}$$

<u>Application</u> : Considérons à nouveau les données de l'application du 2.1 :

$V = 5000\ FF$

$t = 10\%$

$n = 28\ jours$

$e' = [5000 \times 10 \times 28]/[36000 + (10 \times 28)]$

$e' = 38{,}59\ FF$

$a' = [36000 \times 5000]/[36000 + (10 \times 28)]$

$a' = 4961{,}41\ FF$

Remarque : La valeur de l'escompte rationnel (38,59 FF) est inférieure à celle de l'escompte commercial (38,89 FF). ce résultat est logique, car, dans les deux cas, sont appliquées les mêmes valeurs de t et n, la différence provient du fait que la valeur actuelle rationnelle a' est inférieure à la valeur nominale V, il en résulte $e' < e$.

La somme de a' et e' vérifie l'égalité $a' + e' = V$:

$4961{,}41 + 38{,}59 = 5000\ FF$

Examinons algébriquement ces relations.

4. Relations entre escomptes commercial et rationnel

Exprimons tout d'abord e' et a' sous la forme des nombres et diviseurs :

$$a' = \frac{36000 \cdot V}{36000 + t \cdot n} \qquad e' = \frac{V \cdot t \cdot n}{36000 + t \cdot n}$$

En divisant les numérateurs et les dénominateurs par t , il vient :

$$a' = \frac{\frac{36000}{t} \cdot V}{\frac{36000}{t} + \frac{t \cdot n}{t}} \qquad e' = \frac{\frac{V \cdot t \cdot n}{t}}{\frac{36000}{t} + \frac{t \cdot n}{t}}$$

Posons le diviseur fixe $D = 36000 / t$, les expressions de a' et e' deviennent :

$$\boxed{a' = \frac{D \cdot V}{D+n}} \quad \boxed{e' = \frac{V \cdot n}{D+n}}$$

Considérons à présent les expressions algébriques de a et e :

$$a = V \cdot \left[(D-n)/D\right] \qquad e = \frac{N}{D}$$

$$= \frac{V \cdot n}{D}$$

4.1.Comparaisons

Il apparaît évident que $e > e'$, car :

$$\frac{V \cdot n}{D} > \frac{V \cdot n}{D+n}$$

L'escompte commercial est toujours supérieur à l'escompte rationnel. Corollaire de cette relation :

si $e > e'$

alors : $V - e < V - e'$

or, $V - e = a$ et $V - e' = a'$, l'inégalité précédente s'exprime aussi ainsi :

$$\boxed{a < a'}$$

La valeur actuelle rationnelle est toujours supérieure à la valeur actuelle commerciale. En d'autres termes, l'acquéreur d'un effet de commerce avance à son client, en escompte commercial, une somme inférieure à celle qu'il verserait en escompte rationnel.

4.2.Différence

$$e - e' = \frac{V \cdot n}{D} - \frac{V \cdot n}{D+n}$$

$$e - e' = \frac{V \cdot n(D+n-D)}{D(D+n)}$$

$$e - e' = \frac{V \cdot n^2}{D(D+n)}$$

$$e - e' = \frac{V \cdot n}{D+n} \cdot \frac{n}{D}$$

Or :

$$\frac{V \cdot n}{D+n} = e'$$

D'où :

$$\boxed{e - e' = e' \cdot \frac{n}{D}}$$

Cette différence n'est autre que l'escompte commercial appliqué à l'escompte rationnel, ou l'inverse :

$$e - e' = e' \cdot \frac{n}{D}$$

$$e - e' = e' \cdot \frac{t \cdot n}{36000}$$

5. Pratique de l'escompte

Jusqu'à présent nous n'avons considéré qu'une retenue : l'escompte. En pratique, l'opération de négociation d'effets engendre l'acquittement de diverses commissions et taxes. **La somme de ces retenues constitue l'agio.**

5.1. L'agio

a) L'escompte

Le taux d'escompte pratiqué est égal au taux de base bancaire[1], augmenté de 0,5% à 1,5% en fonction de l'importance de l'entreprise.

Les banquiers appliquent généralement un escompte minimum par effet et, en fonction de la nature de l'effet, un nombre de jours minimum.

b) Les commissions

Les commissions les plus courantes sont :

- La commission d'endos (calculée prorata temporis) ;
- Les commissions fixes par effet. Il s'agit des commissions de service, d'avis de sort, de non-domiciliation.

c) La taxe sur les activités financières

Le taux de cette taxe est de 18,6ù. Sont exonérés : les intérêts, les escomptes, les commissions d'avis de sort et d'endos.

[1] Taux d'intérêt minimum pratiqué par l'ensemble des banques.

5.2. Valeur nette et taux réel d'escompte

a) Valeur nette

Une fois l'agio calculé, il est alors possible de déterminer la somme, appelée valeur nette, qui sera effectivement perçue par le vendeur de l'effet :

valeur nette = valeur nominale – agio

Le taux d'escompte précédemment défini ne traduit pas tout à fait le coût réel de ce financement. Ce taux sera majoré par les diverses commissions et taxes inclues dans l'agio. Ainsi exprimé, il deviendra le taux réel d'escompte.

b) Taux réel d'escompte

Désignons par :

V , la valeur nominale

n , la durée en jours

G , le montant total de l'agio

r , le taux réel de l'escompte

$G = (V \cdot r \cdot n)/36000$

D'où

$$\boxed{r = (36000 \cdot G)/V \cdot n}$$

Le taux réel d'escompte sera toujours supérieur au taux d'escompte.

<u>Application</u> : *Un effet de 10.000 FF échéant le 15 mai est escompté le 12 avril. Cette opération est soumise aux commissions et taxes suivantes[2] :*

- *Taux d'escompte : 10%*
- *Commission de service : 2 F par effet*
- *Commission d'avis de sort : 3,50 F par effet*
- *Commission d'endos : 0,65% prorata temporis*
- *TAF : 18,60%.*

Déterminer l'agio, la valeur nette et le taux réel d'escompte.

- ***Calcul de la durée :***

$Avril\ (30-12) = 18\ jours$

$Mai\ = 15\ jours$

[2] Les valeurs et taux indiqués sont fictifs.

$$n = 33 \ jours$$

- ***Détermination de l'agio :***

Composantes	Calculs	Valeurs (en francs)
1. Escompte	$(10000 \times 10 \times 33)/36000$	91,67
2. Commission d'endos	$(10000 \times 0,65 \times 33)/36000$	5,96
3. Commissions fixes	$2 + 3,50$	5,50
4. TAF (18,60%)	$(2 + 3,50) \times 0,186$	1,02
		Agio 104,15

- ***Valeur nette :***

$$valeur\ nette = 10000 - 104,15$$
$$= 9895,85\ FF$$

- ***Taux réel d'escompte :***

$$r = (36000 \times 104,15)/(10000 \times 33)$$
$$= 11,36\%$$

6. Equivalence d'effets ou de capitaux

6.1. Equivalence des deux effets ou capitaux

a) Définition

Deux effets (ou deux capitaux) sont équivalents à une date donnée, si à cette date leurs valeurs actuelle commerciales sont égales.

A intérêts simples, cette date, dite date d'équivalence, est unique.

Désignons par :

V_1 et V_2 : les valeurs nominales respectives des effets 1 et 2

n_1 et n_2 : le nombre de jours à courir entre la date d'équivalence cherchée et les échéances respectives des effets 1 et 2

t : le taux d'escompte

D : le diviseur du taux qui est égal à $36000/t$

a_1 et a_2 : les valeurs actuelles commerciales des effets 1 et 2.

A la date d'équivalence, les deux valeurs actuelles commerciales sont égales :

$$a_1 = a_2$$

$$\Leftrightarrow \quad V_1 - \frac{V_1 \cdot n_1}{D} = V_2 - \frac{V_2 \cdot n_2}{D}$$

$$\Leftrightarrow \quad V_1 \cdot \frac{(D-n_1)}{D} = V_2 \cdot \frac{(D-n_2)}{D}$$

D'où l'équation d'équivalence :

$$\boxed{V_1 \cdot (D-n_1) = V_2 \cdot (D-n_2)}$$

b) Détermination de la date d'équivalence

Cette détermination implique que soit considéré le nombre de jours qui séparent les échéances du premier et du second effet. Reprenons pour partie les notations précédentes : n_1 et n_2 représentent le nombre de jours qui séparent les échéances, respectivement du premier et du second effet, de la date d'équivalence cherchée.

Posons : $n_2 = n_1 + k \ où \ k$ est la distance en jours entre les échéances du premier et du second effet.

En d'autres termes, l'échéance du second effet est supposée plus éloignée de k jours de la date d'équivalence que celle du premier.

Considérons à présent l'expression de l'équivalence des valeurs actuelles commerciales :

$$V_1 \cdot (D-n_1) = V_2 \cdot (D-n_2)$$

Remplaçons n_2 par $(n_1 + k)$:

$$V_1 \cdot (D-n_1) = V_2 \cdot (D-(n_1+k)) \text{ est}$$

$$\Leftrightarrow \quad V_1 \cdot (D-n_1) - V_2 \cdot (D-n_1) = -V_2 \cdot k$$

L'expression obtenue, à partir de $(D-n_1)$ en facteur, s'écrit :

$$(D-n_1) \cdot (V_1 - V_2) = -V_2 \cdot k$$

La distance en jours de l'échéance du premier effet à la date d'équivalence est donnée par :

$$n_1 = D + k \frac{V_2}{(V_1 - V_2)}$$

Remarque : La distance de l'échéance du second effet à la date d'équivalence (n_2) s'obtient à partir des valeurs de n_1 et k :

$$n_2 = n_1 + k$$

Ou directement par l'expression :

$$\boxed{n_2 = D + k \cdot \frac{V_1}{(V_1 - V_2)}}$$

Application **:** Quelle est, à un taux d'escompte de 10%, la date d'équivalence de deux effets de valeurs nominales 1.000 FF et 980,06 FF qui échoient respectivement le 28 septembre et le 20 juillet ?

Posons :

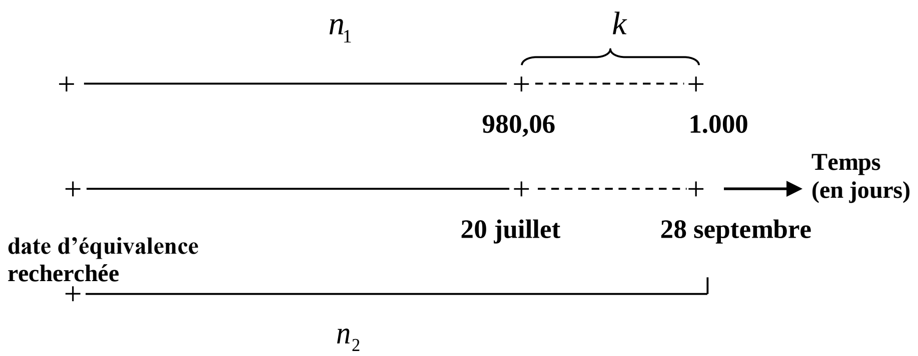
$V_1 = 980{,}06\,FF$;

$V_2 = 1000\,FF$;

$n_1 =$ l'inconnue, qui est la distance en jours entre la date d'équivalence recherchée et le 20 juillet, échéance de l'effet de 980,06 FF de valeur nominale ;

$n_2 =$ la distance en jours entre la date d'équivalence recherchée et le 28 septembre, échéance de l'effet de 1.000 FF de valeur nominale.

Représentation graphique du problème



La valeur d'équivalence de k *est la différence en jours entre les échéances des deux effets :*

$$\begin{array}{ll} \textit{Juillet}\ (31-20) & = 11\ \textit{jours} \\ \textit{Août} & = 31\ \textit{jours} \\ \textit{Septembre} & = 28\ \textit{jours} \\ \hline & 70\ \textit{jours} \end{array}$$

D'où : $k = 70.$

La valeur de n_2 *est égale à :*

$$n_2 = n_1 + k$$

$$n_2 = n_1 + 70$$

Détermination de n_1 :

$$n_1 = D + k \cdot \frac{V_2}{(V_1 - V_2)}$$

$$n_1 = \left(\frac{36000}{10}\right) + 70\left[1000/(980{,}06 - 1000)\right]$$

$$n_1 = 89{,}47 \quad soit\ \ 89\ \ jours$$

La valeur d'équivalence se situe à 89 jours, soit au :

Juillet	$= 20\ jours$
Juin	$= 30\ jours$
Mai	$= 31\ jours$
	$81\ jours$

Il reste à retrancher 8 jours à avril, pour parvenir au total des 89 jours.

La date d'équivalence est donc le 22 avril.

Remarques : Le problème de la date d'équivalence n'a de sens que si celle-ci est à la fois postérieure aux dates de création des effets et antérieure à l'échéance de chacun d'entre eux.

Le problème n'a aucune solution sui les valeurs nominales sont égales et les échéances différentes :

$V_1 = V_2$;

$$\Rightarrow \quad n_1 = D + k \cdot \frac{V_1}{(V_1 - V_1)}$$

avec $(V_1 - V_1) = 0$

Le problème a une infinité de solutions si les valeurs nominales et les échéances sont identiques pour les deux effets :

$$\overbrace{V_1 - \frac{V_1 \cdot n_1}{D}}^{\textbf{Valeur actuelle de l'effet 1}} = \overbrace{V_2 - \frac{V_2 \cdot n_2}{D}}^{\textbf{Valeur actuelle de l'effet 2}}$$

$\forall\, n_1\ \ et\ \ n_2$; avec $n_1 = n_2$

et $\forall\, V_1\ \ et\ \ V_2$; avec $V_1 = V_2$

6.2.Equivalence d'un effet (capital) et de la somme de plusieurs effets (capitaux)

Un effet (capital) est équivalent à la somme de plusieurs autres à une date donnée, si, à cette date, la valeur actuelle commerciale de cet effet (capital) unique est égale à la somme des valeurs actuelles commerciales des autres effets (capitaux). Cette date est appelée date d'équivalence.

Soit un effet de valeur nominale V et p effets de valeurs nominales $V_1, \cdots, V_n$ ayant leurs échéances distantes de la date d'équivalence recherchée respectivement *de* $n_1, \cdots, n_p$ jours.

L'équivalence au taux d'escompte t s'écrit :

$$V - \frac{V \cdot t \cdot n}{36000} = \left(V_1 - \frac{V_1 \cdot t \cdot n_1}{36000} \right) + \cdots + \left(V_p - \frac{V_p \cdot t \cdot n_p}{36000} \right)$$

Avec $D = 36000 / t$, cette égalité devient :

$$V - \frac{V \cdot n}{D} = \left(V_1 - \frac{V_1 \cdot n_1}{D} \right) + \cdots + \left(V_p - \frac{V_p \cdot n_p}{D} \right)$$

$$\Leftrightarrow \quad V - \frac{V \cdot n}{D} = \sum_{i=1}^{p} \left(V_i - \frac{V_i \cdot n_i}{D} \right)$$

$$\boxed{V - \frac{V \cdot n}{D} = \sum_{i=1}^{p} \cdot V_i - \frac{1}{D} \cdot \sum_{i=1}^{p} V_i \cdot n_i}$$

Ou encore :

$$\boxed{a = \sum_{i=1}^{p} a_i}$$

Où :

$$a = V - \frac{V \cdot n}{D}$$

$$a_i = V_i - \frac{V_i \cdot n_i}{D}$$

Les applications les plus courantes sont le remplacement d'une série d'effets par un seul. Elles posent ainsi le problème de la détermination de la valeur nominale de cet effet ou celui de son échéance. Considérons ces variantes sur le thème de l'équivalence au travers des deux applications suivantes :

Application ***: 1) Cas où la valeur nominale de l'effet unique est inconnue***

Un débiteur envisage de s'acquitter d'une dette matérialisée par trois effets de : 1.000 FF, 1.500 FF et 2.000 FF, dont les échéances respectives sont distantes de ce jour de 30, 35 et 40 jours ; par un paiement unique sous la forme d'un effet échéant dans 38 jours. Quelle doit être, au taux de 10%, la valeur nominale de cet effet ?

Le diviseur fixe a pour valeur :

$$D = \frac{36\,000}{t} = \frac{36\,000}{10} = 3600$$

L'équation d'équivalence s'écrit :

$$V - \frac{V \cdot n}{D} = (V_1 + V_2 + V_3) - \frac{1}{D} \cdot (V_1 \cdot n_1 + V_2 \cdot n_2 + V_3 \cdot n_3)$$

Où

$V = ?$	$n = 38$
$V_1 = 1000\,FF$,	$n_1 = 30$
$V_2 = 1500\,FF$,	$n_2 = 35$
$V_3 = 2000\,FF$,	$n_3 = 40$
$D = 3600$	

L'expression numérique de cette équivalence s'écrit :

$$V - \left(\frac{V \times 38}{3600}\right) = (1000 + 1500 + 2\,000)$$

$$-\frac{1}{3600}\left[(1000 \times 30) + (1500 \times 35) + (2\,000 \times 40)\right]$$

$$V \cdot (1 - 0{,}010556) = 4\,500 - \frac{1}{3600} \cdot (162\,500)$$

$$V = \frac{4\,454{,}86}{0{,}98944}$$

$$V = 4502{,}40\,FF$$

2) ***cas où l'échéance de l'effet unique est inconnue***

Considérons à nouveau les données de l'application n°1.

Quelle est l'échéance d'un effet unique de 4.502,40 FF ?

Expression numérique de l'équivalence :

$$4502{,}40 \cdot \left(1 - \frac{n}{3600}\right) = 4454{,}86\,FF$$

$$\frac{3600 \cdot (4502{,}40 - 4454{,}86)}{4502{,}40} = n$$

$n = 38{,}01$, *soit 38 jours*

6.3.Cas particulier de l'échéance moyenne

Les applications précédentes indiquent que la valeur nominale de l'effet unique (4.502,40 FF) est proche de la somme des valeurs nominales des effets remplacés (4.500 FF). il semble donc logique d'envisager le cas où l'effet unique a une valeur nominale égale à la somme de celles des effets qu'il remplace :

$$V = \sum_{i=1}^{p} V_i$$

La valeur nominale de l'effet unique définie, reste à déterminer l'échéance.
Ecrivons à nouveau l'équation d'équivalence :

$$V - \frac{V \cdot n}{D} = \sum_{i=1}^{p} V_i - \frac{1}{D} \cdot \sum_{i=1}^{p} V_i \cdot n_i$$

Compte tenu de $V = \sum_{i=1}^{p} V_i$, cette expression s'écrit :

$$\frac{V \cdot n}{D} = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^{p} V_i \cdot n_i$$

$$\Leftrightarrow \quad V \cdot n = \sum_{i=1}^{p} V_i \cdot n_i$$

D'où :

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{p} V_i \cdot n_i}{V}$$

Remarque : La valeur de n correspond à la distance en jours entre la date d'équivalence et l'échéance de l'effet unique. Cette distance est une moyenne arithmétique pondérée, elle permet de déterminer l'échéance moyenne de l'effet unique. Cet aspect constitue un cas particulier des problèmes de substitution d'un effet à plusieurs autres, qualifiés de problèmes d'échéance commune. La valeur de n est indépendante du taux d'escompte. En effet, la résolution de l'équation entraîne la disparition du diviseur d, dans lequel figure le taux d'escompte t.

Application : *Déterminer l'échéance moyenne des effets suivants :*

$V_1 = 1000\ FF$ *, échéant le 10 mars*

$V_2 = 1500\ FF$ *,échéant le 26 mars*

$V_2 = 2000\ FF$ *,échéant le 11 avril*

$V_4 = 2500\ FF$ *,échéant le 24 avril*

Considérons deux dates d'équivalence différentes :

- *Le 28 février*
- *Le 10 mars*

- ***Détermination de l'échéance moyenne à partir de la date d'équivalence située au 28 février** :*

$n_1 = (10\,mars - 28\ février) = 10\ jours$

$n_2 = (26\,mars - 28\ février) = 26\ jours$

$n_3 = (11\,avril - 28\ février) = 42\ jours$

$n_4 = (24\,avril - 28\ février) = 55\ jours$

$V = \sum_{i=1}^{4} V_i$,

$V = 1000 + 1500 + 2000 + 2500$

$V = 7000\,FF$

$$n = \frac{(1000 \times 10) + (1500 \times 26) + (2000 \times 42) + (2500 \times 55)}{7000}$$

$n = 38{,}64,\ soit\ 39\ jours$

L'échéance moyenne est donc distante de la date d'équivalence de 39 jours. Elle correspond à la date du 8 avril.

- ***Détermination de l'échéance moyenne à partir de la date d'équivalence située au 10 mars :***

Les distances en jours à cette date deviennent :

$n_1 = (10\,mars - 10\,mars) = 0\ jour$

$$n_2 = (26\,mars - 10\,mars) = 16\ jours$$

$$n_3 = (11\,avril - 10\,mars) = 32\ jours$$

$$n_4 = (24\,avril - 10\,mars) = 45\ jours$$

$$n = \frac{(1000 \times 0) + (1500 \times 16) + (2\,000 \times 32) + (2\,500 \times 45)}{7\,000}$$

$$n = 28{,}64,\ soit\ 29\ jours$$

La distance de la date d'équivalence à l'échéance moyenne est égale à 29 jours. Cette dernière correspond à nouveau au 8 avril.

Remarque : Ces applications démontrent que l'échéance moyenne ne dépend ni du taux d'escompte, ni de la date d'équivalence.

SECTION II : LES COMPTES COURANTS ET D'INTERETS

Thèmes : - Méthode hambourgeoise chronologique
- Méthode hambourgeoise ordonnée
- Taux réciproques et non réciproques
- Taux variables et constants

1. Généralités

Toute augmentation de l'encours bancaire entraîne, dans la comptabilité d'un commerçant, le débit du compte banque. A contrario, toute sortie est enregistrée au crédit.

A la banque, le compte de ce commerçant est tenu en sens inverse. L'accroissement de l'encours majore la créance du commerçant sur la banque ou la dette de celle-ci à l'égard du bénéficiaire de ce compte. Ce dernier sera en conséquence crédité. Le mouvement inverse provoquant le débit du compte tenu par la banque. Le tableau ci-dessous indique les conséquences, telles qu'elles sont perçues à la banque, des opérations les plus fréquemment réalisées par un commerçant :

Compte de la société X à la banque Y

Débit	Crédit
- Retraits d'espèces	- Versements d'espèces
- Paiement de chèques émis par X	- Encaissements de chèques
- Paiements d'effets domiciliés par X	- Encaissements d'effets
- Virement de X au profit d'un autre compte	- Effets escomptés
- Accréditif	- Virements au profit de X
- Achats de valeurs mobilières	- Encaissements de coupons
- Retours d'effets impayés	- Cessions de valeurs mobilières
- Intérêts débiteurs	- Intérêts créditeurs
- Agios	…….
…….	

1.1.Compte courant et d'intérêts

Si les deux parties, banquier et commerçant, conviennent que les opérations consignées dans ce compte sont productives d'intérêts, il s'agit alors d'un compte courant et d'intérêts. Il est également fait usage de ce type de compte entre deux commerçants dont les relations d'affaires sont constantes.

La gestion de ces comptes implique le recours à d'autres conventions relatives aux :

- Caractère des taux d'intérêts,
- Dates de valeurs,
- Date d'arrêté du compte,
- Commissions.

1.2.Les taux d'intérêts

Si le taux d'intérêt appliqué au solde est le même quel qu'en soit le sens, débiteur ou créditeur, ce compte est dit à **taux réciproques**. Dans le cas contraire, il s'agit de taux non réciproques ou **différentiels**. La réciprocité de taux s'applique généralement aux comptes entre commerçants, alors que ceux mettant en jeu banquier et commerçant se fondent sur des taux non réciproques. Ces taux, uniformes ou différenciés, peuvent **demeurer constants** au cours de la période de référence ou bien **varier**.

1.3.Les dates de valeurs

La date de valeur est la date à partir de laquelle une somme inscrite au compte produit des intérêts.

Entre commerçants ces dates sont généralement :

- La date d'échéance, pour les factures et effets de commerce,
- La date de remise ou le lendemain, pour les chèques,

- La date de l'opération, pour les versements.

Les banquiers minorent ou majorent en leur faveur ces dates d'un ou deux jours, dits **jours de banque.**

1.4. Commissions et date d'arrêté du compte

Le compte tenu par la banque comprend des agios (intérêts, commissions et TAF). Les principales commissions sont :

- La commission d'endos ;
- La commission de tenue de compte ;
- La commission du plus fort découvert ;
- La commission de manipulation ;
- …

Le taux de la taxe sur les activités financières (TAF) est de 18,60%. Ces éléments ne portent pas intérêts. Ils sont inscrits à la clôture du compte. Les dates d'arrêtés des comptes sont, par convention, tous les douze mois ou semestre et plus fréquemment, dans le domaine bancaire, tous les trimestres.

1.5. Les méthodes de tenue de comptes

Les comptes courants et d'intérêts peuvent être tenus suivant trois méthodes :

- Directe,
- Indirecte,
- Hambourgeoise.

Longtemps écartée, car le classement par dates de valeur qu'elle implique reportait tout le travail à la date d'arrêt du compte, la méthode hambourgeoise s'est généralisée à partir de 1948, au fur et à mesure de l'automatisation croissante des tâches bancaires, pour devenir exclusive aujourd'hui. **Cette unanimité justifie la seule description de cette méthode.**

2. La méthode hambourgeoise

2.1. Principes communs

L'application de la méthode hambourgeoise implique que le **solde soit déterminé après chaque opération**. **Ce solde porte intérêt jusqu'à la date de valeur de l'opération suivante ou la date de clôture du compte, s'il s'agit de la dernière opération**. Le solde des intérêts est ajouté aux capitaux au terme de la période de référence.

La méthode hambourgeoise ou par soldes comporte deux variantes qui se distinguent par les dates prises en considération. La première variante se fonde sur l'ordre chronologique des opérations et la seconde, dite **méthode hambourgeoise ordonnée**, sur l'ordre obtenu à partir des dates de valeurs.

2.2.Méthode hambourgeoise chronologique

La tenue du compte à partir des dates d'inscription des opérations entraîne parfois la prise en considération d'intérêts négatifs. Il s'agit du cas où **la date de valeur d'une opération est postérieure à celle de l'opération suivante. L'écart entre ces deux dates de valeurs correspond aux jours dits rouges.**

Illustrons cette variante à partir des données suivantes relatives au compte courant et d'intérêts de la société Meylon à la banque JRS :

1er mai	:	Solde à nouveau	:	10.000 FF,	valeur 30/04
5 mai	:	Versements d'espèces	:	25.000 FF,	valeur 7/05
10 mai	:	Chèque de retrait	:	5.000 FF,	valeur 8/05
20 mai	:	Retour effet impayé	:	40.000 F,	valeur 5/05
8 juin	:	Remise d'effets	:	18.000 FF,	valeur 8/07
15 juin	:	Remise de chèques	:	8.000 FF,	valeur 16/06
22 juin	:	Remise d'effets	:	60.000 FF,	valeur 22/07
18 juin	:	Chèque n° 122	:	34.000 FF,	valeur 23/06
24 juin	:	Accréditif[3]	:	33.000 FF,	valeur 23/06
14 juillet	:	Virement à l'ordre de M. Jean	:	4.200 FF,	valeur 16/07

a) Conditions

- Méthode hambourgeoise, intérêts immédiats.
- Commission de découvert : 0,10% sur le plus fort découvert mensuel. Cette commission ne peut excéder la moitié des intérêts du débit.
- Frais fixes 10,50 FF.
- Le taux des intérêts débiteurs ou créditeurs est de 8%.
- TAF : 18,60%.

[3] Document par lequel une banque ouvre à un tiers un crédit, d'un montant et pour une durée déterminés, auprès d'une agence ou d'un correspondant.

b) Présentation du compte

Méthode hambourgeoise, intérêts immédiats

Banque JRS
Compte courant et d'intérêts de la Société Meylon
Période du : 1er mai au 31 juillet Taux 8%

Dates	libellés	Sommes		Soldes		Dates de valeurs	Jours de valeurs	Intérêts	
		Débit	crédit	Débit	crédit			Débit	crédit
1/5/90	Solde à nouveau		10.000,00		10.000,00	30/4/90	7		15,56
5/5/90	Versement espèces		25.000,00		35.000,00	7/5/90	1		7,78
10/5/90	Chèque de retrait	5.000,00			30.000,00	8/5/90	**3**	20,00	
20/5/90	Retour effet impayé	40.0000,00		10.000,00		5/5/90	64	142,22	
8/6/90	Remise d'effets		18.000,00		8.000,00	8/7/90	**22**	39,11	
15/6/90	Remise de chèques		8.000,00		16.000,00	16/6/90	7		24,89
18/6/90	Chèque n° 122	34.000,00		18.000,00		23/6/90	29	116,00	
22/6/90	Remise d'effets		60.000,00		42.000,00	22/7/90	**29**	270,67	
24/6/90	Accréditif	33.000,00			9.000,00	23/6/90	23		46,00
14/7/90	Virement à l'ordre de Jean	4.200,00			4.800,00	16/7/90	15		16,00
31/7/90	Solde débiteur des intérêts								477,77
		116.200,00	121.000,00					588,00	588,00
	Intérêt débiteurs (8%)	477,77							
	Commission de découvert :								
	Mai 10.000								
	Juin 18.000								
	0,10% de 28.000	28,00							
	Frais fixes	10,50							
	T.A.F. 18,60% de 10,50	1,95							
	Solde créditeur	4.281,78			4.281,78	31/7/90			
		121.000,00	121.000,00						
1/8/90	A nouveau		4.281,78		4.281,78	31/7/90			

Remarques : - Chaque solde porte intérêt pendant une durée égale à la distance en jours entre la date de valeur de ce solde et celle du solde suivant.

Le nombre indiqué dans la colonne « jours de valeurs »de la première ligne correspond à la distance en jours entre le 30 avril et le 7 mai.

- **Les jours de valeurs portés en gras correspondent à des intérêts négatifs (jours rouges). Dans la pratique ces intérêts s'inscrivent du côté opposé au caractère du solde concerné.** Ainsi 20 F, intérêt négatif du solde créditeur de 30.000 F, est inscrit en plus dans la colonne « intérêts débit ».

2.3.Méthode hambourgeoise ordonnée

Cette méthode est fondée sur l'ordre d'inscription des dates de valeurs. Ce classement, appelé « échelle de position », entraîne nécessairement la disparition des « jours rouges».

La constance et l'application différente des taux d'intérêts sont à l'origine des trois variantes de cette méthode :

- Taux d'intérêt réciproques et constants,
- Taux d'intérêts non réciproques et constants,
- Taux d'intérêts non réciproques et variables.

Le traitement mathématique de la première variante ne présente aucune difficulté (application du 2.2). par ailleurs, la réciprocité des rémunérations de soldes étant exclue de la pratique bancaire, il nous paraît plus indiqué de nous limiter aux autres variantes.

a) Taux non réciproques et constants

Considérons à nouveau les données de l'application précédente (paragraphe 2.2) ; le traitement de cette variante implique la modification d'une condition :

- Taux d'intérêts : 1,25ù sur les soldes créditeurs,
  6,75% sur les soldes débiteurs.

La présentation du compte est la suivante :

Méthode hambourgeoise ordonnée – Intérêts immédiats

Taux non réciproques et constants

Banque JRS
Compte courant et d'intérêts de la Société Meylon
Période du : 1er mai au 31 juillet

Dates	libellés	Sommes		Soldes		Dates de valeurs	Jours de valeurs	Intérêts	
		Débit	crédit	Débit	crédit			Débit	crédit
1/5/90	Solde à nouveau		10.000,00		10.000,00	30/4/90	5		1,74
20/5/90	Retour effet impayé	40.0000,00		30.000,00		5/5/90	2	11,25	
5/5/90	Versement espèces		25.000,00	5.000,00		7/5/90	1	0,94	
10/5/90	Chèque de retrait	5.000,00		10.000,00		8/5/90	39	73,12	
15/6/90	Remise de chèques		8.000,00	2.000,00		16/6/90	7	2,62	
18/6/90	Chèque n° 122	34.000,00		36.000,00		23/6/90	0		
24/6/90	Accréditif	33.000,00		69.000,00		23/6/90	15	194,06	
8/6/90	Remise d'effets		18.000,00	51.000,00		8/7/90	8	76,50	
14/7/90	Virement à l'ordre de Jean	4.200,00		55.200,00		16/7/90	6	62,10	
22/6/90	Remise d'effets		60.000,00		4.800,00	22/7/90	9		1,50
31/7/90	Solde débiteur des intérêts								417,35
		116.200,00	121.000,00					420,59	420,59
	Solde débiteur des Intérêts	417,35							
	Commission de découvert :								
	Mai 30.000								
	Juin 69.000								
	Juillet 55.200								
	0,10% de 154.200	154,20							
	Frais fixes	10,50							
	T.A.F. 18,60% de 10,50	1,95							
	Solde créditeur	4.216,00			4.216,00	31/7/90			
		121.000,00	121.000,00						
1/8/90	A nouveau		4.281,78		4.216,00	31/7/90			

b) Taux non réciproques et variables

L'application qui suit requiert la modification de l'une des conditions précédentes, les taux d'intérêts : 1,25% sur les soldes créditeurs jusqu'au 16 juin inclus, puis 1% du 17 juin au 31 juillet.

6,75% sur les soldes débiteurs jusqu'au 16 juin inclus, puis 7,25% du 17 juin au 31 juillet.

Le compte se présente ainsi :

Méthode hambourgeoise ordonné. Intérêts immédiats

Taux non réciproques et variables

Banque JRS **Compte courant et d'intérêts de la Société Meylon** **Période du : 1er mai au 31 juillet**									
Dates	Libellés	Sommes		Soldes		Dates de valeurs	Jours de valeurs	Intérêts	
		Débit	crédit	Débit	crédit			Débit	crédit
1/5/90	Solde à nouveau		10.000,00		10.000,00	30/4/90	5		1,74
20/5/90	Retour effet impayé	40.0000,00		30.000,00		5/5/90	2	11,25	
5/5/90	Versement espèces		25.000,00	5.000,00		7/5/90	1	0,94	
10/5/90	Chèque de retrait	5.000,00		10.000,00		8/5/90	39	73,12	
15/6/90	Remise de chèques		8.000,00	2.000,00		16/6/90	1	0,37	
17/6/90	**Changement de taux**			2.000,00		17/6/90	6	2,42	
18/6/90	Chèque n° 122	34.000,00		36.000,00		23/6/90	0		
24/6/90	Accréditif	33.000,00		69.000,00		23/6/90	15	208,44	
8/6/90	Remise d'effets		18.000,00	51.000,00		8/7/90	8	82,17	
14/7/90	Virement à l'ordre de Jean	4.200,00		55.200,00		16/7/90	6	66,70	
22/6/90	Remise d'effets		60.000,00		4.800,00	22/7/90	9		1,20
31/7/90	Solde débiteur des intérêts								442,47
		116.200,00	121.000,00					445,41	445,41
	Solde débiteur des intérêts	442,47							
	Intérêts créditeurs à 1,25%		1,74						
	Intérêts créditeurs à 1%		1,20						
	Commission de découvert	154,20							
	Frais fixes	10,50							
	T.A.F. 18,60% de 10,50	1,95							
	Solde créditeur	4.190,88			4.190,88	31/7/90			
		121.000,00	121.000,00						
1/8/90	A nouveau		4.190,88		4.190,88	31/7/90			

CE QU'IL FAUT RETENIR

- **Escomptes et valeurs actuelles**

$N = V \cdot n$

$D = 36000 / t$

Caractères	Escomptes	Valeurs actuelles
Commercial	$e = \frac{V \cdot t \cdot n}{36000}$ $e = \frac{N}{D}$	$a = V \cdot \frac{(36000 - t \cdot n)}{36000}$ $a = V \cdot \frac{(D - n)}{D}$
Rationnel	$e' = \frac{V \cdot t \cdot n}{36000 + t \cdot n}$ $e' = \frac{N}{D + n}$	$a' = \frac{36000 \cdot V}{36000 + t \cdot n}$ $a' = \frac{D \cdot V}{D + n}$

- **Relations et différences**

	Relations	Différences
Escomptes **Valeurs actuelles**	$e > e'$ $a < a'$	$e - e' = e' \cdot \frac{n}{D}$

- **Pratique de l'escompte**

Agio = escompte commercial + commissions + TAF

Valeur nette = Valeur nominale – Agio.

Taux réel d'escompte :

$r = (36000 \cdot G) / V \cdot n$

Avec $r > t$

- **Equivalence d'effets ou capitaux**

Equivalence	expressions	Date d'équivalence	
		Distances à l'échéance du 1er effet	Distance à l'échéance du 2ème effet
Deux effets (cap.)	$V_1(D - n_1) = V_2(D - n_2)$	$n_1 = D + k \cdot \frac{V_2}{(V_1 - V_2)}$	$n_2 = D + k \cdot \frac{V_1}{(V_1 - V_2)}$
Un effet (cap.) et **plusieurs** effets (cap.)	$a = \sum_{i=1}^{p} a_i$ Ou $V - \frac{N}{D} = \sum_{i=1}^{p} V_i - \frac{1}{D} \cdot \sum_{i=1}^{p} N_i$ Avec $N_i = V_i \cdot n_i$		

- **Echéance moyenne**

$$n = \sum_{i=1}^{p} \frac{V_i \cdot n_i}{V}$$

Ou encore :

$$\boxed{n = \sum_{i=1}^{p} \frac{N_i}{V}}$$

Avec $N_i = V_i \cdot n_i$

- **Comptes courants et d'intérêts**

- **PRINCIPE :** les opérations portées dans le compte génèrent des intérêts.
  - **DATE DE VALEUR :** date à partir de laquelle une valeur inscrite au compte produit des intérêts.
  - **METHODE HAMBOURGEOISE :** méthode de tenue des comptes courants et d'intérêts la plus utilisée.
- **METHODE HAMBOURGEOISE**
  - DEUX VARIANTES
    - ➢ *Méthode hambourgeoise chronologique : classification fondée sur les dates d'inscription des opérations.*
    - ➢ *Méthode hambourgeoise ordonnée : classification fondée sur les dates de valeurs des opérations.*
  - MODE DE VALORISATION DES INTERETS
    - ➢ *taux d'intérêts réciproques :* application d'un taux identique aux soldes débiteurs et créditeurs. Peu utilisés.
    - ➢ *taux d'intérêts non réciproques :*

      * *constants :* le taux appliqué aux soldes débiteurs est généralement supérieur à celui qui permet de valoriser les soldes créditeurs. Les taux demeurent constants au cours de la période de référence.

      * *variables :* le taux d'intérêt débiteur est supérieur au taux créditeur. Les deux taux varient au cours de la période de référence.

EXERCICES

1 La différence entre l'escompte commercial et l'escompte rationnel d'un effet échéant dans 36 jours est égale à 1,34 F. Le taux d'escompte est de 12%.

1- *Calculez la valeur nominale de l'effet.*
2- *Calculez l'escompte commercial et l'escompte rationnel. (utiliser la formule donnée en cours.)*
3- *Calculez les deux escomptes et leur écart en supposant l'échéance dans 45 jours.*
4- *Plus généralement montrez que l'écart entre les escomptes est une fonction croissante de la durée.*

2 Deux effets, de même échéance, dont la somme des montants vaut 15.000 F, sont escomptés au taux de 10%. L'escompte commercial est de 75 F. s'ils avaient été escomptés séparément la différence entre les deux écarts d'escompte aurait été de 0,30 F.
Calculez le montant des deux effets.

3 Un effet d'un nominal de 31.500 F est escompté le 7 septembre commercialement. Le taux d'escompte est de 8%. S'il avait été escompté rationnellement l'escompte aurait été inférieur de 2 F.
Déterminez l'échéance de l'effet.

4 *Compléter le bordereau d'escompte suivant :*
Date : 4 mars

Montants	Echéances	Jours	Escompte 11%	Taux d'endos	Montants
12.320 F	12 avril			0,65ù	
7.630 F	22 mai			0,65%	
4.350 F	7 juin			0,25%	
9.600 F	17 avril			0,25%	

Escompte total :
Commissions d'endos :
Commissions fixes : (3 F par effet)
Agios :

5 Deux banques proposent les conditions d'escompte détaillées ci-dessous :

	Banque A	Banque B
Taux d'escompte	9%	9,5%
Commission d'endos	0,8%	0,25%
Commission fixe	7 F par effet	3,50 F par effet

1- *Vous disposez d'un effet de 5.735 F échéant dans 45 jours. Calculez les deux taux réels d'escompte ? quelle banque choisissez-vous ?*
2- *A partir de quel montant vaut-il mieux escompter un effet à 45 jours à la banque A.*
3- *Même question que ci-dessus si les deux commissions fixes sont échangées.*
4- *La banque A, pour être plus compétitive, décide de baisser son taux de commission d'endos à 0,65%. Même question qu'en 2.*
5- *Dans la situation de la question 4 un individu a calculé que, sur deux effets de même montant (7.932 F) mais d'échéance différentes, le taux réel d'escompte de la banque A pour le premier effet est plus élevé de 1,76 point que celui de la banque B pour le second. L'échéance du deuxième effet est de 61 jours. Quelle est l'échéance du premier effet ?*

6 Le 26 septembre, deux effets sont présentés à l'escompte. Le premier est de 12.870 F ; son échéance est le 31 décembre. Le second de 12.620 F ; son échéance est le 14 octobre.
Calculez le taux d'escompte sachant que le banquier a versé la même somme d'argent pour les deux effets.

7 *Déterminez la date d'échéance d'un effet de 7.850 F qui se substituerait le 7 mai à un effet de 7.882 F payable le 31 mai.*
Le taux d'escompte est de 9%.

8 Pour payer sa voiture de 69.120 F, un client convient avec son vendeur de lui verser la moitié de la somme comptant et le solde en 15 traites mensuelles de même valeur, la première payable dans un mois. Le taux proposé par le concessionnaire est de 12%.

1- *Calculez la valeur nominale des 15 traites.*
2- *Déterminez l'échéance moyenne des 15 traites.*

9 Trois effets sont en progression arithmétique. La valeur nominale du premier est de 6.000 F. leurs échéances respectives sont le 12 septembre, le 9 octobre et le 24 novembre. Leur échéance moyenne est le 9 octobre :

1- *Calculez les valeurs nominales des effets 2 et 3.*
2- *Quelle serait la raison de la suite si les effets étaient en progression géométrique ?*

10 Un client a réalisé auprès de sa banque les opérations suivantes, au cours du mois de mars :

1er	mars solde	65.000 F	valeur 26 février
3	mars retrait en espèces	5.000 F	Valeur 6 mars
5	mars retrait en chèque	15.000 F	Valeur 8 mars
9	mars retrait par chèque	23.000 F	Valeur 15 mars
11	mars remise effet	12.000 F	Valeur fin mai
15	mars retour effet impayé	38.000 F	Valeur 10 mars
18	mars coupons détachés	40.000 F	Valeur 21 mars
25	mars dépôt chèque	50.000 F	Valeur 30 mars
30	mars intérêts reçus	7.000 F	Valeur 5 avril

La commission de découvert est de 0,05% du plus fort découvert mensuel.

Les frais fixes de gestion s'élèvent à : 37 F

Le taux d'intérêt et de découvert est de : 9 %

Le TAF est de : 16,5%.

Présentez le compte courant d'intérêt :

1- *Par la méthode hambourgeoise, intérêt immédiats ;*
2- *Par la méthode hambourgeoise ordonnée. Les taux d'intérêts sont 1,5% sur les soldes créditeurs et 7% sur les soldes débiteurs.*

CHAPITRE III : INTERETS COMPOSES

Thèmes : - Capitalisation
- Actualisation
- Taux proportionnels et équivalents
- Escompte
- Equivalence de capitaux
- Calculs en temps continu

1. Définition

Un capital est placé à intérêts composés si au terme de chaque période de capitalisation, l'intérêt généré s'ajoute au capital initialement placé pour, ensemble, porter intérêt au cours des périodes suivantes.

1.1.Valeur acquise par un capital placé à intérêts composés

La valeur acquise est la somme du capital placé et des intérêts générés.

Désignons par :

C_n : la valeur acquise au terme de n périodes de placement

C_0 : le capital placé

n : la durée de placement, exprimée en périodes

i : le taux d'intérêt pour une période.

Remarque : Il convient de noter que le taux d'intérêt exprime, dans le cas des intérêts composés, l'intérêt produit par 1 franc placé pendant une période.

La valeur acquise par un capital placé à intérêts composés est donnée par le tableau suivant :

Années	Capital placé au début de la période	Intérêts de la période	Valeur acquise au terme de la période
1	C_0	$C_0 \cdot i$	$C_0 + C_0 \cdot i = C_0(1+i)$
2	$C_0(1+i)$	$C_0(1+i)i$	$C_0(1+i) + C_0(1+i)i = C_0(1+i)^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$C_0(1+i)^{n-2}$	$C_0(1+i)^{n-2}\,i$	$C_0(1+i)^{n-2} + C_0(1+i)^{n-2}\,i = C_0(1+i)^{n-1}$
n	$C_0(1+i)^{n-1}$	$C_0(1+i)^{n-1}\,i$	$C_0(1+i)^{n-1} + C_0(1+i)^{n-1}\,i = C_0(1+i)^n$

Remarque : Le tableau ci-dessus indique que les valeurs successives des intérêts sont en progression géométrique de raison $(1+i)$. Il met également en évidence le fait que les intérêts d'une période se fondent en partie sur ceux accumulés au cours des périodes précédentes.

La valeur acquise C_n d'un capital C_0 placé à intérêts composés au taux i pendant n périodes, s'obtient directement par :

$$\boxed{C_n = C_0(1+i)^n}$$

La valeur numérique de C_n s'obtient aisément à l'aide d'une calculatrice. L'expression $(1+i)^n$ est également donnée par la table financière n° 1. Cette valeur peut aussi être obtenue à partir des tables de logarithmes. Dans ce cas, il est nécessaire que la formule générale soit exprimée sous la forme suivante :

$$\boxed{\log C_n = \log C_0 + n\log(1+i)}$$

Remarque : Les logarithmes auxquels il est fait référence ci-dessus sont de base 10. Cet à priori, commun aux calculs financiers, n'exclut en aucun cas le recours aux logarithmes népériens.

<u>Application</u> : *Quelle est la valeur acquise par un capital de 10.000 FF placé à intérêts composés pendant 5 ans au taux de 8% ?*

$C_0 = 10\,000$

$i = 0{,}08$

$n = 5$

- ***Résolution à l'aide de la table financière***

$C_5 = 10\,000\,(1{,}08)^5$

La valeur de $(1{,}08)^5$ *figure dans la table financière n° 1, à l'intersection de la colonne relative au taux 8% et de la ligne correspondant à* $n = 5$

$(1{,}08)^5 = 1{,}469\,328$

D'où :

$C_5 = 10\,000(1{,}469\,328)$

$C_5 = 14\,693{,}28\,FF$

- ***Résolution à l'aide de la table financière***

$\log C_n = \log 10\,000 + 5\log(1{,}08)$

$\log C_n = 4 + (5 \times 0{,}0334237)$

$\log C_n = 4{,}1671188$

$C_n = 10^{(4{,}1671188)}$

$C_n = 14\,693{,}28\,FF$

2. Transformation de l'expression générale

L'expression générale comporte trois variables : C_0, n, i. Chacune d'elles peut être obtenue en fonction des deux autres.

2.1. Cas où C_0 est l'inconnue

La détermination de la valeur de C_0, dans le cas où les autres variables sont connues, s'effectue à partir de :

$$C_0 = C_n (1+i)^n \text{ figure}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$C_0 = C_n (1+i)^{-n}$$

Les valeurs tabulaires de $(1+i)^{-n}$ sont données par la table n° 2.

2.2.Cas ou i est l'inconnue

La transformation de la formule générale aboutit à :

$$\frac{C_n}{C_0} = (1+i)^n$$

Deux cas de figures sont alors envisageables :

- La valeur de i est fournie par la table financière n° 1,
- Aucune valeur tabulaire ne correspond directement à i.

a) Valeur tabulaire de i

La recherche s'effectuera à partir des valeurs n et C_n / C_0. Une fois la valeur de C_n / C_0 repérée sur la ligne de n, le taux i est obtenu par lecture du taux de la colonne.

Exemple

$$C_0 = 10000\ FF$$

$$C_0 = 6\ ans$$

$$C_n = 14185{,}19\ FF$$

$$i = ?$$

La correspondance tabulaire de $(1+i)^n$ s'obtient ainsi :

$$\frac{C_n}{C_0} = (1+i)^n$$

$$1{,}418\,519 = C(1+i)^6$$

Les indications fournies par la table financière n° 1 sont les suivantes :

n \ i	. . . .	6%
.		
.		
6		1,418 519

Le taux cherché est 6%.

b) Valeur non tabulaire de i

La valeur de i s'obtient soit par interpolation linéaire ou à l'aide des logarithmes. Illustrons ces deux méthodes à partir de l'exemple suivante :

$$C_0 = 10000$$

$$n = 5 \ ans$$

$$C_n = 13540{,}81$$

$$i = ?$$

- **Résolution par interpolation linéaire**

$$\frac{C_n}{C_0} = (1+i)^5$$

$$1{,}354\,081 = (1+i)^5$$

La lecture de la table financière n° 1 ne livre pas exactement le taux correspondant C_n / C_0 , mais deux taux relatifs à des valeurs qui encadrent 1,354 081 :

n \ i	. . . .	6%	.	6,5%
.		.	.	.
.		.	.	.
5		1,418 519	.	1,370 087

La valeur de i est donnée par :

$$i = 0{,}06 - \frac{1{,}338226 - 1{,}354081}{1{,}338226 - 1{,}370087}(0{,}06 - 0{,}065)$$

$$i = 0{,}06 + 0{,}002488152$$

$$i = 0{,}06249 \ \ soit \ \ 6{,}25\%$$

- **Résolution par les logarithmes**

La valeur de i sera déterminée à partir du logarithme de l'expression générale :

$$\log C_n = \log C_0 + n\log(1+i)$$

D'où l'on déduit :

$$\frac{\log C_n - \log C_0}{n} = \log(1+i)$$

Transposition des valeurs numériques :

$$\frac{\log 13540{,}81 - \log 10\,000}{5} = \log(1+i)$$

$$\log(1+i) = 0{,}0263289$$

$$i = 10^{(0{,}0263289)} - 1$$

$$i = 0{,}0625 \;\; soit \;\; 6{,}25\%$$

2.3.Cas où n est l'inconnue

La détermination de la valeur de n implique la même transformation de l'expression générale que celle effectuée dans le cas où i est l'inconnue :

$$\frac{C_n}{C_0} = (1+i)^n$$

Les mêmes alternatives sont envisagées :

- La valeur de n est donnée par la table financières n° 1 ;
- Aucune valeur tabulaire ne correspond exactement à n .

a) Valeur tabulaire de n

La valeur de C_n / C_0 se trouvera dans la colonne relative au taux i donné. Celle de n sera obtenu par projection sur la ligne de la durée de placement.

Exemple

$$C_0 = 5000$$

$$i = 0{,}10$$

$$C_n = 11\,789{,}74$$

$$n = ?$$

La correspondance tabulaire de $(1+i)^n$ est donnée par :

$$\frac{C_n}{C_0} = (1+i)^n$$

$$2{,}357\,948 = (1{,}10)^n$$

La table financière n° 1 comporte les indications suivantes :

$n \backslash i$	10%
6	2,357 948

La durée cherchée est 9 ans .

b) Valeur non tabulaire de n

La démarche est là encore identique à celle qui permet de déterminer la valeur de i. Considérons donc les deux méthodes de résolution à partir de l'exemple qui suit :

$$C_0 = 2\,000$$

$$i = 0{,}05$$

$$C_n = 2\,615{,}60$$

$$n = ?$$

- **Résolution par interpolation linéaire**

$$\frac{C_n}{C_0} = (1{,}05)^n$$

$$1{,}307\,8 = (1{,}05)^n$$

A défaut de la valeur exacte, la table financière n° 1 fournit les valeurs d'encadrement nécessaires à l'interpolation linéaire :

$$n = 5 = \frac{1{,}276\,282 - 1{,}307\,8}{1{,}276\,282 - 1{,}340\,096}(5-6)$$

$$n = 5{,}4939 \ \ soit \ \ 5\,ans\,,\,5\,mois\,et\,28\ \ jours$$

- **Résolution par les logarithmes**

La transformation du logarithme de l'expression générale permet d'obtenir :

$$n = \frac{\log C_n - \log C_0}{\log(1+i)}$$

Transposition des valeurs numériques :

$$n = \frac{\log 2\,615{,}60 - \log 2\,000}{\log(1{,}05)}$$

$$n = 5{,}50 \ \ soit\ 5\,ans\ et\ 6\,mois$$

Ce dernier exemple attire notre attention sur les cas où la durée ne correspond pas à un nombre entier.

2.4. Cas où n est un nombre fractionnaire

L'expression générale est fondée sur des valeurs de i et n relative à une période. Si la durée correspond à un nombre fractionnaire, la détermination de la valeur acquise implique le recours à l'une des trois méthodes suivantes :

- La solution commerciale**, qui permet de déterminer la valeur acquise exclusivement avec l'expression générale fondée sur les intérêts composés ;**
- **La solution rationnelle,** qui consiste à n'appliquer l'expression générale que pour la partie entière de la durée et à valoriser la partie fractionnaire à l'aide des intérêts simples ;
- **Le recours à un taux équivalent.** Il s'agit alors de transformer la durée, exprimée en nombres de périodes entières et fractionnaires en subdivisions de périodes et de déterminer le taux i correspondant à ces subdivisions périodiques.

a) Solution commerciale

Appliquée aux données de l'exemple précédent :

$$C_0 = 2\,000$$

$$i = 0{,}05$$

$$n = 5 \; ans \; et \; 6 \; mois$$

Cette solution consiste à poser :

$$C_{5,5} = 2\,000\,(1{,}05)^{5+6/12}$$

$$C_{5,5} = 2\,000\,(1{,}05)^{5,5}$$

$$C_{5,5} = 2\,615{,}60 \; FF$$

L'expression initiale s'écrit également ainsi :

$$C_{5,5} = 2\,000\,(1{,}05)^{5,5}\,(1{,}05)^{6/12}$$

La valeur de $(1{,}05)^5$ est donnée par la table financière n° 1 et celle de $(1{,}05)^{6/12}$ par la table n° 1 bis. La valeur acquise obtenue sera :

$$C_{5,5} = 2\,000\,(1{,}276\,282)(1{,}024\,70)$$

$$C_{5,5} = 2\,615{,}61 \; FF$$

b) Solution rationnelle

Soit $n = e + f$, où :

- e est la partie entière de la durée totale de placement,
- f est la partie fractionnaire de la durée totale de placement.

La valeur acquise au terme des e périodes entières de placement s'écrit :

$$C_n = C_0(1+i)^e$$

L'intérêt simple produit par C_e, au cours de la durée fractionnaire restante f, se détermine ainsi :

$$C_f = C_e \times i \times f$$

La valeur acquise globale, qui résulte de la somme de C_e et C_f s'obtient directement par :

$$C_n = C_e + C_r = C_0(1+i)^e + C_0(1+i)^e \times i \times f$$

$$\boxed{C_n = C_0(1+i)^e(1+i\cdot f)}$$

Identifions ces paramètres aux valeurs numériques de l'exemple du **2.4.a** :

$$C_0 = 2\,000$$

$$i = 0{,}05$$

$$n = 5\ ans\ et\ 6\ mois$$

Posons :

$$e = 5\ ans$$

$$f = 6/12\ d'année$$

La valeur acquise au terme de la période globale de placement sera fournie par :

$$C_{5,5} = 2\,000(1{,}05)^5\left[1+(0{,}05\times 6/12)\right],$$

$$C_{5,5} = 2\,000(1{,}05)^5(1{,}025)$$

$$C_{5,5} = 2\,616{,}38\ FF$$

Remarque : La valeur acquise fournie par la solution rationnelle (2 616,38 FF) est toujours supérieure à celle obtenue par application de la méthode commerciale (2 616,61 FF).

La description de la dernière méthode de traitement des durées fractionnaires nécessite la présentation préalable de la notion de taux équivalents.

3. Taux équivalents et proportionnels

3.1.Taux équivalents

Un taux i_k , correspond à une période k fois plus petite que l'année, est équivalent au taux annuel i si, pour un même capital placé, la valeur acquise au terme des kn périodes est égale à celle obtenue au taux annuel i à la fin de n années de placement :

Soit : C, capital placé ;

i, le taux annuel d'intérêt ;

i_k, le taux d'intérêt relatif à une subdivision périodique k fois plus petite que l'année, avec :

- $k = 2$ si la subdivision est le semestre,
- $k = 4$ si la subdivision est le trimestre,
- $k = 12$ si la subdivision est le mois,

La relation énoncée précédemment s'exprime formellement ainsi :

$$C(1+i)^n = C(1+i_k)^{kn}$$

$$\Leftrightarrow (1+i)^n = (1+i_k)^{kn}$$

$$\Leftrightarrow (1+i) = (1+i_k)^k$$

La transformation de l'égalité fournit la valeur de i_k :

$$\boxed{i_k = (1+i)^{1/k} - 1}$$

Application *: Considérons de nouveau les données de l'exercice auquel ont été appliquées les méthodes commerciale et rationnelle :*

$C_0 = 2000$

$i = 0{,}05$

$n = 5\ ans\ et\ 6\ mois$

Les taux équivalents, dont le calcul est le plus indiqué dans le cas présent, sont ceux relatifs au mois et au semestre :

- ***Taux mensuel équivalent au taux annuel** i*

Déterminons le taux mensuel, noté i :

$i_{12} = (1{,}05)^{1/12} - 1$:

$i_{12} = 0{,}004074124$

Pour être homogène, l'expression de la valeur acquise doit comporter l'indication de la durée exprimée en mois, n *devient donc :*

$n = 66\,mois$

La valeur acquise, déterminée à partir de l'expression mensuelle équivalente, est égale à :

$$C_{66} = C\left(1 + i_k\right)^n$$

$$C_{66} = 2\,000\,(1{,}004\,741\,24)^{66}$$

$$C_{66} = 2\,615{,}60\,FF$$

- ***Taux semestriel équivalent au taux annuel*** i

Détermination du taux i_2 *:*

$$i_2 = (1{,}05)^{6/12} - 1$$

$$i_2 = 2\,615{,}60\,FF$$

Remarques : - La valeur acquise obtenue à partir du taux équivalent, mensuel ou semestriel, est identique à celle produite par l'expression annuelle. Le recours à un taux équivalent permet donc de traiter les cas où la durée ne correspond pas à un nombre entier. Il convient de noter que le résultat obtenu par cette méthode est similaire à celui produit par la méthode commerciale ;

- Concernant la méthode rationnelle, nous avions indiqué précédemment que son calcul reposait pour partie sur les intérêts simples. En réalité, **la solution rationnelle peut également être fondée sur l'usage d'un taux proportionnel.**

3.2.Taux proportionnels

Le taux relatif à une période k **fois plus petite que l'année est proportionnel au taux annuel** i***, si sa valeur est le résultat du rapport :*** i/k

Ainsi, pour un taux annuel de 12% :

- Le taux mensuel proportionnel sera $12\%/12 = 1\%$
- Le taux trimestriel proportionnel sera $12\%/4 = 3\%$
- Le taux semestriel proportionnel sera $12\%/2 = 6\%$

<u>Application</u> : *Cet exemple est destiné à démontrer que l'intérêt simple et le taux proportionnel* *produisent les mêmes résultats, dans le cadre de la méthode rationnelle. Les données du problème étaient les suivantes :*

$C_0 = 2\,000$

$i = 0{,}05$

$n = 5 \; ans \; et \; 6 \; mois$

Deux taux proportionnels paraissent convenir au traitement de ces valeurs :

- *Le taux mensuel proportionnel au taux annuel 0,05*
- *Le taux semestriel proportionnel au taux annuel 0,05*

- ***Taux mensuel proportionnel***

$i / k = 0{,}05/12 = 0{,}0041667$

Son application, relative à la durée fractionnaire, fournit la valeur acquise :

$C_{5,5} = 2\,000\,(1{,}05)^5\,(1{,}004\,166\,7)^6$

$C_{5,5} = 2\,615{,}05\; FF$

- ***Taux semestriel proportionnel***

$i / k = 0{,}05/2 = 0{,}025$

Appliquée à la durée fractionnaire, la valeur acquise devient :

$C_{5,5} = 2\,000\,(1{,}05)^5\,(1{,}025)^1$

$C_{5,5} = 2\,616{,}38\; FF$

Remarque : L'application d'un taux proportionnel permet d'obtenir une valeur proche voire identique, si la subdivision du taux annuel correspond exactement à la fraction de temps, à celle produite par le calcul à intérêts simples retenu dans la méthode rationnelle.

3.3.Relation entre taux équivalents et proportionnels

Pour une même subdivision périodique, le taux proportionnel est systématiquement supérieur au taux équivalent.

Exemple

Déterminons, pour un taux annuel de 10%, les taux équivalents et proportionnels relatifs aux subdivisions annuelles suivantes :

Subdivisions annuelles	Taux équivalents	Relations	Taux proportionnels
Semestre	4,88%	<	5ù
Trimestre	2,41%	<	2,50%
Mois	0,797%	<	0,83%

Si l'on considère le processus inverse qui consiste à déterminer **les taux annuels équivalents et proportionnels** à partir de taux égaux relatifs aux subdivisions annuelles, les relations établies ci-dessus s'inversent.

Exemple :

Calculons, à partir d'un taux mensuel de 1%, les taux annuels équivalents et proportionnels.

	Taux annuels équivalents	Taux annuels proportionnels
Expressions algébriques	$i=(1+i_k)^k-1$	$i=(taux\,mensuel \times k)$
Expressions numériques	$i=(1,01)^{12}-1$	$i=(0,01\times 12)$
Taux	$12,68\%$ $>$	12%

Cet exemple confirme la prééminence du taux annuel équivalent sur le taux annuel proportionnel.

4. Valeur actuelle d'un capital placé à intérêts composés

4.1. Définition

La valeur C_n acquise par un capital placé pendant n périodes s'obtient par la capitalisation des intérêts. L'actualisation permet, par le processus inverse, de déterminer la valeur actuelle de C_n , également appelée valeur à l'origine ou valeur à l'époque zéro.

4.2. Expression générale

La valeur acquise est donnée par l'expression :

$$C_n = C_0(1+i)^n$$

Divisions les deux membres par $(1+i)^n$:

$$C_n/(1+i)^n = C_0(1+i)^n/(1+i)^n \ :$$

D'où :

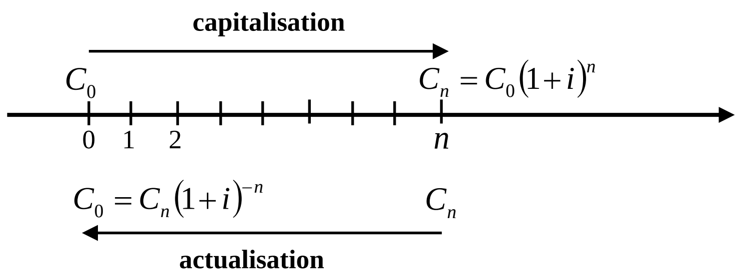
$$C_0 = C_n/(1+i)^n$$

Ou encore :

$$\boxed{C_0 = C_n/(1+i)^{-n}}$$

Cette expression fournit la valeur actuelle C_0 d'une somme dont l'expression à l'époque future n est C_n.

Représentation graphique



Application **:** *Déterminer la valeur actuelle au taux de 10% d'une somme de 50.000 FF payable dans cinq ans ?*

$C_0 = C_n(1+i)^{-n}$

$C_0 = 50\,000\,(1{,}10)^{-5}$

La résolution de cette équation s'effectue par trois moyens différents :

- ***Résolution à l'aide de la calculatrice***

$C_0 = 50000 \times 0{,}6209213$

$C_0 = 31046{,}07\ FF$

- ***Résolution à l'aide des logarithmes (base 10)***

$\log C_0 = \log 50000 + 5co\log(1{,}10)$

ou :

$\log C_0 = 4{,}69897 - 0{,}2069634$

$\log C_0 = 4{,}4920066$

$C_0 = 31046{,}07\ FF$

- ***Résolution à l'aide des tables financières***

Les valeurs de $(1+i)^{-n}$ *sont données par la table n) 2 :*

$(1{,}10)^{-5} = 0{,}620\,921$

$C_0 = 50000 \times 0{,}620921$

$C_0 = 31046{,}05\,FF$

Remarque : L'expression générale de la valeur actuelle comporte les mêmes variables que celle de la formule qui fournit la valeur acquise : $C_0, C_n, i, n.$ Dans le cas où la valeur de l'une de ces variables est inconnue, sa détermination s'effectue de manière similaire à celle appliquée à l'expression de la valeur acquise. Le recours aux notions de capitalisation et d'actualisation permet d'évaluer un capital, à une date quelconque et quel que soit le moment de son paiement effectif. Cette évaluation est utilisée dans le cas général de l'escompte à intérêts composés et plus particulièrement pour les équivalences de capitaux, exprimées dans le même système d'intérêts.

5. L'escompte à intérêts composés

L'escompte à intérêts composés s'applique aux effets dont l'échéance est **supérieure à un an**. Dans le cas des intérêts simples, l'escompte est obtenu par la différence entre la valeur normale et la valeur actuelle. Ce principe demeure valable dans le cas des intérêts composés, **seul change le mode de calcul de la valeur actuelle.**

5.1. Définition

L'escompte est la différence entre la valeur nominale de l'effet et la valeur actuelle à intérêts composés.

5.2.Expression générale

Désignons par :

V : la valeur nominale de l'effet

i: le taux de l'escompte annuel pour 1 franc

n : la durée de l'escompte exprimée en années

E : le montant de l'escompte à intérêts composés

a: la valeur actuelle de l'effet.

L'escompte est par définition égal à :

$$\boxed{E = [V - a]}$$

La valeur de a doit être déterminée de la même façon que la valeur actuelle d'un capital placé à intérêts composés. Dans le cas présent V est assimilé à ce capital. En conséquence, a est donnée par l'expression :

$$a = V(1+i)^{-n}$$

L'escompte s'exprimera également ainsi :

$$E = \left\lfloor V - V(1+i)^{-n} \right\rfloor$$

$$\boxed{E = V \left\lfloor 1 - (1+i)^{-n} \right\rfloor}$$

Application **:** *Déterminer, au taux de 6%, l'escompte et la valeur actuelle d'un billet de fonds payable dans 4 ans et de valeur nominale 50 000 F*

- ***Valeur actuelle***

$$a = V\left(1+i\right)^{-n}$$

$$a = 5000\left(1,06\right)^{-4}$$

$$a = 3960,47\ FF$$

- ***Escompte***

$$E = V - a$$

$$E = 5000 - 3960,47$$

$$E = 1039,53\ FF$$

5.3. Escompte rationnel ou commercial

Dans le chapitre précédent, consacrée à l'escompte à intérêts simples, une distinction était établie entre escompte rationnel et escompte commercial. Le présent paragraphe implique donc que soit précisé le caractère de l'escompte à intérêts composés ;

La différence numérique entre les valeurs des escomptes commercial et rationnel est faible, dans le cas de l'intérêt simple. L'escompte à intérêts composés est fondé sur des valeurs de n très nettement supérieures, de sorte que cette différence est notablement accrue.

L'application d'un escompter commercial à intérêts composés pénaliserait de façon excessive le vendeur de l'effet. En conséquence, il apparaît plus raisonnable que l'escompte à intérêts composés soit fondé sur le principe rationnel.

Considérons, en application de ce dernier principe, que l'escompte est déterminé à partir de la valeur actuelle.

La transformation de l'égalité : $E = V - a$, permet d'obtenir **:**

$$a + E = V$$

L'escompte étant proportionnel à la valeur actuelle, son expression **pour une période** sera :

$$E = a\,i$$

La transposition dans l'égalité précédente permet d'écrire :

$$a + a\,i = V$$

$$\Leftrightarrow$$

$$a(1+i) = V$$

La généralisation à n périodes produit une expression de la forme :

$$a(1+i)^n = V$$

d'où :

$$a = V(1+i)^{-n}$$

Cette égalité est identique à la définition algébrique de la valeur actuelle donnée au paragraphe 5.2. Cela signifie que l'escompte à intérêts composés est un escompte rationnel.

6. Equivalence de capitaux à intérêts composés

6.1. Equivalence de deux capitaux

a) Définition

Deux capitaux évalués au même taux sont équivalents si, à une date donnée, leurs valeurs actuelles à intérêts composés sont égales.

Contrairement aux intérêts simples, l'équivalence à intérêts composés se vérifie quelle que soit la date à laquelle elle est établie. En effet, si deux valeurs actuelles s'égalisent à une date donnée, cette égalité sera de nouveau effective à une date quelconque, pour des valeurs actuelles différentes des précédentes.

b) Expression générale

Désignons par :

- $\mathbf{V_1}$ et $\mathbf{V_2}$: les valeurs nominales respectives des capitaux 1 et 2
- $\mathbf{a_{1,p}}$ et $\mathbf{a_{2,p}}$: les valeurs actuelles respectives, établies à la date p
- $\mathbf{n_1}$ et $\mathbf{n_2}$: le nombre de périodes aux termes desquelles les capitaux 1 et 2 sont payables
- **p** : un nombre de périodes quelconques, exprimé par référence à l'époque zéro
- **i** : le taux d'évaluation.

A la date d'équivalence p, les deux valeurs actuelles s'égalisent :

$$\boxed{a_{1,p} = a_{2,p}}$$

où :

$a_{1,p} = V_1(1+i)^{p-n_1}$

$a_{2,p} = V_2(1+i)^{p-n_2}$

Cette équivalence s'exprime également ainsi :

$$\boxed{V_1(1+i)^{p-n_1} = V_2(1+i)^{p-n_2}}$$

Si $p = 0$, l'expression obtenue permet d'égaliser les valeurs actuelles à l'époque zéro :

$$\boxed{a_{1,0} = a_{2,0}}$$

d'où :

$$V_1(1+i)^{-n_1} = V_2(1+i)^{-n_2}$$

Les problèmes d'équivalence portent généralement sur la recherche des valeurs V_1 *ou* V_2, n_1 *ou* n_2. Considérons deux applications caractéristiques de ces problèmes.

<u>Application</u> : 1) Détermination de la valeur de V

Un débiteur désire rembourser par anticipation dans 3 ans, une dette de 50 000 FF payable dans 6 ans. Déterminer, à un taux de 10%, la somme qu'il devra débourser.

$V_1 = 50000$

$V_2 = ?$

$i = 0,10$

$n_1 = 6\ ans$

$n_2 = 3\ ans$

- ***Représentation graphique du problème***

$V_2 = ?$

0 ——— **3** ——— **6** ———→ **temps**

$V_1 = 50000$

La résolution de ce problème implique que soit établie l'équivalence des deux capitaux à une date quelconque. Considérons ces dates au travers des valeurs données à p *, distance de l'époque zéro à une date fixée :*

$p = -3$

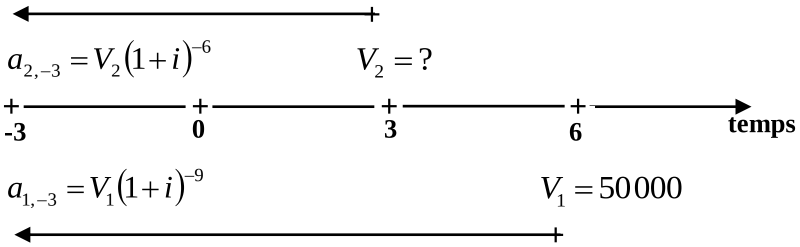
$p = 0$

$p = 4$

- ***Equivalence à la date*** $p = -3$

  A la date $p = -3$*, l'équivalence implique que les valeurs actuelles des deux dettes s'égalisent :*

  La conséquence numérique de cette égalité s'écrit :



$50\,000\,(1{,}10)^{-9} = V_2\,(1{,}10)^{-6}$

$\Leftrightarrow$

$50000\left[(1{,}10)^{-9}/(1{,}10)^{-6}\right] = V_2$

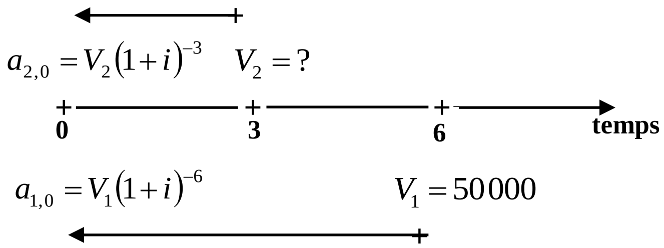
$\Leftrightarrow$

$50000(1{,}10)^{-3} = V_2$

$V_2 = 37565{,}74\ FF$

- ***Equivalence à la date*** $p = 0$

  A l'époque zéro, les valeurs actuelles des deux dettes sont également équivalentes :



Cette égalité à l'époque zéro s'écrit :

$50\,000\,(1{,}10)^{-6} = V_2\,(1{,}10)^{-3}$

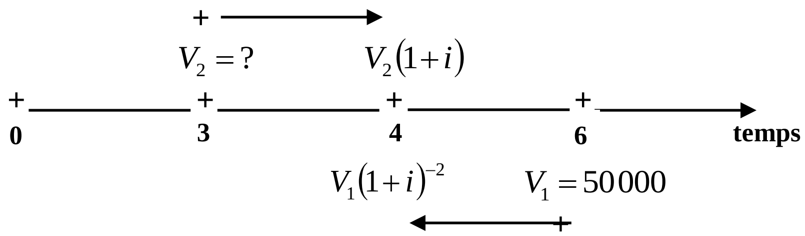
Une transformation similaire à celle appliquée dans le cas précédent $(p = -3)$ *fournit la valeur de la nouvelle dette :*

$V_2 = 50\,000\,(1{,}10)^{-3}$

$V_2 = 37565{,}74\ FF$

- ***Equivalence à la date*** $p = 4$

  Dans ce cas, l'égalité est établie à la date $p = 4$ *:*



L'équivalence implique donc l'égalité entre ***la valeur acquise*** *de* V_2 *et* ***la valeur actuelle de*** V_1 ***:***

$$50\,000\,(1{,}10)^{-2} = V_2\,(1{,}10)$$

D'où :

$$V_2 = 50\,000\,(1{,}10)^{-3}$$

$$V_2 = 37565{,}74\ FF$$

Cette application démontre que le choix de la date à laquelle est établie l'équivalence, n'a aucune influence sur le résultat final.

2) Détermination de la valeur de n

Un débiteur décide de s'acquitter d'une dette de 20 000 FF, payable dans 5 ans, par un règlement de 18 000 FF. Déterminer, au taux de 10%, la date à laquelle doit être opéré ce paiement

$V_1 = 20000$; $n_1 = 5\ ans$
$V_2 = 18000$; $n_2 = ?$
$i = 0{,}10$

L'équivalence entre ces deux dettes peut être établie à une date quelconque. La plus indiquée est celle qui correspond à la valeur de $p = 0$

L'égalité des valeurs actuelles s'écrit :

$$20\,000\,(1{,}10)^{-5} = 18\,000\,(1{,}10)^{-n_2}$$

La détermination de la valeur de n_2 *s'effectue soit par interpolation ou à l'aide des logarithmes.*

- ***Résolution par les logarithmes***

$$\log 20000 - 5\log(1{,}10) = \log 18000 - n_2 \log(1{,}10)$$

$$n_2 = \frac{\log 18000 + 5\log(1{,}10) - \log 20000}{\log(1{,}10)}$$

D'où :

$n_2 = 3,896$

La distance de l'échéance cherchée à la date p = 0 est de 3 ans, 10 mois et 23 jours.

- *Résolution par interpolation linéaire :*

$$\frac{20\,000}{18\,000}(1,10)^{-5} = (1,10)^{-n_2}$$

D'où :

$$(1,10)^{-n_2} = 0,689\,912$$

Cherchons dans la table financière n° 2 une valeur égale à 0,689 912 ou des valeurs qui l'encadrent. Les indications tabulaires obtenues sont :

0,683014 pour 4 ans

0,751315 pour 3 ans

La valeur de n_2 s'obtient par interpolation linéaire :

$$n_2 = \frac{(0,751315 - 0,689912)}{(0,751315 - 0,683013)}(3-4)$$

$n_2 = 3,899$

La distance de l'échéance à la date p=0, fournie par l'interpolation linéaire, est sensiblement égale à celle obtenue à l'aide des logarithmes ; elle est de 3 ans, 11 mois et 24 jours.

6.2.Equivalence d'un capital et de la somme de plusieurs capitaux

a) Définition

Un capital est équivalent à la somme de plusieurs autres si, à une date quelconque, la valeur actuelle de ce capital est égale à la somme des valeurs actuelles des autres capitaux.

Désignons par :

V : la valeur nominale du capital unique

n : le nombre de périodes aux termes desquelles le capital unique est payé

V_k : la valeur nominale du kième capital du groupe, avec $k = 1, \cdots, p$

n_k : le nombre de périodes aux termes desquelles le capital k est payé, avec $k = 1, \cdots, p$

i : le taux d'évaluation

L'équivalence à l'époque zéro entre le capital unique et le groupe de capitaux s'écrit :

$$\boxed{V(1+i)^{-n} = \sum_{k=1}^{p} V_k (1+i)^{-nk}}$$

Application **:** *Déterminer, au taux de 10%, la valeur nominale d'un capital unique, échéant dans 7 ans, destiné à remplacer les capitaux suivants :*

$V_1 = 1000\,FF$; $n_1 = 2$ *ans*

$V_2 = 2\,000\,FF$; $n_2 = 4$ *ans*

$V_3 = 3000\,FF$; $n_3 = 6$ *ans*

A la date de substitution, l'égalité des valeurs actuelles s'écrit :

$$V(1{,}10)^{-7} = 1000\,(1{,}10)^{-2} + 2\,000\,(1{,}10)^{-4} + 3000\,(1{,}10)^{-6}$$

$$V(1{,}10)^{-7} = 3885{,}89$$

D'où :

$$V = \frac{3885{,}89}{(1{,}10)^{-7}}$$

$$V = 7\,572{,}50\,FF$$

Remarque : Les problèmes fondés sur l'égalité de la valeur actuelle d'un capital unique et la somme des valeurs actuelles d'un groupe de capitaux, impliquent généralement la recherche de la valeur nominale de ce capital unique, à l'instar de l'application précédente, ou parfois de son échéance. Dans ces deux cas de figures l'échéance, donnée ou à déterminer, est une échéance commune. L'application qui suit traite le cas où cette échéance doit être déterminée.

Application **:** *Déterminer, au taux de 10%, l'échéance d'un capital unique de 7 572,50 FF substitué aux capitaux suivants :*

$V_1 = 1000\,FF$; $n_1 = 2$ *ans*

$V_2 = 2\,000\,FF$; $n_2 = 4$ *ans*

$V_3 = 3000\,FF$; $n_3 = 6$ *ans*

Egalisons les valeurs actuelles à la date de remplacement :

$$7\,572{,}52(1{,}10)^{-n} = 1000\,(1{,}10)^{-2} + 2\,000\,(1{,}10)^{-4} + 3000\,(1{,}10)^{-6}$$

$$(1{,}10)^{-n} = \frac{3885{,}89}{7572{,}50}$$

$$(1{,}10)^{-n} = 0{,}513158$$

La table financière n°2 indique la correspondance, en durée, de la valeur tabulaire 0,513158 :

n \ i	10%
	↓
7	← 0,513158

La distance entre la date d'équivalence et l'échéance de l'effet unique est 7 ans.

b) Échéance moyenne

L'échéance moyenne est un cas particulier des problèmes d'échéances communes. Il s'agit de l'échéance du capital unique, dont la valeur nominale est constituée par la somme de celles des capitaux remplacés.

Son principe est identique à celui développé dans le cadre des équivalences à intérêts simples. La différence réside dans la méthode de valorisation des intérêts qui sont composés dans le cas présent.

Par définition, la valeur nominale du capital unique est égal à :

$$V = \sum_{k=1}^{p} V_k$$

L'échéance moyenne est obtenue en égalisant d'une part, la valeur actuelle de l'effet unique et d'autre par la somme de celles des effets remplacés. Cette égalité à l'époque zéro, s'écrit :

$$V(1+i)^{-n} = \sum_{k=1}^{p} V_k (1+i)^{-n_k}$$

D'où :

$$(1+i)^{-n} = \frac{\sum_{k=1}^{p} V_k (1+i)^{-n_k}}{V}$$

La valeur de l'échéance moyenne(n) est directement lue dans la table financière n°2 ou déterminée par interpolation linéaire des valeurs fournies par cette même table. Elle peut être directement obtenue par l'expression logarithmique de l'échéance moyenne :

$$-n\log(1+i)=\log\sum_{k=1}^{p}V_k(1+i)^{-n_k}-\log V$$

Par définition, $\log V=\log\sum_{k=1}^{p}V_k$

D'où :

$$n=\frac{\log\sum_{k=1}^{p}V_k-\log\sum_{k=1}^{p}V_k(1+i)^{-n_k}}{\log(1+i)}$$

Remarque : En réalité n n'est pas l'échéance moyenne, mais la distance moyenne de l'échéance du capital unique à la date où est établie l'équivalence (à l'époque zéro dans le cas présent).

<u>Application</u> : *Calculer l'échéance moyenne des trois capitaux suivants :*

$V_1=1000\,FF$; $n_1=2$ *ans*

$V_2=2000\,FF$; $n_2=4$ *ans*

$V_3=3000\,FF$; $n_3=6$ *ans*

- ***Résolution par interpolation linéaire***

$$V=\sum_{k=1}^{3}V_k$$

$$V=1000+2000+3000$$

$$V=6000$$

L'échéance moyenne s'obtient à partir de :

$$(1,10)^{-n}=\frac{1000(1,10)^{-2}+2000(1,10)^{-4}+3000(1,10)^{-6}}{6000}$$

$$(1,10)^{-n}=0,647\,648$$

La table financière n°2 comporte les valeurs tabulaires suivantes :

0,620 921 pour $n=5$ *ans*

0,683 013 pour $n=4$ *ans*

L'interpolation linéaire fournit la valeur de n :

$$n=4-\frac{(0,683013-0,647648)}{(0,683013-0,620921)}(4-5)$$

$$n=4,57$$

La distance moyenne entre l'échéance (qui est en conséquence moyenne) et la date d'équivalence est de 4 ans, 6 mois et 25 jours.

- Résolution à l'aide des logarithmes :

$$n = \frac{\log \sum_{k=1}^{p} V_k (1+i)^{-n_k}}{\log(1+i)}$$

$$n = \frac{\log 6\,000 - \log 3885,89}{\log(1,10)}$$

$$n = 4,56$$

La distance moyenne obtenue à l'aide du calcul logarithmique, est sensiblement égale à celle produite par l'interpolation linéaire : 4 ans, 6 mois et 22 jours.

6.3.Equivalence de deux groupes de capitaux

Deux groupes de capitaux sont équivalents si, à une date quelconque, la somme des valeurs actuelles des capitaux d'un groupe est égale à celle des capitaux de l'autre groupe.

Soit un groupe de capitaux de valeurs nominales $V_1, \cdots, V_p$ dont les échéances respectives sont distantes de l'époque zéro de $n_1, \cdots, n_p$ périodes et un autre groupe de capitaux de valeurs nominales $W_1, \cdots, W_t$ dont les échéances respectives sont éloignées de l'époque zéro de $m_1, \cdots, m_t$ périodes (avec $t \ < ou > \ p$).

L'équivalence au taux i à l'époque zéro s'écrit :

$$V_1(1+i)^{-n_1} + V_2(1+i)^{-n_2} + \cdots + V_p(1+i)^{-n_p} = W_1(1+i)^{-m_1} + W_2(1+i)^{-m_2} + \cdots + W_t(1+i)^{-m_t}$$

$$\boxed{\sum_{g=1}^{p} V_g (1+i)^{n_g} = \sum_{j=i}^{t} W_j (1+i)^{-m_j}}$$

Cette équivalence peut également être établie à une date k quelconque (**avec** $k \ < ou > 0$). Son expression est obtenue en multipliant les deux membres de l'égalité précédente par $(1+i)^k$

$$\boxed{\sum_{g=1}^{p} V_g (1+i)^{k-n_g} = \sum_{j=i}^{t} W_j (1+i)^{k-m_j}}$$

7. Capitalisation et actualisation en temps continu

Les expressions des valeurs acquises et actuelles utilisées jusqu'alors sont fondées sur des valeurs discontinues du temps : semestre, trimestre et mois. Le présent paragraphe considère le cas où ces calculs sont établis à partir de valeurs temporelles continues ou pour des périodes infiniment plus petites que l'année.

7.1. Capitalisation continue ou instantanée

Considérons le cas d'un placement valorisé pour une période de temps k fois plus petite que l'année. La valeur acquise au taux i/k, proportionnel au taux annuel i, s'écrit :

$$C_1 = C_0\left(1+\frac{i}{k}\right)^k$$

Où :

C_1, est la valeur acquise au terme d'une année.

C_0, le capital initialement placé.

Posons : $\frac{i}{k} = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow \quad k = ix$

L'expression de la valeur acquise devient :

$$C_1 = C_0\left(1+\frac{i}{x}\right)^{ix}$$

Supposons à présent que k tend vers l'infini ce qui revient à considérer des périodes infiniment plus petites que l'année :

Si $\quad k \to \infty$

$\Rightarrow \quad x \to \infty$

$\Rightarrow \quad \left(1+\frac{1}{x}\right)^{ix} \to e^i$

Avec $e = 2,7182818$, base des logarithmes népériens.

La valeur acquise par le capital C_0 au terme d'une année devient :

$$C_1 = C_0 \cdot e^i$$

Au terme de n années de capitalisation, la valeur acquise obtenue est :

$$\boxed{C_n = C_0 \cdot e^{in}}$$

Cette expression traduit le fait que les intérêts générés au cours de chacune des périodes, infiniment plus petites que l'année, s'ajoutent instantanément à la valeur issue des capitalisations précédentes pour produire, ensemble et à nouveau, des intérêts.

***Application* :** *Déterminer la valeur acquise par une somme de 2 000 FF, capitalisée instantanément, au taux annuel de 10% pendant 3 ans.*

$$C_n = 2\,000\, e^{0,10\times 3}$$

$$C_n = 2\,699,72\ FF$$

Cette valeur se détermine également à l'aide des logarithmes :

$$\log C_n = \log 2000 + 0,30 \log e$$

$$\log C_n = \log 3,431318$$

$3,431318$ *est le logarithme du nombre 2 699,72.*

7.2.Actualisation continue ou instantanée

En actualisation continue, la valeur actuelle C_0 d'une somme C_n payable à la date n est déterminée à partir de l'expression suivante :

$$C_n = C_0 \cdot e^{in}$$

$$\frac{C_n}{e^{in}} = C_0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\boxed{C_0 = C_n\, e^{-in}}$$

***Application* :** *Déterminer, par actualisation continue au taux annuel de 5%, la valeur à l'origine d'un capital de 10 000 FF payable dans 5 ans.*

$$C_0 = C_5\, e^{-(0,05\times 5)}$$

$$C_0 = 10\,000\, e^{-0,25}$$

$$C_0 = 7\,788,01\, FF$$

7.3.Taux de capitalisation continue équivalent

La capitalisation instantanée s'effectue à un rythme plus rapide que celle en temps discontinu. Cette différence implique que, **pour un même taux annuel et une même durée de**

placement, la valeur acquise par capitalisation continue est toujours supérieure à celle produite par la même opération en temps discontinu.

Exemple

Comparons les valeurs acquises par capitalisation continue et discontinue, d'une somme de 5 000 FF placée au taux annuel de 5% pendant 5 ans.

	Capitalisation continue	**Capitalisation discontinue**
Expression algébrique	$C_n = C_0 \cdot e^{in}$	$C_n = C_0(1+i)^n$
Expression numérique	$C_n = 5\,000\, e^{0,05\times 5}$	$C_n = 5\,000(1,05)^5$
Résultats et relation	6420,13 FF > 6381, 41 FF	

La différence des rythmes de capitalisations implique également que **pour des valeurs acquise et initiale identiques correspondant à une même durée de placement, le taux annuel de capitalisation instantanée est inférieur à celui utilisé en capitalisation discontinue.**
Le taux de capitalisation instantanée est équivalent au taux utilisé dans le système de temps discontinu, si l'application de ces taux produit la même acquise dans les deux systèmes.

Désignons par :

C_0 : la valeur initiale du capital placé, identique dans les deux systèmes de capitalisation

i : le taux d'intérêts annuel de capitalisation discontinue

n : la durée de placement, identique dans les deux systèmes de capitalisation

x : le taux d'intérêt annuel de capitalisation continue, équivalent au taux i.

L'égalité des valeurs acquises déterminées par capitalisation continue et discontinue s'écrit :

$$C_0(1+i)^n = C_0 \cdot e^{xn}$$

La simplification de cette expression produit :

$$(1+i)^n = e^x$$

L'expression logarithmique de cette égalité facilite la détermination de la valeur de x :

$$\log(1+i) = x \log e$$

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{x = \frac{\log(1+i)}{\log e}}$$

***Application* :** *Déterminer le taux de capitalisation continue équivalent au taux de 10%.*

$$x = \frac{\log(1{,}10)}{\log 2{,}7182818}$$

$$x = \frac{0{,}0413936}{0{,}4342946}$$

$$x = 0{,}09531$$

Le taux de capitalisation continue, équivalent au taux de 10%, est égal à 9,53%. L'application de ce taux permet ainsi d'obtenir la même valeur acquise que celle issue d'une capitalisation discontinue au taux de 10%.

CE QU'IL FAUT RETENIR

- **Capitalisation et actualisation à intérêts composés**

	Capitalisation		Actualisation	
	Discontinue	Continue	Discontinue	Continue
Expression générale	$C_n = C_0(1+i)^n$	$C_n = C_0 \cdot e^{in}$	$C_0 = C_n(1+i)^{-n}$	$C_n = C_0 \cdot e^{-in}$

- **Problèmes relatifs à la durée en capitalisation discontinue**

  • ***Cas où n est inconnue***

	Valeur tabulaire	Valeur non tabulaire
Expression de n	**Interpolation linéaire**	$n = \frac{\log C_n - \log C_0}{\log(1+i)}$

- ***Cas où n est fractionnaire***

$n = e + f$

$e = \text{partie entière de la durée}$

$f = \text{partie fractionnaire restante}$

	Solution commerciale	Solution rationnelle
Expression de la valeur acquise C_n	$C_{e+f} = C_0(1+i)^{e+f}$	$C_{e+f} = C_0(1+i)^e(1+i)^f$

- **Taux équivalent et taux proportionnels**

$k =$ rapport entre la subdivision annuelle et l'année (exprimée en mois ou en jours).

	Taux équivalents	Taux proportionnels
Capitalisation discontinue	$i_k = (1+i)^{1/k} - 1$	$1/k$
Capitalisation continue	$x = \dfrac{\log(1+i)}{\log e}$	
Précisions complémentaires	x est le taux d'intérêt annuel de capitalisation continue équivalent au taux annuel i.	

- **Escompte à intérêts composés**

$$E = V\left[1-(1+i)^{-n}\right]$$

- **Equivalence de capitaux à intérêts composés**
  - ***Echéance commune***

Equivalence	**Expression générale** (à l'époque zéro)	**Expression à une époque quelconque**
de deux capitaux	$V_1(1+i)^{-n_1} = V_2(1+i)^{-n_2}$	à l'époque p : $V_1(1+i)^{p-n_1} = V_2(1+i)^{p-n_2}$
d'un capital et de la somme de plusieurs capitaux	$V(1+i)^{-n} = \sum_{k=1}^{p} V_k(1+i)^{-n_k}$	à l'époque k : $V(1+i)^{k-n} = \sum_{k=1}^{p} V_k(1+i)^{k-n_k}$
de deux groupes de capitaux	$\sum_{g=1}^{p} V_g(1+i)^{-n_g} = \sum_{j=1}^{t} W_j(1+i)^{-m_j}$	à l'époque k : $\sum_{g=1}^{p} V_g(1+i)^{k-n_g} = \sum_{j=1}^{t} W_j(1+i)^{k-m_j}$

- ***Echéance moyenne :*** (cas particuliers de l'échéance commune)
- Valeur tabulaire obtenue à partir de :

$$(1+i)^n = \frac{\sum_{k=1}^{p} V_k(1+i)^{-n_k}}{V}$$

- Valeur donnée par l'expression logarithmique :

$$n = \frac{\log \sum_{k=1}^{p} V_k - \log \sum_{k=1}^{p} V_k(1+i)^{-n_k}}{\log(1+i)}$$

EXERCICES

1 *Calculez la valeur acquise par un capital de 7 200 F placé au taux de 13,5% pendant 4 ans (par deux méthodes) ; 7 ans 5 mois (par deux méthodes).*

2 *Calculez le taux qui appliqué à un capital de 25 000 F, conduit à une valeur acquise de 53 000 F au bout de 8 ans.*
(Utilisez le calcul direct et les tables).

3 *Calculez le capital qui, au taux de 9,5%, a conduit à une valeur acquise de 120 000 F au terme de dix ans. (Utilisez le calcul direct et les tables).*

4 *au terme de combien d'années, un capital de 45 000 F placé à intérêts composés au taux de 8% donnera la même valeur acquise que le même capital placé pendant dix ans à intérêts simples. (Utilisez le calcul direct et les tables.)*

5 *1- Calculez :*

a) Les taux semestriels équivalent et proportionnel au taux annuel de 13% ;
b) Les taux trimestriels équivalent et proportionnel au taux annuel de 9% ;
c) Les taux mensuels équivalent et proportionnel au taux annuel de 11% ;
d) Les taux mensuels équivalent et proportionnel au taux semestriel de 6% ;
e) Les taux annuels équivalent et proportionnel au taux mensuel de 1,25% ;
f) Les taux annuels équivalent et proportionnel au taux trimestriel de 2,2ù.

2- que vérifiez-vous ?

6 *1- Calculez le taux de capitalisation instantané correspondant à un taux annuel de 14%, le taux annuel qui correspond à un taux de capitalisation instantané de 9%.*
2- calculez le taux annuel correspondant à une capitalisation instantanée qui a permis de multiplier le capital par 1,12 au bout d'un an.
3- Calculez le taux instantané qui actualise 28 000 F reçus dans trois ans à 20 000 F.
4- Pendant combien de temps faut-il placer 70 000 F au taux de capitalisation instantané de 3% par trimestre pour obtenir une valeur acquise de 120 000 F ?

7 On dispose en banque de 35 000 F placés à intérêts composés. Trois ans après, on retire 40 000 F.

Deux ans après le compte est créditeur de 7 137,36 F.

1- *Calculez le taux de capitalisation.*
2- *Quelle somme, au maximum, peut-on retirer pour disposer de 1 000 F sur le compte deux ans après le retrait ?*

8 Une entreprise désire disposer de 1 300 000 F dans trois ans. Si elle place 300 000 F les deux premières années sur les marchés financiers, les taux de rendement qu'elle anticipe sont de 15% la première année, 2% la deuxième année, 11% la troisième année. Si elle place cet argent à la banque, elle obtient un taux d'intérêt annuel constant à 7%.

1- *Quelle somme doit-elle placer au début de la troisième année dans chacun des cas ?*
2- *Quelle serait la solution la plus avantageuse pour l'entreprise. Indiquez alors la somme à placer ?*
3- *Le bien que l'entreprise désire acheter subira une inflation de 4% par an. Quelle sera la somme à verser dans le meilleur des cas, sachant que 1 300 000 F est la valeur du bien aujourd'hui ?*

9 Deux capitaux dont le montant total est de 120 000 F sont placés pendant 6 ans, le premier au taux de 7%, le second à 11,5%. Le montant total d'intérêts produits est de 76 920 F.

Calculez le montant des deux capitaux.

10 Un capital de 40 000 F à échéance de 3 ans est négocié à la banque.

1- *Calculez la valeur actuelle et l'escompte supporté. Le taux d'escompte est de 9,5%.*
2- *En fait la banque pour encourager la fidélité de son client a facturé un escompte de 8 000 F. Quel est le taux réel d'escompte pratiqué ?*
3- *Quelle est l'échéance d'un effet de 80 000 F négocié 49 673,71 F au taux de 10% ?*

11 En raison de difficultés de trésorerie une entreprise souhaite remplacer trois règlements de :

- 15 000 F dans un an
- 25 000 F dans trois ans
- 7 000 F dans quatre ans

par un règlement unique dans cinq ans au taux de 11%.

1- *Calculez le montant du règlement unique.*
2- *Calculez le montant du règlement unique si son échéance est dans deux ans.*
3- *Même question que 2 en supportant que les trois sommes données sont les valeurs actuelles des sommes à verser.*

12 On remplacer trois effets de 10 000 F à 2 ans
5 000 F à 3 ans
11 000 F à 5 ans.

par un effet unique de 26 000 F au taux de 9%.

Déterminer l'échéance de l'effet.

13 Deux capitaux de 7 000 F et 9 000 F sont payables dans 12 et 10 ans. Le taux d'escompte à intérêts composés est de 8%.

1- *Déterminez la durée pour laquelle les escomptes supportés par ces deux capitaux seront égaux.*
2- *Même question pour des échéances de 10 à 8 ans.*
3- *Même question pour 13 et 9 ans.*

14 Une entreprise dispose d'une créance de 100 000 F payable dans quatre ans. Le taux d'escompte est de 9%.

Elle bénéficie d'une rentabilité de ses investissements de 12%.

1- *Quelle opération avantageuse peut-elle réaliser ?*
2- *Quel gain l'opération lui permet-elle de réaliser aujourd'hui dans quatre ans ?*

CHAPITRE IV : LES ANNUITES

Thèmes : - Annuités temporaires et perpétuelles
- Annuités constantes et variables
- Valeurs acquises et actuelles
- Evaluation et équivalence
- Echéance moyenne

Les annuités désignent une suite de versements effectués à intervalles de temps réguliers. La distance d'un versement à l'autre peut être l'année, le semestre, le trimestre ou le mois.

Sont assimilés à des annuités, semestrialités, trimestrialités ou mensualités, les versements destinés à :

- Constituer un capital, il s'agit alors d'annuités de placement ou de capitalisation ;
- Rembourser une dette, c'est le cas des annuités de remboursement ou d'amortissement.

Ou encore, ceux dont l'objet est le paiement :

- Des redevances de crédit bail,
- Des loyers aux propriétaires d'immeubles,
- Des rentes.

Cette notion s'applique également aux charges et recettes générées chaque année par un investissement.

Les annuités sont temporaires si le nombre de versements est précisé et perpétuelles lorsque ce nombre est illimité.

Section I : Les Annuités Temporaires

1. Définition

Une suite d'annuités est définie dès lors que sont précisés :

- La date du premier versement
- Le nombre et la fréquence des versements

Il convient également de préciser la nature de ces annuités :

- Les annuités de début de période donnent lieu à un versement immédiatement consécutif à la signature du contrat. L'origine de cette suite d'annuités se situe à la date du premier versement.

- Les annuités de fin de période correspondent aux versements à terme échu. Leur origine est antérieure d'une période à la date du premier versement.

La nature des annuités est définitivement établie par la définition du montant de ces versements. **L'annuité constante désigne les versements de valeurs égales. Le cas contraire correspond aux annuités variables. Le caractère de cette variation est généralement précisé par la loi d'évolution des annuités, qui peut-être arithmétique ou géométrique.**

2. Annuités constantes

2.1. Valeur acquise d'une suite d'annuités constantes de fin de périodes

a) Définition

La valeur acquise d'une suite d'annuité désigne la somme des valeurs acquises par chacune de ces annuités, déterminée immédiatement après le dernier versement.

Désignons par :

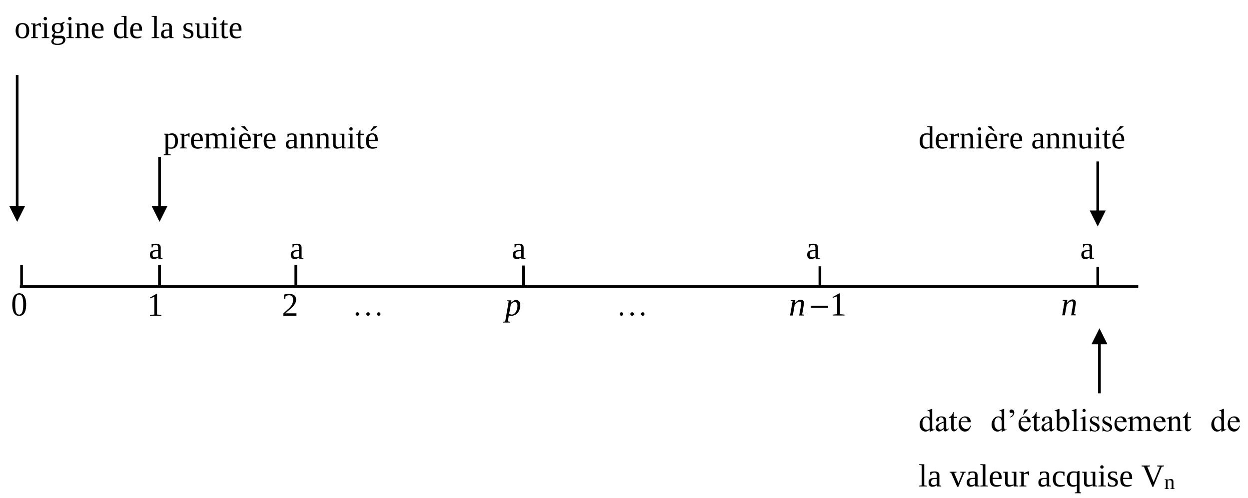
V_n : la valeur acquise par la suite d'annuités au terme des n périodes de capitalisation

a : le montant constant de l'annuité

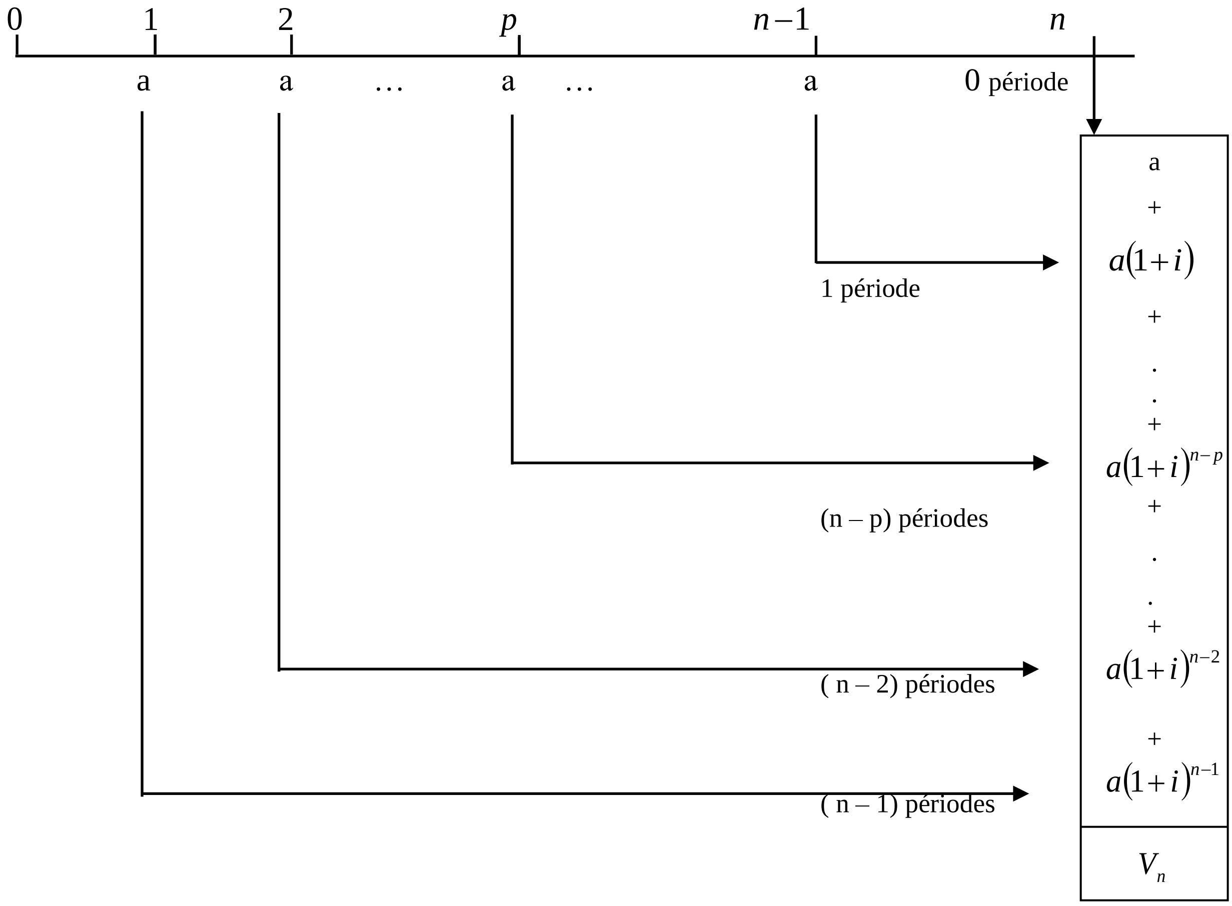
n : le nombre d'annuités

i : le taux d'intérêt pour un franc.

Représentons ces paramètres sur l'axe du temps :



Déterminons à présent les valeurs acquises par les n annuités :



Les valeurs acquises par chacune des annuités forment une progression géométrique dont :

a est le premier terme

n est le nombre de termes

$(1+i)$ est la raison.

La somme de ces termes est directement obtenue par l'application de l'expression :

$$V_n = a\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Où $q = (1+i)$

$$V_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{1+i-1}$$

$$\boxed{V_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

La valeur de l'expression $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ est donnée par la table financière n°3.

Application : *Déterminer au taux de 7%, la valeur acquise d'une suite de 8 annuités égales chacune à 5 000 FF.*

$$V_n = 5000\frac{(1,07)^8 - 1}{0,07}$$

La valeur de $\frac{(1,07)^8 - 1}{0,07}$ *donnée par la table n°3 est :*

$$10,259803$$

$$V_n = 5000 \times 10,259803$$

$$V_n = 51299,01\ FF$$

b) Transformation de l'expression générale

L'expression générale comporte trois variables : a, n, i. Si l'une d'elles est inconnue, la recherche de sa valeur implique la transformation de la formule initiale :

- **Cas où a est l'inconnue**

La détermination de la valeur numérique de a ne pose aucun problème à l'utilisateur d'une calculatrice.

Application : *Déterminer l'annuité qui, capitalisé à 7%, fournit une valeur acquise de 51 299, 01 FF. nombre de versements : 8*

$$a = 51299,01 \cdot \frac{0,07}{(1,07)^8 - 1}$$

$$a = 4999,99 \quad soit \quad 5000\,FF$$

- **Cas où n est l'inconnue**

La valeur de n s'obtient à partir de :

$$\frac{V_n}{a} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

La correspondance tabulaire de V_n / a fournit la valeur de n ; deux cas de figure sont alors possible :

- n **est un nombre entier.** Cette valeur constituera la solution au problème posé.
- n **est un nombre fractionnaire.** Le problème, tel qu'il est présenté n'a aucune solution.

Illustrons ces deux éventualités à l'aide des applications suivantes :

Applications : 1) Cas où n est un nombre entier *i*

Déterminer, au taux de 7% le nombre d'annuités constantes de 5 000 FF nécessaire à la constitution d'un capital de 51 299,01 FF.

$$\frac{51299,01}{5000} = \frac{(1,07)^n - 1}{0,07}$$

$$10,259802 = \frac{(1,07)^n - 1}{0,07}$$

$10,259802$ *se trouve dans la colonne du taux 7% de la table n°3. Le nombre correspondant à cette valeur est 8.*

2) Cas où n est un nombre fractionnaire

Déterminer, au taux de 7%, le nombre d'annuités constantes de 5 000 FF nécessaire à la constitution d'un capital de 55 000 FF.

$$\frac{55000}{5000} = \frac{(1,07)^n - 1}{0,07}$$

$$11 = \frac{(1,07)^n - 1}{0,07}$$

La table financière n°3 indique que 11 correspond à un nombre de versements compris entre 8 et 9. La condition impérative étant d'obtenir une valeur entière pour n, ce problème n'a donc pas de solution correspondant à la forme sous laquelle il est posé.

Deux solutions peuvent être envisagées en fonction des modifications de l'énoncé admises :

- *PREMIERE SOLUTION*

Elle implique que l'annuité constante définie dans l'énoncé soit supérieure ou inférieure à celle initialement imposée : 5 000 FF.

Pour $n = 8$, l'annuité constante est égale à :

$$a = V_n \frac{i}{(1+i)^n}$$

$$a = 55000 \frac{0,07}{(1,07)^8 - 1}$$

$$a = 5360,73\, FF$$

Pour $n = 9$, l'annuité constante devra être égale à :

$$a = 55000 \frac{0,07}{(1,07)^9 - 1}$$

$a = 4591,76\,FF$

Si l'énoncé du problème impose une annuité constante de 5 360,75 FF ou 4 591,76 FF, la solution fournira alors un nombre entier pour n qui sera, respectivement, 8 ou 9.

- *SECONDE SOLUTION*

La modification imposée par le recours à cette solution est relative au caractère de l'annuité. Elle implique une exception à la constante des annuités définie dans l'énoncé.

Pour $n = 8$*, la valeur acquise obtenue est :*

$$V_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$V_n = 5000\frac{(1,07)^8 - 1}{0,07}$$

$a = 51299,01\,FF$

Pour parvenir à une valeur acquise de 55 000 FF, il est nécessaire que la dernière annuité soit égale à :

$5000 + (55000 - 51299,01) = 8700,99\,FF$

Pour $n = 9$ *, la dernière annuité doit être minorée afin que la valeur acquise ne soit pas supérieure à 55 000 FF.*

$$V_n = 5000\frac{(1,07)^9 - 1}{0,07}$$

$a = 59889,94\,FF$

La neuvième et dernière annuité sera égale à :

$5000 - (59889,94 - 55000) = 110,06\,FF$

L'inconvénient majeur de cette seconde solution est évident. Elle aboutit parfois à ***une valeur négative pour la dernière annuité.***

- ***Cas où*** i ***est l'inconnue***

La valeur de i s'obtient à partir de la même expression que celle qui permet de déterminer la valeur de n.

$$\frac{V_n}{a} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

<u>Application</u> : *A quel taux doit-on capitaliser 6 annuités constantes de 6 000 FF pour parvenir à une valeur acquise de 42 000 FF ?*

$$\frac{V_n}{a} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\frac{42\,000}{6\,000} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 7$$

La table financière n°3 fournit les indications suivantes :

6,975 319 pour un taux de 6%

7,063 728 pour un taux de 6,5%

La valeur de i s'obtient par interpolation linéaire :

$$i = 0,06 - \frac{(6,975319 - 7)}{6,975319 - 7,063728}$$

$$i = 0,06 + 0,001396$$

$$i = 0,0614$$

Le taux cherché est 6,14%.

c) Valeur acquise d'une suite de versements constants non annuels

Le traitement de ce cas particulier implique le recours à l'expression de la valeur acquise fondée sur une fréquence annuelle ainsi que l'utilisation de la notion de taux équivalents :

Application : *Déterminer la valeur acquise par une suite de 14 trimestrialités de 4 000 FF. Taux d'intérêts annuel : 12%.*

- Calcul du taux trimestriel équivalent au taux annuel de 12% :

$$i_k = (1+i)^{1/k} - 1$$

$$i_4 = (1,12)^{1/4} - 1$$

$$i_4 = 0,02874$$

- Détermination de la valeur acquise :

$$V_{14} = 4\,000\frac{(1+i_4)^{14} - 1}{i_4}$$

$$V_{14} = 4\,000\frac{(1,02874)^{14} - 1}{0,02874}$$

$$V_{14} = 67\,764,75\ FF$$

2.2. Valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes de fin de périodes

a) Définition

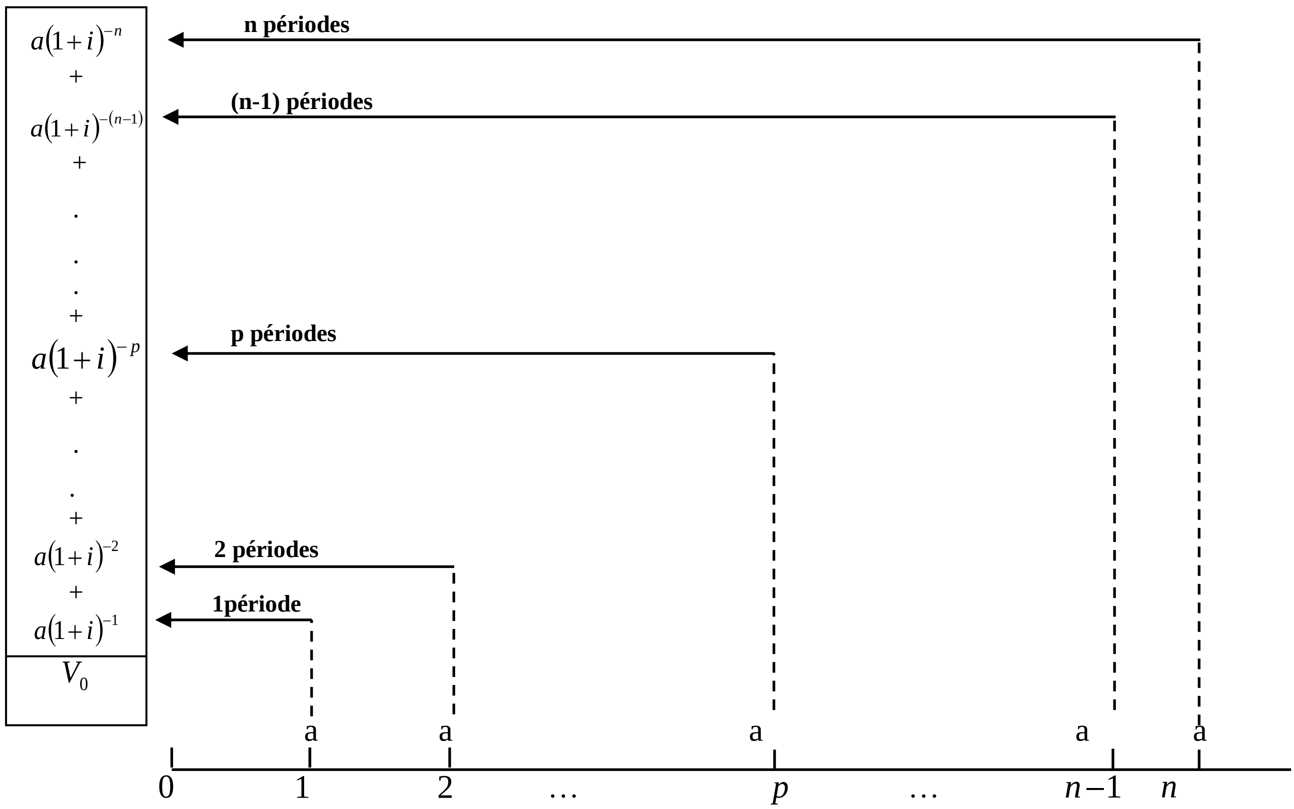
La valeur actuelle d'une suite d'annuités désigne la somme des valeurs actuelles de chacune des annuités, exprimée une période avant le premier versement.

Désignons par :

V_0 : la valeur actuelle de la suite d'annuités

i : le taux d'escompte pour un franc.

Détermination des valeurs unitaires et globales



La somme de ces valeurs actuelles forme une progression géométrique dont :

$a(1+i)^{-n}$ est le premier terme

n est le nombre de termes

$(1+i)$ est la raison.

La somme de ces termes s'obtient par application de la même expression que celle qui a permis d'établir la somme des valeurs acquises :

$$V_0 = a(1+i)^{-n}\frac{q^n - 1}{q-1}$$

Où : $q=(1+i)$

$$V_0 = a(1+i)^{-n}\frac{(1+i)^n-1}{1+i-1}$$

$$V_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

La somme de l'expression $\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ est donnée par la table financière n°4.

La valeur actuelle peut également être obtenue à partir de la valeur acquise par la même suite d'annuités constantes :

$$\boxed{V_0 = V_n(1+i)^{-n}}$$

Le processus inverse permet d'exprimer la valeur acquise à partir de la valeur actuelle :

$$\boxed{V_n = V_0(1+i)^{n}}$$

<u>Application</u> **:** *Calculer la valeur actuelle d'une suite de 10 annuités, égales chacune à 1 500 FF, escomptés au taux de 12%.*

$$V_0 = 1500\frac{1-(1,12)^{-10}}{0,12}$$

$$V_0 = 1500 \times 5,650223$$

$$V_0 = 8475,33\,FF$$

5,650 223 est fournie par la table financière n°4.

b) Transformation de l'expression générale

L'expression de la valeur actuelle comporte les mêmes variables que celle de la valeur acquise : $a, n\, et\, i$. La détermination de la valeur de chacune de ces variables implique des transformations similaires à celles effectuées dans le cas de la valeur acquise.

- **Cas où a est l'inconnue**

La valeur de a s'obtient à partir de :

$$\boxed{a = V_0\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}}$$

La valeur tabulaire de $\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$ est directement donnée par la table financière n°5. Elle n'implique donc aucune modification supplémentaire, à l'instar de la transformation appliquée à l'expression de la valeur acquise.

Application **:** *La valeur à l'origine d'une suite de 10 annuités constantes escomptées à 12% est 8 475,33 FF.*

Calculer le montant de l'annuité.

$$a = V_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$a = 8475,33 \frac{0,12}{1-(1,12)^{-10}}$$

$$a = 8475,33 \times 0,176984$$

$$a = 1500 \, FF$$

0,176 984 est donnée par la table financière n°5.

- **Cas où n est l'inconnue**

La valeur de n est déterminée à partir de :

$$\boxed{\frac{V_0}{a} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

La valeur tabulaire de $\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ est donnée par la table financière n°4.

Application **:** *La valeur actuelle d'une suite de n annuités constantes de 1 500 FF chacune, escomptées à 12%, est de 8 475,33 FF.*

Calculer n.

$$\frac{V_0}{a} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$\frac{3475,33}{1500} = \frac{1-(1,12)^{-n}}{0,12}$$

$$5,650220 = \frac{1-(1,12)^{-n}}{0,12}$$

Dans la colonne au taux 12%, 5,650 220 correspond au nombre 10 (table n°4).

- **Cas où i est l'inconnue**

La valeur de i est déduite de la même expression que celle utilisée précédemment :

$$\boxed{\frac{V_0}{a} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

La recherche à opérer se fonde sur la valeur, connue, de n.

Application **:** *A quel taux faut-il escompter une suite de 10 annuités constantes de 1 500 FF chacune afin d'obtenir 8 475,33 FF ?*

$$\frac{V_0}{a} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$\frac{8\,475,33}{1500} = \frac{1-(1+i)^{-10}}{i}$$

$$5,650\,220 = \frac{1-(1+i)^{-10}}{i}$$

La valeur de i est déterminée à partir de la ligne relative à n=10, dans la table financière n°4 : 5,650 220 se trouve dans la colonne qui reprend les valeurs tabulaires fournies par le taux i=12%.

2.3.Evaluation d'une suite d'annuités constantes à une date quelconque

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré les valeurs d'une suite d'annuités constantes qu'aux dates extrêmes :

- **A l'origine : valeur actuelle**

$$V_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

ou:

$$V_0 = V_n(1+i)^{-n}$$

- **Au terme immédiat du dernier versement : valeur acquise**

$$V_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

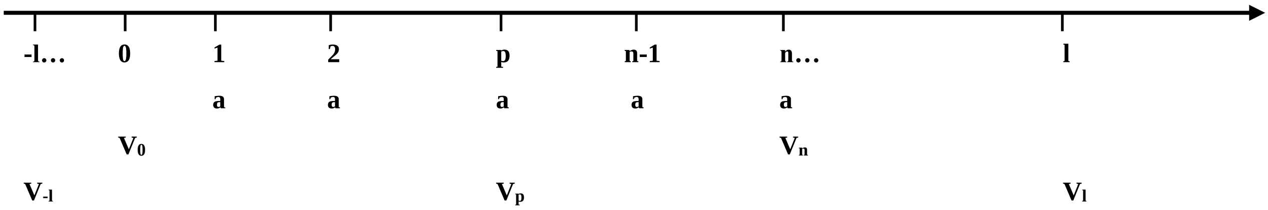
ou:

$$V_n = V_0(1+i)^n$$

La notion d'équivalence, développée dans le cadre de l'escompte, s'applique également aux suites d'annuités. L'évaluation à une date quelconque implique là encore le recours aux principes d'actualisation et de capitalisation.

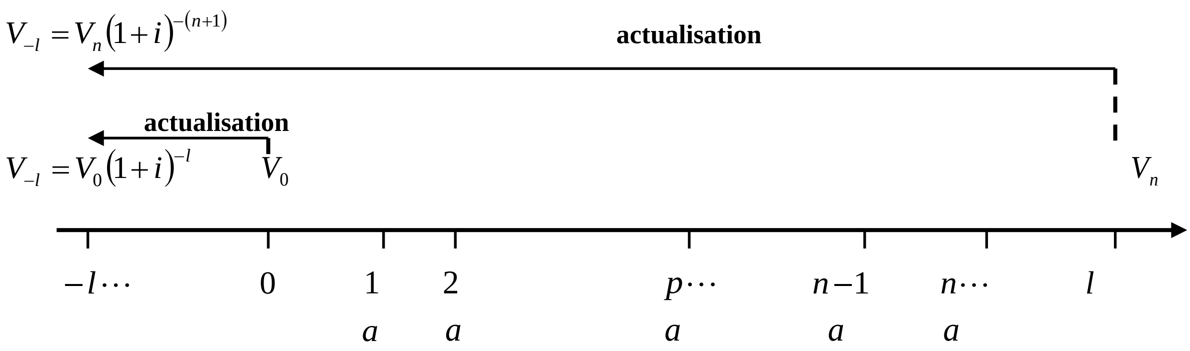
a) Représentation graphique du problème

Considérons, outre les dates extrêmes, trois autres époques situées à des points différents de l'axe du temps :



Ces dates donnent lieu à trois nouvelles évaluations : $V_{-l}\ ,V_p\ et\ V_l$

b) Evaluation à une date quelconque antérieure à l'origine de la suite d'annuités



- **Evaluation fondée sur la valeur actuelle**

La date $-l$ étant antérieure à l'origine de la suite d'annuités, il est nécessaire de procéder à l'actualisation de V_0 pour obtenir V_{-l} :

$$V_{-l} = V_0(1+i)^{-l}$$

Avec $V_0 = a\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

D'où :

$$\boxed{V_{-l} = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^{-l}}$$

- **Evaluation fondée sur la valeur acquise**

La date $-l$ est antérieure à l'époque où est déterminée la valeur acquise, dans une mesure plus grande $[-(n+l)]$ qu'elle ne l'était de la date originelle de la suite d'annuités $(-l)$;

$$V_{-l} = V_n(1+i)^{-(n+l)}$$

Avec $V_n = a\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$

D'où :

$$V_{-l} = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)^{-(n+l)}$$

$$\boxed{V_{-l} = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^{-l}}$$

c) Evaluation à une date quelconque située entre l'origine et le terme de la suite d'annuités

- **Evaluation fondée sur la valeur actuelle**

La date p étant postérieure à l'origine de la suite d'annuité, il est nécessaire de capitaliser V_0 pour parvenir à V_p.

$$V_p = V_0(1+i)^p$$

Avec $V_0 = a\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

D'où :

$$V_p = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^p$$

- **Evaluation fondée sur la valeur acquise**

La date p étant antérieure à l'époque n, V_p sera obtenue à partir de l'actualisation de V_n.

$$V_p = V_n(1+i)^{-(n-p)}$$

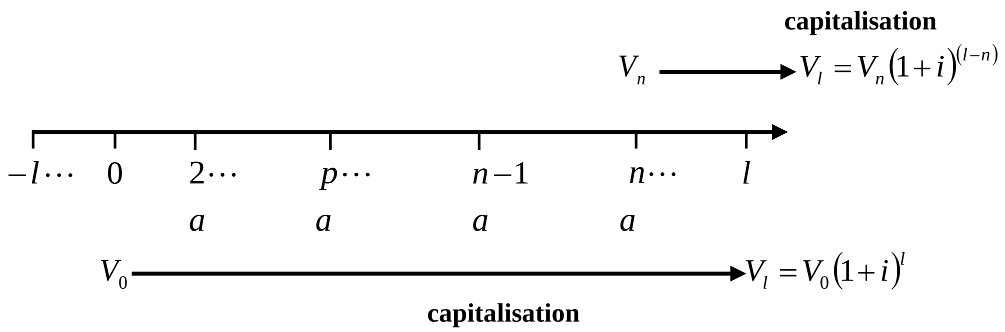
Avec $V_n = a\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$

D'où :

$$V_p = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)^{-(n-p)}$$

$$\boxed{V_p = a\frac{1+(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^p}$$

d) Evaluation à une date postérieure au versement de la dernière annuité



- **Evaluation fondée sur la valeur actuelle**

La capitalisation de V_0 fournit V_l

$$V_l = V_0(1+i)^l$$

Avec $V_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

D'où :

$$\boxed{V_l = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^l}$$

- **Evaluation fondée sur la valeur acquise**

La capitalisation de V_n , dans une mesure moins grande que le cas précédent, fournit V_l :

$$V_l = V_n(1+i)^{(l-n)}$$

Avec $V_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}$

D'où :

$$\boxed{V_l = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)^{(l-n)}}$$

<u>Application</u> : *Une suite comporte 8 annuités de 4 000 FF chacune ; évaluer, au taux de 10%, sa valeur :*

- 4 périodes avant le premier versement,

- Au terme de la 5ème annuité,

- 3 périodes après le dernier versement.

- Détermination des valeurs actuelle et acquise

$$V_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$V_0 = 4\,000\frac{1-(1{,}10)^{-8}}{0{,}10}$$

$$V_0 = 21339{,}70\ FF$$

$$V_n = a\frac{(1+i)^{n}-1}{i}$$

$$V_8 = 4\,000\frac{(1{,}10)^{-8}-1}{0{,}10}$$

$$V_8 = 45743{,}55\ FF$$

- ***Evaluation de la suite d'annuités constantes***

Dates d'évaluation	**Evaluation à partir de la valeur actuelle**	**Evaluation à partir de la valeur acquise**
4 périodes avant le premier versement	Soit 3 périodes avant V_0 $V_{-3} = V_0(1+i)^{-3}$ $V_{-3} = 21339{,}70\,(1{,}10)^{-3}$ $V_{-3} = 16032{,}83\ FF$	Soit 11 périodes avant V_n $V_{-3} = V_8(1+i)^{-11}$ $V_{-3} = 45\,743{,}55\,(1{,}10)^{-11}$ $V_{-3} = 16032{,}83\ FF$
Au terme de la 5ème annuité	Soit 5 périodes après V_0 $V_5 = V_0(1+i)^{5}$ $V_5 = 21339{,}70\,(1{,}10)^{5}$ $V_5 = 34367{,}80\ FF$	Soit 3 périodes avant V_n $V_5 = V_8(1+i)^{-3}$ $V_5 = 45\,743{,}55\,(1{,}10)^{-3}$ $V_5 = 34367{,}80\ FF$
3 périodes après le dernier versement	Soit 11 périodes après V_0 $V_{11} = V_0(1+i)^{11}$ $V_{-3} = 21339{,}70\,(1{,}10)^{11}$ $V_{-3} = 60\,884{,}65\ FF$	Soit 3 périodes après V_n $V_{11} = V_8(1+i)^{3}$ $V_{-3} = 45\,743{,}55\,(1{,}10)^{3}$ $V_{-3} = 60\,884{,}65\ FF$

Remarques : - Evaluation de la suite d'annuités 4 périodes avant le premier versement : si l'on procède à l'évaluation à partir de la valeur actuelle, cela signifie que la valeur à déterminer précède de 3 périodes seulement la date originelle, celle-ci par définition antérieure d'une période au premier versement.

- Quelle soit fondée sur la valeur acquise ou la valeur actuelle, l'évaluation produit le même résultat (au centime près) dans les deux cas.

2.4.Remplacement d'une suite d'annuités constantes

La notion de remplacement est fondée sur l'équivalence entre les suites d'annuités constantes initiale et nouvelle.

a) Remplacement d'une suite d'annuités constantes par un autre

Désignons par :

- a : l'annuité constante de fin de période de la suite initiale,
- n : le nombre d'annuités de la suite initiale,
- a' : l'annuité constante de fin de période de la nouvelle suite,
- m : le nombre d'annuités de la suite nouvelle,
- i : le taux d'intérêt pour 1 franc,
- V_0 : la valeur à l'époque zéro de la suite initiale,
- V_0' : la valeur à l'époque zéro de la nouvelle suite.

Une suite d'annuités constantes peut être remplacée par une autre si, à un taux donné et à une date quelconque, leur équivalence est établie. A l'époque zéro, l'équivalence est exprimée par l'égalité des valeurs actuelles de ces deux suites.

$$V_0 = V_0'$$

$$\boxed{a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = a'\frac{1-(1+i)^{-m}}{i}}$$

Les applications relatives au remplacement posent généralement le problème de la détermination des valeurs de a' ou m.

b) Remplacement d'une suite d'annuités constantes par un versement unique : cas général de l'échéance commune

Dans le cas présent, **la nouvelle suite d'annuités constantes est réduite à un terme.**

Désignons par :

- U : le versement unique qui remplace la suite initiale d'annuités constantes,
- u : le nombre de périodes au terme desquelles U est payé.

A l'époque zéro, l'égalité des valeurs actuelles s'écrit :

$$\boxed{U(1+i)^{-u} = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

Les applications relatives à ce cas imposent la détermination de la valeur de U. Lorsque U est connu, **la valeur de u cherchée correspond à l'échéance commune des annuités constantes formant la suite initiale.**

c) Echéance moyenne d'une suite d'annuités constantes

A l'instar du cas précédent, **la nouvelle suite ne comporte qu'un terme.** Elle s'en distingue par le caractère du versement unique **qui est la somme des annuités constantes de la suite initiale :**

L'équivalence à l'époque zéro s'écrit :

$$a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = U(1+i)^{-u}$$

Avec $U = na$

D'où :

$$a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = na(1+i)^{-u}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = n(1+i)^{-u}$$

L'échéance moyenne u s'obtient à partir de :

$$\boxed{(1+i)^{u} = n\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}}$$

Remarques : - La valeur de $\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$ est donnée par la table financière n°5.

- La valeur de u est indépendante de celle de l'annuité constante de la suite initiale : a.

<u>Application</u> *: Un débiteur engagé initialement par le remboursement de 10 annuités constantes de 8 000 FF, envisage d'acquitter sa dette soit par :*

- *Le versement de 12 trimestrialités constantes,*
- *Un versement unique de 79 167,09 FF,*
- *Un versement unique de 80 000 FF.*

Déterminer, au taux annule de 10% :

- *Le montant de chaque trimestrialité,*
- *Les échéances des versements uniques de 79 167,09 FF et 80 000 FF.*

La détermination du montant constant des trimestrialités nécessite le recours à un taux trimestriel équivalent au taux annuel de 0,10.

$$i_4 = (1+i)^{1/4} - 1$$

$$i_4 = (1{,}10)^{1/4} - 1$$

$$i_4 = 0{,}0241136$$

- ***Montant constant des trimestrialités (T)***

Egalisons, à l'époque zéro les valeurs de la suite initiale de 10 annuités constantes de 8 000 FF et de la nouvelle suite de 12 trimestrialités de T francs.

$$8000\frac{1-(1{,}10)^{-10}}{0{,}10}=T\,\frac{1-(1{,}0241)^{-12}}{0{,}0241}$$

$$T=4766{,}05\,FF$$

- ***Echéance du versement unique de 79 167,09 FF***

La nouvelle suite est réduite à un seul versement, dont l'échéance est obtenue par l'égalisation des valeurs actuelles.

$$8000\frac{1-(1{,}10)^{-10}}{0{,}10}=79167{,}09(1{,}10)^{-u}$$

$$\frac{49156{,}54}{79167{,}09}=(1{,}10)^{-u}$$

Exprimons cette égalité sous la forme logarithmique :

$$-\frac{\log 49156{,}54}{\log 79167{,}09}=u$$

$$u=5$$

L'échéance de ce versement unique est distante de 5 ans de l'époque zéro. Elle constitue l'échéance commune des annuités formant la suite initiale.

- ***Echéance du versement unique de 80 000 FF***

Le montant du versement unique est égale à la somme des annuités constantes de la suite initiale. L'échéance à déterminer est donc l'échéance moyenne.

$$(1+i)^{u}=n\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$(1{,}10)^{u}=10\cdot\frac{0{,}10}{1-(1{,}10)^{-10}}$$

$$(1{,}10)^{u}=1{,}627\,454$$

Exprimons cette égalité sous forme logarithmique :

$$u=\frac{\log 1{,}627\,454}{\log(1{,}10)}$$

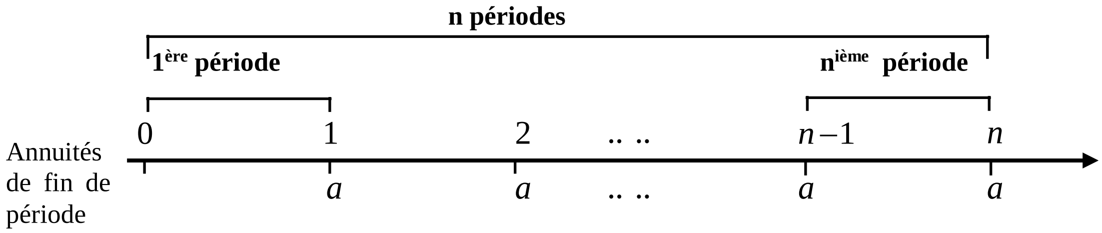
$$u=5{,}11$$

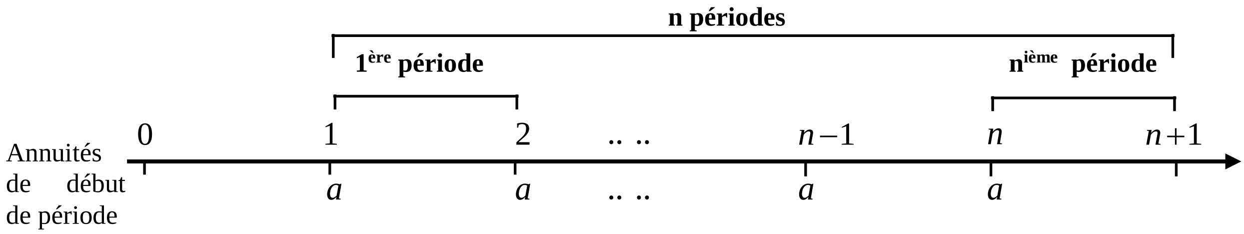
L'échéance moyenne de ce versement unique de 80 000 FF est distante de l'époque zéro de 5 ans, 1 mois et 10 jours.

2.5. Annuités constantes de début de périodes

Les annuités constantes de fin de périodes sont traditionnellement la forme donnée aux remboursements d'une dette, alors que l'annuité de début de périodes est plus couramment utilisée dans les opérations de placement.

a) Représentation graphique du problème



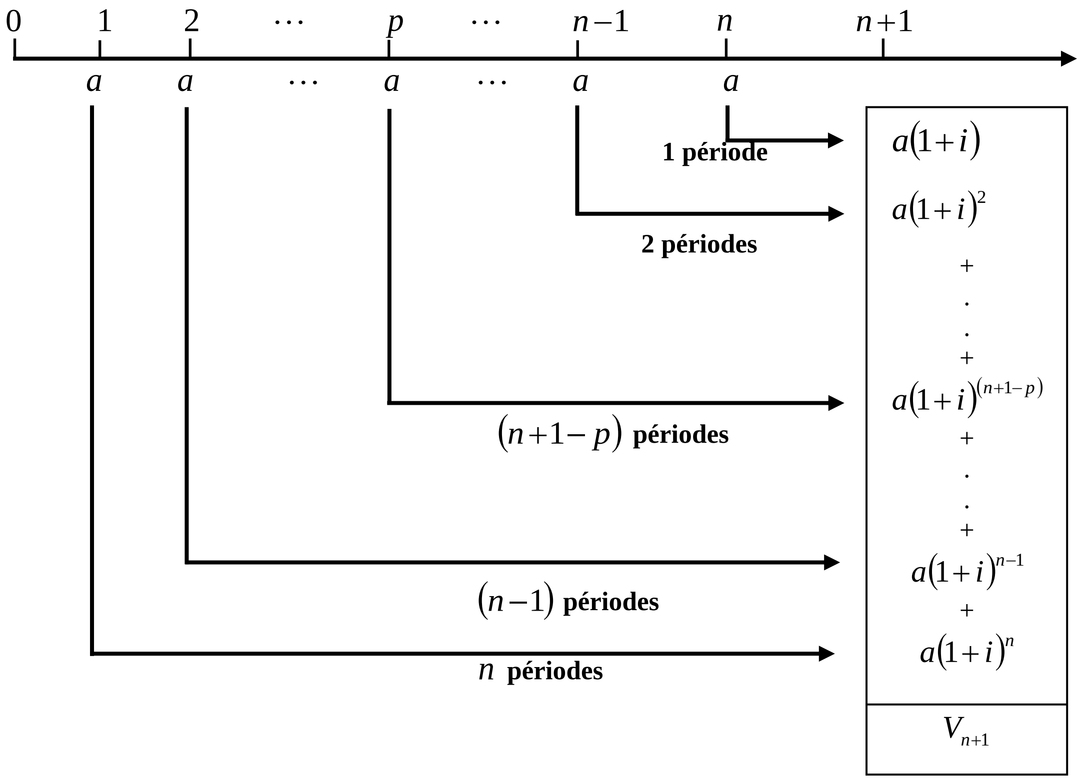


Le graphique indique que les suites des annuités de début et de fin de périodes se distinguent par la translation vers la droite de la première suite relativement à la seconde. Tout mouvement vers la droite se traduit par un calcul de capitalisation. Ainsi les valeurs acquises et actuelles des annuités de début de périodes seront identiques à celle des annuités de fin de périodes, à un facteur multiplicateur près : $(1+i)$.

b) Valeur acquise d'une suite d'annuités constantes de début de périodes

Désignons par :

V_{n+1} : la valeur acquise par les n annuités constantes de début de périodes exprimée une période après la dernière annuité.



La valeur acquise par chacune des annuités forment une progression géométrique dont :

$a(1+i)$ est le premier terme

n est le nombre de termes

$(1+i)$ est la raison.

La somme de ces termes est directement obtenue par l'application de l'expression :

$$V_{n+1} = a(1+i)\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Où $q = (1+i)$

$$\boxed{V_{n+1} = a(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

Remarque : Cette expression confirme les conclusions issues de l'examen graphique :

$$\boxed{V_{n+1} = V_n(1+i)}$$

La valeur acquise d'une suite d'annuités de début de périodes diffère de celle d'annuités de fin de périodes d'un facteur multiplicateur $(1+i)$, qui traduit la translation, d'une période, opérée vers la droite dans le sens de la capitalisation.

c) Valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes de début de périodes

La valeur actuelle peut être exprimée à partir de la valeur acquise, à l'instar du cas précédent des annuités de fin de périodes :

V_1, **désignera cette valeur actuelle, déterminée au début de la première période, à l'instant même où s'effectue le premier versement.**

$$V_1 = V_{n+1}(1+i)^{-n}$$

Avec
$$V_{n+1} = a(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

D'où :

$$\boxed{V_1 = a(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

Remarques : - Les expressions des valeurs actuelles et acquises dans le cas d'annuités constantes de début de périodes, comportent les mêmes variables que celle des expressions relatives aux annuités de fin de périodes. La détermination des valeurs de ces variables nécessite des transformations identiques à celles effectuées au titre 2.2.

- L'expression de la valeur acquise apparaît parfois sous la forme suivante :

$$V_{n+1} = a(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$V_{n+1} = a\,\frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i}$$

$$\boxed{V_{n+1} = a\left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1\right]}$$

- De façon similaire, le développement de la valeur actuelle fournit la forme sous laquelle apparaît parfois cette expression :

$$V_1 = a(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$V_1 = a\,\frac{(1+i)-(1+i)^{-(n-1)}}{i}$$

$$\boxed{V_1 = a\left[1 + \frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}\right]}$$

3. Annuités variables

La variation de ces annuités est fondée sur une loi donnée. Il convient de distinguer deux types d'annuités variables :

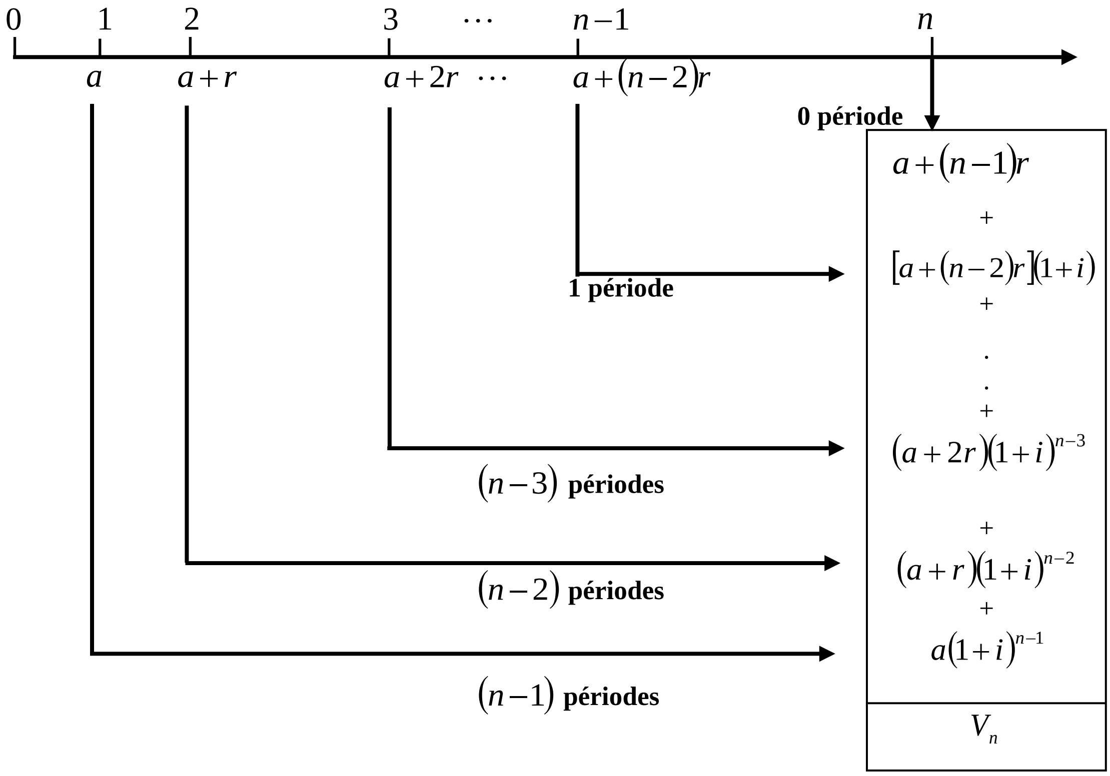
- **Les annuités en progression arithmétique :** quel que soit le terme de cette suite d'annuités, il s'obtient en ajoutant au précédent une valeur constante notée r et appelée raison de la progression.
- **Les annuités en progression géométrique :** chaque terme de cette suite s'obtient en multipliant le précédent par une valeur, notée q, qui constitue la raison de la progression.

Remarque : Les développements qui suivent sont fondés sur des annuités de fin de périodes.

3.1.Annuités en progression arithmétique

a) Valeur acquise

Désignons par V_n la valeur acquise au taux i d'une suite de n annuités en progression arithmétique de raison r.



$$V_n = a(1+i)^{n-1} + (a+r)(1+i)^{n-2} + (a+2r)(1+i)^{n-3} + \cdots + [a+(n-2)r](1+i) + [a+(n-1)r]$$

Scindons le membre de droite en deux parties, l'une comportant les termes en a et l'autre les termes en r. L'égalité précédente devient :

$$V_n = a\left[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-3} + \cdots + 1\right] + r\left[(1+i)^{n-2} + 2(1+i)^{n-3} + \cdots + (n-2)(1+i) + (n-1)\right]$$

La première partie du membre de droite représente la somme de n termes en progression géométrique de raison : $(1+i)$, de premier terme : 1. Si S désigne la somme entre crocxhets des termes en r, V_n dévient :

$$V_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i} + Sr \ \langle E1\rangle$$

Avec $S = (1+i)^{n-2} + 2(1+i)^{n-3} + \cdots + (n-2)(1+i) + (n-1) \quad \langle E2\rangle$

Multiplions les deux membres de cette égalité par $(1+i)$:

$$S(1+i) = (1+i)^{n-1} + 2(1+i)^{n-2} + \cdots + (n-2)(1+i)^2 + (n-1)(1+i) \quad \langle E3\rangle$$

La différence, membre à membre, entre les égalités <2> et <3> s'écrit :

$$S(1+i) - S = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \cdots + (1+i)^2 + (1+i) - (n-1)$$

$$Si = \underbrace{(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \cdots + (1+i)^2 + (1+i) + 1} - n$$

Les termes désignés par la parenthèse forment une progression géométrique de n termes, de raison : $(1+i)$, de premier terme : 1.

$$Si = \frac{(1+i)^n - 1}{i} - n$$

$$S = \frac{1}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n\right]$$

Transposons à présent la valeur de S dans l'égalité <E1>

$$V_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i} + \frac{r}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n\right]$$

$$\boxed{V_n = \frac{(1+i)^n - 1}{i}\left(a + \frac{r}{i}\right) - \frac{nr}{i}}$$

Les valeurs de $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ figurent dans la table financière n°3.

Application : *Déterminer la valeur acquise d'une suite d'annuités dont les caractéristiques sont les suivantes :*

$a = 12\,000$

$r = 1200$

$i = 0,08$

$n = 10$

$$V_n = \frac{(1+i)^n - 1}{i}\left(a + \frac{r}{i}\right) - \frac{nr}{i}$$

$$V_n = \frac{(1,08)^{10} - 1}{0,08}\left(12\,000 + \frac{1200}{0,08}\right) - \frac{10 \times 1200}{0,08}$$

$$V_n = 14,486562(12\,000 + 15\,000) - (150\,000)$$

$$V_n = 241137,17\ FF$$

b) Valeur actuelle

La valeur actuelle peut être exprimée à partir de la valeur acquise :

$$V_0 = V_n(1+i)^{-n}$$

$$V_0 = \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\left(a + \frac{r}{i}\right) - \frac{nr}{i}\right](1+i)^{-n}$$

$$V_0 = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\left(a + \frac{r}{i}\right) - \frac{nr}{i}(1+i)^{-n}$$

Ajoutons et retranchons $\frac{nr}{i}$, il vient :

$$V_0 = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\left(a + \frac{r}{i}\right) - \frac{nr}{i}(1+i)^{-n} + \frac{nr}{i} - \frac{nr}{i}$$

$$V_0 = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\left(a + \frac{r}{i}\right) + nr\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - \frac{nr}{i}$$

$$\boxed{V_0 = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\left(a + \frac{r}{i} + nr\right) - \frac{nr}{i}}$$

La valeur de $\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ est donnée par la table financière n°4.

Application : *Considérons à nouveau les données de l'application précédente :*

$a = 12\,000$

$r = 1200$

$i = 0,08$

$n = 10$

Calculer la valeur actuelle de cette suite d'annuités.

$$V_0 = \frac{1-(1,08)^{-10}}{0,08}\left[12\,000 + \frac{1200}{0,08} + (10\times 1200)\right] - \frac{(10\times 1200)}{0,08}$$

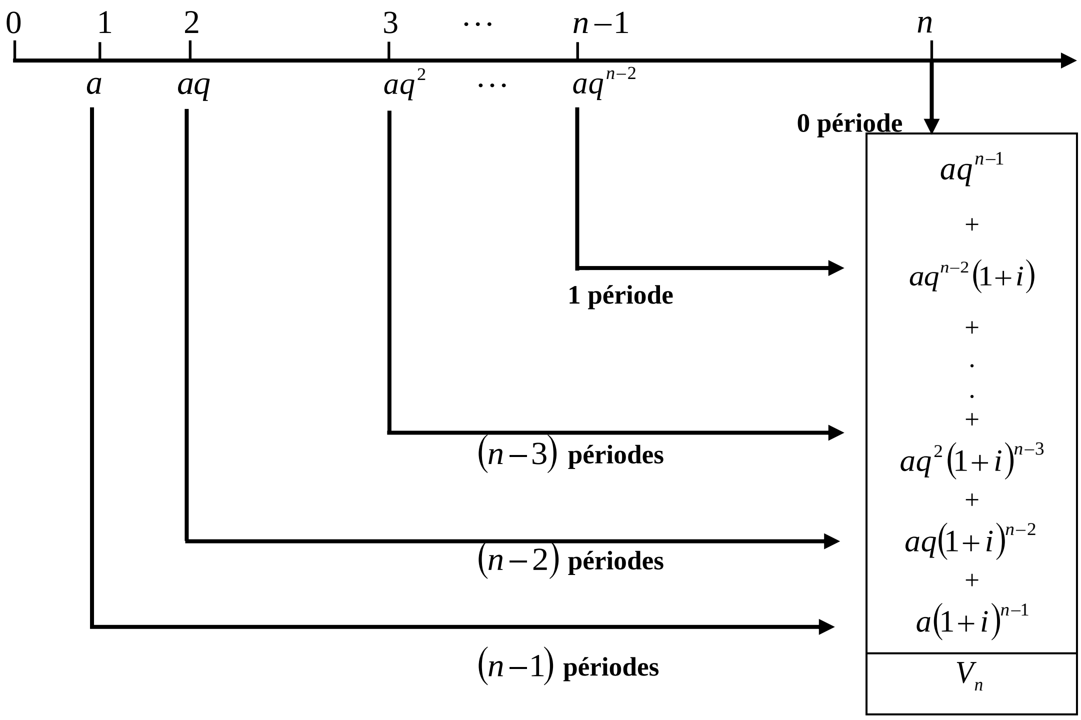
$$V_0 = 6,710081[12000 + 15000 + 12000] - 150000$$

$$V_0 = 111693,15\ FF$$

3.2. Annuités en progression géométrique

a) Valeur acquise

Désignons par V_n la valeur acquise au taux i d'une suite de n annuités en progression géométrique de raison q avec $q = (1+g)$, où g est le taux de croissance pour 1 franc.



$$V_n = a(1+i)^{n-1} + aq(1+i)^{n-2} + aq^2(1+i)^{n-3} + \cdots + aq^{n-2}(1+i) + aq^{n-}$$

Les termes du membre de droite forment une progression géométrique dont :

$a(1+i)^{n-1}$ est le premier terme

n est le nombre de termes

$[q/(1+i)]$ est la raison

La somme de ces termes s'obtient directement par :

$$V_n = a(1+i)^{n-1}\frac{\left[\frac{q}{1+i}\right]^n - 1}{\left[\frac{q}{1+i}\right] - 1}$$

$$V_n = a(1+i)^{n-1}\frac{\frac{q^n-(1+i)^n}{(1+i)^n}}{\frac{q-(1+i)}{1+i}}$$

$$V_n = a\frac{(1+i)^n}{(1+i)}\cdot\frac{(1+i)}{q-(1+i)}\cdot\frac{q^n-(1+i)^n}{(1+i)^n}$$

$$\boxed{V_n = a\frac{q^n-(1+i)^n}{1-(1+i)}}$$

Avec : $q=(1+g)$

D'où :

$$\boxed{V_n = a\frac{(1+g)^n-(1+i)^n}{g-i}}$$

Cette expression apparaît parfois sous la forme suivante : multiplions le numérateur et le dénominateur du membre de droite par -1 :

$$\boxed{V_n = a\frac{(1+i)^n-(1+g)^n}{i-g}}$$

<u>Application</u> : *Déterminer la valeur acquise au taux de 8%, d'une suite de 10 annuités qui progressent au rythme de 5% et dont le premier versement est égal à 6 000 FF.*

Le taux de croissance étant de 5%, la raison de la progression est :

$$q = 1+g$$

$$q = 1{,}05$$

$$V_n = a\frac{(1+g)^n-(1+i)^n}{g-i}$$

$$V_n = 6\,000\frac{(1{,}05)^{10}-(1{,}08+i)^{10}}{0{,}05-0{,}08}$$

$$V_n = 106\,006{,}07\ FF$$

b) Valeur actuelle

La valeur actuelle peut être exprimée, là encore, à partir de la valeur acquise.

$$V_0 = V_n(1+i)^{-n}$$

$$V_n = a\frac{(1+g)^n-(1+i)^n}{g-i}(1+i)^{-n}$$

$$\boxed{V_0 = \frac{a}{(1+i)^n}\frac{(1+g)^n-(1+i)^n}{g-i}}$$

***<u>Application</u>* :** *Déterminer la valeur actuelle d'une suite d'annuités en progression géométrique dont les caractéristiques sont les suivantes :*

$a = 6\,000$

$n = 10$

$g = 0{,}05$

$i = 0{,}08$

$$V_0 = \frac{a}{(1+i)^n}\frac{(1+g)^n-(1+i)^n}{g-i}$$

$$V_0 = \frac{6\,000}{(1{,}08)^{10}}\frac{(1{,}05)^{10}-(1{,}08)^{10}}{0{,}05-0{,}08}$$

$$V_0 = 49101{,}32$$

c) Cas particulier où $g = i$

Dans ce cas, V_0 et V_n sont indéterminées. La levée de cette indétermination implique que soit reconsidérée l'expression initiale de V_n.

- **Valeur acquise**

$$V_n = a(1+i)^{n-1} + aq(1+i)^{n-2} + aq^2(1+i)^{n-3} + \cdots + aq^{n-2}(1+i) + aq^{n-1}$$

$g = i$, implique :

$$(1+g) = (1+i)$$

$$q = (1+i)$$

Remplaçons dans l'expression de V_n , q par $(1+i)$:

$$V_n = a(1+i)^{n-1} + a(1+i)^{n-1} + a(1+i)^{n-1} + \cdots + a(1+i)^{n-1} + a(1+i)^{n-1}$$

$$\boxed{V_n = na(1+i)^{n-1}}$$

- **Valeur actuelle**

A l'instar des cas précédents, la valeur actuelle peut être déterminée à partir de la valeur acquise :

$$V_0 = V_n(1+i)^{-n}$$

$$V_0 = na(1+i)^{n-1}(1+i)^{-n}$$

$$\boxed{V_0 = na(1+i)^{-1}}$$

SECTION II : LES ANNUITES PERPETUELLES

1. Définitions

Une suite d'annuités est perpétuelle si le nombre de termes est infini. Cette suite est généralement appelée rente perpétuelle. La caractéristique commune aux annuités temporaires et aux rentes perpétuelles est l'origine. Le prix de cession d'une suite d'annuités temporaires est donné par sa valeur actuelle. il en sera également ainsi pour les rentes perpétuelles.

A l'inverse des annuités temporaires, **la détermination de la valeur acquise n'a pas fondamentalement de sens dans le cas des rentes perpétuelles, étant donné que le terme est par définition infini.**

Les rentes ne sont pas systématiquement perpétuelles. Si le terme d'une rente est fini, celle-ci a un caractère temporaire. L'évaluation, à l'origine ou au terme, implique le recours à des expressions identiques à celles utilisées dans le cadre de la section 1 : annuités temporaires.

2. Valeur à l'origine de rentes perpétuelles constantes

Soit t , le taux d'escompte pour 1 franc. Ce taux permet d'évaluer la rente à l'origine, il s'agit donc d'un taux d'actualisation.

L'expression de la valeur à l'origine est identique à celle des annuités temporaires constantes :

$$V_0 = a\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

Le nombre de termes étant infini :

$$n \to +\infty \;\Rightarrow\; (1+t)^{-n} \to 0$$

D'où :

$$\boxed{V_0 = \frac{a}{t}}$$

Application **:** *Evaluer, au taux de 6%, 8% et 10% une rente perpétuelle de terme constant égal à 1 500 FF.*

- ***Au taux de 6%***

$$V_0 = \frac{1500}{0{,}06} = 25000\ FF$$

- ***Au taux de 8%***

$$V_0 = \frac{1500}{0{,}08} = 18750\ FF$$

- ***Au taux de 10%***

$$V_0 = \frac{1500}{0{,}10} = 15000\ FF$$

Le prix de cession, valeur actuelle de la rente, décroît à mesure que l'exigence de l'acquéreur croît. *Ainsi, pour un taux exigé de 6%, le prix d'achat de la rente est 25 000 FF. si l'exigence de l'acheteur ou du marché est supérieure, 10% par exemple, la valeur de cession de la rente (15 000 FF) sera inférieure à ce qu'elle était précédemment.*

3. Valeur à l'origine de rentes perpétuelles en progression arithmétique

La valeur actuelle est, là encore, identique à celle des annuités temporaires de même caractère :

$$V_0 = \frac{1-(1+t)^{-n}}{t}\left(a + \frac{r}{t} + nr\right) - \frac{nr}{t}$$

$$n \to +\infty \;\Rightarrow\; (1+t)^{-n} \to 0 .$$

D'où : le terme : $\frac{1-(1+t)^{-n}}{t} \to \frac{1}{t}$

et $$\frac{1}{t}\left(a+\frac{r}{t}\right)+\frac{nr}{t}-\frac{nr}{t} \rightarrow \frac{1}{t}\left(a+\frac{r}{t}\right)$$

ainsi :

$$\boxed{V_0=\frac{1}{t}\left(a+\frac{r}{t}\right)}$$

Application ***:*** *Evaluer au taux de 6%, une rente perpétuelle dont les caractéristiques sont les suivantes :*

$a=10000$

$r=1500$

$$V_0=\frac{1}{0,06}\left(10000+\frac{1500}{0,06}\right)$$

$$V_0=583333,33\,FF$$

4. Valeur à l'origine de rentes perpétuelles en progression géométrique

$$V_0=a\frac{(1+g)^n-(1+t)^n}{g-t}(1+t)^{-n}$$

Cette expression peut être réécrite ainsi :

$$V_0=a\frac{\left[\frac{(1+g)}{(1+t)}\right]^n-1}{g-t}$$

Trois cas doivent être considérés en fonction des rapports entre g et t :

a) Cas où $g>t$

Si $n\rightarrow+\infty \Rightarrow \left[\frac{(1+g)}{(1+t)}\right]^n\rightarrow+\infty$

La valeur actuelle tend alors vers l'infini.

b) Cas où $g=t$

Dans ce cas, l'expression de la valeur actuelle est :

$$V_0=na(1+t)^{-1}$$

Si $n\rightarrow+\infty \Rightarrow V_0\rightarrow+\infty$

Là encore, la valeur actuelle tend alors vers l'infini.

c) Cas où $g < t$

Si $\quad n \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{(1+g)}{(1+t)}\right]^n \to 0$

D'où :

$$V_0 = a\frac{-1}{g-t}$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur du membre de droite par – 1 :

$$V_0 = \frac{a}{t-g}$$

Application **:** *Déterminer la valeur actuelle d'une rente perpétuelle dont les caractéristiques sont les suivantes :*

$a = 5000$

$g = 0,08$

$t = 0,10$

$$V_0 = \frac{5000}{0,10-0,08} = 250000\ FF$$

CE QU'IL FAUT RETENIR

- **Annuités temporaires de fin de périodes (notions générales)**

	Annuités constantes	Annuités en progression arithmétique raison $= r$	Annuités en progression géométrique raison $= g$
Valeur acquise	$V_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}$	$V_n = \frac{(1+i)^n - 1}{i}\left(a + \frac{r}{i}\right) - \frac{nr}{i}$	$V_n = a\frac{(1+g)^n - (1+i)^n}{g-i}$ $si\ g = i$ $V_n = na(1+i)^{n-1}$
Valeur actuelle	$V_0 = V_n(1+i)^{-n}$ ou $V_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$	$V_0 = V_n(1+i)^{-n}$ ou $V_0 = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\left(a + \frac{r}{i} + nr\right) - \frac{nr}{i}$	$V_0 = V_n(1+i)^{-n}$ ou $V_0 = \frac{a}{(1+i)^n}\frac{(1+g)^n - (1+i)^n}{g-i}$ $si\ g = i$ $V_0 = na(1+i)^{-1}$

- **Valeur à une époque quelconque**

Origine = 0

Terme = n

Valeur initiale	Dates		
	$-l$	p	l
	avec $-l<0$	avec $0<p<n$	avec $l>n$
Valeur acquise (V_n)	$V_{-l}=V_n(1+i)^{-(n+l)}$	$V_p=V_n(1+i)^{-(n-p)}$	$V_l=V_n(1+i)^{(l-n)}$ ou $V_l=a\frac{(1+i)^n-1}{i}(1+i)^{(l-n)}$
Valeur actuelle (V_0)	$V_{-l}=V_0(1+i)^{-l}$ ou $V_{-l}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^{-l}$	$V_p=V_0(1+i)^p$ ou $V_p=a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^p$	$V_l=V_0(1+i)^l$ ou $V_l=a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^l$

- **Annuités constantes de fin et de début de périodes**

Valeurs	Annuités		Relations
	Fin de périodes	Début de périodes	
Acquises	$V_n=a\frac{(1+i)^n-1}{i}$	$V_{n+1}=a(1+i)\frac{(1+i)^n-1}{i}$	$V_{n+1}=V_n(1+i)$
Actuelles	$V_0=a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$	$V_1=a(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$	$V_1=V_0(1+i)$

- **Annuités perpétuelles**

Annuités perpétuelles = rentes perpétuelles = nombre de termes infini

Date d'évaluation	Rentes à termes			
	Constants	En progression arithmétique $raison=r$	En progression arithmétique $raison=g$	
A l'origine	$V_0=\frac{a}{t}$	$V_0=\frac{1}{t}\left(a+\frac{r}{t}\right)$	V_0 infini	$si\ \ g>t$
			V_0 infini	$si\ \ g=t$
			$V_0=\frac{a}{t-g}$	$si\ \ g<t$
t = taux d'évaluation				

EXERCICES

1 Une suite de 15 annuités constantes capitalisées au taux de 11% a une valeur acquise de 154 824,11 F.

Calculez le montant de l'annuité.

2 Une suite de 15 annuités de 2.000 F a une valeur acquise de 54.304,23 F.

1- *Calculez le taux de capitalisation.*
2- *Calculez le taux de capitalisation si la valeur acquise est de 80.000 F.*

3 Un certain nombre d'annuités de 35.000 F, chacune capitalisée au taux de 9%, ont produit une valeur acquise de 531.752,54 F.

1- Calculez le nombre d'annuités.
2- *Calculez le nombre d'annuités si la valeur acquise est de 500.000 F (donnez deux solutions).*

4 Une personne décide de se constituer un capital pour sa retraite. Elle décide de verser 10.000 F chaque année sur un compte d'épargne. Elle effectue son premier versement le jour de son 40ème anniversaire et son dernier le jour de son 59ème anniversaire.

1- Calculez la valeur acquise au taux de 8% pour son 60ème anniversaire.
2- *Calculez la valeur acquise si le jour de son 55ème anniversaire le taux de placement passe à 10%.*
3- *Calculez la valeur acquise si le jour de son 50ème anniversaire elle décide de verser 15.000 F. (le taux de 8% reste constant sur toute la période.)*

5 *Déterminer l'échéance moyenne d'une suite de 25 annuités constantes de 5.000 F. le taux d'intérêt est de 10%. Effectuez le même calcul pour un taux de 7% et de 13%. Que remarquez-vous ?*

6 *Calculez la valeur actuelle et la valeur acquise d'une suite de 10 annuités de 5.000 F en progression géométrique de raison 1,12. Le taux d'intérêt est de 9%. Refaites le calcul pour un taux de 12%.*

7 Un règlement peut s'effectuer :

- Soit par remise immédiate d'une somme de 120.000 F,
- Soit par acceptation de deux traites de 85.000 F chacune d'échéance respective de 3 ans et 6 ans,

- Soit par 10 traites annuelles de 20.000 F. la première arrive à échéance dans un an.

1- *Quel est le choix le plus avantageux au taux de 11% ?*
2- *Quel est le choix le plus avantageux au taux de 9%*
3- *Pour quel taux les solutions 1 et 3 sont-elles équivalentes ?*
4- *Pour quel taux les solutions 1 et 2 sont-elles équivalentes ?*

8 *calculez la valeur actuelle et la valeur acquise d'une suite de 12 annuités en progression arithmétique de raison 500 F. la première annuité est de 10.000 F. le taux d'intérêt est de 10%.*

9 *Evaluez une rente perpétuelle à termes constants dans les cas suivants :*

1- *La rente est immédiate.*
2- *La rente est différée de 6 ans.*
3- *La rente est anticipée de 1 an.*

Le montant du terme est de 9.000 F. le taux est de 5%.

10 *1- Quelle est, des deux rentes perpétuelles suivantes, la plus avantageuse :*

- *Une rente constante dont le montant du terme est de 5.000 F ?*
- *Une rente dont les termes sont en progression arithmétique de raison 100 F ?*
  La première annuité est de 4.000 F.

2- Pour quel taux les deux rentes sont-elles équivalentes ?

3- Pour quelle raison les deux rentes sont-elles équivalentes au taux de 15% ?

11 Les dividendes d'une firme sont constants et égaux à 50 F par an. Déterminer la valeur de ce titre sachant que le taux d'évaluation est de 12%.

12 Un titre vaut 980 F au taux d'actualisation de 9%.

1- *Quel est le montant du dividende constant anticipé par le marché ?*
2- *Quel est le taux de croissance des dividendes anticipé si le prochain dividende est de 40 F ?*

CHAPITRE V : LES EMPRUNTS INDIVIS

Thèmes : - Propriétés générales
- Construction d'un tableau d'amortissement
- Remboursement par annuités constantes
- Remboursement par amortissements constants
- Remboursement in fine
- Constitution d'un fond d'amortissement

1. Définitions

L'emprunt indivis ne comporte qu'un seul prêteur, établissements bancaire ou financier. L'emprunteur est astreint à payer périodiquement (nous supposerons que cette période est l'année), une somme, appelée annuité, qui comprend :

- **Le loyer de l'argent prêté** ; il s'agit des intérêts portant sur le capital dont il dispose encore ;
- **L'amortissement,** qui est le remboursement de tout ou partie du capital emprunté.

Le service de la dette s'effectue principalement sous trois formes. Il peut être :

- **Identique d'une période à l'autre.** La somme des intérêts et de l'amortissement étant égale, **les annuités sont dites « constants » ;**
- **Variable d'une échéance à l'autre.** Cette variation provient généralement des intérêts, qui tendent à décroître à mesure que s'opèrent les remboursements.

Ce type d'emprunt indivis comporte des **amortissements constants.**

- **Unique.** Les emprunts de ce type comportent deux variantes :
  - *L'in fine absolu,* dont le service est unique ; l'emprunteur rembourse le capital et les intérêts au dernier terme ;
  - *L'in fine relatif,* dont le service périodique est réduit au paiement des intérêts jusqu'au dernier terme où le débiteur rembourse le capital emprunté en sus des intérêts.

Il existe bien évidemment d'autres formes d'emprunts indivis : à amortissements progressifs, à intérêts payables d'avance… L'adaptation à ces variantes des notions développées dans le présent chapitre ne comporte aucune difficulté majeure.

2. Cas général

Désignons par :

- D_0 , le capital emprunté à l'époque zéro ;
- $a_1, a_2, \cdots, a_n$, les n annuités versées respectivement aux dates : $1, 2, \cdots, n$. Il s'agit d'annuités de fin de période ;
- $m_1, m_2, \cdots, m_n$, les n amortissements contenus respectivement dans les annuités : $a_1, a_2, \cdots, a_n$;
- $D_1, D_2, \cdots, D_n$, la dette encore vivante (ou fraction du capital emprunté non encore remboursé) après paiement de la 1ère, 2ème, …, nième annuité ;
- **n, le nombre d'annuités ;**
- **i,** le taux normal d'intérêt (taux pour un franc et un an).

2.1. Tableau d'amortissement

Les relations entre les différentes variables de l'emprunt indivis sont décrites par le tableau d'amortissement suivant. **Ces relations sont vérifiées quelle que soit la forme donnée à l'emprunt.**

Tableau d'amortissement
Cas général

Périodes	Dette en début de période (1)	Intérêt de la période $(2)=(1)\times i$	Amortissement de la période (3)	Annuités de fin de période $(4)=(2)+(3)$	Dette au terme de la période $(5)=(1)-(3)$
1	D_0	$D_0 i$	m_1	$a_1 = D_0 i + m_1$	$D_1 = D_0 - m_1$
2	D_1	$D_1 i$	m_2	$a_2 = D_1 i + m_2$	$D_2 = D_1 - m_2$
3	D_2	$D_2 i$	m_3	$a_3 = D_2 i + m_3$	$D_3 = D_2 - m_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
p	D_{p-1}	$D_{p-1} i$	m_p	$a_p = D_{p-1} i + m_p$	$D_p = D_{p-1} - m_p$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	D_{n-2}	$D_{n-2} i$	m_{n-1}	$a_{n-1} = D_{n-2} i + m_{n-1}$	$D_{n-1} = D_{n-2} - m_{n-1}$
n	D_{n-1}	$D_{n-1} i$	m_n	$a_n = D_{n-1} i + m_n$	$D_n = D_{n-1} - m_n = 0$

2.2. Propriétés générales

Le tableau précédent recèle cinq propriétés majeures :

a) Propriété n°1 : relation entre capital emprunté et annuité

Cette propriété exprime l'équivalence à l'époque zéro entre le capital emprunté et les annuités versées :

P1 : $\boxed{D_0 = a_1(1+i)^{-1} + a_2(1+i)^{-2} + \cdots + a_p(1+i)^{-p} + \cdots + a_n(1+i)^{-n}}$

Multiplions les deux membres par $(1+i)^n$:

P1 bis : $\boxed{D_0(1+i)^n = a_1(1+i)^{n-1} + a_2(1+i)^{n-2} + \cdots + a_p(1+i)^{n-p} + \cdots + a_n}$

Cette égalité exprime l'équivalence à l'époque n entre les valeurs acquises par le capital prêté et les annuités reçues. Elle signifie que les sommes perçues par le prêteur, au travers des n annuités, doivent être égales à celle qu'il aurait obtenu en plaçant le montant du prêt au même taux et pour une durée identique.

b) Propriété n°2 : relation entre capital emprunté et amortissements

La somme des termes contenus dans la colonne n°3 du tableau d'amortissement est égale au capital emprunté :

P2 : $D_0 = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$

$$\boxed{D_0 = \sum_{p=1}^{n} m_p}$$

c) Propriété n° 3 : relation entre solde de l'emprunt au début de la dernière période et dernier amortissement

Elle est donnée par la dernière ligne du tableau d'amortissement :

$$D_{n-1} - m_n = 0$$

D'où :

P3 : $\boxed{D_{n-1} = m_n}$

Le solde de l'emprunt est amorti à la nième période.

d) Propriété n°4 : relation entre annuités et amortissements

Soit deux annuités successives de rangs p et $p+1$, avec :

$$a_p = D_{p-1} i + m_p$$

et

$$a_{p+1} = D_p i + m_{p+1}$$

La différence entre ces deux annuités s'écrit :

$$a_{p+1} - a_p = (D_p i + m_{p+1}) - (D_{p-1} i + m_p)$$

$$a_{p+1} - a_p = D_p i + m_{p+1} - D_{p-1} i - m_p$$

La colonne n°5 du tableau d'amortissement indique pour la ligne p, la dette encore vivante après paiement de la pième annuité :

$$D_p = D_{p-1} - m_p$$

La transposition de la valeur de D_p dans le différentiel d'annuités permet d'obtenir :

$$a_{p+1} - a_p = D_{p-1} i - m_p i + m_{p+1} - D_{p-1} i - m_p$$

D'où :

P4 : $\boxed{a_{p+1} - a_p = m_{p+1} - m_p (1+i)}$

e) Propriété n°5 : dette amortie après paiement de la pième annuité

Il s'agit de la fraction du capital emprunté, remboursée au terme de la pième période et notée R_p :

P5 : $\boxed{R_p = m_1 i + m_2 + \cdots + m_p}$

Cette propriété permet de déterminer la dette encore vivante au terme de la pième période, D_p :

P5 bis : $\boxed{D_p = D_0 - R_p}$

Toute hypothèse relative aux modalités de remboursement de l'emprunt, implique que ces propriétés soient transformées. Examinons à présent la conséquence du choix de l'une des trois formes de remboursement citées précédemment.

3. Emprunt indivis à annuités constantes

Cette modalité de remboursement est fréquemment utilisée en France, essentiellement pour les prêts des organismes financiers aux particuliers ainsi que pour les prêts bancaires destinés aux entreprises.

Bien que les remboursements soient constants, les charges qui en résultent ne le sont pas. Les intérêts sont déductibles du bénéfice imposable alors que le remboursement du principal (capital emprunté) ne l'est pas.

3.1.Calcul de l'annuité constante

Désignons par a l'annuité constante. Par définition :

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$$

L'expression notée P1 dévient :

$$D_0 = a\left[(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \cdots + (1+i)^{-n} +\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{D_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}} \quad \textbf{P6}$$

D'où :

$$\boxed{a = D_0\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}}$$

La valeur de $\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$ sont données par la table financière n°5.

Application **:** *Un emprunt de 500 000 FF, contracté au taux de 12% est remboursé au moyen de cinq annuités constantes. Déterminer la valeur de l'annuité :*

$$a = D_0\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$a = 500000\frac{0,12}{1-(1,12)^{-5}}$$

$$a = 500000 \times 0,2774097$$

$$a = 138704,87\ FF$$

3.2.Loi de progression des amortissements

L'annuité étant constante :

$$a_{p+1} - a_p = 0$$

L'expression notée P4 devient :

$$m_{p+1} - m_p(1+i) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{m_{p+1} = m_p(+i)} \quad \textbf{P8}$$

Dns un système d'annuités constantes, les amortissements forment une progression géométrique croissante de raison $(1+i)$. Cette loi permet de déduire la relation qui s'établit entre les amortissements des rangs p et i :

$$\boxed{m_p = m_1(1+i)^{p-1}} \quad \textbf{P9}$$

Reprenons à présent l'expression P2 :

$$D_0 = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

Compte tenu de la loi d'évolution des amortissements, cette expression peut être réécrite ainsi :

$$D_0 = m_1 + m_1(1+i) + \cdots + m_1(1+i)^{p-1} + \cdots + m_1(1+i)^{n-1}$$

Ou encore :

$$\boxed{D_0 = m_1 \frac{(1+i)^n - 1}{i}} \quad \textbf{P10}$$

Cette expression permet d'obtenir le premier amortissement à partir du capital emprunté :

$$\boxed{m_1 = D_0 \frac{i}{(1+i)^n - 1}} \quad \textbf{P11}$$

<u>Application</u> *: Considérons à nouveau les données de l'application du 3.1. :*

$$D_0 = 500\,000$$

$$n = 5$$

$$i = 0{,}12$$

$$m_1 = D_0 \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

$$m_1 = 500\,000 \frac{0{,}12}{(1{,}12)^5 - 1}$$

$$m_1 = 500\,000 \times 0{,}157\,4097$$

$$m_1 = 78\,704{,}87\ FF$$

3.3.Capital remboursé et dette vivante après paiement de la p-ième annuité

Considérons à nouveau l'expression P5 de la dette amortie après paiement de la p-ième annuité :

$$R_p = m_1 + m_2 + \cdots + m_p$$

Exprimée relativement à m_1 et compte tenu de la relation décrite par P9, R_p devient :

$$R_p = m_1 + m_1(1+i) + \cdots + m_1(1+i)^{p-1}$$

$$\Rightarrow \quad R_p = m_1 \frac{(1+i)^p - 1}{i}$$

La transposition de la formule P11 dans cette égalité, permet d'exprimer R_p à partir du capital emprunté :

$$R_p = D_0 \frac{i}{(1+i)^n - 1} \cdot \frac{(1+i)^p - 1}{i}$$

$$\Rightarrow \boxed{R_p = D_0 \frac{(1+i)^p - 1}{(1+i)^n - 1}} \qquad \textbf{P12}$$

Transposons cette expression dans la formule P5 bis qui livre la dette encore vivante après paiement de la p-ième annuité :

$$D_p = D_0 - R_p$$

$$D_p = D_0 - D_0 \frac{(1+i)^p - 1}{(1+i)^n - 1}$$

$$\boxed{D_p = D_0 \frac{(1+i)^n - (1+i)^p}{(1+i)^n - 1}} \qquad \textbf{P13}$$

<u>Application</u> : *Soit un emprunt indivis à annuités constantes dont les caractéristiques sont les suivantes :*

$D_0 = 500000$

$n = 5$

$i = 0,12$

Déterminer la dette amortie après paiement de la seconde annuité et la dette encore vivante après paiement de la troisième annuité.

$$R_2 = D_0 \frac{(1+i)^2 - 1}{(1+i)^5 - 1}$$

$$R_2 = 500000 \frac{(1,12)^2 - 1}{(1,12)^5 - 1}$$

$$R_2 = 500000 \times 0,3337086$$

$$R_2 = 166854,32\ FF$$

- ***Dette encore vivante après paiement de la troisième annuité :***

$$D_3 = D_0 \frac{(1+i)^5 - (1+i)^3}{(1+i)^5 - 1}$$

$$D_3 = 500\,000 \frac{(1,12)^5 - (1,12)^3}{(1,12)^5 - 1}$$

$$D_3 = 500\,000 \times 0,4688366$$

$$D_3 = 234\,418,30\ FF$$

3.4.Présentation du tableau d'amortissement

Application : *Présenter le tableau d'amortissement de l'emprunt à annuités constantes dont les caractéristiques sont les suivantes :*

$D_0 = 500\,000$

$n = 5$

$i = 0,12$

Tableau d'amortissement

Périodes	Dette en début de période $D(1)$	Intérêt de la période $(2)=(1)\times 0,12$	Amortissement de la période $m(3)$	Annuité de fin de période $(4)=(2)+(3)$	Dette au terme de la période $(5)=(1)-(3)$
1	500 000, 00	60 000, 00	78 704, 87	138 704, 87	421 295, 13
2	421 295, 13	50 555, 42	88 149, 45	138 704, 87	333 45, 68
3	333 145, 68	39 977, 48	98 727, 38	138 704, 86	234 418, 30
4	234 418, 30	28 130, 20	110 574, 67	138 704, 87	123 843, 63
5	123 843, 63	14 861, 24	123 843, 63	138 704, 87	0
			500 000, 00		

Remarques : - L'intérêt résulte du produit du taux et de la dette encore vivante au début de la période. Ainsi pour la première ligne 60 000 est le produit de 0,12 par 500 000.

- L'amortissement est le produit de l'amortissement précédent par $(1+i)$, raison de la progression géométrique. L'amortissement de la seconde ligne du tableau 88 149, 45, s'obtient en multipliant 78 704, 87, amortissement de la première ligne, par 1,12.
- L'annuité réelle est sensiblement constante. Elle diffère parfois et dans une faible mesure de l'annuité théorique déterminée dans l'application du 3.1.
- La capital emprunté est totalement amorti au terme de la durée de remboursement (colonne 3.).

- Les valeurs fournies par le tableau d'amortissement confirment les calculs effectués dans les applications précédentes :
  - m_1 est bien égal à 78 704, 87 (application du 3.2),
  - R_2 est bien égal à 166 854, 32. Cette valeur est obtenue par différence entre le capital emprunté (500 000) et la dette encore vivante au terme de la seconde période : 333 145, 68 (seconde ligne de la colonne 5 du tableau).
  - D_3 est bien égal à 234 418, 30. Cette valeur figure à la troisième ligne de la colonne 5 du tableau.

4. Emprunt indivis à amortissements constants

Dans ce cas, l'amortissement du capital emprunté se répartit de façon égale sur la durée de remboursement de l'emprunt.

4.1. Loi de progression des annuités

Désignons par m l'amortissement constant. Par définition :

$$m_1 = m_2 = \cdots = m_n = m$$

Où :

$$m = \frac{D_0}{n}$$

Soit deux annuités successives de rangs p et $p+1$, avec :

$$a_p = D_{p-1}i + m$$

Et

$$a_{p+1} = D_p i + m$$

La dette encore vivante après paiement de la pième annuité a pour expression :

$$D_p = D_{p-1} - m$$

Transposons cette expression dans celle de a_{p+1} :

$$a_{p+1} = (D_{p-1} - m)i + m$$

$$a_{p+1} = D_{p-1}i - mi + m$$

$$a_{p+1} = \underbrace{D_{p-1}i + m}_{a_p} - mi$$

$$\boxed{a_{p+1} - a_p = -mi} \quad \textbf{P14}$$

Ou encore :

$$\boxed{a_{p+1} - a_p = -\frac{D_0}{n} i}$$ **P14 bis**

Dans un système d'amortissements constants, les annuités successives forment une progression arithmétique croissante de raison : $-\frac{D_0}{n} i$; ou décroissante de raison $\frac{D_0}{n} i$

Remarques : Les intérêts sont également en progression arithmétique décroissante de même raison.

Désignons par I_p et I_{p+1} les intérêts des annuités de rangs p et $p+1$, avec :

$$I_p = D_{p-1} i$$

$$I_{p+1} = D_p i$$

Or :

$$D_p = D_{p-1} - m$$

D'où :

$$I_{p+1} = \underbrace{D_{p-1} i}_{I_p} - mi$$

$$\boxed{I_{p+1} - I_p = -mi} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{I_{p+1} - I_p = -\frac{D_0}{n} i}$$

4.2.Transformation des propriétés générales

Les propriétés générales énoncées précédemment doivent subir une transformation consécutive à l'adjonction de l'hypothèse de constance des amortissements. Ainsi la propriété notée P2 :

$$D_0 = \sum_{p=1}^{n} m_p$$

Devient :

$$\boxed{D_0 = n \cdot m}$$ **P15**

Les propriétés relatives aux dettes amortie (R_p) et vivante (D_p) après paiement de la pième annuité, respectivement P5 et P5 bis, deviennent :

$$\boxed{R_p = p \cdot m}$$ **P16**

$$D_p = D_0 - R_p$$

Transposons les expressions P15 et P16 dans l'égalité précédente :

$$D_p = n \cdot m - p \cdot m$$

D'où :

$$\boxed{D_p = m(n-p)} \quad \textbf{P17}$$

4.3.Présentation du tableau d'amortissement

Considérons, à titre comparatif, les valeurs numériques communes aux applications des annuités constantes.

<u>Application</u> : *Un emprunt indivis, à amortissements constants présente les caractéristiques suivantes :*

$D_0 = 500000$

$n = 5$

$i = 0{,}12$

- *Déterminer les valeurs de* R_2 et D_3.
- *Dresser le tableau d'amortissement de cet emprunt.*

- ***Valeur de l'amortissement constant***

$$m = \frac{D_0}{n}$$

$$m = \frac{500000}{5}$$

$$m = 100000$$

- ***Dette amortie après paiement de la seconde annuité***

$$R_2 = 2m$$

$$R_2 = 2 \times 100000$$

$$R_2 = 200000$$

- ***Dette encore vivante après paiement de la troisième annuité***

$$D_3 = m(5-3)$$

$$D_3 = 2m$$

$$D_3 = 200000$$

Présentation du tableau d'amortissement

Périodes	Dette en début de période $D(1)$	Intérêt de la période $(2)=(1)\times 0,12$	Amortissement de la période $(3) m = D_0 / n$	Annuité de fin de période $(4)=(2)+(3)$	Dette au terme de la période $(5)=(1)-(3)$
1	500 000	60 000	100 000	160 000	400 000
2	400 000	48 000	100 000	148 000	300 000
3	300 000	36 000	100 000	136 000	200 000
4	200 000	24 000	100 000	124 000	100 000
5	100 000	12 000	100 000	112 000	0
			500 000		

Remarques : - L'intérêt résulte du même calcul que celui opéré dans le cas précédent de l'emprunt à annuités constantes ; les valeurs successives sont obtenues en retranchant $(D_0 \cdot i / n)$ de la valeur qui précède. Ainsi l'intérêt de la seconde période 48 000, est la différence entre l'intérêt de la première période, 60 000, et la raison de la progression arithmétique :

$$\frac{D_0}{n} i = 12000$$

- Les valeurs fournies par le tableau d'amortissement confirment celles obtenues pour R_2 et D_3, directement, par le calcul précédent.

5. Emprunt indivis remboursable *in fine*

Cette modalité de remboursement comporte deux variantes :

- **La première,** qualifiée de relative, permet au débiteur de n'acquitter que l'intérêt pendant $(n-1)$ périodes. La nième et dernière annuité intègre à la fois le paiement de l'intérêt et la restitution de la somme empruntée.
- **La seconde,** qualifiée d'absolue, exonère le débiteur de tout paiement pendant les $(n-1)$ périodes. La dernière et unique annuité, comporte à la fois le remboursement du capital emprunté et le paiement des intérêts.

5.1.*Sinking fund (Fonds d'amortissement)*

Ces modalités de remboursement sont principalement utilisées outre-Atlantique. Elles impliquent, dans les deux cas, **la constitution d'un fonds d'amortissement** (*sinking fund)* destiné à faire face à l'échéance importante du dernier terme.

Ce fonds d'amortissement est généralement constitué à partir de versements constants dont la valeur acquise doit couvrir, dans le cas de la première variante, le remboursement du capital emprunté et dans l'autre, le paiement des intérêts et du principal.

5.2.Remboursement *in fine* : variante relative

Désignons par m les versements constants capitalisés au taux i' et destinés à assurer le remboursement à la dernière période du capital D_0 emprunté à l'époque zéro.

La valeur de m s'obtient à partir de :

$$D_0 = m\frac{(1+i')^n - 1}{i'}$$

$$\Rightarrow \boxed{m = D_0 \frac{i'}{(1+i')^n - 1}} \quad \textbf{P18}$$

La charge périodique effective comprend à la fois :

- **Le paiement des intérêts,** destinés au prêteur ;
- **Le versement des termes du fonds d'amortissement,** destinés à l'organisme de capitalisation.

Soit $a_1, \cdots, a_n$ les n **annuités effectives constantes.**

Par définition :

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = D_0 i + m$$

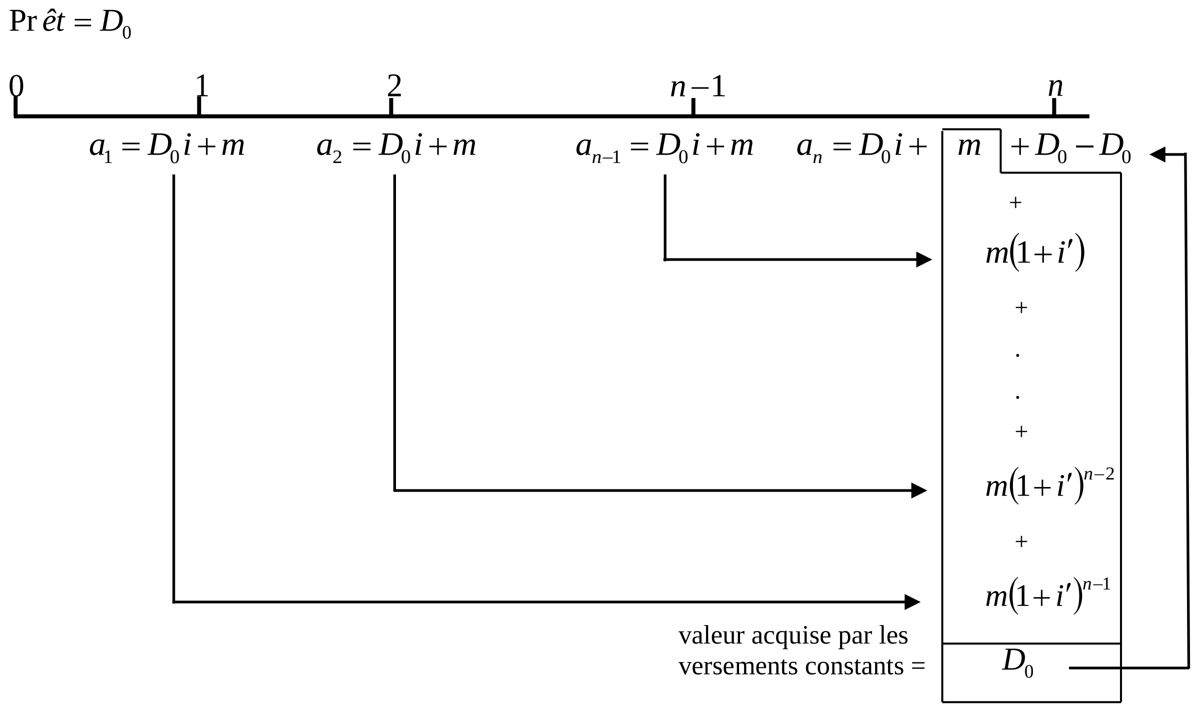
Ou encore :

$$\boxed{a = D_0 i + m} \quad \textbf{P19}$$

Transposons l'expression notée P18 dans cette égalité. L'annuité effective s'exprime également ainsi :

$$\boxed{a = D_0\left[i + \frac{i'}{(1+i')^n - 1}\right]} \quad \textbf{F20}$$

Le graphique ci-dessous représente les relations établies précédemment :



Remarque : Au terme de la nième période, la valeur acquise par les n versements constants compense exactement le remboursement du prêt, de sorte que la charge effective $(D_0 i + m)$ de cette dernière période demeure identique à celle des périodes précédentes.

5.3.Remboursement *in fine* : variante absolue

Cette modalité exclue tout paiement d'intérêt pendant les périodes qui précèdent la dernière. Au terme de celle-ci, lé débiteur paie à la fois les intérêts et le montant du capital emprunté.

Les versements constants en banque (m), capitalisés au taux i', sont destinés à assurer le paiement au terme de la dernière période, d'un montant égal à la valeur acquise (au taux i) par le capital prêté. **Ces versements constituent, à eux seuls, la charge effective supportée par le débiteur à chaque période.** Ces annuités effectives et constantes ont donc pour valeur :

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = m$$

Ou encore :

$$\boxed{a = m} \quad \textbf{P21}$$

La valeur de m étant :

$$D_0(1+i)^n = m\frac{(1+i')^n - 1}{i'}$$

$$\Rightarrow \boxed{m = D_0(1+i)^n \frac{i'}{(1+i')^n - 1}} \quad \textbf{P22}$$

5.4.Cas où $i' = i$

Si le débiteur constitue le fonds d'amortissement à un taux i' égal au taux i auquel l'emprunt est contracté, l'annuité effectivement supporté est alors identique, quelle que soit la variante :

- **Valeur relative**

$$a = D_0\left[i + \frac{i}{(1+i)^n - 1}\right]$$

$$\boxed{a = D_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}} \quad \textbf{P20 bis}$$

- **Variante absolue**

$$a = D_0(1+i)^n + \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

$$\boxed{a = D_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}} \quad \textbf{P22 bis}$$

Cette annuité est identique à celle d'un emprunt amortissable par annuités constantes. La destination de l'annuité effective n'est cependant pas exclusive, à l'instar des emprunts à annuités constantes, mais double :

- Le prêteur, pour l'intérêt ;
- L'organisme bancaire, pour les versements constitutifs du fonds d'amortissement.

Application **:** *Un emprunt de 500 000 FF contracté au taux de 12% est remboursé par un versement unique au terme de la cinquième année. Pour faire face à ce paiement, le débiteur décide de placer chaque année une somme rémunérée au taux de 10ù :*

- *Déterminer le montant constant de ces versements annuels.*
- *Calculer la charge annuelle effective engendrée par cet emprunt, sachant que le débiteur est tenu de verser, au terme de chaque année, l'intérêt.*
- *Quelle serait cette charge annuelle si les placements étaient rémunérés au taux de 12% ?*
- ***Montant constant des versements annuels***

$$m = D_0 \frac{i'}{(1+i')^n - 1}$$

$$m = 500\,000 \frac{0,10}{(1,10)^5 - 1}$$

$$m = 81898,74$$

- ***Charge annuelle effective***

Cette charge est la somme des intérêts versés au prêteur $(D_0 i)$ et des versements destinés à constituer le fond d'amortissement (m). Il s'agit donc de déterminer l'annuité correspondant à la variante relative :

$$a = D_0 \left[i + \frac{i'}{(1+i')^n - 1} \right]$$

$$a = 500\,000 \left[1,12 + \frac{0,10}{(1,10)^5 - 1} \right]$$

$$a = 141898,74$$

La fraction destinée au prêteur est égale à :

$$D_0 i = 500\,000 \times 0,12 = 60\,000$$

Ou :

$$a - m = 141898,74 - 81898,74 = 60\,000$$

- ***Charge annuelle effective, si*** $i' = 0,12$

$$a = D_0 \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}}$$

$$a = 500\,000 \frac{0,12}{1 - (1,12)^5}$$

$$a = 138704,86$$

La charge annuelle effective est moins importante qu'elle ne l'était dans le cas précédent où $i' \neq i$. Ce résultat s'explique par le rythme de capitalisation. Celui-ci étant plus élevé que dans le cas initial (12% au lieu de 10%), les versements destinés à la constitution du fond d'amortissement sont nécessairement moins importants :

$$m = a - D_0 i$$

$$m = 138704,86 - (500\,000 \times 0,12)$$

$$m = 78704,86$$

$$78704,86 < 81898,74$$

CE QU'IL FAUT RETENIR

- Principe de l'emprunt indivis

Il ne comporte qu'un seul prêteur.

- Propriétés générales

Validées quelle que soit la modalité de remboursement adoptée.

Propriétés	Expressions
Relation entre capital emprunté et annuité	$D_0 = a_1(1+i)^{-1} + a_2(1+i)^{-2} + \cdots + a_p(1+i)^{-p} + \cdots + a_n(1+i)^{-n}$
Relation entre capital emprunté et amortissements	$D_0 = \sum_{p=1}^{n} m_p$
Relation entre annuités et amortissements	$a_{n+1} - a_p = m_{p+1} - m_p(1+i)$
Dette amortie après paiement de la pième annuité	$R_p = m_1 i + m_2 + \cdots + m_p$
Dette vivante après paiement de la pième annuité	$D_p = D_0 - R_p$
Relation entre solde de l'emprunt et amortissement	$D_{n-1} = m_n$

- Propriétés spécifiques aux modes de remboursements adoptés

- Annuités constantes

Propriétés	Expressions
Annuité constante	$a = D_0 \dfrac{i}{1-(1+i)^{-n}}$
Relation entre capital emprunté et premier amortissement	$D_0 = m_1 \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$
Loi de progression des amortissements	$m_{p+1} = m_p(1+i)$ et $m_p = m_1(1+i)^{p-1}$
Loi de progression des annuités	$a_{p+1} - a_p = 0$
Dette amortie après paiement de la pième annuité	$R_p = m_1 \dfrac{(1+i)^p - 1}{i}$ $R_p = D_0 \dfrac{(1+i)^p - 1}{(1+i)^n - 1}$
Dette vivante après paiement de la pième annuité	$D_p = D_0 \dfrac{(1+i)^n - (1+i)^p}{(1+i)^n - 1}$

- Amortissements constants

Propriétés	Expressions
Amortissement constant	$m = \frac{D_0}{n}$
Relation entre capital emprunté et amortissement	$D_0 = m \cdot n$
Loi de progression des amortissements	$m_{p+1} - m_p = 0$
Loi de progression des annuités	$a_{p+1} - a_p = -m_i$ $a_{p+1} - a_p = -\frac{D_0}{n} i$
Dette amortie après paiement de la pième annuité	$R_p = p \cdot m$
Dette vivante après paiement de la pième annuité	$D_p = m(n-p)$
Calcul de l'annuité de rang p	$a_p = D_{p-1} i + m$

- *In fine*

Propriétés	Expressions	
	In fine relatif	In fine absolu
Calcul du montant des versements constants capitalisés	$m = D_0 \frac{i'}{(1+i')^n - 1}$	$m = D_0 (1+i)^n \frac{i'}{(1+i')^n - 1}$
Calcul de l'annuité effective	$a = D_0 i + m$	$a = m$
Relation entre capital emprunté et annuités effectives	$D_0 = \frac{a-m}{i}$	$D_0 = \frac{a}{(1+i)^n} \frac{(1+i')^n - 1}{i'}$
Relation entre capital emprunté et versements constants capitalisés	$D_0 = m \frac{(1+i')^n - 1}{i'}$	$D_0 = \frac{m}{(1+i)^n} \frac{(1+i')^n - 1}{i'}$
Loi de progression des annuités effectives	$a_{p+1} - a_p = 0$	$a_{p+1} - a_p = 0$
Loi de progression des versements constants capitalisés	$m_{p+1} - m_p = 0$	$m_{p+1} - m_p = 0$
Dette amortie après paiement de la pième annuité effective	$R_p = 0$ $\forall\ p,\ avec\ \ p \neq n$	$R_p = 0$ $\forall\ p,\ avec\ \ p \neq n$
Dette vivante après paiement de la pième annuité effective	$D_p = D_0$ $\forall\ p,\ avec\ \ p \neq n$	$D_p = D_0$ $\forall\ p,\ avec\ \ p \neq n$
OBSERVATION	Dans le cas où $i' = i$, l'annuité effective devient : $a = D_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$	

EXERCICES

1 Un emprunt de 500 000 F est amorti en 15 ans. Le taux est de 11%. Les 14 premières annuités sont de 70 000 F.

1- *Calculez le montant de la 15ème annuité.*
2- *Calculez le montant de l'annuité théorique d'un emprunt indivis de mêmes caractéristiques de 15 annuités constantes. En déduire le montant de la 15ème annuité.*
3- *Calculez par deux méthodes le montant de la dette encore vivante après le paiement de la 10ème annuité.*

2 L'achat d'une machine de 1 000 000 F est réglé pour un quart au comptant et pour le reste au moyen de 10 annuités constantes.

Le taux est de 11%. Immédiatement après le paiement de la 5ème annuité, l'entreprise souhaite étendre sa dette en deux fois en fin de 6ème et 7ème année.

1- *Calculez le montant des deux derniers versements.*
2- *Calculez le montant à verser en fin de la 10ème période pour éteindre la dette de l'entreprise.*

3 Une entreprise, en janvier de l'année N, contracte un emprunt sur 10 ans de 6 000 000 F. le taux d'intérêt est de 12% l'an.

Elle a deux possibilités : amortissement constant ou annuité constante.

1- *Présentez les trois premières lignes du tableau d'amortissement dans les deux cas.*
2- *Quel est l'emprunt le plus avantageux pour l'entreprise ? (vérifier votre intuition en faisant le calcul de la valeur actuelle des annuités à verser.)*

4 Un particulier est remboursable par annuités constantes.

Le premier amortissement est de 368 295, 45 F, le 5ème est de 501 061, 89 F.

1- *Calculez le taux d'intérêt.*
2- *Calculez le montant de l'emprunt sachant que l'annuité est de 1 168 295, 45 F.*
3- *Calculez le nombre d'annuités.*

5 Un particulier souhaite acheter un appartement. Compte tenu de son revenu, il ne peut consacrer que 4 000 F à 5 000 F par mois au paiement des annuités. Les prêts qu'il peut espérer obtenir sont d'une durée de 15 ans à annuités constantes.

Il espère obtenir un prêt de 100 000 F au taux de 9,5%, les autres prêts sont au taux de 12%. Il dispose d'un apport personnel de 50 000 F.

1- *Quelle fourchette de prix d'appartement peut-il espérer pouvoir acheter ?*
2- *Même question que 1 s'il n'obtient pas le prêt au taux bonifié.*

3- *Même question que 2 en considérant que l'emprunt est à mensualités constantes.*

4- *Il ne dispose pas de l'apport personnel, il ne peut l'obtenir que par un emprunt sur deux ans, mensualités constantes, au taux de 16% l'an.*

6 Le 1er mars de l'année N, un industriel achète un équipement de 2 000 000 F qu'il règle pour 10% au comptant, le solde étant payé par trimestrialités constantes de 102 206, 21 F chacune. La première est versée le 1er juin N.

Le dernier amortissement est de 99 577, 37 F.

1- *Calculez le taux trimestriel ;*

2- *Calculez le taux annuel.*

3- *Calculez le nombre de trimestrialités.*

7 Un emprunt de 5 000 000 F est obtenu au taux de 9,5% remboursable en 15 ans. Les annuités sont en progression géométrique de 5% par an.

1- *Construisez les trois premières lignes du tableau d'amortissement (refaites la démonstration du calcul de l'annuité en l'adaptant à l'exemple).*

2- *Indiquez ce que devient la formule de l'annuité si la progression est de 9,5% par an. Donnez la valeur de l'annuité. Refaites le calcul pour une durée de 10 ans.*

3- *Construisez la 1ère ligne du tableau d'amortissement si l'emprunt est remboursé en 20 ans. Qu'observez-vous dans la situation de la question 2.*

4- *Quel est le pourcentage de l'emprunt amorti au bout de trois ans (dans la situation d'origine).*

5- *Dites à partir de quelle année se produit le phénomène observé à la question3.*

8 Un emprunt de 1 000 000 F est remboursable au moyen de 8 annuités constantes en progression géométrique de 6%. Le taux d'intérêt est de 12%.

1- *Calculez la première annuité.*

2- *Calculez la dette encore vivante après le paiement de la troisième annuité.*

3- *Après le paiement de la 5ème annuité, l'emprunteur souhaite transformer les annuités en trimestrialités constantes. Calculez le montant de la trimestrialité constante.*

9 Une entreprise décide de réaliser un investissement important dans 4 ans. Il sera financé pour moitié par capitaux propres et le reste par emprunt. Pour disposer des capitaux propres nécessaires, l'entreprise placera, à la fin de chaque année et pendant 4 ans des sommes en progression arithmétique. Le taux d'intérêt est de 11%. La première somme est de 80 000 F.

1- *Sachant que le montant de l'investissement à réaliser à l'époque 4 est de 2 000 000, déterminer la raison de la suite arithmétique pour que l'entrepreneur dispose de la somme nécessaire.*

2- *Le crédit est remboursable en 5 annuités en progression géométrique de raison 1,1 au taux de 12%. Déterminer le montant de la première annuité.*

3- *Au cours de la* $5^{ème}$ *période, l'entreprise rencontre des difficultés financières et souhaiterait ne rien rembourser aux époques 5 et 6. Elle les remplace donc par 5 versements annuels constants. Le premier est versé à l'époque 7. Le taux d'intérêt est toujours de 12%. Calculez le montant de l'annuité.*

Chapitre VI : LES EMPRUNTS OBLIGATAIRES

Thèmes : - Propriétés générales
- Tableau d'amortissement
- Valeur d'émission inférieure au pair
- Valeur de remboursement supérieure au pair
- Taux de rendement
- Taux de revient

L'emprunt obligataire est réservé aux entreprises dont le besoin de financement ne saurait être assuré que par une multitude de prêteurs. Un tel emprunt est donc divisible, afin de permettre la multiplicité des contreparties.

La condition majeure de l'accès à ces emprunts est avant tout une notoriété à tout le moins nationale, ce qui exclu a priori les entreprises de taille moyenne. Il convient cependant de préciser que des relais tels que les groupements professionnels ou les sociétés de développement régional (SDR), favorisent l'accès à ce type d'emprunts en présentant une demande de financement dont l'affectation est destinée à une multitude d'entreprises de taille moyenne ou dans l'incapacité d'assurer, *seules*, le remboursement d'engagement financiers aussi importants.

Le remboursement périodique comporte l'intérêt, qui est proportionnel à la somme dont dispose encore le débiteur, ainsi qu'une fraction du capital emprunté. La désignation des obligations à rembourser s'effectue par tirage au sort ou parfois, et de façon partielle ou totale, par achat en bourse à concurrence du nombre de titres à rembourser.

Les notions développées dans ce chapitre sont, pour une grande part, similaires à celle relatives aux emprunts indivis.

1. Cas général

Désignons par :

D_0 , le capital emprunté à l'époque zéro ;

N , le nombre d'obligations émises ;

$\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$, le nombre d'obligations amorties au premier, au second, …, au nième tirage ;

C, la valeur nominale d'une obligation ;

$d_1, d_2, \cdots, d_n$, le nombre d'obligations encore vivantes après le premier, le second, …, le nième tirage ;

i, le taux d'intérêt nominal ;

$C \times i$, l'intérêt annuel d'une obligation, également appelé coupon ;

$a_1, a_2, \cdots, a_n$, les n annuités versées respectivement aux dates 1, 2, …, n ;

$m_1, m_2, \cdots, m_n$, les n amortissements inclus dans les annuités $a_1, a_2, \cdots, a_n$.

1.1.Tableau d'amortissement

Le tableau d'amortissement d'un emprunt obligataire est similaire par certains aspects à celui de l'emprunt indivis.

Tableau d'amortissement

Cas général d'un emprunt remboursé au pair

Périodes	Dette en début de période (1)	Intérêt de la période $(2)=(1)\times i$	Nbre d'obligation s amorties (3)	Amortissements de la période $(4)=(3)\times c$	Annuités de fin de période $(5)=(2)+(4)$	Dette au terme de la période $(6)=(1)-(4)$
1	$D_0 = N.C$	$D_0 i$	μ_1	$m_1 = \mu_1.C$	$a_1 = D_0 i + \mu_1.C$	$D_1 = D_0 - m_1$
2	$D_1 = d_1.C$	$D_1 i$	μ_2	$m_2 = \mu_2.C$	$a_2 = D_1 i + \mu_2.C$	$D_2 = D_1 - m_2$
3	$D_2 = d_2.C$	$D_2 i$	μ_3	$m_3 = \mu_3.C$	$a_3 = D_2 i + \mu_3.C$	$D_3 = D_2 - m_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
p	$D_{p-1} = d_{p-1}.C$	$D_{p-1} i$	μ_p	$m_p = \mu_p.C$	$a_p = D_{p-1} i + \mu_p.C$	$D_p = D_{p-1} - m_p$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$D_{n-2} = d_{n-2}.C$	$D_{n-2} i$	μ_{n-1}	$m_{n-1} = \mu_{n-1}.C$	$a_{n-1} = D_{n-2} i + \mu_{n-1}.C$	$D_{n-1} = D_{n-2} - m_{n-1}$
n	$D_{n-1} = d_{n-1}.C$	$D_{n-1} i$	μ_n	$m_n = \mu_n.C$	$a_n = D_{n-1} i + \mu_n.C$	$D_n = D_{n-1} - m_n = 0$

1.2.Propriétés générales

Le tableau précédent recèle cinq propriétés, dont les démonstrations sont identiques à celles développées dans le cas de l'emprunt indivis.

a) Propriété n°1 : relation entre capital emprunté et annuités

L'équivalence à l'époque zéro entre le capital emprunté et les annuités versées s'écrit, dans le cas de l'emprunt indivis:

$$D_0 = a_1(1+i)^{-1} + a_2(1+i)^{-2} + \cdots + a_p(1+i)^{-p} + \cdots + a_n(1+i)^{-n}$$

$$D_0 = \sum_{p=1}^{n} a_p (1+i)^{-p}$$

L'application du principe de divisibilité de l'emprunt, dans le cas obligataire permet d'obtenir l'expression équivalente à la précédente :

$$D_0 = N.C$$

$$\boxed{N.C = \sum_{p=1}^{n} a_p (1+i)^{-p}} \quad \textbf{P30}$$

L'équivalence à l'instant n s'obtient en multipliant les deux membres par $(1+i)^n$:

$$\boxed{N.C(1+i)^n = \sum_{p=1}^{n} a_p (1+i)^{n-p}} \quad \textbf{P30 bis}$$

Cette expression correspond à la formule P1 bis du chapitre précédent.

b) Propriété n°2 : relation entre les nombres d'obligations émises et amorties

La somme des termes contenus de la colonne n°4 du tableau d'amortissement doit être égale au capital emprunté :

$$D_0 = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

Par définition :

$$D_0 = N.C$$

Et

$$m_p = \mu_p.C, \ \forall \ p$$

D'où

$$N.C = \mu_1 C + \mu_2 C + \cdots + \mu_n C$$

Divisons les deux membres de cette égalité par C, il vient :

$$N = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n$$

$$\boxed{N = \sum_{p=1}^{n} \mu_p} \quad \textbf{P31}$$

Cette égalité correspond à la somme des termes de la colonne n°3 du tableau d'amortissement.

c) Propriété n°3 : relation entre le nombre des obligations encore vivantes au début de la dernière période et les obligations sorties au dernier tirage

La dernière ligne du tableau d'amortissement indique :

$$D_{n-1} - m_n = 0$$

D'où :

$$D_{n-1} = m_n$$

Par définition :

$$D_{n-1} = d_{n-1}.C$$

Et

$$m_n = \mu_n.C$$

D'où :

$$d_{n-1}.C = \mu_n.C$$

De façon similaire à la propriété précédente, après division par C des deux membres, il vient :

$$\boxed{d_{n-1} = \mu_n} \quad \textbf{P32}$$

Le nombre d'obligations encore vivantes au terme de la période $(n-1)$ et au début de la période $n(d_{n-1})$ est définitivement soldé au terme de cette dernière période par le remboursement de μ_n obligations.

d) Propriété n°4 : relation entre annuités et amortissements

Soit deux annuités successives de rangs p et $p+1$, avec :

$$a_p = D_{p-1}i + \mu_p C$$

Et

$$a_{p+1} = D_p i + \mu_{p+1} C$$

Or $D_{p-1} = d_{p-1}C + \mu_{p+1}C$ et $D_p = d_p C$, d'où :

$$a_p = d_{p-1}Ci + \mu_p C$$

$$a_{p+1} = d_p Ci + \mu_{p+1} C$$

La différence entre ces deux annuités s'écrit :

$$a_{p+1} - a_p = (d_p Ci + \mu_{p+1}C) - (d_{p-1}Ci + \mu_p C)$$

Or $d_p = d_{p-1} - \mu_p$, d'où :

$$a_{p+1} - a_p = d_{p-1}Ci - \mu_p Ci + \mu_{p+1}C - d_{p-1}Ci - \mu_p C$$

$$\boxed{a_{p+1} - a_p = \mu_{p+1}C - \mu_p C(1+i)} \quad \textbf{P33}$$

e) Propriété n°5 : nombre d'obligations amorties après le pième tirage

Ce nombre, noté r_p s'obtient à partir de la colonne n°3 du tableau d'amortissement :

$\boxed{r_p = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_p}$ **P34**

La relation entre ces expressions et la formule P5 des emprunts indivis est évidente. Il suffit de multiplier les termes des deux membres par C pour obtenir les amortissements successifs, termes de l'expression P5 des emprunts indivis.

La détermination du nombre d'obligations encore vivantes après le pième tirage (d_p), s'effectue de la même façon que dans le cas de l'emprunt indivis :

$\boxed{d_p = N - r_p}$ **P34 bis**

2. Emprunt obligataire à annuités constantes

2.1. Propriétés spécifiques

Le tableau ci-dessous reprend les expressions spécifiques au cas des emprunts obligataires à annuités constantes. Ces expressions s'obtiennent à partir de celles établies dans le cadre des emprunts indivis.

Emprunt indivis		Emprunt obligataire	
Notions	Expressions	Notions	Expressions
Annuité constante	$a = D_0 \dfrac{i}{1-(1+i)^{-n}}$	Annuité constante	$a = NC \dfrac{i}{1-(1+i)^{-n}}$
Premier amortissement	$m_1 = D_0 \dfrac{i}{(1+i)^n - 1}$	Nombre d'obligations amorties au premier tirage	$\mu_1 = N \dfrac{i}{(1+i)^n - 1}$
Loi de progression des amortissements	$m_{p+1} = m_p(1+i)$ et $m_p = m_1(1+i)^{p-1}$	Loi de progression du nombre d'obligations amorties	$\mu_{p+1} = \mu_p(1+i)$ et $\mu_p = \mu_1(1+i)^{p-1}$
Capital remboursé après p échéances	$R_p = D_0 \dfrac{(1+i)^p - 1}{(1+i)^n - 1}$	Nombre d'obligations amorties après p échéances	$r_p = N \dfrac{(1+i)^p - 1}{(1+i)^n - 1}$
Dette vivante après p échéances	$D_p = D_0 \dfrac{(1+i)^n - (1+i)^p}{(1+i)^n - 1}$	Nombre d'obligations vivantes après p échéances	$d_p = N \dfrac{(1+i)^n - (1+i)^p}{(1+i)^n - 1}$

Remarque : A l'expression de l'annuité constante les formules relatives à l'emprunt obligataire s'obtiennent en divisant les membres des expressions de l'emprunt indivis par C, le nominal d'une obligation.

2.2.Problèmes relatifs à la construction du tableau d'amortissement

Les principes de construction du tableau d'amortissement d'un emprunt obligataire sont identiques à ceux de l'emprunt indivis. **La seule difficulté provient de la division de l'amortissement annuel en nombre de titres à rembourser.** Le nombre étant fréquemment fractionnaire, il est nécessaire de l'arrondir afin de parvenir à la fois à :

- Un nombre entier de titres à amortir chaque année ;
- Une somme des titres amortis égale au nombre de titres émis.

Le respect de ces règles implique le recours à l'un des procédés d'arrondissement suivants :

1- **Arrondissement des nombres théoriques à l'entier le plus proche.** Si la somme de μ est inférieure au nombre total des titres émis N, il convient alors d'arrondir à l'entier supérieur les nombres théoriques initialement arrondis à l'entier inférieur et dont la partie fractionnaire est la plus forte. La démarche inverse permet de corriger un total initial supérieur à N.

2- **Arrondissement des nombres théoriques à l'entier inférieur.** Si le total des μ est inférieur à N, les μ dont les parties fractionnaires sont les plus importantes subissent une majoration d'une unité.

3- **Arrondissement des nombres théoriques cumulés des titres amortis à l'entier le plus proche.** Les μ réels successifs déduits de la différence de deux cumuls consécutifs correspondent alors à des valeurs entières.

4- **Procédé dit de la « Soulte capitalisée ».** il consiste à prendre en considération le reliquat qui résulte de l'arrondissement des nombres de μ à l'entier inférieur. Ce reliquat capitalisé s'ajoute à l'amortissement théorique suivant et permet de déterminer le nombre théorique de μ à amortir. Le nombre, de nouveau arrondi à l'entier inférieur, génère un reliquat qui sera à son tour capitalisé. Le processus est ainsi reconduit jusqu'au terme de la durée d'amortissement de l'emprunt obligataire.

Les valeurs réelles des μ obtenus par application de l'un ou l'autre de ces procédés, sont fréquemment proches, voire identiques. L'exemple qui suit, est fondé sur l'application du premier procédé, qui semble s'imposer tant par sa simplicité que son efficacité.

Exemple

Un emprunt obligataire à annuités constantes présente les caractéristiques suivantes :

$$D_0 = 500\,000$$

$$C = 500$$

$$N = 1000$$

$$i = 0,12$$

$$n = 5$$

Le nombre de titres amortis au premier tirage (μ_1) peut être déterminé de trois façons :

- **Par le calcul préalable de l'annuité théorique :**

$$a = NC\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$a = (1000)(500)\frac{0,12}{1-(1,12)^{-5}}$$

$$a = 138\,704,87\ FF$$

Le tableau d'amortissement du cas général indique l'expression de la première annuité :

$$a_1 = D_0 i + \mu_1 C$$

$$\Rightarrow \quad \mu_1 = \frac{a_1 - D_0 i}{C}$$

Les annuités étant constantes : $a_1 = a$. D'où :

$$\mu_1 = \frac{138\,704,87 - (500\,000)(0,12)}{500}$$

$$\boxed{\mu_1 = 157,41}$$

- **Par le calcul préalable du premier amortissement :**

$$m_1 = NC\frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

$$m_1 = (1000)(500)\frac{0,12}{(1,12)^5 - 1}$$

$$m_1 = 78\,704,87$$

Le tableau d'amortissement du 1.1. indique l'expression de m_1 relativement à μ_1 :

$$m_1 = \mu_1 C$$

$$\Rightarrow \quad \mu_1 = \frac{m_1}{C}$$

$$\mu_1 = \frac{78704{,}87}{500}$$

$$\boxed{\mu_1 = 157{,}41}$$

- **Directement à partir de l'expression :**

$$\mu_1 = N\frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

$$\mu_1 = 1000\frac{0{,}12}{(1{,}12)^5 - 1}$$

$$\boxed{\mu_1 = 157{,}41}$$

Les valeurs successives de μ s'obtiennent à partir de la loi de progression du nombre de titres amortis :

$$\mu_{p+1} = \mu_p(1+i)$$

Les μ sont donc en progression géométrique de raison $(1+i)$.

Le tableau ci-dessous reprend les valeurs théoriques successives de μ :

μ	Relation avec μ_1	Relation avec le μ précédent	Expression numérique	Valeur théorique
μ_1	-	-	-	157,41
μ_2	$\mu_1(1+i)$	$\mu_1(1+i)$	$157{,}41(1{,}12)$	176,30
μ_3	$\mu_1(1+i)^2$	$\mu_2(1+i)$	$176{,}30(1{,}12)$	197,46
μ_4	$\mu_1(1+i)^3$	$\mu_3(1+i)$	$197{,}46(1{,}12)$	221,16
μ_5	$\mu_1(1+i)^4$	$\mu_4(1+i)$	$221{,}16(1{,}12)$	247,70

Déterminons à présent les valeurs réelles successives de μ :

Rangs des μ	μ théoriques	μ théoriques arrondis à l'entier le plus proche	Correction des μ à partie fractionnaire la plus forte	μ réels
μ_1	157,41	157	-	157
μ_2	176,30	176	-	176
μ_3	197,46	198	$197+1$	198
μ_4	221,16	221	-	221
μ_5	247,70	248	-	248
		999		1000

La construction du tableau d'amortissement de l'emprunt obligataire est alors possible :

Périodes	Nombre d'obligations vivantes en début de période $d(1)$	Dette en début de période dC $(2)=(1)C$	Intérêt de la période dCi $(3)=(2)i$	Nombre d'obligations amorties μ (4)	Amortissements de la période μC $(5)=(4)C$	Annuités réelles $a=dCi+\mu C$ $(6)=(3)+(5)$	Nombre d'obligations vivantes au terme de la période $(7)=(1)-(4)$
1	1 000	500 000	60 000	157	78 500	138 500	843
2	843	421 500	50 080	176	88 000	138 580	667
3	667	333 500	40 020	198	99 000	139 020	469
4	469	234 500	28 140	221	110 500	138 640	248
5	248	124 000	14 880	248	124 000	138 880	0
				1 000	500 000		

Remarques : L'arrondissement des nombres de titres amortis à deux conséquences :

- Les nombres de titres réellement remboursés sont en progression géométrique de raison sensiblement égale à $(1+i)$.

Ainsi :

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\mu_2}{\mu_1}=1{,}121\\[2ex] \dfrac{\mu_3}{\mu_2}=1{,}125\\[2ex] \dfrac{\mu_4}{\mu_3}=1{,}116\\[2ex] \dfrac{\mu_5}{\mu_4}=1{,}122\end{array}\right\}\approx 1{,}12$$

Cette remarque s'applique également aux amortissements.

- Les annuités réelles diffèrent sensiblement de l'annuité théorique.

3. Emprunt obligataire à amortissements constants

3.1. Propriétés spécifiques

Les expressions spécifiques à l'emprunt obligataire à amortissements constants s'obtiennent également à partir de celles relatives à l'emprunt indivis de même caractère :

Emprunt indivis		Emprunt obligataire	
Notions	Expressions	Notions	Expressions
Amortissement constant	$m=\dfrac{D_0}{n}$	Nombre de titres amortis à chaque échéance	$\mu=\dfrac{N}{n}$
		Amortissement constant	$m=\dfrac{NC}{n}=\mu C$
Loi de progression des annuités	$a_{p+1}-a_p=-mi$ $a_{p+1}-a_p=-\dfrac{D_0}{n}i$	Loi de progression des annuités	$a_{p+1}-a_p=-\mu Ci$ $a_{p+1}-a_p=-\dfrac{NC}{n}i$
Capital remboursé après p échéances	$R_p=p.m$	Nombre d'obligations amorties après p échéances	$r_p=p.\mu$
Dette vivante après p échéances	$D_p=m(n-p)$	Nombre d'obligations vivantes après p échéances.	$d_p=\mu(n-p)$

3.2.Tableau d'amortissement

Exemple

Un emprunt obligataire à amortissements constants présente les caractéristiques suivantes :

$$D_0 = 500\,000$$

$$C = 500$$

$$N = 1000$$

$$i = 0{,}12$$

$$n = 5$$

- **Détermination de l'amortissement constant**

$$m = \frac{NC}{n} = \frac{(1000)(500)}{5} = 100\,000$$

- **Détermination du nombre de titres amortis chaque année**

$$\mu = \frac{m}{C} = \frac{100\,000}{500} = 200$$

Ce résultat est également obtenu ainsi :

$$\mu = \frac{N}{n} = \frac{1000}{5} = 200$$

- **Présentation du tableau d'amortissement**

Périodes	Nombre d'obligations vivantes en début de période d (1)	Dette en début de période dC $(2)=(1)C$	Intérêt de la période dCi $(3)=(2)i$	Nombre d'obligations amorties μ (4)	Amortissements de la période μC $(5)=(4)C$	Annuités réelles $a = dCi + \mu C$ $(6)=(3)+(5)$	Nombre d'obligations vivantes au terme de la période $(7)=(1)-(4)$
1	1 000	500 000	60 000	200	100 000	160 000	800
2	800	400 000	48 000	200	100 000	148 000	600
3	600	300 000	36 000	200	100 000	136 000	400
4	400	200 000	24 000	200	100 000	124 000	200
5	200	100 000	12 000	200	100 000	112 000	0
				1 000	500 000		

Remarques : - Les annuités sont en progression arithmétique de raison :

$$a_{p+1} - a_p = -\mu C i = -(200).(500).(0{,}12)$$

$$a_{p+1} - a_p = -\mu C i = -12\,000$$

- Les intérêts progressent également de façon arithmétique au rythme de : - 12 000.

4. Emission et remboursement à une valeur différente du pair

Jusqu'à présent la valeur nominale C, également appelée pair, a été assimilée à la fois au prix auquel l'obligation est émise et celui auquel elle est remboursée ; afin de faciliter le placement de leurs titres, les émetteurs proposent fréquemment des obligations pour lesquelles ces trois valeurs sont distinctes. **Ainsi, une obligation sera émise à une valeur E inférieure au pair C et remboursée à une valeur R, supérieure à la fois au prix d'émission (E) et à la valeur nominale (C).**

Si la pratique d'un prix d'émission $E < C$ est destinée à favoriser la souscription, l'offre d'une valeur de remboursement $R > C$ constitue généralement un facteur supplémentaire de garantie du pouvoir d'achat du souscripteur, notamment en période de forte inflation.

4.1.Emission à une valeur $E < C$

La différence entre la valeur d'émission E et le nominal du titre C, est appelée prime d'émission. Il convient de noter que l'introduction de cette nouvelle variable ne modifie ni la rémunération allouée aux obligations, le calcul du coupon demeure fondé sur la valeur nominale C, ni les variables qui concourent à la construction du tableau d'amortissement. Seuls changent les taux de revient et de rendement, notions abordées dans le titre 5 de ce chapitre.

4.2.Remboursement à une valeur $R > C$ (avec $E = C$)

La différence : $R - C$ si $E = C$, ou $R - E$ si $E < C$, constitue la prime de remboursement.
L'introduction de cette variable entraine la modification des expressions précédentes fondées sur l'égalité de $R, C \; et \; E$.

Ainsi l'expression de l'annuité de rang p devient :

$$a_p = d_{p-1}Ci + \mu_p R$$

Examinons à présent les incidences de cette distinction sur les propriétés spécifiques aux deux modes de remboursement considérés.

a) Remboursement par annuités constantes

Considérons les annuités de rangs p et $p+1$. La différence entre ces deux annuités s'écrit :

$$a_{p+1} - a_p = \left(d_p Ci + \mu_{p+1} R\right) - \left(d_{p-1} Ci + \mu_p R\right)$$

L'annuité étant constante : $a_{p+1} = a_p$, l'égalité précédente devient :

$$d_p Ci + \mu_{p+1} R = d_{p-1} Ci + \mu_p R$$

Or $d_p = d_{p-1} - \mu_p$, d'où :

$$d_{p-1}Ci - \mu_p Ci + \mu_{p+1}R = d_{p-1}Ci + \mu_p R$$

$$\Rightarrow \quad \mu_{p+1}R = \mu_p R + \mu_p Ci$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu_{p+1} = \mu_p\left(1+\frac{Ci}{R}\right)} \quad \textbf{P35}$$

Le nombre de titres amortis est en progression géométrique de raison $\left(1+\frac{C}{R}i\right)$ ou $(1+i')$, avec $i' = \frac{C}{R}i$.

Le taux i' est appelé taux apparent de l'emprunt. C'est le taux qui appliqué à R, permet d'obtenir la valeur du coupon annuel : $Ri' = Ci$, avec $R > C$ implique que : $i' < i$.

L'expression P35 permet d'écrire :

$$\boxed{\mu_p = \mu_1(1+i')^{p-1}} \quad \textbf{P36}$$

$$\boxed{\mu_1 = N\frac{i'}{(1+i')^n - 1}} \quad \textbf{P37}$$

Ces formules indiquent respectivement, la loi de progression des amortissements au travers du nombre de titres amortis et le nombre d'obligations amorties au premier tirage au sort.

L'expression de la nouvelle annuité s'obtient directement en substituant à C et i, R et i' :

$$\boxed{a = NR\frac{i'}{1-(1+i')^{-n}}} \quad \textbf{P38}$$

De façon similaire, r_p et d_p deviennent :

$$\boxed{r_p = N\frac{(1+i')^p - 1}{(1+i')^n - 1}} \quad \textbf{P39}$$

$$\boxed{d_p = N\frac{(1+i')^n - (1+i')^p}{(1+i')^n - 1}} \quad \textbf{P40}$$

***<u>Application</u>* :** *Un emprunt obligataire à annuités constantes présente les caractéristiques suivantes :*

$N = 1000$

$C = 500$

$E = 480$

$R = 540$

$i = 0{,}12$

$n = 5$

- ***Détermination du taux apparent :***

$R > C$ *implique que soit calculé la valeur de* i' .

$$i' = \frac{C}{R} i$$

$$i' = \frac{500}{540} \times 0{,}12$$

$$i' = 0{,}1111$$

La valeur de i' *est bien inférieure à celle de* i. *Les amortissements et le nombre de titres amortis progressent de façon géométrique à raison de* $(1+i')$ *:*

- ***Détermination de la nouvelle annuité constante***

$$a = NR \frac{i'}{1-(1+i')^{-n}}$$

$$a = (1000)(540) \frac{0{,}1111}{1-(1{,}1111)^{-5}}$$

$$a = 146512{,}48$$

La nouvelle annuité théorique constante $(148512{,}48)$ *est supérieure à l'annuité initialement déterminée avec* C *et* i *:* $138704{,}87$

- ***Détermination du nombre de titres amortis au premier tirage au sort***

$$\mu_1 = N \frac{i'}{(1+i')^n - 1}$$

$$\mu_1 = 1000 \frac{0{,}1111}{(1{,}1111)^5 - 1}$$

$$\mu_1 = 160{,}22$$

Le nombre théorique de titres à amortir au premier tirage $(160{,}22)$ *est supérieur à celui* $(157{,}41)$ *déterminé à partir de* $i = 0{,}12$. *Le rythme de croissance étant inférieur* $(i' < i)$, *la valeur présente de* μ_1 *doit être nécessairement supérieure à ce qu'elle était initialement, afin de parvenir à la même somme que celle atteinte avec* $i = 0{,}12$ *et* $\mu_1 = 157{,}41$.

La construction du tableau d'amortissement implique le calcul des valeurs réelles et successives de μ .

- ***Détermination des valeurs réelles de*** μ

Rangs des μ	μ théoriques	μ théoriques arrondis à l'entier le plus proche	Correction des μ à partie fractionnaire la plus forte	μ réels
1	160,22	160	-	160
2	178,02	178	-	178
3	197,80	198	-	198
4	219,78	220	-	220
5	244,20	244	-	244
		1 000		1 000

Les μ *théoriques successifs ont été déterminés par application de l'expression notée P3. Ainsi :*

$$\mu_2 = \mu_1(1+i')$$

$$\mu_2 = 160,22(1,1111)$$

$$\mu_2 = 178,02$$

- ***Construction du tableau d'amortissement***

Périodes	Nombre d'obligations vivantes en début de période $d\,(1)$	Dette vivante en début de période		Intérêt de la période $dCi(4)=(2)i$	Nombre d'obligations amorties μ (5)	Amortissements de la période $\mu R\;(6)=(5)R$	Annuités réelles $a = d\,C\,i + \mu\,R$ $(7)=(4)+(6)$	Nombre d'obligations vivantes au terme de la période $(8)=(1)-(5)$
		En valeur nominale $dC(2)=(1)C$	En valeur de remboursement $dR(3)=(1)R$					
1	1 000	500 000	540 000	60 000	160	86 400	146 400	840
2	840	420 000	453 600	50 400	178	96 120	146 520	662
3	662	331 000	357 480	39 720	198	106 920	146 640	464
4	464	232 000	250 560	27 840	220	118 800	146 640	244
5	244	122 000	131 760	14 640	244	131 760	146 400	0
					1 000	540 000		

Remarques : - Les intérêts dans la colonne n°2 peuvent également être déterminés avec $R\;et\;i'$:

$$Ci = Ri' \Rightarrow d_0Ci = d_0Ri'$$

- Les annuités réelles diffèrent sensiblement de l'annuité théorique.
- La raison de la progression géométrique des amortissements (μR) et du nombre de titres amortis, diffère sensiblement de $(1+i')$ en raison des arrondissements opérés précédemment sur le nombre de titres amortis.

b) Remboursement par amortissements constants

Le remboursement à une valeur $R > C$ entraîne deux modifications, obtenue en remplaçant $i \; et \; C$ par $i' \; et \; R$:

- **L'amortissement constant,** initialement : $m = \mu C$, devient :

$$\boxed{m = \mu R} \quad \textbf{P41}$$

- **La loi de progression des annuités,** initialement :

$$a_{p+1} - a_p = -\frac{N}{n} Ci = -\mu Ci$$

Devient :

$$\boxed{a_{p+1} - a_p = -\frac{N}{n} Ri' = -\mu Ri'} \quad \textbf{P42}$$

<u>Application</u> : *Considérons à nouveau les valeurs numériques de l'application précédente :*

$N = 1000$
$C = 500$
$E = 480$
$R = 540$
$i = 0{,}12$
$n = 5$

L'amortissement de cet emprunt obligataire est constant.

- Détermination de la valeur de l'amortissement constant

$$m = \mu R$$

$$m = \frac{N}{n} R$$

$$m = \frac{1000}{5} \cdot (540)$$

$$m = 108000$$

- Loi de progression des annuités

$$a_{p+1} - a_p = -\mu Ri'$$

$$a_{p+1} - a_p = -(200)(540 \times 0{,}1111)$$

$$a_{p+1} - a_p = -12\,000$$

Les annuités sont en progression arithmétique de raison : -12000. *Cette valeur est identique à celle initialement obtenue (exemple du 3.2.), car le produit* Ri' est identique à Ci.

5. Taux de rendement

Selon le cas de figure, le taux de rendement est moyen ou effectif.

5.1.Taux de rendement moyen

Le taux de rendement moyen ou taux actuariel brut est déterminé à la date d'émission. Il est commun à l'ensemble des souscripteurs. Il s'agit du taux d'actualisation t qui, à la date zéro, égalise les valeurs actuelles des sommes versées par les souscripteurs (NE) et les annuités qui leur seront versées :

$$\boxed{NE = \sum_{p=1}^{n} a_p (1+t)^{-p}} \qquad \textbf{P43}$$

L'expression formelle de t doit être adaptée en fonction des modalités de remboursement de l'emprunt obligataire.

a) Cas de l'emprunt obligataire à annuités constantes

Dans ce cas : $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$. La valeur de t s'obtient à partir de :

$$\boxed{NE = a\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}}$$

- **Si** $R = C$

Les obligations sont remboursées au pair. L'expression de l'annuité devient :

$$a = NC\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

D'où :

$$NE = NC\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

Divisons les deux membres par N, il vient :

$$\boxed{\frac{1-(1+t)^{-n}}{t} = \frac{E}{C}\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}} \qquad \textbf{P43 bis}$$

- **Si** $R > C$

Les obligations sont remboursées à une valeur R supérieure au pair C. L'expression de l'annuité est alors identique à celle notée P38 :

$$a = NR\frac{i'}{1-(1+i')^{-n}}$$

D'où :

$$NE = NC\frac{i'}{1-(1+i')^{-n}}\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

La division des deux membres par N livre :

$$\boxed{\frac{1-(1+t)^{-n}}{t} = \frac{E}{R}\frac{1-(1+i')^{-n}}{i'}} \qquad \textbf{P43 ter}$$

Remarque : Si l'obligation est remboursée à une valeur $R > C$, le souscripteur réalise un taux de rendement t supérieur à celui qu'il aurait réalisé si ce même titre avait été remboursé au pair.

Application **:** *Calculer le taux de rendement à l'émission d'un emprunt obligataire à annuités constantes dont les caractéristiques sont les suivantes :*

$N = 1000$
$C = 500$
$E = 480$
$R = 540$
$i = 0{,}12$
$n = 5$

- ***Détermination de la valeur de*** t ***:***

Le taux apparent i' *a été calculé précédemment :*

$$i' = \frac{C}{R}i = \frac{500}{540}\times 0{,}12 = 0{,}1111$$

La valeur de t *s'obtient à partir de :*

$$\frac{1-(1+t)^{-n}}{t} = \frac{E}{R}\frac{1-(1+i')^{-n}}{i'}$$

$$\frac{1-(1+t)^{-5}}{t} = \frac{480}{540}\frac{1-(1{,}1111)^{-5}}{0{,}1111}$$

$$\frac{1-(1+t)^{-5}}{t} = 3{,}276171$$

La table financière n°4 comporte les valeurs suivantes :

$3{,}274294$ *pour* $t_1 = 0{,}16$

$3{,}352155$ *pour* $t_2 = 0{,}15$

La valeur de t *est donnée par l'interpolation linéaire de ces valeurs :*

$$t = 0{,}15 - \left[\frac{3{,}352155 - 3{,}276171}{3{,}352155 - 3{,}274294}\right](0{,}15 - 0{,}16)$$

$$t = 0{,}15976 \; soit \; 15{,}98\%$$

Remarques : - Le taux de rendement moyen : 15, 98%, est supérieur au taux nominal : 12%. Cette relation s'explique par l'ensemble des avantages consentis aux souscripteurs : vente du titre à un prix $E < C$ et remboursement à un prix $R > C$, alors que le taux nominal suppose implicitement que les valeurs E, C et R soient confondues : $E = C = R$

- Ce taux ne tient pas compte des dates auxquelles les obligations seront tirées au sort, ces dates n'étant pas encore connues.

b) Cas de l'emprunt obligataire à amortissement constants

Les amortissements étant constants, les annuités sont en progression arithmétique décroissante. La valeur de t s'obtient à partir de :

$$\boxed{NE = \frac{1-(1+t)^{-n}}{t}\left[a_1 + \frac{r}{t} + nr\right] - \frac{nr}{t}} \quad \textbf{P44}$$

- **Si** $R = C$

L'expression du premier terme de la suite est alors :

$$a_1 = NCi + \mu C = NCi + \frac{N}{n}C$$

Et la raison :

$$r = -\mu Ci = -\frac{N}{n}Ci$$

- **Si** $R > C$

Les expressions de a_1 et r deviennent :

$$a_1 = NCi + \mu R = NCi + \frac{N}{n}R$$

$$r = -\mu Ri' = -\frac{N}{n}Ri'$$

<u>Application</u> : *Calculer le taux de rendement à l'émission d'un emprunt obligataire à amortissements constants dont les caractéristiques sont les suivantes :*

$N = 1000$
$C = E = 500$
$R = 540$
$i = 0{,}12$
$n = 5$

- ***Détermination de*** a_1 :

$$a_1 = (1000)\cdot(500)\cdot(0{,}12)+\left(\frac{1000}{5}\right)\cdot(540)$$

$$a_1 = 168\,000$$

- ***Détermination de*** r

Taux apparent i' : $i' = \frac{C}{R} i' = \frac{500}{540}\times 0{,}12 = 0{,}1111$

$$\Rightarrow \quad r = -\frac{N}{n} Ri' = \left(-\frac{1000}{5}\right)\cdot(540)\cdot(0{,}1111) = -12\,000$$

- ***Détermination de*** t :

$$NE = \frac{1-(1+t)^{-n}}{t}\left[a_1 + \frac{r}{t} + nr\right] - \frac{nr}{t}$$

$$(1000)\cdot(500) = \frac{1-(1+t)^{-5}}{t}\left[168\,000 - \frac{12\,000}{t} - (5\times 12\,000)\right] - \frac{(5\times 12\,000)}{t}$$

$$500\,000 = \frac{1-(1+t)^{-5}}{t}\left[108\,000 - \frac{12\,000}{t}\right] - \frac{60\,000}{t}$$

Le calcul de la valeur de t *nécessite plusieurs successifs :*

$t_1 = 14\% \rightarrow \quad NE_1 = 505\,080{,}09 \rightarrow E_1 = 505{,}08$

$t_2 = 14{,}50\% \rightarrow \quad NE_2 = 499\,417{,}55 \rightarrow E_2 = 499{,}42$

Le taux cherché t *s'obtient alors par interpolation linéaire :*

$$t = 0{,}14 - \left[\frac{505{,}08 - 500}{505{,}08 - 499{,}42}\right](0{,}14 - 0{,}145)$$

$$t = 0{,}1445 \; soit \; 14{,}45\%$$

5.2.Taux de rendement effectif

Il s'agit du taux de rendement effectivement réalisé par un obligataire déterminé. Son calcul implique que soit connue la date à laquelle ses titres sont tirés au sort.

Soit t, le taux de rendement effectif réalisé par un obligataire ayant souscrit une obligation amortie au *pième* tirage. Cet obligataire recevra p fois le coupon $(c = Ci)$ et percevra la valeur de remboursement (R) au terme de la *pième* période en échange du versement à l'instant zéro, date d'émission, de E francs.

L'équivalence entre ces valeurs à la date zéro s'écrit :

$$\boxed{E = c(1+t)^{-1} + c(1+t)^{-2} + \cdots + (R+c)(1+t)^{-p}} \quad \textbf{P45}$$

La prise en considération des modalités de remboursement, amortissements constants ou annuités constantes, n'a aucun intérêt dans le cas présent. Seule importe la valeur à laquelle le remboursement est effectué. Deux éventualités doivent être examinées :

- **Si** $R = C$

Dans ce cas, l'expression précédente devient :

$$\boxed{E = c\frac{1-(1+t)^{-p}}{t} + C(1+t)^{-p}} \quad \textbf{P45 bis}$$

- **Si** $R > C$

L'expression qui doit être considérée est :

$$\boxed{E = c\frac{1-(1+t)^{-p}}{t} + R(1+t)^{-p}} \quad \textbf{P45 ter}$$

<u>Application</u> : *Un emprunt obligataire à annuités constantes présente les caractéristiques suivantes :*

$N = 1000$
$C = 500$
$E = 480$
$R = 540$
$i = 0{,}12$
$n = 5$

Calculer le taux de rendement effectif réalisé par un obligataire dont les titres sortent au premier, second ou au dernier tirage.

- ***Taux de rendement effectif réalisé si les titres sont remboursés au premier tirage :***

A la date de souscription, l'obligataire verse 480 F pour chaque titre et reçoit en échange le coupon $(c = Ci)$ *ainsi que la valeur de remboursement : 540 F, le tout exprimé à la date zéro :*

$$E = c(1+t)^{-1} + R(1+t)^{-1}$$

$$E = (R+c)(1+t)^{-1}$$

$$480 = [540 + (500 \times 0{,}12)](1+t)^{-1}$$

$$\frac{480}{(500+60)} = (1+t)^{-1}$$

$$t = \left[\frac{(600)}{(480)}\right] - 1$$

$t = 0{,}25 \; soit \; 25\%$

- ***Taux de rendement effectif réalisé si les titres sont remboursés au second tirage :***

L'équivalence à la date zéro entre ce que l'obligataire verse et la valeur actuelle de ce qu'il doit recevoir s'écrit :

$$E = c(1+t)^{-1} + c(1+t)^{-2} + R(1+t)^{-2}$$

$$E = c(1+t)^{-1} + (R+c)(1+t)^{-2}$$

$$480 = (500 \times 0{,}12)(1+t)^{-1} + [(540) + (500 \times 0{,}12)](1+t)^{-2}$$

$$480 = 60\,(1+t)^{-1} + (540 + 60)(1+t)^{-2}$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par $(1+t)^2$ *:*

$$480(1+t)^2 = 60\,(1+t) + 600$$

$$480(1+t)^2 - 60\,(1+t) - 600 = 0$$

Posons $x = (1+t)$ *l'égalité devient :*

$$480x^2 - 60x - 600 = 0$$

L'équation du second degré obtenue est de la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Calculons à présent le discriminant (Δ) *de cette expression :*

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-60)^2 - 4[(480)\cdot(-600)]$$

$$\Delta = 1155600$$

Le discriminant étant passif, cette équation a deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Les correspondances numériques de ces racines sont :

$$x_1 = \frac{60 - \sqrt{1155600}}{2(480)} < 0$$

$$x_2 = \frac{60 + \sqrt{1155600}}{2(480)}$$

$x_2 = 1{,}1823$

La racine x_1 *ne peut être obtenue car le taux de rendement qui en résulterait serait négatif. La solution est donc fournie par la racine* x_2 *:*

$x_2 = (1+t)$

$(1+t) = 1{,}1823$

$t = 0{,}1823$

Soit $18{,}23\%$

- ***Taux de rendement effectif réalisé si les titres sont remboursés au dernier tirage :***

L'équivalence à la date de souscription s'obtient directement par application de *l'expression P45 ter :*

$$E = c\frac{1-(1+t)^{-p}}{t} + R(1+t)^{-p}$$

Où $p = 5$

La correspondance numérique de cette expression est :

$$480 = (500 \times 0{,}12)\frac{1-(1+t)^{-5}}{t} + 540(1+t)^{-5}$$

La recherche itérative doit être orientée à partir des constatations suivantes :

- *Les taux de rendement effectifs tendent à décroître à mesure que la distance entre les dates d'émission et de remboursement s'accroît. La valeur de* t *est donc nécessairement inférieure à celle du taux de rendement des obligations sorties au premier tirage (25 %) et à celle des titres remboursés au second tirage (18,23 %).*
- *Le tirage considéré étant le dernier, la valeur de* t *est nécessairement inférieure au taux de rendement moyen à l'émission : 15,98 %.*
- *Enfin, le taux* t *est également supérieur au taux nominal (12 %) en raison de l'existence des primes d'émission et de remboursement. En effet, si les valeurs d'émission, de remboursement et nominales sont confondues, le taux de rendement effectif est alors égale à* i *:*

$$C = Ci\frac{1-(1+t)^{-p}}{t} + C(1+t)^{-p}$$

Divisons les deux membres de cette égalité par C *:*

$$1 = i\frac{1-(1+t)^{-p}}{t} + (1+t)^{-p} \quad \Rightarrow \quad t = i$$

La valeur de t est donc comprise entre 12 % et 15,98 %.

A présent l'objectif est de réduire l'amplitude de cet intervalle. Considérons donc, conformément aux constations précédentes, les valeurs suivantes :

$t = 13\%$ *, valeur supérieure à* $i = 12\%$

$t = 15\%$*, valeur inférieure au taux de rendement moyen (15,98 %)*

A $t = 13\%$*, correspond une valeur de* $E = 504{,}12$

A $t = 15\%$*, correspond une valeur de* $E = 469{,}60$

Cet intervalle comporte la valeur de E que l'on cherche à encadrer (480), l'interpolation linéaire peut donc être opérée à partir de ces valeurs. Cependant, l'amplitude de cet intervalle est encore réductible. Ainsi :

A $t = 14\%$*, correspond une valeur de* $E = 486{,}44$

A $t = 14{,}5\%$*, correspond une valeur de* $E = 477{,}92$

La valeur de $E = 480$ est encore comprise dans cet intervalle réduit. Le taux de rendement t est donné par l'interpolation linéaire de ces valeurs :

$$t = 0{,}14 - \left[\frac{486{,}44 - 480}{486{,}44 - 477{,}92}\right](0{,}14 - 0{,}145)$$

$$t = 0{,}1438 \; soit \; 14{,}38\%$$

6. Taux de revient

La société émettrice perçoit une valeur égale au débours global des souscripteurs (NE), amputée des frais engendrés par l'émission (F). **Le taux de revient t' est obtenu en égalisant la somme reçue par l'emprunteur à l'émission $(NE-F)$ et la valeur actuelle des versements destinés aux souscripteurs.**

$$\boxed{(NE - F) = \sum_{p=1}^{n} a_p (1+t')^{-p}} \quad \textbf{P46}$$

Cette expression, similaire dans le principe à celle notée P43, doit également être adaptée en fonction des modalités de remboursement de l'emprunt obligataire ;

6.1.Cas de l'emprunt obligataire à annuités constantes

La valeur de t' s'obtient à partir de :

$$\boxed{\left(NE-F\right)=a\frac{1-\left(1+t'\right)^{-p}}{t'}}$$

- **Si** $R=C$

L'expression précédente devient :

$$\boxed{\frac{1-\left(1+t'\right)^{-n}}{t'}\frac{\left(E-f\right)}{C}\frac{1-\left(1+i\right)^{-p}}{i}}$$ **P46 bis**

Où $f=\dfrac{F}{N}$, représente les frais d'émission d'un titre.

- **Si** $R>C$

dans ce cas, la valeur de t' est déduite de :

$$\boxed{\frac{1-\left(1+t'\right)^{-n}}{t'}\frac{\left(E-f\right)}{C}\frac{1-\left(1+i'\right)^{-p}}{i'}}$$ **P46 ter**

Remarque : Dans le cas théorique où l'émission n'engendre pas de frais à la charge de l'emprunteur, le taux de revient est égal au taux de rendement à l'émission :

$\boxed{f=0} \Rightarrow \boxed{t'=t}$

Si l'émission engendre des frais, le taux de revient est alors supérieur au taux de rendement à l'émission :

$\boxed{f\neq 0} \Rightarrow \boxed{t'>t}$

<u>Application</u> : *Déterminer le taux de revient de l'emprunt obligataire à annuités constantes dont les caractéristiques sont les suivantes :*

$N=1000$ $F=12000$
$C=500$
$E=480$
$R=540$
$i=0{,}12$
$n=5$

- ***Taux de revient***

L'obligation étant à une valeur $R>C$, il convient d'utiliser le taux apparent i' :

$$i'=\frac{C}{R}i=\frac{500}{540}\times 0{,}12=0{,}1111$$

Déterminons à présent le taux de revient t' :

$$\frac{1-\left(1+t'\right)^{-n}}{t'}=\frac{\left(E-f\right)}{R}\frac{1-\left(1+i'\right)^{-n}}{i'}$$

Où $f = \frac{F}{N} = \frac{12\,000}{1000} = 12$

D'où :

$$\frac{1-(1+t')^{-5}}{t'} = \frac{(480-12)}{540}\frac{1-(1{,}1111)^{-5}}{0{,}1111}$$

$$\frac{1-(1+t')^{-5}}{t'} = 3{,}194\,267$$

La table financière n°4 comporte les valeurs suivantes :

A $3{,}199346$ *correspond un taux de 17%*

A $3{,}127171$ *correspond un taux de 18%*

La valeur de t' *s'obtient par interpolation linéaire :*

$$t' = 0{,}17 - \left[\frac{3{,}199346 - 3{,}194\,267}{3{,}199346 - 3{,}127171}\right](0{,}17 - 0{,}18)$$

$$t' = 0{,}1707 \; soit \; 17{,}07\,\%$$

6.2.Cas d'un emprunt obligataire à amortissements constants

L'expression qui livre la valeur de t' peut être déduite de celle notée P44. Il suffit d'y intégrer les frais d'émissions :

$$\boxed{(NE - F) = a\frac{1-(1+t')^{-n}}{t'}\left[a_1 + \frac{r}{t'} + nr\right] - \frac{nr}{t'}} \quad \textbf{P47}$$

Il convient également de prendre en considération les valeurs de $a_1 \; et \; t$, selon que $R = C \; ou \; R > C$.

Application **:** *Considérons à nouveau les données de l'application du 5.1.B :*

dont les caractéristiques sont les suivantes :

$N = 1000$
$C = E = 500$
$R = 540$
$i = 0{,}12$
$n = 5$
Avec : $F = 12\,000$

Et, déterminés précédemment :

$i' = 0{,}1111$

$a_1 = 168\,000$

$r = -12\,000$

- ***Taux de revient***

$$(NE-F)=\frac{1-(1+t')^{-n}}{t'}\left[a_1+\frac{r}{t'}+nr\right]-\frac{nr}{t'}$$

$$(500000-12000)=\frac{1-(1+t')^{-5}}{t'}\left[168000-\frac{12000}{t'}-(5\times 12000)\right]+\frac{(5\times 12000)}{t'}$$

$$488000=\frac{1-(1+t')^{-5}}{t'}\left[108000-\frac{12000}{t'}\right]+\frac{60000}{t'}$$

A l'instar des cas précédents, le calcul de t' suppose un processus itératif dont issues les valeurs suivantes :

$t'_1=15{,}50\%\rightarrow(NE_1-F)=488405{,}89\rightarrow(E_1-f)=488{,}41$

$t'_2=15{,}75\%\rightarrow(NE_2-F)=485716{,}41\rightarrow(E_2-f)=485{,}72$

Par interpolation linéaire, il vient :

$$t'=0{,}155-\left[\frac{488{,}41-488}{488{,}41-485{,}72}\right](0{,}155-0{,}1575)$$

$$t'=0{,}1554\ soit\ 15{,}54\%$$

CE QU'IL FAUT RETENIR

- **Principe de l'emprunt obligataire**

Il comporte une multitude de prêteurs.

- **Propriétés générales**

Valides quelle que soit la modalité de remboursement adoptée.

Propriétés	Expressions
Relation entre capital emprunté et annuités (à l'instant zéro)	$NC=\sum_{p=1}^{n}a_p(1+t)^{-p}$
Relation entre les nombres d'obligations émises et amorties	$N=\sum_{p=1}^{n}\mu_p$
Relation entre le nombre des obligations encore vivantes et les obligations sorties au dernier tirage	$d_{n-1}=\mu_n$
Relation entre annuités et amortissements	$a_{p+1}-a_p=\mu_{p+1}C-\mu_pC(1+i)$
Nombre d'obligations amorties après le pième tirage	$r_p=\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_p$
Nombre d'obligations encore vivantes après le pième tirage	$d_p=N-r_p$

- **Propriétés spécifiques aux modes de remboursements adoptés**

• *Annuités constantes*

Propriétés	Expressions	
	$R = C$	$R > C$
Annuité constante	$a = NC\dfrac{i}{1-(1+i)^{-n}}$	$a = NR\dfrac{i'}{1-(1+i')^{-n}}$
Nombre d'obligations amorties au premier tirage	$\mu_1 = N\dfrac{i}{(1+i)^n - 1}$	$\mu_1 = N\dfrac{i'}{(1+i')^n - 1}$
Loi de progression du nombre d'obligations amorties	$\mu_{p+1} = \mu_p(1+i)$ et $\mu_p = \mu_1(1+i)^{p-1}$	$\mu_{p+1} = \mu_p(1+i')$ et $\mu_p = \mu_1(1+i')^{p-1}$
Nombre d'obligations amorties après p échéances	$r_p = N\dfrac{(1+i)^p - 1}{(1+i)^n - 1}$	$r_p = N\dfrac{(1+i')^p - 1}{(1+i')^n - 1}$
Nombre d'obligations vivantes après p échéances	$d_p = N\dfrac{(1+i)^n - (1+i)^p}{(1+i)^n - 1}$	$d_p = N\dfrac{(1+i')^n - (1+i')^p}{(1+i')^n - 1}$
observation	$i' = \dfrac{C}{R}i$	

• *Amortissements constants*

Propriétés	Expressions	
	$R = C$	$R > C$
Nombre d'obligations amorties à chaque échéance	$\mu = \dfrac{N}{n}$	$\mu = \dfrac{N}{n}$
Amortissement constant	$m = \dfrac{NC}{n} = \mu C$	$m = \dfrac{NC}{n} = \mu R$
Loi de progression des annuités	$a_{p+1} - a_p = -\mu Ci$ $a_{p+1} - a_p = -\dfrac{NC}{n}i$	$a_{p+1} - a_p = -\mu Ri'$ $a_{p+1} - a_p = -\dfrac{NR}{n}i'$
Nombre d'obligations amorties après p échéances	$r_p = p \cdot \mu$	$r_p = p \cdot \mu$
Nombre d'obligations vivantes après p échéances	$d_p = \mu(n-p)$	$d_p = \mu(n-p)$
observation	$i' = \dfrac{C}{R}i$	

- **Taux de rendement**

• *Taux de rendement à l'émission* (t)

Egalement appelé taux de rendement moyen ou taux actuariel brut. Ce taux calculé à l'émission, ne tient pas compte de la date à laquelle les titres seront tirés au sort.

<table>
<tr><th rowspan="2">Modes de remboursement</th><th colspan="2">Valeurs de remboursement</th></tr>
<tr><th>$R=C$</th><th>$R>C$</th></tr>
<tr><td>Annuités constantes</td><td>$\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}=\frac{E}{C}\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$</td><td>$\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}=\frac{E}{R}\frac{1-(1+i')^{-n}}{i'}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Amortissements constants</td><td colspan="2">$NE=\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}\left[a_1+\frac{r}{t}+nr\right]-\frac{nr}{t}$</td></tr>
<tr><td>$a_1=NCi+\frac{N}{n}C$
$r=-\frac{N}{n}Ci$</td><td>$a_1=NCi+\frac{N}{n}R$
$r=-\frac{N}{n}Ri'$</td></tr>
</table>

- *Taux de rendement effectif*

La détermination de ce taux implique que soit connue la date à laquelle les titres sont tirés au sort. Ce taux tend à décroître à mesure que cette date s'éloigne de la date d'émission.

<table>
<tr><th>$R=C$</th><th>$R>C$</th></tr>
<tr><td>$E=c\frac{1-(1+t)^{-p}}{t}+C(1+t)^{-p}$</td><td>$E=c\frac{1-(1+t)^{-p}}{t}+R(1+t)^{-p}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ces expressions s'appliquent indépendamment du mode de remboursement adopté.</td></tr>
</table>

- **Taux de revient** (t')

Le taux t' s'obtient en égalisant les sommes perçues par l'émetteur et la valeur actuelle des versements destinés aux souscripteurs.

<table>
<tr><th rowspan="2">Modes de remboursement</th><th colspan="2">Valeurs de remboursement</th></tr>
<tr><th>$R=C$</th><th>$R>C$</th></tr>
<tr><td>Annuités constantes</td><td>$\frac{1-(1+t')^{-n}}{t'}=\frac{(E-f)}{C}\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$</td><td>$\frac{1-(1+t')^{-n}}{t'}=\frac{(E-f)}{R}\frac{1-(1+i')^{-n}}{i'}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Amortissements constants</td><td colspan="2">$(NE-F)=\frac{1-(1+t')^{-n}}{t'}\left[a_1+\frac{r}{t'}+nr\right]-\frac{nr}{t'}$</td></tr>
<tr><td>$a_1=NCi+\frac{N}{n}C$
$r=-\frac{N}{n}Ci$</td><td>$a_1=NCi+\frac{N}{n}R$
$r=-\frac{N}{n}Ri'$</td></tr>
<tr><td>Remarques</td><td colspan="2">Si $f=0\Rightarrow t'=t$
Si $f\neq 0\Rightarrow t'>t$</td></tr>
</table>

EXERCICES

1 Un emprunt obligataire a les caractéristiques suivantes :

- Nombre d'obligations : 50 000,
- Taux annuel : 12 %,
- Nominal : 2 500 F, les obligations sont remboursées au pair,
- Remboursement en 15 échéances constantes.

1- *Présentez la première et la dernière ligne du tableau d'amortissement. (arrondir à l'entier le plus proche le nombre d'obligations à arrondir.)*

2- *Le titre est émis à 2 450 F, les frais d'émission sont de 40 000 F, calculez le taux de revient de l'emprunt à l'émission.*

2 Un emprunt obligataire a les caractéristiques suivantes :

- Nombre d'obligations : 20 000,
- Taux annuel : 10 %,
- Nominal : 5 000 F, les obligations sont remboursées au pair,
- Remboursement en 5 échéances constantes.

1- *Construisez les tableaux d'amortissement en utilisant les quatre procédés de calcul donnés en cours.*

2- *La valeur de remboursement étant de 5 500 F, calculez le nouveau tableau d'amortissement. (Utilisez le premier procédé d'arrondi.)*

3- *Calculez le taux de revient de l'emprunt.*

3 Un emprunt obligataire a les caractéristiques suivantes :

- Nombre d'obligations : 10 000,
- Taux annuel : 9,5 %,
- Nominal : 3 000 F, les obligations sont remboursées au pair,
- Remboursement en 10 amortissements constants.

1- *Calculez les deux premières lignes du tableau d'amortissement ;*

2- *Calculez la 7ème ligne du tableau d'amortissement.*

3- *Donnez la raison de la suite des intérêts et des annuités.*

4- *Répondre à 1, 2 et 3, si le prix de remboursement est des 3 060 F.*

5- *Calculez, dans la situation 4, le taux de revient de l'emprunt.*

4 Une société émet un emprunt de 40 000 obligations de 4 000 F au taux de 11,5 %, de durée 15 ans, à annuités constantes. La valeur de remboursement est de 4 100 F, le prix d'émission de 3 950 F, les frais s'élèvent à 0,12 % du nominal.

1- *Calculez les deux premières lignes du tableau d'amortissement.*
2- *Calculez la $9^{ème}$ ligne du tableau d'amortissement.*
3- *Calculez le taux de revient de l'emprunt.*
4- *Calculez le taux de rendement pour le souscripteur d'une obligation remboursée au 1^{er} tirage, au $2^{ème}$ tirage.*
5- *Calculez le taux de rendement pour le souscripteur d'une obligation remboursée au $7^{ème}$ tirage.*

5 Une entreprise émet un emprunt de 30 000 obligations de nominal de 2 500 F remboursable par annuités constantes sur 10 ans. Le taux d'intérêt est de 9,5 % les cinq premières années, de 11,5% les cinq dernières.

1- *Calculez l'annuité constante.*
2- *Calculez le taux de rendement réalisé par le souscripteur dont le titre est amorti au $8^{ème}$ tirage sachant qu'il a payé le titre 2 430 F.*
3- *Juste après le paiement des intérêts de la $5^{ème}$ annuité, l'entreprise achète 1 000 titres en bourse à 94 %. Quelle est l'économie réalisée par la firme sachant que les frais boursiers sont de 0,5 % du montant de la transaction et que les coûts administratifs sont de 5 000 F ?*

6 Un emprunt de 40 000 obligations est remboursable en 6 annuités constantes.

Nominal : 5 000 F

Taux d'intérêt : 12 %

Remboursement : 5 000 F les deux premières années
5 100 F les deux années suivantes
5 200 F les deux dernières années

1- *Présentez le tableau d'amortissement de l'emprunt.*
2- *Calculez le taux moyen à l'émission, les titres ont été émis à 4 950 F.*
3- *Calculez le taux de rendement du porteur d'une obligation remboursée au $2^{ème}$, au $4^{ème}$ et $6^{ème}$ tirage.*

7 Un emprunt obligataire a les caractéristiques suivantes :

- Nominal : 3 000 F, les obligations sont remboursées à 3 125 F,
- Taux d'intérêt : 11 %,
- Remboursement en annuités constantes.

On sait que le montant des amortissements (à la valeur de remboursement) est de 1 656 250 F la première année.

Le montant des intérêts la dernière année est de 788 370 F.

1- *Calculez la durée de l'emprunt ;*
2- *Calculez le montant de l'annuité.*
3- *Calculez le taux de rendement de l'emprunt si le prix d'émission est de 2 950 F.*

8 Un emprunt de 70 000 000 F est divisé en 14 000 obligations de 5 000 F chacune. Le prix d'émission est de 98,6 % ; la date de jouissance et de règlement est le 6 janvier N.

Le taux d'intérêt annuel : 11 %.

Taux de rendement actuariel brut au 6 janvier N : 11,24 %.

Durée : 10 ans.

Amortissement : au pair, en totalité le 6 janvier N + 10, sauf rachats en bourse ;

Cotation : bourse de Lyon.

1- *Vérifiez que le taux de rendement à l'émission est bien celui indiqué dans l'annonce ci-dessus.*
2- *Si l'entreprise avait opté pour un système d'annuités constantes et pour un prix de remboursement de 5 240 F,*
   - *Calculez le montant de l'annuité,*
   - *Calculez le montant des frais d'émission pour que le taux de revient soit de 12%.*

9 Un grande entreprise envisage l'émission d'un emprunt-obligations dont, les caractéristiques sont les suivantes :

- Nombre d'obligations : 100 000,
- Valeur nominale : 1 000 F
- Taux d'intérêt : 10 %,
- Frais d'émission : 10 F par obligations,
- Remboursement en 5 ans par annuités constantes.

1- *Quel doit être le prix de remboursement pour que le taux de revient soit de 12 %*
2- *Si le prix de remboursement est fixé à 1090 F, quel sera le coût réel de l'emprunt ?*

10 (Sujet de Mathématiques appliquées et informatique, première partie, session 1190)

La société Matinfo envisage la mise en place de nouveaux équipements industriels.

Pour financer ce projet elle étudie l'émission d'un emprunt de 10 000 obligations dont voici les caractéristiques :

- Valeur nominale d'une obligation : 5 000 F ;
- Prix d'émission : 4 950 F par obligation ;
- Durée : 10 ans à compter du 1er octobre 1990 ;
- Jouissance et règlement le 1er octobre 1990 ;
- Intérêt annuel de 9,50 % soit 475 F par obligation, payable le 1er octobre de chaque année ;
- Remboursement au pair (valeur nominale).

Elle hésite entre deux modalités d'amortissement.

Première modalité

Amortissement par annuités constantes, du 1er octobre 1991 au 1er octobre 2000.

1- *a. En désignant par :*

N_k le nombre d'obligations vivantes immédiatement après le versement de l'annuité de rang k ;

m_k le nombre d'obligations amorties lors du versement de l'annuité de rang k ; a le montant de l'annuité théorique de remboursement, décomposer en intérêts et amortissements deux annuités consécutives de rang k et $k+1$ puis montrer que le nombre de titres à amortir chaque année est en progression géométrique de raison 1,095.

b. En déduire le nombre théorique de titres à rembourser le 1er octobre 1991, puis le montant de l'annuité théorique de remboursement.

2- *Estimer le montant des coupons à payer le 1er octobre 1996.*

3- *Déterminer le taux de rendement d'une obligation souscrite à l'émission de l'emprunt et remboursée le 1er octobre 1992.*

Deuxième modalité

Amortissement an quatre tranches égales de 2 500 obligations, du 1er octobre 1997 au 1er octobre 2000.

1- *Déterminer le montant annuel des coupons à verser par la société du 1er octobre 1991 au 1er octobre 1996.*
2- *Montrer que les annuités de remboursement de l'emprunt du 1er octobre 1997 au 1er octobre 2000 sont en progression arithmétique.*
   En déduire le montant de chacune de ces annuités.
3- *Ecrire l'équation permettant de déterminer le taux de rendement actuariel de l'emprunt.*
   Vérifier que ce taux de rendement est à peu près de 9,68 %.

Chapitre VII : LE CHOIX DES INVESTISSEMENTS

Thèmes : - Critères atemporels
- Valeur actuelle nette
- Indice de profitabilité
- Taux interne de rentabilité

Toute entreprise est à l'origine d'une décision d'investissement. Cet aspect conditionne, par la suite et en permanence, le maintien et le développement de ses activités.
L'importance de cette décision est soulignée par la mise en œuvre d'un processus dans lequel l'évaluation et la sélection constituent la phase ultime. C'est à cette dernière qu'est dévolu le présent chapitre.

1. Origine et formulation des éléments de décision

1.1. Origine, nature et objectifs

La demande d'investissement n'est pas le seul fait des unités techniques : production, montage,… Elle peut tout aussi bien émaner des services : commerciaux, comptables, administratifs, ou encore de la direction du personnel.
Qu'elle qu'en soit son origine, l'investissement sera selon la terminologie comptable :

- **Corporel** (tangible) ;
- **Incorporel** (frais de recherche, développement, publicité) ;
- **Financier** (titres de participation).

L'engagement de l'entreprise aura pour objectif soit :

- L'accroissement des capacités de production ;
- L'amélioration des conditions de production et de vie des salariés ;
- L'établissement ou la consolidation d'une image de marque.

Il peut également résulter d'un acte stratégique, dont le caractère offensif ou défensif doit contribuer à mettre l'entreprise dans une meilleure situation face à la concurrence.

1.2. Formulation du projet d'investissement

La formulation est le préalable à toute évaluation quantitative. Il s'agit de préciser, sous tous ses aspects, la contrepartie du besoin. Citons, à titre d'exemple :

- Le choix d'un processus productif, envisagé sous la forme d'un ensemble intégré ou de l'assemblage d'unités modulaires ;

- L'introduction de l'informatique, par le recours à des unités, dédiées, indépendantes ou intégrées à un réseau.

Une fois répertoriées, chacune des variantes constituera un projet concurrentiel des autres. Pour être qualifié de projet, elles doivent présenter, individuellement, les propriétés suivantes :

- Etre un ensemble qui, une fois achevé, possède une valeur réelle pour l'exploitation ;
- Ne pas contenir de sous-ensemble ayant cette propriété, et susceptible de répondre, individuellement, au besoin à l'origine de la demande d'investissement.

Une raffinerie, les études d'ingénierie qu'elle implique et le terrain nécessaire à son édification, constituent un projet. Une fois achevée, elle fournira des produits ayant une valeur économique, ce qui n'est pas le cas de l'un de ses éléments constitutifs. Ainsi, une tour de distillation ne peut à elle seule fournir le même produit fini.

Une fois formulés, les projets peuvent dès lors être l'objet d'une évaluation quantitative dont la finalité est :

- De conduire à l'acceptation ou au rejet, dans le cas d'un projet unique ;
- D'orienter le choix, en présence de projets multiples.

L'efficacité de l'analyse quantitative repose en partie sur son aptitude à traduire en ces termes comparables des projets d'une très grande variété. Cette caractérisation constitue le préalable à l'application de critères de choix communs.

2. Les caractéristiques des projets d'investissement

Tout projet d'investissement est défini au travers de quatre caractéristiques :

- Les cash flows nets,
- La durée de vie,
- La valeur résiduelle,
- Les dépenses d'investissement.

2.1. Les cash flows nets

On désigne par cash flows nets, les flux de recettes nets d'impôts générés chaque année par un investissement. En pratique, on utilise parfois les notions de « capacité brute d'autofinancement » ou « marge brute d'autofinancement »[1] .

Si l'on désigne par :

[1] L'adjectif brut indique dans le cas présent : avant déduction des amortissements.

- R_i, les recettes supplémentaires d'exploitation relatives à l'année i ;
- D_i, les dépenses supplémentaires d'exploitation relatives à la même année i.

La différence des recettes et dépenses définit le cash flow avant impôt. La détermination des cash flows nets implique que soit pris en considération l'incidence fiscale des flux engendrés par le projet considéré.

En effet, les bénéfices par le projet donneront lieu à l'acquittement d'un impôt supplémentaire.

Soit T, le taux d'imposition des bénéfices, et A_i, la dotation aux amortissements relative au projet pour l'année i. Le cash flow net de l'année i, CN_i, sera donné par l'expression :

$$CN_i = [(R_i - (D_i + A_i))](1-T) + A_i$$

ou, de façon équivalente :

$$\boxed{CN_i = (R_i - D_i)(1-T) + A_i \cdot T}$$

Ce résultat s'obtient également de manière additive :

$$\boxed{CN_i = Résultat\ net + Dotations\ aux\ amortissements}$$

2.2. La durée de vie

La durée de vie d'un investissement est la période pendant laquelle le projet génère des cash flows nets positifs. Cette période ne coïncide pas nécessairement avec la durée de vie fiscale pendant laquelle le matérielle est amorti. Cependant, cette dernière n'est pas sans incidence sur les calculs fondés sur la durée de vie économique du bien. En effet, elle détermine l'un des paramètres du calcul des cash flows nets : la valeur des amortissements (A_i).

2.3. La valeur résiduelle

Au terme de leur utilisation économique, certains biens ont encore une valeur dite résiduelle. Il s'agit de la valeur vénale, augmentée de la plus-value éventuelle consécutive à la cession et minorée des impôts consécutifs à cette plus-value. Cette valeur résiduelle constitue en règle générale le dernier cash flow net enregistré par l'entreprise.

2.4. Les dépenses d'investissement

Il convient de considérer comme telles, les dépenses relatives à l'acquisition du matériel ainsi que celles induites par cet achat. Il s'agit pour l'essentiel ; du prix du bien, des dépenses d'installation, de formation du personnel à l'utilisation et l'entretien du nouvel équipement. Doit également être inclus dans ces dépenses, l'accroissement des besoins en fonds de roulement :

$$\Delta\, créances clients + \Delta\, stocks - \Delta\, crédit\ fournisseurs$$

Dès lors que tous les paramètres monétaires sont déterminés, le projet peut être soumis aux critères de choix.

3. Les critères de choix d'investissement

Ces critères sont classés traditionnellement dans deux catégories :

- **Les critères atemporels,**
- **Les critères actuariels.**

3.1. Les critères atemporels

L'origine de ces critères est comptable ou financière. Par définition, ils excluent le temps, ou pour être exact, l'effet du temps sur les valeurs monétaires.

a) Le taux moyen de rentabilité (average rate of return)

Ce critère, d'origine comptable, est le rapport de la moyenne des cash flows nets, à la dépense initiale d'investissement (I_0)

$$\boxed{T.M.R. = \overline{CN} / I_0}$$

Exemple

Un investissement de 110 000 FF génère les cash flows nets suivants :

$$CN_1 = 5000$$

$$CN_2 = 10\,000$$

$$CN_3 = 14\,000$$

$$CN_4 = 15\,000$$

Le cash flow net moyen (CN)s'obtiendra à partir de :

$$\overline{CN} = \frac{\left[\sum CN_1\right]}{N}$$

$$\overline{CN} = 44\,000 / 4 = 11\,000$$

Taux moyen de rentabilité $(T.M.R.)$ du projet :

$$T.M.R. = \overline{CN} / I_0$$

$$T.M.R. = 11000/110000 = 0{,}10 \text{ soit } 10\%$$

Un autre calcul de ce ratio consiste à rapporter le bénéfice net (après amortissement et impôt) à la valeur comptable moyenne de l'investissement. L'inconvénient de cette dernière mesure est qu'elle doit être fondée sur le choix, parfois arbitraire, d'une méthode d'amortissement.
Ce taux déterminé, il doit être au moins égal au taux de rentabilité de l'entreprise qui investit. Dans le cas contraire, l'adoption du projet considéré contribuerait à abaisser cette rentabilité.
L'exemple précédent suggère les limites d'un tel critère. **Il surestime la rentabilité de l'opération.** En effet, il affecte la même valeur au franc des cash flows nets futurs et à celui des cash flows nets immédiats.

b) Le délai de récupération (*pay back period*)

Il mesure le temps t au terme duquel le cumul des cash flows nets est égal au coût de l'investissement I_0. Formellement, cette relation se traduit ainsi :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{t} CN_i = I_0}$$

Ce critère a un sens similaire à celui donné au « point mort » dans l'étude de la rentabilité de l'entreprise. Certaines interpolations accentuent plus encore son caractère financier. En effet, il est considéré comme une mesure du degré d'exposition au risque consécutif à l'engagement d'un investissement.
Il mesure également, et de façon moins directe, la liquidité d'un investissement :
Une entreprise ne recouvre la liquidité engagée qu'au terme de la durée de vie du projet. En deçà, elle demeure illiquide. En d'autres termes, l'investissement prive l'entreprise, à concurrence de ce délai, des autres opportunités nécessitant une disponibilité monétaire immédiate.

***<u>Application</u>* :** *Le tableau ci-dessous indique les cash flows nets correspondants à un investissement* (I_0) de $50000\,FF$ */*

Caractère des flux	Flux	Cumul des flux
$-I_0$	-50000	-50000
CN_1	10000	-40000
CN_2	20000	-20000
CN_3	30000	$+10000 \Leftarrow D.R.$
CN_4	40000	$+50000$

Le délai de récupération de cet investissement se situe au delà de deux ans. Une plus grande précision nécessite le recours à une interpolation linéaire :

$$DR = 2 - [(-20000 - 0)/(-20000 - 10000)](2 - 3) = 2 \, ans, 8 \, mois$$

Une autre variante de ce critère consiste à prendre en considération les flux et les cumuls de flux actualisés.

La limite principale de ce critère réside dans l'exclusion d'une partie de la séquence des cash flows nets :

- **Si le délai de récupération de deux investissements est le même,** cette égalité entraîne l'exclusion des cash flows nets situés au-delà de ce délai, pour l'investissement dont la durée de vie est la plus longue ;
- **Dans le cas de deux investissements** ayant les mêmes coûts et cash flows nets, et **qui ne se différencient que par leurs durées de vie,** l'adoption éventuelle du projet dont le cycle de vie est le plus court aurait pour conséquence d'exclure de la comparaison les cash flows nets de l'autre investissement situés au-delà du délai de récupération.

Une étude déjà ancienne[2] indiquait que près du tiers des grandes sociétés privées françaises appliquaient à leurs décisions d'investissement le critère du délai de récupération. Le recours au taux de rentabilité n'est mentionné que dans un cas sur huit.

Le grief majeur adressé à ces critères est l'exclusion du paramètre temps. Cet aspect est manifeste dans le traitement des séquences de cash flows. Le recours à l'un ou l'autre de ces critères comporte donc l'acceptation implicite de la considération égale donnée à des valeurs monétaires situées à des points différents du temps. Le rejet d'une telle hypothèse implique le recours aux critères actuariels.

3.2.Les critères actuariels

L'apport fondamental de ces critères est l'intégration de la dimension temporelle dans l'appréciation d'un projet d'investissement.

Le prix affecté au temps se trouve exprimé au travers du taux d'actualisation retenu.
Les critères actuariels les plus utilisés sont :

- **La valeur actuelle nette,**
- **L'indice de profitabilité,**
- **Le taux interne de rentabilité.**

---

[2] « Enquête sur l'application des techniques d'analyse pour les décisions d'investissement » : A. PARES, *Revue analyse Financière n° 23.*

L'étude citée précédemment révèle que près d'un quart des évaluations de projets d'investissement est fondé sur le premier critère cité ci-dessus. L'indice de profitabilité intervient dans une étude sur dix et le $T.I.R.$ dans six études sur dix. Ce dernier est donc le critère le plus fréquemment utilisé dans les décisions d'investissement.

a) La valeur actuelle (*net present valeur*)

La valeur actuelle nette (VAN) est le résultat de la confrontation entre le coût de l'investissement (I_0) et la somme des valeurs actuelles des cash flows futurs attendus, évalués au taux d'actualisation t :

$$\boxed{VAN = \sum_{i=1}^{n} CN_i (1+t)^{-i} - I_0}$$

La VAN est un nombre de francs. Si elle est positive dans le cas d'un projet unique, celui-ci sera accepté. A contrario, si elle est négative, le même projet ne sera pas retenu. Si le cadre d'exercice met en présence plusieurs investissements concurrents, la VAN permet d'établir un classement de ces projets.

<u>Application</u> :

- ***à un projet unique***

$I_0 = 100\,000$ $\quad$ $CN_1 = 30\,000$

$taux\ d'actualisation = 10\%$ $\quad$ $CN_2 = 40\,000$

$CN_3 = 60\,000$

Périodes	CN_i	Coefficients d'actualisation	CN_i actualisés
1	30 000	0,909 09	27 273
2	40 000	0,826 45	33 058
3	60 000	0,751 31	45 079
			105 410

$VAN = 105\,410 - 100\,000$

$VAN = +5\,410$

La VAN étant positive, le projet sera accepté.

- ***au cas de projets multiples***

Le traitement de trois projets concurrents fournit les indications suivantes :

Périodes	I_0	Cash flows actualisés	VAN
A	80 000	88 000	+ 8 000
B	65 000	80 000	+ 15 000
C	110 000	129 800	+ 19 800

Le classement obtenu à partir des VAN s'établira comme suit :

Périodes	I_0	VAN
C	110 000	+ 19 800
B	65 000	+ 15 000
A	80 000	+ 8 000

Ce classement suggère l'adoption du projet C. cette décision serait ainsi fondée sur les rentabilités comparées des différents projets ; en réalité le choix est moins évident qu'il n'y paraît. Des considérations autres que la simple rentabilité, la position trésorerie notamment, pourraient plaider en faveur de l'un ou l'autre des investissements déclassés.

Mais surtout, ce choix n'est établi qu'à partir des gains nets, il ne prend pas en considération la mise initiale. Le projet C procure bien un gain net de 19 800 FF, mais l'investisseur doit débourser 110 000 FF pour y parvenir, alors que le projet B n'implique que 65 000 FF d'engagement, pour un gain net presque comparable (15 000 FF)

Le classement fondé sur la VAN ne suffit donc pas à l'adoption définitive des projets.

b) L'indice de profitabilité *(index of profitability)*

L'indice de profitabilité (IP) utilise les mêmes termes que la VAN, mais s'en différencie par l'agencement. C'est le quotient de la somme des valeurs actualisés des cash flows nets par la dépense initiale :

$$\boxed{IP = \sum_{i=1}^{n} CN_i (1+t)^{-i} / I_0}$$

Si l' IP est supérieur à l'unité, le projet doit être accepté, s'il est unique. Une valeur située en deçà de 1 entrainera son rejet.

A l'inverse de la VAN, le recours à l' IP permet de dresser un classement des projets concurrentiels qui intègre l'importance de la mise initiale ; **il exprime ainsi le nombre de francs (actuels) obtenu pour 1 franc de dépense initiale.**

L'application de l' IP, à l'exemple précédent fournit les indications suivantes :

Projets	IP
C	$(129800/110000)=1,18$
B	$(80000/65000)=1,23$
A	$(88800/80000)=1,10$

Pour un engagement initial identique de 1 franc, le projet B procure le gain actualisé le plus important : $1,23\,FF$.

Il convient donc de retenir le projet B au détriment de A et C.

c) Le taux interne de rentabilité *(internal rate of return)*

Le taux interne de rentabilité (TIR) est le taux d'actualisation (t_0) qui permet d'égaliser la somme des valeurs actuelles des cash flows nets au coût de l'investissement :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} CN_i (1+t_0)^{-i} = I_0}$$

<u>Application</u> : *En reprenant l'exemple du 3.2.a :*

$I_0 = 100000$ $\quad CN_1 = 30000$

$CN_2 = 40000$

$CN_3 = 60000$

Le TIR sera obtenu de la façon suivante :

$$100\,000 = 30\,000(1+t_0)^{-1} + 40\,000(1+t_0)^{-2} + 60\,000(1+t_0)^{-3}$$

- $Pour\ t = 12\% \rightarrow VAN = +1380,28$
- $Pour\ t = 13\% \rightarrow VAN = -542,45$

L'interpolation linéaire fournit la valeur de t_0 *:*

$$t_0 = 0,12 + [(1380,28-0)/(1380,28+542,45)]/(0,13-0,12)$$

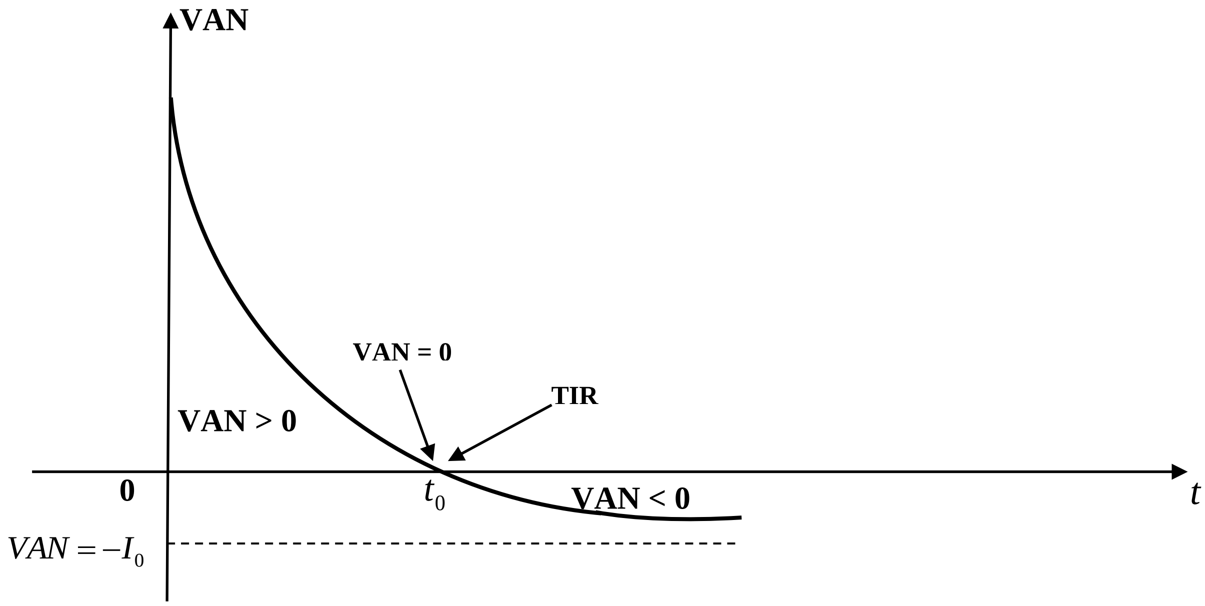
$$t_0 = 0,1272,\ \ soit\ \ 12,72\%.$$

d) La relation entre TIR et VAN

Le TIR est également considéré comme le taux qui annule la VAN :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} CN_i (1+t_0)^{-i} - I_0 = 0}$$

Graphiquement, cette relation se présente ainsi :



Le TIR est l'abscisse du point d'intersection de la courbe avec l'axe des taux, où sont figurés les taux d'actualisation. A ce point, la VAN est nulle.

Il également possible de déduire de cette relation une table de décision à la fois simple et homogène, si l'on s'en tient à un projet unique :

- Si le taux d'actualisation (t) retenu par l'investisseur pour évaluer son engagement est supérieur à t_0, la VAN qui en résulte est négative, entraînant ainsi le rejet du projet ;
- Lorsque le taux d'actualisation (t) retenu est inférieur à t_0, le projet se situe alors dans la zone où la VAN est positive. En conséquence, il doit être accepté.

Cette illustration des choix opérés à partir de la relation TIR-VAN, souligne la nécessité d'associer au TIR un paramètre externe. En effet, la seule connaissance de la valeur du TIR ne présente en soi qu'un intérêt limité. Il est donc indispensable de disposer d'une indication limite, afin d'orienter l'interprétation de ce TIR.

Cette limite sera représentée par le taux d'actualisation, celui-là même qui est utilisé pour déterminer la valeur actuelle nette. Le choix de ce taux d'actualisation apparaît donc déterminant, puisqu'il intervient à la fois dans le calcul de la VAN et dans l'interprétation du TIR.

e) L'origine du taux d'actualisation

Le fonctionnement d'une entreprise est fondé sur l'utilisation des fonds dont elle dispose. Pour assurer sa pérennité, elle doit générer une rentabilité au moins égale au coût des fonds qu'elle emploie.

Appliqué à l'opération marginale que constitue l'investissement, ce principe implique que cet acte produise une rentabilité au moins égale au coût du capital dont l'entreprise dispose. En deçà, l'opération contribuerait à appauvrir l'entreprise.

Le taux d'actualisation est donc le taux de rendement minimal exigé par la firme pour tout projet d'investissement. Ce taux ne saurait être inférieur au coût du capital. Celui qu'il convient de considérer est le coût moyen des ressources financières. Il serait imprudent d'exiger d'un investissement un taux de rentabilité égal au coût d'un financement marginal. Un tel comportement subordonnerait l'attrait d'un projet au coût plus ou moins considéré de son financement. Un projet accepté, pourrait ainsi être rejeté par la suite en raison de la disparition ou du renchérissement de la source de financement privilégié.

Ce taux d'actualisation défini, l'entreprise disposera alors d'un taux seuil (t^*) à partir duquel elle sera en mesure d'apprécier la signification du TIR ou encore, la grandeur déterminée par le calcul de la VAN.

Les termes de son choix seront identiques, si elle accepte un projet en raison :

- **De la supériorité du TIR sur le seuil d'acceptation que constitue t^* ;**
- **De la VAN positive obtenue en appliquant t^* comme taux d'actualisation.**

L'intérêt d'une telle homogénéité est indéniable. Il y a cependant des cas de figures où ces deux critères divergent dans la décision préconisée.

f) L'opposition entre VAN et TIR

L'utilisation conjointe de la VAN et du TIR est parfois à l'origine de décisions opposées, principalement dans le cas où l'application porte sur des projets multiples et concurrents. L'exemple suivant illustre ce propos :

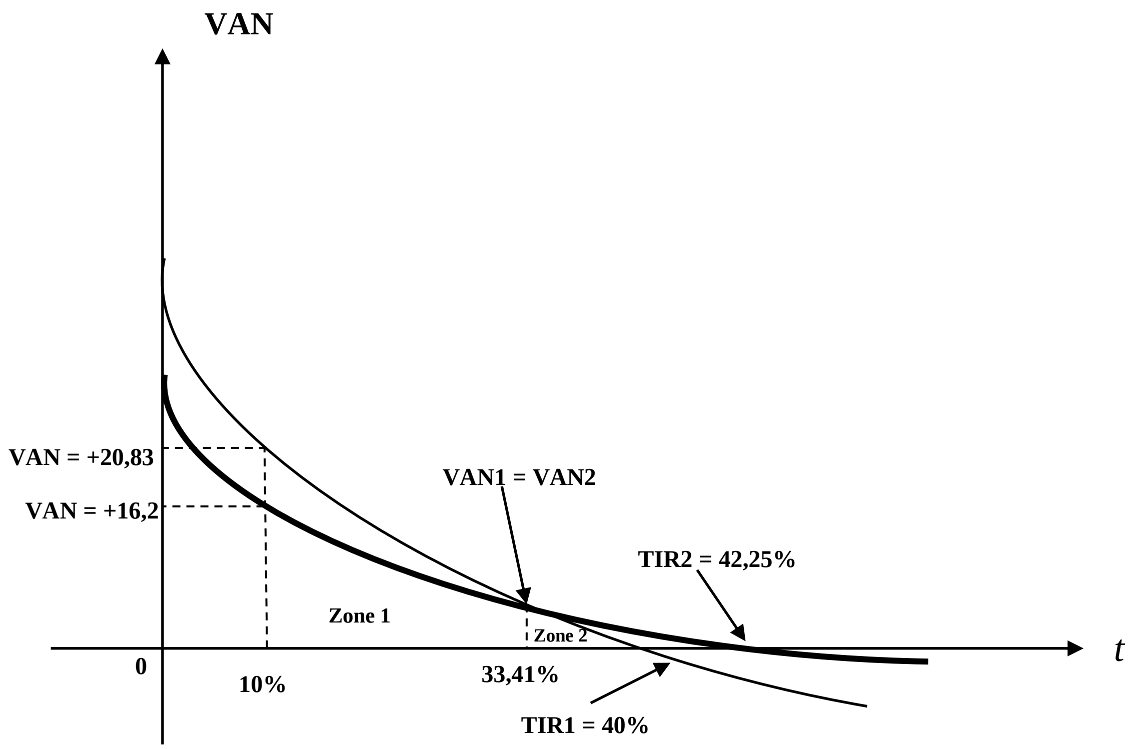
En milliers de francs

Projets	I_0	CN_1	CN_2
1	- 40	+ 16	+ 56
2	- 40	+ 40	+ 24

Avec un taux d'actualisation de 10 %, l'application des critères de VAN et TIR fournit les indications suivantes :

Projets	*VAN*	*TIR*
1	+ 20,83	40%
2	+ 16,20	42,25%

Le critère de VAN suggère le choix du projet 1, alors que celui du TIR préconise l'adoption du projet 2. Cette contradiction se traduit graphiquement par l'intersection des courbes de VAN des projets 1 et 2.



Le point d'intersection, situé à $t = 33{,}41\%$, est appelé « taux d'indifférence ». Cela signifie qu'à ce taux, il est indifférent d'opter pour l'un ou l'autre des deux projets, les VAN étant alors égales. Néanmoins, le TIR du projet 2 demeure supérieur à celui du projet 1.

Si le taux d'actualisation est inférieur au taux d'indifférence (zone 1), apparaît alors une contradiction : la VAN du projet 1 est supérieur à celle du projet 2 alors que le TIR de 2 est plus élevé que celui de 1. Dans le cas contraire (zone 2), la contradiction disparaît.

La lecture du graphique précédent nous livre pour partie la source de la contradiction entre VAN et TIR. Elle résulte de :

- **La structure des cash flows.** Le second projet à un retour plus rapide que le premier (40 contre 16). Cette relation s'inverse, et le cash flow du premier projet devient supérieur à celui du second. Cette inversion est à l'origine de l'intersection des courbes dans le graphique ;
- **L'effet amplificateur produit par l'hypothèse relative au taux implicite de réinvestissement des cash flows intercalaires.** Les critères actuariels sont implicitement fondés sur cette hypothèse, qui suppose que le cash flows intermédiaires sont réinvestis aux taux d'actualisation retenu (10%, dans l'illustration numérique précédente). Dans le cas du TIR, le mode de calcul conduit à assimiler ce TIR au taux d'actualisation ; ainsi plus les cash flows d'un projet sont précoces et conséquents, et plus le TIR sera important. Tel est le cas du second projet de l'exercice précédent. Son

premier cash flow (40) est valorisé à un taux de 42,25%, alors que le cash flow (plus modeste : 16) de l'autre investissement n'est reconduit qu'au taux de 40%.

Conclusion

L'intérêt majeur des critères actuariels est la prise en considération de la dimension temporelle. Bien que proches dans le principe, la VAN semble présenter des caractéristiques plus intéressantes que celles du TIR :

- **L'hypothèse de réinvestissement des flux intermédiaires à un taux unique (le taux d'actualisation) apparaît plausible ;**
- **Elle permet d'intégrer un paramètre spécifique à l'entreprise : la rentabilité attendue du projet.**

Le taux de réinvestissement des flux intercalaires est variable dans le cas du TIR, puisqu'il dépend des autres paramètres du projet. La prise en compte des spécificités de l'entreprise n'intervient qu'au stade de l'interprétation.

Il convient enfin de rappeler que l'usage de ces critères est fondé sur une prévision des cash flows futures. Or ces estimations sont par nature aléatoires. Sans avoir le même caractère, la détermination du coût global de financement n'en est pas pour le moins délicate.

En dépit de ces limites, l'analyse financière des projets d'investissement contribue efficacement à l'orientation des choix à opérer dans ce domaine.

CE QU'IL FAUT RETENIR

- Le cash flow net de l'année i :

$$CN_i = (R_i - D_i)(1-T) + A_i \cdot T$$

Ou :

$$CN_i = Résultat\,net + Dotations\,aux\,amortissements$$

- Les critères actuariels

Critères	Mode de calcul	Règle de décision
VAN	$\sum_{i=1}^{n} CN_i (1+t)^{-i} - I_0$	$VAN > 0$, projet accepté $VAN < 0$, projet rejeté
TIR	t_0 tel que : $\sum_{i=1}^{n} CN_i (1+t_0)^{-i} = I_0$	$t_0 > t^*$ (seuil), projet accepté $t_0 < t^*$ (seuil), projet rejeté
$I.P.$	$\sum_{i=1}^{n} CN_i (1+t)^{-i} / I_0$	$I.P. > 1$, projet accepté $I.P. < 1$, projet rejeté.

EXERCICES

Rappel : *Par convention, les investissements sont considérés comme réalisés en début de période, les recettes et les dépenses en fin de période.*

1 Une société envisage un investissement de 1 600 000 FF, réglé comptant, qui doit générer un cash flow net annuel de 180 000 FF, pendant 15 ans. Sachant que le taux d'actualisation est de 8% :

1- *Jugez de l'opportunité de l'investissement si la valeur de récupération au terme des 15 ans est nulle.*
2- *Même question que 1 avec une valeur de récupération (VR) de 250 000 FF.*

L'entreprise a la possibilité de revendre le matériel au terme de 5 ans. La vente serait réalisée à crédit sur 10 ans par versements annuels égaux de 195 000 FF.

3- *L'opération est-elle rentable ?*

2 Un projet d'investissement présente les caractéristiques suivantes :

-dépense initiale : 575 000 FF

Cash flows nets annuels : 109 000 FF

Durée de vie : 8 ans

1- *Ce projet doit-il être accepté au taux de 10% ?*
2- *Même question, au taux de 10,50% ?*
3- *Calculez par interpolation linéaire le taux interne de rentabilité du projet.*

2 Une société désire réaliser un investissement d'une durée de vie de 6 ans. Elle étudie plusieurs modalités de financement :

- Paiement au comptant de 500 000 FF ;
- Paiement de 300 000 FF au comptant, le solde étant réglé par 4 échéances annuelles de 70 000 FF, courant dès la fin de l'année d'acquisition ;
- Location d'un équipement équivalent pendant les 6 ans : le loyer annuel est de 135 000 FF et une caution de 155 000 FF, remboursée au terme de la location, est exigée.

Pour les deux premières hypothèses, les cash flows nets annuels générés par cet investissement seraient de 115 000 FF ; la valeur de revente au terme des 6 ans est estimée à 80 000 FF.

La location implique que l'entretien du matériel reste à la charge du propriétaire. Dans ce cas, l'investissement dégagerait un cash flow net annuel de 160 000 FF.
Sachant que le taux d'actualisation est de 10ù, quel mode de financement la société doit-elle choisir ?

4 Une entreprise envisage de réaliser un investissement destiné à servir pendant 12 ans. Son choix s'est orienté vers un équipement d'une valeur de 600 000 FF.
Ce matériel a une durée de vie normale de 6 ans et devrait, dans ce cas, être renouvelé au terme de cette durée.
Si le matériel est régulièrement perfectionné tous les ans, son obsolescence technique ne sera effective qu'au terme des 12 ans.
En raison d'une forte inflation anticipée, le taux d'actualisation est fixé à 12%.
Déterminez le montant annuel des dépenses de perfectionnement au-delà duquel il est préférable de renouveler l'équipement.

5 Une société de transport projette d'agrandir son parc automobile pour les 9 ans à venir. Deux possibilités sont envisagées :

- Acheter des véhicules VA_1 puis les échanger tous les 3 ans auprès d'un concessionnaire qui déduira du nouveau prix d'achat le montant auquel les anciens véhicules seront repris ;
- Acheter un autre type de véhicules VA_2 pour une durée de 9 ans, sachant que les frais d'entretien annuels représentent 10% de la valeur d'achat et que la valeur de revente est nulle.

Dans le premier cas, les véhicules sont rachetés à 50% de leur valeur d'achat par le concessionnaire. Au terme des 9 ans, les véhicules restant seront cédés aux mêmes conditions.
Le prix d'achat unitaire des véhicules VA_1, à la date de la décision initiale d'investissement, est de 50 000 FF. l'évolution du prix des véhicules neufs est de 5% l'an.
Sachant que le taux d'actualisation est de 10%, quel devrait être le prix d'achat du second type de véhicule VA_2, à la date de la décision initiale d'investissement, pour que les deux solutions soient équivalentes ?

6 Un investissement destiné à augmenter la productivité présente les caractéristiques suivantes :

- Dépense d'investissement : 800 000 FF au comptant ;
- Durée de vie : 8 ans ;
- Recettes annuelles supplémentaires : 500 000 FF les 4 premières années puis 400 000 FF pour les 4 dernières ;
- Dépenses annuelles de fonctionnement prévues : 220 000 FF ;
- Amortissement constant sur 8 ans.

Sachant que le taux d'imposition des bénéfices est 50% [3] et le taux d'actualisation 10% ;

1- *Jugez de l'opportunité d'un tel investissement ;*
2- *Déterminez le montant annuel maximum des dépenses de fonctionnement.*

7 Une société envisage deux investissements, mutuellement exclusifs, d'une durée de vie de 6 ans, dont les caractéristiques sont les suivantes :

- I_1 : dépense initiale de 700 000 FF, cash flows nets annuels de 200 000 FF ;
- I_2 : dépense annuelle de 255 000 FF, cash flows nets annuels de 100 000 FF.

Dans les deux cas, la valeur de revente peut être considérée comme nulle. Trois scénarios sont envisagés en fonction des projections commerciales :

Projections	Taux d'actualisation
Réalistes	8%
Ambitieuses	9%
Risquées	10%

1- *Déterminez pour chaque scénario le projet à retenir ;*
2- *Calculez par interpolation linéaire le taux pour lequel les deux projets sont équivalents.*

8 Une société désire accroître sa capacité de production. L'investissement envisagé présente les caractéristiques suivantes :

- Durée de vie : 5 ans ;
- Amortissement dégressif (coefficient 2) ;
- Productions prévues :

Années	Unités produites
1	50 000
2	60 000
3	70 000
4	70 000
5	60 000

[3] Le recours au taux ancien de 50 est exclusivement destiné à simplifier les calculs.

- Dépenses d'exploitations : 10 FF par unité produite ;
- Prix de vente unitaire : 25 FF, supposé constant pendant les 5 ans ;
- Taux d'actualisation : 0.10 ;

Deux formules de financement sont possibles :

- Paiement au comptant de 500 000 FF ;
- Contrat de crédit-bail[4] dont les termes du loyer sont de 140 000 FF par an.

1- *Sachant que le taux d'imposition est de 50%, déterminez la valeur résiduelle de rachat en fin de contrat de crédit-bail, VR^*, telle que les deux modes de financement procurent le même rendement actualisé.*

2- *La valeur résiduelle étant de 55 000 FF, l'entreprise opte pour l'achat au comptant. Déterminez alors le prix de vente unitaire minimum, pour que l'investissement soit rentable.*

---

[4] *Les différences contractuelles entre le location, la location avec option d'achat et le crédit-bail se résument comme suit :*

- *La location ne donne aucun droit de propriété, potentiel ou systématique, sur le matériel loué, la location peut, normalement, être suspendue à tout moment sans encourir de pénalités ;*
- *La location avec option d'achat (LOA) peut, comme la location, être suspendue à tout moment sans encourir de pénalités. De plus, cette formule présente l'avantage de pouvoir exercer un droit d'achat sur le matériel loué à la fin d'une période donnée de location et pour un montant pré-déterminé appelé valeur résiduelle, sans que cela constitue une obligation ;*
- *Le crédit-bail, ou leasing, est une formule plus contraignante que la LOA : le souscripteur est dans l'obligation de respecter la durée de location initialement prévue lors de la signature du contrat. En contrepartie, les loyers sont inférieurs à ceux dus en cas de LOA. Au terme du contrat, le locataire pourra exercer un droit d'achat de la même façon qu'en LOA.*