

# BASES ALGEBRES MATHEMATIQUES

2<sup>nde</sup> / 1<sup>ère</sup> / Tle

A-B-C-D-E-F-G

Plus de 50 NOTIONS

“Lire jusqu’à la fin  
t’évitera la honte en  
Tle”

N°	SYMBOLES ou EXPRESSIONS OU PROPRIETES COURAMMENT UTILISEES	Lecture et signification et exemple
1	$\forall$	Se lit et signifie : <i>quelque soit</i> ou <i>Pour tout</i> (la généralité)
2	$\exists$ $\nexists$	Se lit et signifie : Il existe (l'existence) Se lit et signifie : Il n'existe pas (l'inexistence)
3	$\in$ $\notin$	Se lit et signifie : <i>appartient à</i> Se lit et signifie : <i>n'appartient pas à</i>
4	$\approx$ $\simeq$	Presqu'égal (environ) ou asymptotiquement égal à
5	$\cong$	Approximativement égal (lorsqu'on fait une approximation)
6	$\ll$ ou $\lll$ $a \ll b$ ou $a \lll b$	Signifie Beaucoup plus petit que Se lit $a$ est largement inférieur à $b$

7	$\gg$ ou $\ggg$ $a \gg b$ ou $a \ggg b$	<p>Signifie Beaucoup plus grand que          Se lit <i>a est largement supérieur à b</i></p>
8	$\emptyset$	<p>Se lit : <i>ensemble vide</i> et signifie <i>neant ou rien ou aucune valeur ou impossible.</i>          NB : zéro est une valeur nul.</p>
9	$\equiv$  $a \equiv b$	<p>Se lit et signifie : <i>identique</i> : (parfaitement la même chose en principe, en valeur, en toute situation, égalité parfaite, vérifiée et sans ambiguïté)          Se lit <i>identique à b</i>. Ou <i>a est congru à b</i>. Signifie <i>a est aussi b</i>          Cela est un sens plus profond que le symbole = qui peut se faire sous certaines conditions préétablies d'où souvent l'ambiguïté)</p>
10	$\cup$ $A \cup B$  $\cap$  $A \cap B$	<p>Se lit "union" et signifie la réunion (l'assemblage de tout)          Se lit "Ensemble A union ensemble B : c'est l'ensemble de tous les éléments de A et de B mis ensemble sans répétition.          Se lit "inter" et signifie l'intersection (la similarité, l'élément commun à l'un et l'autre)          Se lit "Ensemble A inter ensemble B : c'est l'ensemble de tous les éléments communs à la fois de A et de B mis ensemble sans répétition.</p>
11	$\setminus$	Se lit "privé de". C'est le symbole barre oblique gauche
12	$\Rightarrow$ $a \Rightarrow b$	<p>Signifie "implique"          Se lit <i>a implique b</i>. (<i>b n'est valable ou n'est vrai que si a l'est : b est définie qu'à partir de a</i>)</p>
13	$\Leftrightarrow$  $a \Leftrightarrow b$	<p>Se lit : "<i>équivalent à</i>" et signifie l'équivalence ou double implication. (c'est à dire on doit faire un raisonnement en aller-retour).          Se lit <i>a équivalent à b</i> : se traduit par <i>a implique b puis b implique a</i>.          Ainsi : <math>a \Leftrightarrow b</math> se démontre en deux sens par : <math>a \Rightarrow b</math> puis <math>b \Rightarrow a</math></p>
14	/	Se lit "tel que" c'est le symbole barre oblique droite
15	$\mathbb{R}$  $x \in \mathbb{R}$  $\mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  $x \in \mathbb{R}^*$	<p>Se lit "grand R" et signifie ensemble des nombres réels : c'est l'association des nombres rationnels et des nombres irrationnels.  <math>x \in \mathbb{R}</math> se lit : <i>x appartient à R</i> ou bien <i>x est élément R</i>          Et signifie <i>x est un nombre réel.</i>  <math>\mathbb{R}^*</math> se lit "R étoile" ou "R privé de 0" et signifie tous les nombres réels sauf zéro  <math>x \in \mathbb{R}^*</math> signifie que <i>x est non nul : x ≠ 0</i></p>
16	$\mathbb{Q}$  $x \in \mathbb{Q}$	<p>Se lit "grand Q" et signifie ensemble des nombres rationnels (qui peuvent s'écrire sous forme de fraction irréductible, les décimales étant finies).  <math>x \in \mathbb{Q}</math> se lit <i>x appartient à Q</i> ou bien <i>x est élément Q</i>          Et signifie <i>x est un nombre rationnel.</i>          Ainsi : <math>x \in \mathbb{Q}</math> alors <math>\exists a, b \in \mathbb{Z}^* / x = \frac{a}{b}</math>, <math>\frac{a}{b}</math> étant irréductible.</p>
17	PGCD ( <i>a</i> ; <i>b</i> ) PGCD ( <i>a</i> ; <i>b</i> ) = 1	<p>Se lit : Plus grand commun diviseur à <i>a</i> et <i>b</i>.          Signifie que : les deux nombres <i>a</i> et <i>b</i> sont premiers entre eux. Ou bien la fraction <math>\frac{a}{b}</math> est irréductible.</p>
18	$a = 2k, k \in \mathbb{N} (k \in \mathbb{Z})$	Signifie que : " <i>a est un multiple de 2</i> . Ou bien <i>a est un nombre pair</i>

19	$b = 2k + 1, k \in \mathbb{N} (k \in \mathbb{Z})$	Signifie que "b n'est pas un multiple de 2. Ou bien b est un nombre impair
20	$a = 3k, k \in \mathbb{N} (k \in \mathbb{Z})$	Signifie que : "a est un multiple de 3. Par exemple : $39 = 3 \times 13$ . (3 fois quelque chose (le 13)).
21	$a = 4k, k \in \mathbb{N} (k \in \mathbb{Z})$	Signifie que : "a est un multiple de 4.
22	$a = 5k, k \in \mathbb{N} (k \in \mathbb{Z})$	Signifie que : "a est un multiple de 5.
23	Si on continuait :.... $a = 11k, k \in \mathbb{N} (k \in \mathbb{Z})$	Signifie que : "a est un multiple de 11.
24	PPCM (a; b)	Se lit plus petit commun multiple à a et b. (de tous les multiples de a et de tous les multiples de b : on retient seulement les multiples en commun et on choisit le plus petit.
25	Ranger en ordre croissant	Du plus petit au plus grand : Par exemple : $2 < 9 < 13 \dots$
26	Ranger en ordre décroissant	Du plus grand au plus petit : Par exemple : $13 > 9 > 2 \dots$
27	$\mapsto$ $x \mapsto f(x)$	Se lit : "associe" c'est la correspondance Se lit : x associe f(x)
28	$f \circ g$	Se lit f rond g. Signifie la composée de g par f. (Cela correspond f(g) : tous les x de f(x) sont remplacés par l'expression de g(x) étant données certaines conditions.
29	$\sum_{i=1}^n u_i$ Opérateur somme	Se lit : "grand sigma" et signifie la somme discrète. Correspond à la somme de tous les termes u d'indice i, i qui varie de 1 à n. Par exemple : $\sum_{i=0}^3 f_i = f_0 + f_1 + f_2 + f_3$
30	$\prod_{k=0}^n a_k$ Opérateur produit	Se lit : "grand pi" et signifie le produit. Correspond au produit de tous les termes u d'indice k, k qui varie de 0 à n entre eux. Par exemple : $\prod_{k=1}^3 f_k = f_1 \times f_2 \times f_3$
31	$\int_a^b f(x) dx$	Se lit : "intégrale allant de a à b de f(x) dx" et signifie la somme "continue". Pour une fonction continue sur l'intervalle [a; b], cela correspond en valeur absolue à la surface du plan délimitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites verticales passant par les abscisses a et b. (exprimée en unités d'aire).
32	$+\infty$ $-\infty$	Se lit " Plus l'infini" et désigne les très grands nombres positifs Se lit " Moins l'infini" et désigne les très grands nombres négatifs Ainsi : la droite achevée définie par l'intervalle $]-\infty; +\infty[$ correspond à l'ensemble des nombres réels : $]-\infty; +\infty[ = \mathbb{R}$
33	Propriété sur les multiple: si a est multiple de 5 alors $a^2$ est aussi	Un peu de raisonnement. Se traduit par : $\exists k \in \mathbb{N} / a = 5k$ alors $a^2 = 25k^2$ et donc si a est multiple de 5 alors $a^2$ l'est. Cela est valable pour $a^n$ (n entier naturel non nul).

	multiple de 5 et réciproquement.	De même dans $\mathbb{N}$ , si $b^2 = 5k$ (multiple de 5 alors $b$ aussi l'est forcément).
34	Raisonnement par récurrence	Etape 1 : vérification de la proposition au rang initial. Etape 2 : Vérification de l'hérédité : on suppose que la proposition est vrai à l'ordre $n$ puis on vérifie si elle est vrai à l'ordre $n + 1$ Etape 3 : Conclusion
35	$\sqrt{a}$ ou $\sqrt[2]{a}$  $\sqrt[3]{a}$  $\sqrt[n]{a}$	Se lit racine carré de $a$ (valable à condition que $a \geq 0$ ). $\sqrt{a}$ correspond à $a^{\frac{1}{2}}$ ou $a^{0,5}$ NB : Pour $a$ quelcoque : $\sqrt{a^2} =  a $ (avant tout éventuelle transformation) Se lit racine cubique de $a$ (valable à condition que $a \geq 0$ ). $\sqrt[3]{a}$ correspond à $a^{\frac{1}{3}}$ Se lit racine $n$ ième de $a$ (valable à condition que $a \geq 0$ ). $\sqrt[n]{a}$ correspond à $a^{\frac{1}{n}}$
36	$\frac{1}{a}$	Se lit Inverse de $a$ ou 1 sur $a$ . (Valable à condition que $a \neq 0$ ).
37	$e^x$ $\ln x$ $\log x$	Se lit exponentielle de $x$ . $e^0 = 1$ ; $e^1 = e$ ; $e^{-1} = \frac{1}{e}$ Se lit "logarithme népérien de $x$ . $\ln 1 = 0$ ; $\ln(e) = 1$ Se lit "logarithme décimal de $x$ . $\log 1 = 0$ ; $\log(10) = 1$
38	$\alpha$ ; $\beta$ ; $\gamma$ ; $\delta$ ; $\varepsilon$ ; $\zeta$ ; $\eta$ ; $\theta$ ; $\iota$ ; $\kappa$ ; $\lambda$ ; $\mu$ $\sigma$ ; $\rho$ ; $\pi$ ; $\omicron$ ; $\xi$ ; $\tau$ ; $\varphi$ ou $\phi$ ; $\chi$ ; $\psi$ ; $\omega$ ; $\nu$	Lettres minuscules de l'alphabet grec dans cet ordre : alpha ; bêta, gamma, delta ; epsilon ; Zêta ; Êta ; thêta ; iota ; kappa, lambda ; sigma ; rhô, pi, omicron ; xi ou ksi ; tau ; phi ; khi ou chi ; psi ; oméga ; upsilon
39	$\Gamma$ ; $\Delta$ ; $\Theta$ ; $\Upsilon$ ; $\Pi$ , $\Psi$ ; $\Phi$ ; $\Sigma$ ;	Lettres majuscules de l'alphabet grec dans cet ordre : Gamma ; delta; thêta ; upsilon ; pi ; psi ; phi ; sigma. Les autres majuscules étant pareilles à celles du français : par exemple : A alpha ; B bêta...
40	Démontre que $A = B$ .	On peut étant données les contraintes : Partir de $A$ pour trouver $B$ et conclure. Ou Partir de $B$ pour obtenir $A$ et conclure. Ou partir de $A$ et trouver $C$ , et utiliser aussi $B$ pour trouver $C$ et conclure.
41	Principe de la rédaction lors d'un raisonnement ou d'une démonstration mathématique :	Etape 1 : On a ou Je sais que (rappel des contraintes, de la formule à utiliser, des données pertinentes à utiliser). Par suite: (faire les manipulations nécessaires) D'autre part... (si le raisonnement fais appel à d'autres informations (généralement en géométrie) Enfin.. (Faire la synthèse et conclure)
42	4 règles simples pour réussir en mathématiques	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Aimer les mathématiques ou avoir l'esprit de passion</li> <li>- Organiser son temps de travail de sorte à toujours réviser son cours et s'exercer suffisamment.</li> <li>- Se documenter constamment (support physique comme numérique, internet)</li> <li>- Approcher ou s'entourer de bosseurs et de savants.</li> </ul>

43	<p>Raisonnement par l'absurde :</p> <p>Par exemple : Démontre par l'absurde que «P » est alpha</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- On suppose que c'est le contraire de P qui est alpha.</li> <li>- On traduit en mathématiques toutes les implications possibles relative à l'hypothèse de départ puis on montre qu'il y a une incohérence ou absurdité ou fausseté ou défaillance quelque part dans l'hypothèse de départ. (Ici intervient l'esprit critique car on discute, on tâtonne, on argumente au cas par cas).</li> <li>- On conclut que "le contraire de P" n'est pas alpha donc P est alpha.</li> </ul>
44	<p>Non-Existence d'un maximum ou d'un minimum sur un intervalle ouvert. (2<sup>nde</sup> S)</p>	<p>Par exemple 1: L'intervalle ]3; 5] n'admet pas de minimum mais admet un maximum qui est 5. Puisque 3 n'est pas élément de l'ensemble. En supposant qu'un minimum existe nommé <math>m</math>. Alors on a : <math>m \in ]3; 5]</math> et <math>3 &lt; m &lt; x</math>  Or : <math>3 &lt; \frac{3+m}{2} &lt; m &lt; x</math> et <math>\frac{3+m}{2} \in ]3; 5]</math> qui est donc aussi un minimum. Ce qui est absurde. Donc il n'existe pas de minimum, car un minimum, s'il existe, doit être unique.</p> <p>Par exemple 2: L'intervalle [1; 6[ n'admet pas de maximum mais admet un minimum qui est 1. Puisque 6 n'est pas élément de l'ensemble. En supposant qu'un maximum existe nommé <math>M</math>. Alors on a : <math>M \in [1; 6[</math> et <math>x &lt; M &lt; 6</math>  Or : <math>x &lt; M &lt; \frac{6+M}{2} &lt; 6</math> et <math>\frac{6+M}{2} \in [1; 6[</math> qui est donc aussi un maximum. Ce qui est absurde. Donc il n'existe pas de maximum, car un maximum, s'il existe, doit être unique.</p>
45	<p>Quelques exemples de comparaison et encadrement.</p> <p>On procède par un processus pas à pas en respectant les règles acquises depuis la classe de 3<sup>ème</sup>.</p> <p>NB :Les Inégalités des accroissements finis et celles de la moyennes n'ont pas été exploitées ici</p>	<p>Encadrons sur <math>[2; +\infty[</math> ; <math>f(x) = \frac{3-2\sin x}{1+x^2}</math> par deux fonctions à déterminer;  <math>g(x) = 5 + \frac{1}{x}</math> par deux nombres réels;  <math>h(x) = \sqrt{5+x^2}</math>, détermine le nombre réel <math>a</math> tel que <math>h(x) \geq a</math>.</p> <p>Pour <math>f(x) : x \in [2; +\infty[</math>, <math>-1 \leq \sin x \leq 1</math>  <math>-2 \times 1 \leq \sin x \leq -2 \times (-1)</math>  <math>-2 \leq \sin x \leq 2</math>  <math>3 - 2 \leq \sin x \leq 3 + 2</math>  <math>1 \leq \sin x \leq 5</math></p> <p>Or <math>x \in [2; +\infty[</math>, <math>x \geq 2</math> alors <math>x^2 \geq 4</math>.  <math>1 + x^2 \geq 1 + 4</math>  <math>1 + x^2 \geq 5</math></p> <p><math>\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{5}</math> et aussi positif.  Donc sans ambiguïté : <math>x \in [2; +\infty[</math>,  <math>\frac{1}{1+x^2} \times 1 \leq \frac{1}{1+x^2} \times (3 - 2\sin x) \leq \frac{1}{1+x^2} \times 5</math></p> <p>Donc : <math>x \in [2; +\infty[</math>,  <math>\frac{1}{1+x^2} \leq f(x) \leq \frac{5}{1+x^2}</math></p> <p>Pour <math>g(x) : x \in [2; +\infty[</math>, <math>x \geq 2</math> alors <math>\frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}</math>. De plus <math>\frac{1}{x} &gt; 0</math>  <math>5 + \frac{1}{x} \leq 5 + \frac{1}{2}</math></p> <p><math>g(x) \leq \frac{11}{2}</math></p> <p>Donc :</p>

		$0 < g(x) \leq \frac{11}{2}$ <p>On pouvait aussi écrire : <math>x \in [2 ; +\infty[</math>, <math> g(x)  \leq \frac{11}{2}</math></p> <p>Pour <math>g(x) : x \in [2 ; +\infty[</math>, <math>x \geq 2</math> alors <math>x^2 \geq 2^2</math></p> $x^2 \geq 4$ $5 + x^2 \geq 5 + 4$ $5 + x^2 \geq 9$ $\sqrt{5 + x^2} \geq \sqrt{9}$ $h(x) \geq 3.$
46	Expressions conjuguées et amplificateur trigonométrique	$\sqrt{a}$ est son propre conjugué $\sqrt{a} - b$ a pour conjugué $\sqrt{a} + b$ et inversement $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ a pour conjugué $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ . <b>NB :</b> La transformation conjuguée s'applique au numérateur comme aussi au dénominateur. <b>Pour amplifier par exemple :</b> $f(x) = \frac{\cos x - 1}{x}$ on a : $f(x) = \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)}$
47	Notation factorielle $n!$	Se lit "factorielle $n$ ." <b>Par exemple :</b> $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 180$ . $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ ; $0! = 1$ ; $1! = 1$ ; $2! = 2 \times 1 = 2$ .
48	Règles de priorité :	<b>Règle 1 :</b> les calculs entre parenthèses sont prioritaires <b>Règles 2 :</b> En l'absence des parenthèses : on calcule d'abord : les puissances, ensuite le multiplication ou division, ensuite la somme (addition ou soustraction). <b>NB :</b> n'oublier pas de simplifier et rendre irréductible les fractions.
49	Démonstration par contre-exemple	Il s'agit de trouver un exemple concret (en vérifiant) qui fait exception à la règle et conclure. Car en mathématique, une propriété établie comme vraie doit être vraie pour tous les cas dans la configuration considérée.
50	Traiter une situation complexe	-Bien lire l'énoncé et déceler : les données pertinentes, la circonstance et les tâches. Rédiger en introduction - développement et conclusion En introduction : identifier la leçon et les outils mathématiques à utiliser puis annoncer son plan en maximum 5 tirets. (Utilise le pronom "je" et surtout pas de calculs ni formule ici) Développement : Effectuer les raisonnements, calculs et démonstration de chaque tiret mentionné en introduction. (Alinéa à chaque étape) (Saut d'une ligne) Conclusion : donner les réponses claires et succinctes aux préoccupations ou tâches (esprit de jugeote, comparaison, recommandation...) <b>NB :</b> ta rédaction et ton vocabulaire est propre à toi. Pas de copie conforme !

<p>51</p>	<p><b>NOTION DE TRIVIALITE</b> Et ensemble de définition ou contraintes sur les équations.</p>	<p>Lorsqu'une proposition est vraie dans tous les cas, on dit qu'elle est triviale (toujours vraie). Par exemple : <math>f(x) = \frac{5+x}{1+x^2}</math>. Déterminons l'ensemble de définition. <math display="block">x \in D_f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}/\{1+x^2 \neq 0\}</math> <math>x^2 \neq -1</math> ou <math>1+x^2 \neq 0</math> car <math>x^2 \geq 0</math> (Triviale !) car le carré d'un nombre est toujours positif. Donc <math>D_f = \mathbb{R}</math>. NB : les contraintes existent pour la racine carrée, les fractions rationnelles et les quotients de fonctions, les logarithmes, les problèmes de vie courantes à valeurs positives recommandées et les composées de fonctions. Pour résoudre une équation, il convient de toujours vérifier et mentionner les contraintes ou ensembles de validité.</p>
<p>52</p>	<p><b>EXEMPLE DE CHANGEMENT DE VARIABLES</b> ou <b>CHANGEMENT D'ECRITURE</b> et <b>PRINCIPES</b></p>	<p>Utiles pour résoudre les équations, le calcul des limites et la modélisation et représentation de fonctions. Exemple 1 : <math>ax^4 + bx^2 + c = 0</math>. Poser : <math>X = x^2</math> ; alors <math>X \geq 0</math> et <math>x = \sqrt{X}</math> ou <math>x = -\sqrt{X}</math>. On résout en X à partir de <math>aX^2 + bX + c = 0</math> puis on déduit les valeurs de x. Exemple 2 : <math>ax + b\sqrt{x} + c = 0</math>. Poser : <math>X = \sqrt{x}</math> ; alors <math>X \geq 0</math> et <math>x = X^2</math>. On résout en X à partir de <math>aX^2 + bX + c = 0</math> puis on déduit les valeurs de x. Exemple 3 : <math>\frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + c = 0</math>. Poser : <math>X = \frac{1}{x}</math> ; alors <math>X \neq 0</math> et <math>x = \frac{1}{X}</math>. On résout en X à partir de <math>aX^2 + bX + c = 0</math> puis on déduit les valeurs de x. Exemple 3 : Représente graphiquement : <math>x \mapsto \frac{1}{x-2}</math>. Poser <math>X = x - 2</math> Avec <math>x \neq 2</math> donc <math>X \neq 0</math>. Faire un changement de repère. Tracer <math>X \mapsto \frac{1}{X}</math> suivant un repère bien défini. Exemple 4 : <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{5x}</math>. Se rappelant de : <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1</math>, on a : Posons <math>X = 4x</math> alors <math>x = \frac{X}{4}</math>. (<math>4x = 4 \times \frac{X}{4} = X</math> ; et <math>5x = 5 \times \frac{X}{4} = \frac{5X}{4}</math>) Lorsque <math>x \mapsto 0</math> alors <math>X \mapsto 4 \times 0 = 0</math> Donc on réécrit : <math>\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin X}{\frac{5X}{4}} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin X}{X} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{5}</math> On conclut : Donc : <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{5x} = \frac{4}{5}</math></p>
<p>53</p>	<p><b>TECHNIQUES DE REDACTION DE L'ENSEMBLE DE DEFINITION</b></p>	<p><math>f</math> est une fonction donnée par une formule : CAS 1 : la plus simpliste <math display="block">x \in D_f \Leftrightarrow \text{contraintes à résoudre}</math> Puis conclure : Donc <math>D_f = \dots</math> CAS 2 : la plus bavarde : <math>f(x)</math> existe si et seulement si <i>contraintes à résoudre</i> Puis conclure : Donc <math>D_f = \dots</math> CAS 3 : la plus classe ou technique (système international) <math display="block">D_f = \{\text{ensemble de référence, contraintes à résoudre}\}</math></p>

		<p>Ou  <math>D_f = \{\text{ensemble de référence tel que contraintes à résoudre}\}</math>  ou  <math>D_f = \{\text{ensemble de référence} / \text{contraintes à résoudre}\}</math>  La barre oblique droite / signifie tel que. La barre oblique gauche signifie privé de \</p> <p>Puis conclure : Donc <math>D_f = \dots</math>  Par exemple : Pour <math>f(x) = \frac{3x+5}{x^2-1}</math> <math>D_f = \{x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 \neq 0\}</math></p> <p style="text-align: center;"><b>NOTES TRES IMPORTANTES</b></p> <p>NB 1 : On ne résout jamais une équation avec le symbole <math>\neq</math> mais plutôt poser avec l'égalité puis conclure avec les différences.  NB 2 : En général, toute inégalité traduit une étude de signe, donc un tableau de signe s'impose s'il n'y a pas de trivialité : les produits, les quotients, les fonctions de degrés 2 et supérieurs à 2 exigent un tableau de signe après avoir trouver les zéros relatifs à chaque termes.  NB 3 : On peut cumuler plusieurs contraintes. C'est l'intersection de ces contraintes qui détermine l'ensemble de définition  NB 4 : Pour les fonctions définies par raccordement ou par intervalles, l'ensemble de définition est la réunion de chacun des intervalle associées à chacune de sous fonctions.</p>
54	ASTUCE DETERMINATION DE $D_f$ au cas par cas.	<p>Cas 1 : Polynômes (n'importe lequel) et polynômes contenant la valeur absolue.  <math>D_f = \mathbb{R}</math>. (la valeur absolue ne doit pas t'effrayer ; aussi un produit de polynôme ne doit pas t'embêter)</p> <p>Cas 2 : <math>f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}</math>  La contrainte est <math>cx + d \neq 0</math>.  Poser <math>cx + d = 0</math>; résoudre et obtenir <math>x = k</math> et conclure <math>D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\}</math> ou <math>D_f = ] - \infty; k[ \cup ]k; +\infty[</math>.</p> <p>Cas 3 : <math>f(x) = \frac{cx+d}{ax^2+bx+c}</math>  La contrainte est <math>ax^2 + bx + c \neq 0</math>.  Poser <math>ax^2 + bx + c = 0</math>; résoudre et obtenir :  <math>x = k</math> et conclure <math>D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\}</math> ou <math>D_f = ] - \infty; k[ \cup ]k; +\infty[</math>.  Ou obtenir <math>x = k</math> ou <math>x = p</math> et conclure <math>D_f = \mathbb{R} \setminus \{k; p\}</math> ou <math>D_f = ] - \infty; k[ \cup ]k; p[ \cup ]p; +\infty[</math>. (si <math>k &lt; p</math>).  Ou ne pas obtenir de valeur de <math>x</math> variables. Et conclure <math>D_f = \mathbb{R}</math>.</p> <p>Cas 4 : <math>f(x) = \sqrt{ax + b}</math>  La contrainte est : <math>ax + b \geq 0</math>.  En tant normal : poser <math>ax + b = 0</math> et obtenir <math>x = k</math>.  Dresser un tableau de signe et choisir l'intervalle où le signe concorde avec l'inégalité. En général on obtient selon le cas :  <math>D_f = ] - \infty; k[</math> ou bien <math>D_f = [k; +\infty[</math>.  Pour ceux qui choisissent la résolution directe de l'inégalité, attention au changement de sens.</p>

**Cas 5 :**  $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$

La contrainte est :  $ax^2 + bx + c \geq 0$ .

poser  $ax^2 + bx + c = 0$  et obtenir  $x = k$  ou  $x = p$

Dresser un tableau de signe et choisir l'intervalle où le signe concorde avec l'inégalité. En général on obtient selon le cas :

Pour deux valeur de  $x$  :

$$D_f = [k; p] \quad \text{ou bien} \quad D_f = ] - \infty; k] \cup [p; +\infty[. \quad (\text{si } k < p)$$

Pour une valeur de  $x$  : (alors en général  $ax^2 + bx + c$  est positif)

$$D_f = \mathbb{R}$$

Pour aucune valeur de  $x$ . (alors en général  $ax^2 + bx + c$  est positif)

$$D_f = \mathbb{R}$$

**Cas 6 :**  $f(x) = cx + d + \sqrt{ax + b}$  ou  $f(x) = cx^2 + dx + t + \sqrt{ax + b}$

La contrainte est :  $ax + b \geq 0$ . Et voir cas 4. Le polynôme  $cx + d$  ou  $cx^2 + dx + t$  étant définie sur  $\mathbb{R}$ , lui n'a pas de contraintes.

**Cas 7 :**  $f(x) = px + d + \sqrt{ax^2 + bx + c}$  ou  $f(x) = px^2 + dx + t + \sqrt{ax^2 + bx + c}$

La contrainte est :  $ax^2 + bx + c \geq 0$ . Et voir cas 5. Le polynôme  $cx + d$  ou  $cx^2 + dx + t$  étant définie sur  $\mathbb{R}$ , lui n'a pas de contraintes.

**Cas 8 :**  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} + \frac{kx+f}{mx+p}$

Il y a deux contraintes :  $cx + d \neq 0$  et  $mx + p \neq 0$ . Suivre le cas 2.

Et conclure : On obtient en général :  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{k; p\}$ .

**Cas 9 :**  $f(x) = \ln(ax + b)$

La contrainte est :  $ax + b > 0$ . Résoudre puis conclure. Les bornes des intervalles sont toutes ouvertes.

**Cas 10 :**  $f(x) = \ln(ax^2 + bx + c)$

La contrainte est :  $ax^2 + bx + c > 0$ . Résoudre puis conclure. Les bornes des intervalles sont toutes ouvertes. Ou  $\mathbb{R}$  selon le cas, lorsque le discriminant est négatif et a positif.

**CAS 11 :**  $f(x) = \sqrt{|ax + b|}$

On a :  $D_f = \mathbb{R}$  car  $|ax + b|$  est toujours positive du fait de la valeur absolue.

**Cas 12 :**  $f(x) = \sqrt{|ax^2 + bx + c|}$

On a :  $D_f = \mathbb{R}$  car  $|ax^2 + bx + c|$  est toujours positive du fait de la valeur absolue.

**Cas 13 :**  $f(x) = \frac{cx+d}{\sqrt{ax+b}}$

La contrainte est :  $ax + b > 0$ . Résoudre puis conclure.

Cette contrainte est la réunion de deux contraintes :  $ax + b \geq 0$

Et  $ax + b \neq 0$ .

**Cas 14 :**  $f(x) = \frac{cx+d}{\sqrt{|ax+b|}}$

La contrainte est  $ax + b \neq 0$ . Résoudre puis conclure.

**Cas 15 :**  $f(x) = \ln |ax + b|$

La contrainte est  $ax + b \neq 0$ . Résoudre puis conclure.

**Cas 16 :**  $(x) = \ln |ax^2 + bx + c|$

	<p>La contrainte est <math>ax^2 + bx + c \neq 0</math>. Résoudre puis conclure.</p> <p>Cas 17 : <math>f(x) = \frac{cx+d}{mx+p+\sqrt{ax+b}}</math></p> <p>Les contraintes sont : <math>ax + b \geq 0</math> et <math>mx + p + \sqrt{ax + b} \neq 0</math> (cela amène à la résolution d'équations irrationnelles 1ere S, c'est lourd...)</p> <p>Résoudre et conclure en déterminant les intersections.</p> <p>Cas 18 : Association de plusieurs types de fonctions. Principe : déterminer toutes les contraintes possibles, les résoudre convenablement et conclure.</p> <p>Cas 19 : <math>f(x) = \begin{cases} g(x) \text{ si } x \in K \\ h(x) \text{ si } x \in Q \\ j(x) \text{ si } x \in T \end{cases}</math> (fonction définie par intervalle ou par raccordement)</p> <p>On a : <math>D_f = K \cup Q \cup T</math> (qu'on peut évident réduire)</p>
--	--

Elaboré par M. DJAHASHIKAN (+225 0709521305/ 0506448812)

### BONUS : Démonstrations

#### 1) Comment démontrer que $1/3$ n'est pas un nombre décimal :

**Rappel** : un nombre décimal peut se mettre sous la forme  $\frac{a}{10^n}$  avec  $a \in \mathbb{Z}$  et  $n \in \mathbb{N}$ .

« Raisonner par l'absurde en supposant que  $1/3$  est décimal.

Ce raisonnement amènera une contradiction. »

Supposons que  $\frac{1}{3}$  est un nombre décimal

Il existe alors 2 nombres entiers naturels **a** et **n** tel que  $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$

D' où  $\frac{10^n}{3} = a$

**a** étant un entier naturel, on en déduit que  $10^n$  est divisible par 3.

« Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3 »

Or la somme des chiffres de  $10^n$  est **1**, donc  $10^n$  n'est pas divisible par 3.

D' où l'hypothèse de départ «  $1/3$  est un nombre décimal » nous amène à une contradiction.

On en déduit qu'elle est fautive et donc  $1/3$  n'est pas un nombre décimal.

## 2) Comment démontrer que $1/7$ n'est pas un nombre décimal :

$$a \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N}. \text{ on a : } \frac{1}{7} = \frac{a}{10^n} \text{ d'où } \frac{10^n}{7} = a$$

$a$  étant un entier naturel, on en déduit que  $10^n$  est divisible par 7.

La décomposition de  $10^n$  en facteurs premiers est  $(2 \times 5)^n$ .

$(2 \times 5)^n = 2^n \times 5^n$  montre que  $10^n$  n'est pas divisible par 7 qui est premier.

« On peut utiliser cette méthode pour démontrer que tout inverse premier (autre que 2 et 5) n'est pas décimal. »

Donc l'hypothèse de départ «  $1/7$  est un nombre décimal » nous amène à une contradiction.

On en déduit qu'elle est fautive et donc  $1/7$  n'est pas un nombre décimal.

## 3) Comment démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel :

Rappel : Un rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'un quotient de 2 nombres entiers.

Il faut raisonner par l'absurde

Supposons que  $\sqrt{2}$  est un nombre rationnel.

Il existe alors 2 nombres entiers naturels non nuls  $a$  et  $b$  tel que

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

On simplifie cette fraction pour la rendre irréductible, c'est-à-dire que  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux

$$\text{On a donc } \sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

$$\sqrt{2} b = a$$

$$2b^2 = a^2 \quad (\text{équation 1})$$

On en déduit de cette dernière égalité que  $a^2$  est pair

(puisque  $a^2$  est égal au double de  $b^2$ )

Donc que  $a$  est également pair.

Il existe donc un entier naturel  $k$  tel que  $a = 2k$

Si on remplace dans l'équation 1 on obtient :

$$2b^2 = (2k)^2 \text{ d'où}$$

$$2b^2 = 4k^2 \text{ soit}$$

$$b^2 = 2k^2$$

On en déduit de cette dernière égalité que  $b^2$  est pair et donc que  $b$  est également pair.

Alors  $a$  et  $b$  sont donc tous les 2 pairs, ils ne sont pas premiers entre eux car divisible par 2, ce qui contredit l'hypothèse de départ, c'est-à-dire qu'ils sont premiers entre eux.

Donc  $\sqrt{2}$  n'est pas un nombre rationnel.